# 7. naloga: Newtonov zakon

Gibanje masne točke v polju sil se opiše z diferencialno enačbo drugega reda

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F,$$

če se omejimo na gibanje vzdolž ene same koordinate $x$. Enačba je seveda enakovredna sistemu enačb prvega reda

$$m \frac{dx}{dt} = p \;, \qquad \frac{dp}{dt} = F.$$

Seveda morajo biti na voljo tudi ustrezni začetni pogoji, tipično $x(t=0) = x_0$ in $dx/dt = v(t=0) = v_0$. Splošnejše gre tu za sistem diferencialnih enačb drugega reda:

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f(x, y, y', y'', ...),$$

ki ga lahko prevedemo na sistem enačb prvega reda z uvedbo novih spremenljivk v slogu gibalne količine pri Netwonovi enačbi ($y' = v, y'' = z, ...$).

Z nekaj truda se da eksplicitno dokazati, mi pa lahko privzamemo, da so metode za reševanje enačb hoda (Runge-Kutta 4. reda, prediktor-korektor... ) neposredno uporabne za reševanje takšnih sistemov enačb in torej aplikabilne v poljubno dimenzijah, kar naj bi v principu zadovoljilo večino naših zahtev.

Obstaja še posebna kategorija tako imenovanih *simplektičnih* metod, za enačbe, kjer je $f$ le funkcija koordinat, $f(y)$, ki (približno) ohranjajo tudi Hamiltonian, torej energijo sistema. Najbolj znana metoda je Verlet/Störmer/Encke metoda, ki je globalno natančna do drugega reda in ki točno ohranja tudi vrtilno količino sistema (če je ta v danem problemu smiselna). Rešujemo torej za vsak diskretni korak $n$ velikosti $h$, $x_n = x_0 + n \cdot h$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

in pri diskretizaciji dobimo recept za korak $y_n$ in $v_n = y'_n$:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \cdot v_n + \frac{h^2}{2} \cdot f(y_n) \\ v_{n+1} &= v_n + \frac{h}{2} \cdot \left[ f(y_n) + f(y_{n+1}) \right]. \end{aligned}$$

V drugačnem zapisuje je metoda poznana tudi kot metoda ”Sredniščne razlike” (Central Difference Method, CDM), če nas hitrost ne zanima:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 \cdot f(y_n),$$

kjer prvo točko $y_1$ izračunamo po originalni shemi. Metodo CDM lahko uporabljamo tudi za primere, ko je f tudi funkcija ’časa’ x, f(x,y), le da tu simplektičnost ni zagotovljena (in tudi verjetno ne relevantna). Za simplektične metode višjih redov je na voljo na primer Forest-Ruth metoda ali Position Extended Forest-Ruth Like (PEFRL) metoda, ki sta obe globalno četrtega reda in enostavni za implementacijo.

*Naloga*:

- Čim več metod uporabi za izračun preprostega matematičnega nihala $d^2x/dt^2 = -\sin x$ z začetnim pogojem $x(0) = 1$, $v(0) = 0$. Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in ugotovi, koliko se amplitude nihajev sistematično kvarijo. Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš Hamiltonian, t.j. energijo $E = 1 - \cos x + \frac{1}{2}(dx/dt)^2$. Dodatno lahko tudi sprogramiraš eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe.

- Uporabi numerične sheme za račun poševnega meta ob prisotnosti dušenja. Poišči kot, pri katerem je domet maksimalen!