9. naloga: Začetni problem PDE — diferenčna metoda

Diferenčne metode za aproksimativno reševanje parcialnih diferencialnih enačb so široko uporabne, saj niso omejene na preproste geometrije in linearne robne pogoje. Pri aproksimaciji odvodov s končnimi diferencami se običajno zadovoljimo z najnižjim možnim redom, formule višjega reda so zelo rade nestabilne. Tu bomo delovanje diferenčnih metod preskusili na difuzijski in valovni enačbi.

Temperaturno polje v homogeni neskončni plasti s končno debelino a (enodimenzionalni problem) je podano z enačbo

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c}\,, \qquad 0 < x < a, \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}.$$

z začetno temperaturno sliko $T(x, t=0) = G(x)$. Difuzijsko enačbo najpreprosteje aproksimiramo z

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = D \cdot \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} + Q, \tag{1}$$

kjer štejemo z indeksom i časovne sloje v razmikih $\Delta t = k$, z indeksom j pa označimo krajevne točke, $0 \le j \le N$ v enem sloju. Ob času $t = 0$ je z začetnim pogojem podan prvi sloj, $i = 0$, iz njega izračunamo drugi sloj, in tako naprej. Enačba (1) velja za vse notranje točke, obe robni točki pa določata robna pogoja. Ta eksplicitna shema je preprosto izvedljiva in stabilna za $p = Dk/h^2 \le 1/2$, ni pa posebno točna, saj je v časovnem odvodu le prvega reda. Nekoliko točnejša postane za $p = 1/6$, vendar napredujemo pri tem koraku zelo počasi, saj predifundira rešitev šele v $6N^2$ korakih od enega konca krajevnega intervala do drugega.

Boljša je *Crank-Nicholsonova shema*, ki je drugega reda v času: časovno diferenco na levi strani enačbe (1) izrazimo z aritmetično sredino krajevnih diferenc v sloju i in sloju $i+1$. Novih vrednosti v sloju $i+1$ ne dobimo eksplicitno, pač pa kot rešitve tridiagonalnega sistema enačb. Ker je časovna zahtevnost takega sistema le $\sim N$, se z računom ne zamudimo dosti dlje, stabilnost pa je zagotovljena za poljubno velik korak. Ker rešujemo enačbo s konstantnimi koeficienti, je tudi matrika sistema vedno ista, spreminjajo se le desne strani:

$$(-pu_{j+1} + (2p+2)u_j - pu_{j-1})_{i+1} = (pu_{j+1} - (2p-2)u_j + pu_{j-1})_i + 2kQ.$$

Nihanje strune opisuje enačba

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < a,$$

kjer sta predpisana začetni odmik $z(x, t=0) = f(x)$ in začetna hitrost $\partial z/\partial t|_{t=0} = g(x)$. Za valovno enačbo obstaja stabilna eksplicitna metoda drugega reda v času. Dobimo jo, če v enačbi (1) zapišemo časovni operator na levi strani kot

$$\frac{(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j})}{k^2}.$$

Vrednosti na časovnem sloju $i + 1$ izrazimo s slojema i in $i - 1$. Začetna sloja dobimo iz dveh začetnih pogojev: za funkcijo in za njen časovni odvod. V posebnem primeru, ko so začetne hitrosti povsod enake 0, morata biti sloja $i = 1$ in $i = -1$ enaka in velja

$$u_{2,j} = u_{1,j} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{kc}{h}\right)^2 \cdot (u_{1,j+1} - \ldots).$$

Metoda je stabilna za $kc/h \leq 1$, kar pomeni, da zadošča $\sim N$ korakov za pot vala od enega konca intervala do drugega. Večji korak omogočajo implicitne metode, vendar z njimi ne moremo pridobiti dosti.

Naloga: Zasledovali bomo časovni razvoj dveh problemov z robnimi pogoji I. vrste.

1. Poišči temperaturni profil plasti, ki ima v začetku povsod temperaturo okolice, le med $0.2a$ in $0.4a$ je segreta na T_0. Nariši $T(x,t)$ ob $Dt/a^2 = 0$ (koraki 0.3) 3!

2. Poišči obliko strune, ki ima v začetku trikotno obliko z vrhom pri $x = 0.4a$, za čase $\omega_1 t/\pi = 0$ (0.2) 2! Začetna hitrost naj bo povsod 0.