EKSPERIMENTALNE METODE FIZIKE JEDRA IN OSNOVNIH DELCEV

Obdelava signalov

Marko Zavrtanik

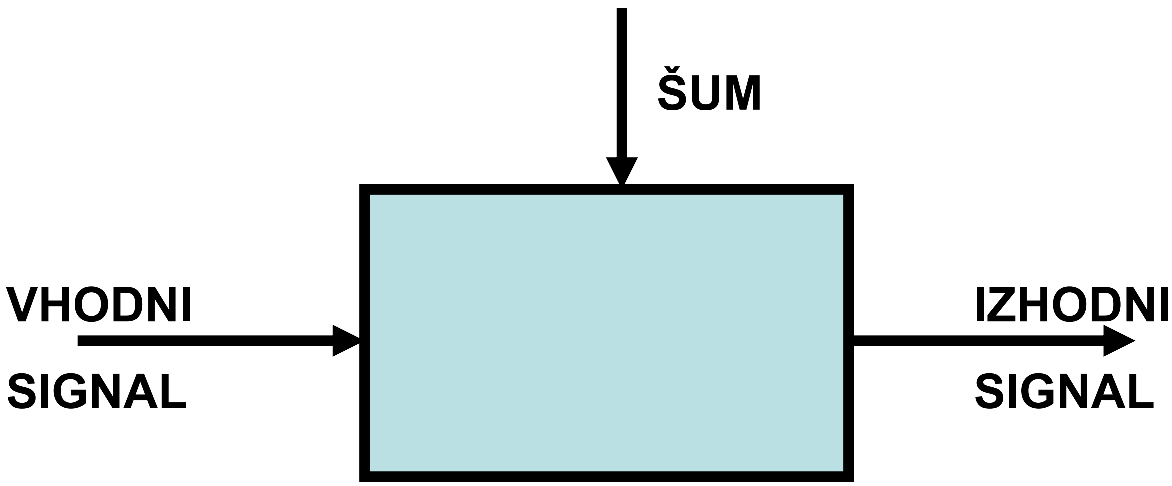
http://www-f9.ijs.si/~zavrtani/signali/

1. **UVOD**
    - Izražanje signalov z elementarnimi funkcijami
    - Razsežnost signala
2. **VHOD**
    - Kategorizacija signalov
3. **PRENOS**
    - Prenos determinističnih signalov
    - Prenos stohastičnih signalov
4. **IZHOD**
    - S/N
    - Optimalni procesor

OBDELAVA SIGNALOV

- Metode zasnovane za izražanje časovnih funkcij z vrstami
- Teorija naključnih funkcij

SISTEM



Sistemi so v splošnem kompleksni in nelinearni.

Poseben primer: **LINEARNI SISTEMI**

LINEARNI SISTEM

- Aditivnost
- Proporcionalnost

$$vhod \rightarrow izhod$$

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$vhod \rightarrow x(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

$$izhod \rightarrow y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

- Koncentriranost

(fizične izmere $\rightarrow$ 0)

IZRAŽANJE SIGNALOV Z ELEMENTARNIMI FUNKCIJAMI

Signal želimo izraziti s funkcijami, ki imajo točno določene vrednosti in lastnosti.

NAJPOGOSTEJE: Linearna kombinacija zaporedja temeljnih časovnih funkcij.

$$\phi = \left\{ \phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \ldots\ldots, \phi_N(t) \right\}$$

N je lahko tudi ∞

Funkcijo x(t) izrazimo kot približek:

$$x(t) \approx x'(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \ldots\ldots + C_N\phi_N(t)$$

PROBLEMI:

- Izbira najprimernejših temeljnih funkcij!
- Izbira najprimernejših koeficientov!

Ta dva problema v splošnem nista rešena. Obstaja le vrsta rešitev za določene funkcije.

Pri iskanju rešitev nam pomagajo **ZAŽELJENE LASTNOSTI**

OSNOVNA ZAŽELJENA LASTNOST

NEODVISNOST KOEFICIENTOV

Posamezni koeficient je določljiv tudi če ostalih ne poznamo.

ALI

Če v vrsto dodamo posamezen člen nam ostalih koeficientov ni treba spreminjati.

Neodvisnost koeficientov dosežemo če je zaporedje **ortogonalno.**

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_k(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{ko velja } k \neq n \\ k_n & \text{ko velja } k = n \end{cases}$$

Če je $k_n = 1$ je zaporedje **ortonormalno.**

Uvod

KAKO DOLOČIMO KOEFICIENTE?

Z minimizacijo srednjega kvadratičnega pogreška $\overline{\varepsilon}^2$ med funkcijo $x(t)$ in približkom $x'(t)$!

$$\overline{\varepsilon}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t) - x'(t)\right]^2 dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2}\left[x(t) - \sum_{n=0}^{N} C_n \phi_n(t)\right]^2 dt$$

$$\text{iz} \quad \frac{\delta \overline{\varepsilon}^2}{\delta C_j} = 0 \quad \text{sledi}$$

$$\mathrm{C_j} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_j(t)\,dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_j^2(t)\,dt} = \frac{1}{k_j}\int_{t_1}^{t_2} x(t)\phi_j(t)\,dt$$

Uvod

Z zaporedjem ortogonalnih funkcij lahko na intervalu od t_1 do t_2 izrazimo poljubno funkcijo x(t) v obliki:

$$x(t) \approx x'(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \ldots\ldots. + C_N\phi_N(t)$$

Če gre $N \to \infty$ gre $\overline{\varepsilon^2} \to 0$ Funkcija x(t) je izražena brez pogreška.

$$x(t) = x'(t) = C_0\phi_0(t) + C_1\phi_1(t) + C_2\phi_2(t) + \ldots.$$

Zaporedje: $\phi = \left\{\phi_0\left(t\right), \phi_1\left(t\right), \phi_2\left(t\right), \ldots.\right\}$ imenujemo polno zaporedje.

Zaporedje funkcij je polno, če ni mogoče najti nobene funkcije f(t) za katero bi veljalo:

$$\int_{t_1}^{t_2} f\left(t\right)\phi_n\left(t\right) dt = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Uvod

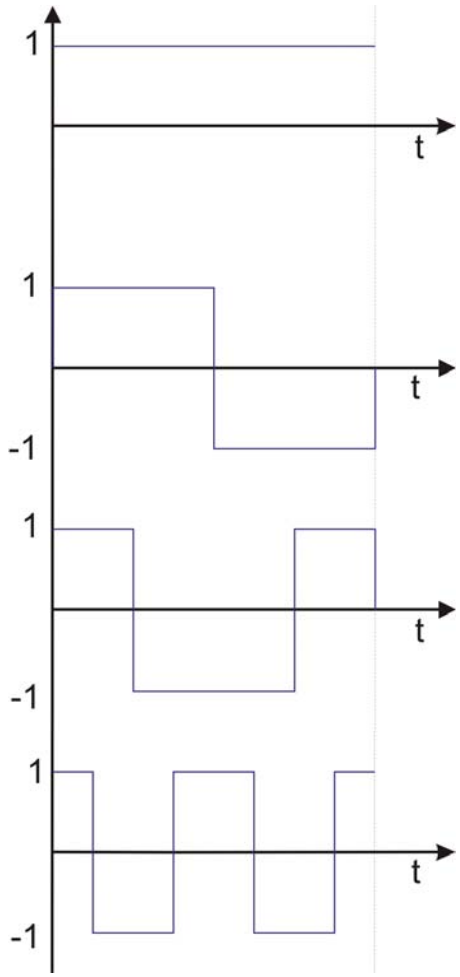
NAJPOGOSTEJE UPORABLJENE TEMELJNE FUNKCIJE

1.) FOURIER

$$\phi = \{1, \sin \omega t, \sin 2\omega t, \sin 3\omega t, \ldots$$

$$\ldots.., \cos \omega t, \cos 2\omega t, 3\cos \omega t, \ldots.\}$$

$$\phi = \left\{\ldots, e^{-j2\omega t}, e^{-j2\omega t}, 1, e^{-j2\omega t}, e^{-j2\omega t}, \ldots\right\}$$



2.) WALSH-EVE FUNKCIJE

Pogosto uporabljene pri DSP

(digital signal processing)

3.) LEGENDROVE FUNKCIJE

$$\phi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t), \qquad -1 \le t \le 1$$

Kjer je:

$$P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(t^2 - 1\right)^n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Legendrov polinom

$$\phi_0(t) = 1/\sqrt{2}$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{3/2}\, t$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{5/3}\left(3/2\, t^2 - 1/2\right)$$

.

.

5.) HERMITSKE FUNKCIJE

6.) KARDIALNE FUNKCIJE

.

.

4.) LAGUERR-OVE FUNKCIJE

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-\frac{t}{2}} L_n(t) \qquad 0 \le t \le \infty$$

Kjer je:

$$L_n(t) = e^t \frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(t^n e^{-t}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Laguerrov polinom

$$\phi_0(t) = e^{-t/2}$$

$$\phi_1(t) = e^{-t/2}(1 - t)$$

$$\phi_2(t) = \frac{1}{2} e^{-t/2}(2 - t)^2$$

.

.

Nabor temeljnih funkcij izberemo tako, da zahtevano odstopanje izražave od funkcije dosežemo s čim manjšim številom členov

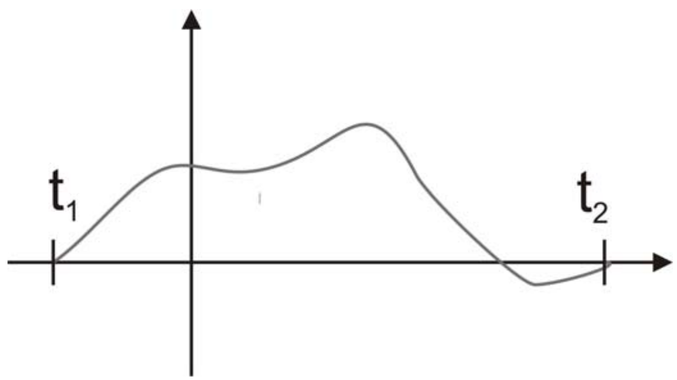
Uvod

RAZSEŽNOST SIGNALA

1. ČASOVNO TRAJANJE
2. FREKVENČNA ŠIRINA
3. DIMENZIJA

1.) ČASOVNO TRAJANJE

a.) Časovno omejen signal



$$x(t) = 0 \qquad t \le t_1, \quad t \ge t_2$$

Časovno trajanje je:

$$T = t_2 - t_1$$

b.) Časovno neomejen signal

$$T_e = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 x^2(t)\, dt}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt}}$$

T_e je drugi normaliziran središčni moment signala

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t x^2(t)\, dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt}$$

t_0 je prvi normaliziran središčni moment signala

Časovno trajanje časovno neomejenega signala T_e je mera razpršenosti signala okrog svojega težišča t_0.

Uvod

2.) FREKVENČNA ŠIRINA

Frekvenčna širina je frekvenčni interval znotraj katerega leži večji del energije signala

a.) Signal je izražen z Fourierjevo vrsto

Če ugotovimo da so koeficienti F(n) za vse n, ki so večji of 2πF/ω zanemarljivo majhni, tedaj je frekvenčni pas tega signala enak F.

$$\text{če je} \quad \mathrm{F}(\mathrm{n}) \approx 0 \qquad \text{za} \quad n \succ \frac{2\pi F}{\omega_1}$$

$$\Rightarrow \quad \text{frekvenčna širina} \;\; F\left[Hz\right]$$

b.) Signal ni izražen z Fourierjevo vrsto

$$F_e = \frac{1}{2\pi} \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\, dt}$$

Izražava je ekvivalentna drugemu središčnemu momentu, ki ga dobimo pri izražavi z Fourierjevo transformacijo

3.) DIMENZIJA SIGNALA D_e

Dimenzija signala je najmanjše število temeljnih funkcij potrebnih za izražavo signala z željeno natančnostjo.

Uvod

SIGNALI

1.) PERIODIČNI SIGNALI

Običajno: signal

Včasih: motnje

2.) APERIODIČNI SIGNALI

Običajno: signal

Včasih: motnje

3.) NAKLJUČNI SIGNALI

Običajno: motnje

Včasih: signal

Deterministični

Signal znamo matematično opisati in tako predvideti njegov potek

Stohastični

Obstaja določena stopnja nezanesljivosti in nedoločenosti pri poteku signala

Vhod

1.) PERIODIČNI SIGNALI

Pri periodičnem signalu se po točno določenem času (perioda) zaporedje njegovih vrednosti ponovi.

Vsako funkcijo periodično na intervalu:

$$t_1 \le t \le t_1 + T_1$$

lahko izrazimo z zaporedjem ortogonalnih temeljnih funkcij

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_1 t} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad \omega_1 = 2\pi / T_1$$

v obliki: $$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n) e^{jn\omega_1 t} \qquad t_1 \le t \le t_1 + T_1$$

kjer je: $$F(n) = \frac{1}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Transform obstaja če so izpolnjeni Dirichletovi pogoji:

1. Absolutna integrabilnost $$\int_{t_1}^{t_1+T_1} |f(t)| dt \prec \infty$$

1. f(t) mora imeti na intervalu T končno število min. in max ter končno št. nezveznosti

Vhod

POSEBEN PRIMER:

Funkcija f(t) naj o realna $\Rightarrow$ **tudi njen Fourierjev par F(n) je realen**

Ob upoštevanju:

$$e^{jn\omega_1 t} = \cos n\omega_1 t + j \sin n\omega_1 t$$

Lahko iz kompleksne Fourierjeve vrste izpeljemo realno Fourierjevo vrsto:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t) \right)$$

kjer je

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t) \cos(n\omega_1 t)\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t) \sin(n\omega_1 t)\, dt \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vrnimo se h kompleksni Fourierjevi transformaciji

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)e^{jn\omega_1 t} \qquad F(n)=\frac{1}{T_1}\int_{t_1}^{t_1+T_1} f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

Funkcija f(t) in njen kompleksni spekter F(n) tvorita Fourierjev par

$$f(t)\leftrightarrow F(n)$$

Spekter je diskreten in obstaja le pri mnogokratnikih prvega harmonika $\omega_1 = 2\pi/T_1$

Spekter lahko razdelimo na imaginaren Q(n) in realen P(n) del:

$$F(n)=P(n)+jQ(n)$$

Ali pa zapišemo z faznim θ(n) in amplitudnim A(n) spektrom:

$$F(n)=|A(n)|e^{j\theta(n)}$$

kjer je: $$\theta(n)=\arctan\frac{Q(n)}{P(n)}$$

$$A(n)=|F(n)|=\sqrt{F(n)\overline{F(n)}}=\sqrt{P^2(n)+Q^2(n)}$$

Vhod

KRIŽNA KORELACIJA PERIODIČNIH FUNKCIJ

Imejmo dve periodični funkciji $f_1(t)$ in $f_2(t)$ z isto periodo T.

Križna korelacija je definirana kot:

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_2(t+\tau)\, dt$$

Če velja:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(n) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(n)$$

$$\varphi_{12}(\tau) \leftrightarrow \overline{F_1(n)} F_2(n)$$

Furierjev par!

Oziroma:

$$\varphi_{12}(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \overline{F_1(n)} F_2(n) e^{jn\omega_1 \tau}$$

Vhod

AVTOKORELACIJA PERIODIČNIH FUNKCIJ

$$\varphi_{11}(\tau)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_1(t+\tau)\,dt \quad \bigstar$$

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(n)$$

$$\varphi_{11}(\tau)\leftrightarrow \overline{F_1(n)}F_1(n)=\left|F_1(n)\right|^2=\Phi_{11}$$

$$\varphi_{11}(\tau)=\sum_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(n)\right|^2 e^{jn\omega_1\tau} \quad \bigstar\bigstar$$

$\Phi_{11}=\left|F_1(n)\right|^2$ imenujemo MOČNOSTNI SPEKTER

Če enačbi ★ in ★★ izenačimo pri argumentu τ=0 dobimo:

PARSEVALOV STAVEK ZA PERIODIČNE FUNKCIJE

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f_1^2(t)\,dt=\sum_{-\infty}^{\infty}\left|F_1(n)\right|^2$$

Srednja kvadratična vrednost funkcije f(t) (moč) je enaka vsoti kvadratov absolutnih vrednosti posameznih harmonskih komponent na celotnem frekvenčnem področju.

Vhod

2.) APERIODIČNI SIGNALI

Signal je aperiodičen, če ni mogoče najti nobene periode T za katero bi veljalo x(t)=x(t+T).

Če periodična funkcija zadošča Dirichletovim pogojem, jo lahko zapišemo kot:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

F(ω) je zvezna funkcija kotne frekvence imenovana kompleksni spekter.

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$

f(t) in F(ω) sta Fourierjev par: $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$

$$F(\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)=A(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

Kompleksni spekter lahko razdelimo na imaginarni in realni del ali pa na fazni in amplitudni spekter.

Spekter amplitudne gostote:

$$A(\omega)=\left|F(\omega)\right|=\sqrt{F(\omega)\overline{F(\omega)}}=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}$$

Spekter fazne gostote:

$$\theta(\omega)=\arctan\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Vhod

KRIŽNA KORELACIJA APERIODIČNIH FUNKCIJ

Imejmo dve aperiodični funkciji $f_1(t)$ in $f_2(t)$.

Križna korelacija je definirana kot:

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f_1(t) f_2(t+\tau)\, dt$$

Če velja:

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \qquad f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\varphi_{12}(\tau) \leftrightarrow \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega)$$

Fourierjev par!

Oziroma:

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F_1(\omega)} F_2(\omega) e^{jn\omega t}\, d\omega$$

Vhod

AVTOKORELACIJA APERIODIČNIH FUNKCIJ

$$\varphi_{11}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_1(t+\tau)\, dt \qquad ★$$

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$$

$$\varphi_{11}(\tau) \leftrightarrow \overline{F_1(\omega)} F_1(\omega) = \left|F_1(\omega)\right|^2 = \Phi_{11}$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F_1(\omega)\right|^2 e^{j\omega\tau}\, d\omega \qquad ★★$$

$\Phi_{11} = \left|F_1(\omega)\right|^2$ imenujemo SPEKTER ENERGIJSKE GOSTOTE

Če enačbi ★ in ★★ izenačimo pri argumentu τ=0 dobimo:

PARSEVALOV STAVEK ZA APERIODIČNE FUNKCIJE

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^2(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|F_1(\omega)\right|^2 d\omega$$

Energija aperiodične funkcije f(t) je enaka integralu energijske gostote preko celotnega frekvenčnega področja.

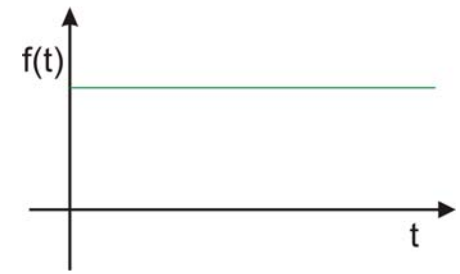
Vhod

Kaj naredimo če funkcija ne izpolnjuje 1. Dirichletovega pogoja?

1. Dirichletov pogoj:
absolutna integrabilnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt \prec \infty$$

NPR:



Z množenjem z $e^{-\alpha t}$ poizkušamo narediti funkcijo integrabilno!

$$f''(t) = f(t) e^{-\alpha t}$$

Fourierjeva transformacija je sedaj:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

Z nadomestitvijo:

$$p = \alpha + j\omega$$

dobimo $\longrightarrow$

LAPLACE-ova TRANSFORMACIJA

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha - j\omega}^{\alpha + j\omega} F(p) e^{pt} dp$$

$$f(t) \leftrightarrow F(p)$$

Vhod

3.)NAKLJUČNI SIGNALI

Pri determinističnih signalih lahko na podlagi preteklosti določimo parametre (amplitudo, fazo, frekvenco,...) s katerimi lahko predvidimo kakšen bo signal v prihodnosti.

Pri stohastičnih signalih prihodnosti ne moremo napovedati

•Idealni stohastični signali (popolnoma brez spomina)

•Fizikalni stohastični signali (bližnja prihodnost je odvisna od preteklosti)

Vhod

AVTOKORELACIJA NAKLJUČNIH FUNKCIJ

Imejmo naključno funkcijo f(t) z omejeno srednjo vrednostjo.

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) f(t+\tau) dt$$

LASTNOSTI:

1.) SODOST

$$\varphi_{11}(\tau) = \varphi_{11}(-\tau)$$

2.) PRI τ=O

$$\varphi_{11}(0) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f^2(t) dt$$

Autokorelacija naključne funkcije pri argumentu τ=O predstavlja srednjo moč funkcije.

3.) $\varphi_{11}(\infty) = 0$

4.) $\varphi_{11}(0) \succ |\varphi_{11}(\tau)| \qquad \tau \neq o$

Vhod

WIENNERJEV STAVEK ZA NAKLJUČNE FUNKCIJE

Spekter močnostne gostote $\Phi_{11}(\omega)$ naključne funkcije f(t) je Fourierjev transform avtokorelacijske funkcije

$$\Phi_{11}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{11}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{11}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega$$

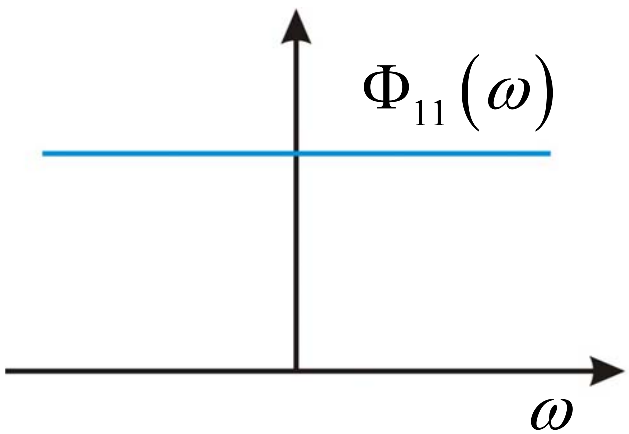
Funkciji $\Phi_{11}(\omega)$ in $\varphi_{11}(\tau)$ sta Fourierjev par

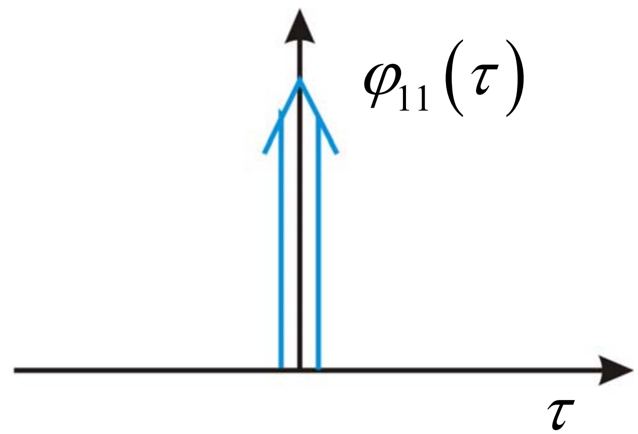
$$\Phi_{11}(\omega) \leftrightarrow \varphi_{11}(\tau)$$

Glede na to kakšen je spekter močnostne gostote $\Phi_{11}(\omega)$ ločimo: →

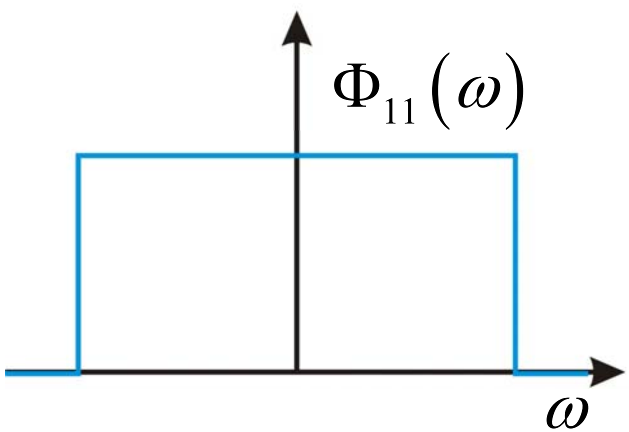
Vhod

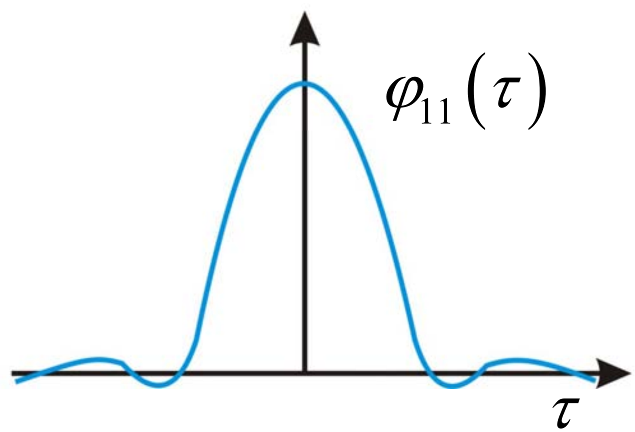
BELI ŠUM - **Spekter močnostne gostote je konstanten za vse frekvence.**





OBARVANI ŠUM - **Spekter močnostne gostote je frekvenčno omejen.**





Vhod

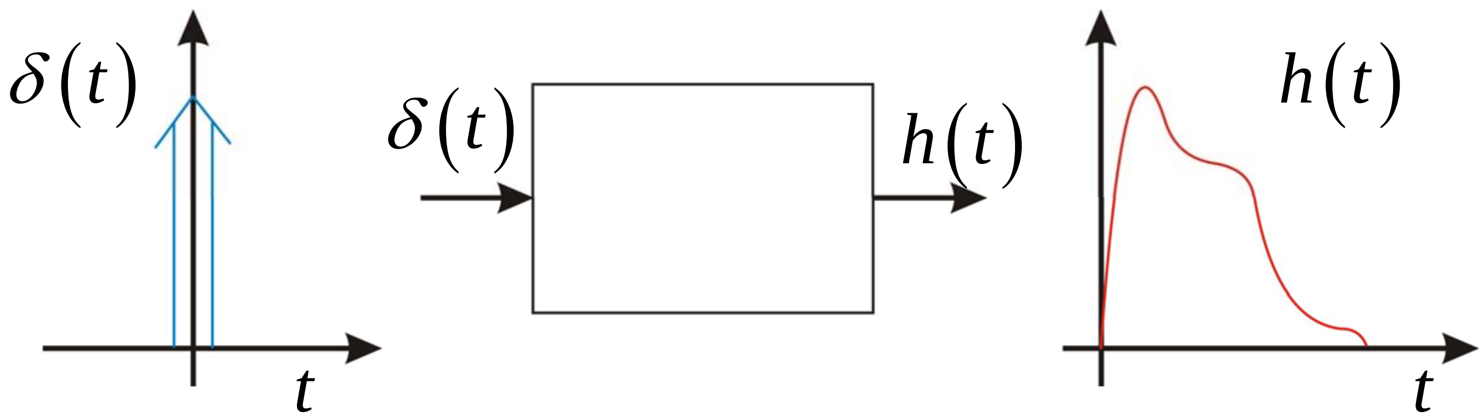
PRENOS SIGNALOV SKOZI LINEARNE SISTEME

1. Prevajanje determinističnih signalov
2. Prevajanje stohastičnih signalov

1. PREVAJANJE DETERMINISTIČNIH SIGNALOV

Vsak sistem, skozi katerega prevajamo signal, nam informacijo bolj ali manj pokvari.

Vzbujanje sistema z infitezimalno ozkim impulzom δ(t) povzroči odziv, ki ima od 0 različno trajanje.

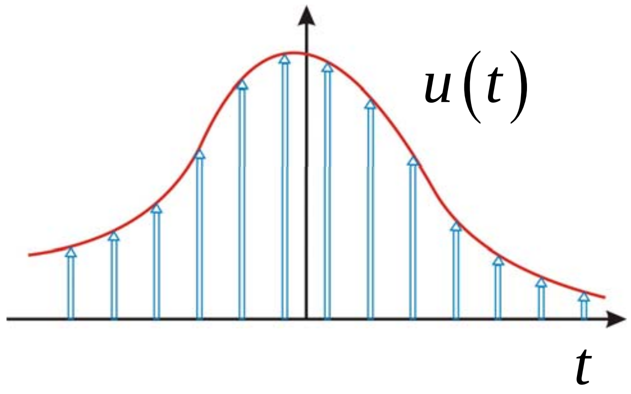


h(t) - IMPULZNI ODZIV

Če za sistem S poznamo impulzni odziv h(t), lahko izračunamo odziv sistema na poljuben vhodni signal u(t).

Prenos

KONVOLUCIJSKI INTEGRAL



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = u(t) * h(t)$$

Konvolucijski integral povezuje:

$y(t)$ **Odziv linearnega sistema**

z

$u(t)$ **Vhodnim signalom**

$h(t)$ **Impulznim odzivom**

Prenos

Na konvolucijskem integralu:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

izvedemo Fourierjevo transformacijo. Upoštevamo:

$$y(t)\leftrightarrow Y(\omega)\quad u(t)\leftrightarrow U(\omega)\quad h(t)\leftrightarrow H(\omega)$$

Sledi:

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$x=t-\tau,\qquad dx=dt\qquad t=x+\tau$$

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{j\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\Downarrow$$

$$Y(\omega)=H(\omega)U(\omega)$$

PREVAJALNA FUNKCIJA H(ω) je kvocient Fourierjevega transforma vhodnega in izhodnega signal

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{U(\omega)}$$

Če je vhodni signal delta impulz δ(t), je prevajalna funkcija H(ω) kar Fourierjev transform impulznega odziva.

$$\mathscr{F}\left[\delta(t)\right]=1$$

$$\Downarrow$$

$$H(\omega)=\mathscr{F}\left[h(t)\right]$$

Prenos

2.) PREVAJANJE STOHASTIČNIH SIGNALOV

PROBLEM: VHODNI SIGNAL NAKLJUČEN → IZHODNI SIGNAL NAKLJUČEN

↓

FOURIERJEV TRANSFORM NE OBSTAJA

Enačbe:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=u(t)*h(t)$$

Ne moremo prenesti v frekvenčni prostor

Da pridemo do frekvenčnih karakteristik si pomagamo z avtokorelacijo!

Prenos

Linearni sistem z impulznim odzivom h(t) vzbujamo z naključnim signalom u(t). Izhodni signal y(t) je:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)u(t-\sigma)\,d\sigma$$

y(t) avtokoreliramo:

$$\varphi_{yy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\,y(t+\tau)\,dt$$

$$\varphi_{yy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)u(t-\sigma)\,d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} h(s)u(t+\tau-s)\,ds\right\}$$

Zamenjamo vrstni red integriranja:

$$\varphi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\,d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,ds\;\lim_{T\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\sigma)u(t+\tau-s)\,dt$$

$$\varphi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\,d\sigma\int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,ds\;\varphi_{uu}(\sigma-s+\tau)$$ ★

Avtokorelacijo ★ **Fourierjevo transformiramo**

Prenos

$$\Phi_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma)\, d\sigma \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\, ds\ \varphi_{uu}(\sigma - s + \tau)$$

Uvedemo novo spremenljivko:

$$x = \sigma - s + \tau \qquad dx = d\tau \qquad \tau = x - \sigma + s$$

$$\Phi_{yy}(\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\sigma) e^{j\omega\sigma} d\sigma\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{-j\omega s} ds\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{uu}(x) e^{-j\omega x} dx\right]$$

Spekter močnostne gostote izhoda

Konjugirano kompleksna vrednost prevajalne funkcije

Prevajalna funkcija

Spekter močnostne gostote vhoda

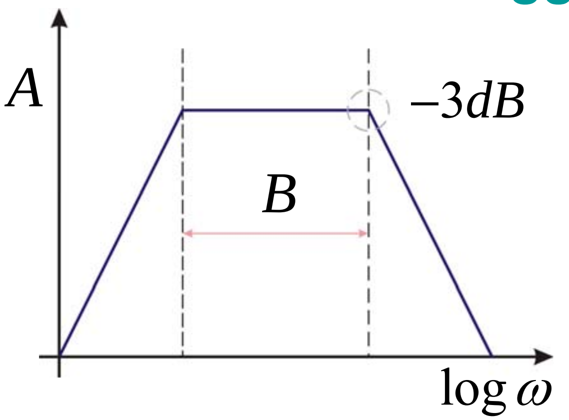
$$\Phi_{yy}(\omega) = \overline{H(\omega)} H(\omega) \Phi_{uu}(\omega)$$

$$\Phi_{yy}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 \Phi_{uu}(\omega)$$

Z naključne signale lahko določimo izhodni spekter močnostne gostote!

Prenos

ŠUMNA PASOVNA ŠIRINA



Imejmo sistem s prenosno funkcijo H(ω).

Pasovna širina je razdalja med dvemi 3dB točkami.

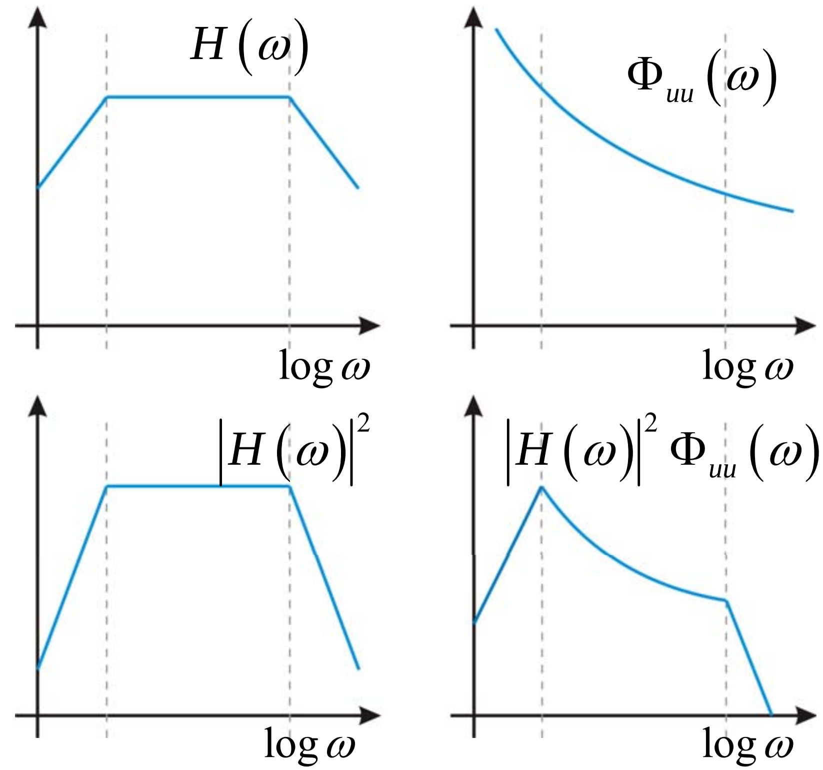
Moč pade na ½

Amplituda pade na 1/sqrt(2)

Za naključne signale je izhodna moč odvisna od:

$H(\omega)$ •prenosne funkcije

$\Phi_{uu}(\omega)$ •spektra močnostne gost. na vh.



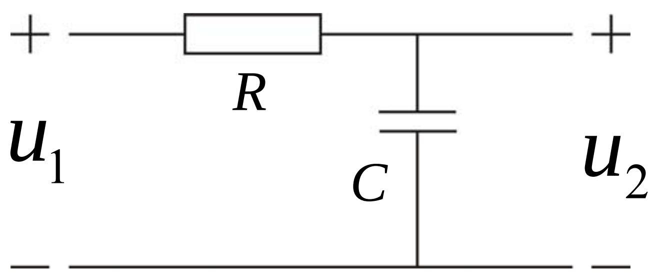
Šumna pasovna širina je definirana kot:

$$B_n = \frac{\int_0^{\infty} \left|H(\omega)\right|^2 \Phi_{uu}(\omega)\, d\omega}{\left|H(\omega_0)\right|^2 \Phi_{uu}(\omega_0)}$$

ω_0 **Je referenčna (centralna) frekvenca znotraj pasu.**

Prenos

NPR: Preprost sistem in beli šum!



$$u_2 = i_1 \frac{1}{j\omega C} = \frac{u_1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \frac{1}{j\omega C}$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$B_n = \frac{\int_0^\infty |H(\omega)|^2 \overbrace{\Phi_{uu}(\omega)}^{K} d\omega}{\underbrace{|H(\omega_0)|^2}_{1} \underbrace{\Phi_{uu}(\omega_0)}_{K}} = \frac{1}{4RC}$$

ZAKAJ JE TO POMEMBNO?

Ker šumna pasovna širina nastopa v enačbah za določitev posameznih šumnih komponent!

NPR: Tranzistor

1. **Termični šum baze** $\overline{u_B^2} = 4k_B T r_{BB} B_n$
2. **Kvantizacijski šum** $\overline{i_E^2} = 2qI_E B_n$
3. **itd.**

Prenos

RAZMERJE SIGNAL ŠUM (S/N)

Imejmo sistem s prenosno karakteristiko H(ω). Na vhod pripeljemo signal s(t), ki ima Fourierjev transform S(ω). Na izhodu zato dobimo:

$$v(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad \bigstar$$

Pri opazovanju nas na vhodu moti šum z dano spektralno močnostno gostoto.

$$\Phi_{uu}(\omega)=N_{vh}(\omega)$$

Spekter močnostne gostote na izhodu je:

$$N_{iz}(\omega)=\left|H(\omega)\right|^2 N_{vh}(\omega)$$

Z integracijo po spektru (Parsevalov stavek) dobimo srednjo kvadratično vrednost šumne napetosti na izhodu.

$$\overline{v_n^2}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)N_{vh}(\omega)d\omega \qquad \bigstar\bigstar$$

Razmerje signal šum (S/N) je torej (iz ★ in ★★)

$$\left[{S}/{N}\right]^2=\frac{1}{2\pi}\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega}$$

Izhod

Ali lahko razmerje S/N zavzame poljubno vrednost?

Pomagamo s s Schwartzovo neenačbo:

$$\left[\int f(t)\,g(t)\,dt\right]^2 \le \int f^2(t)\,dt \int g^2(t)\,dt \quad , \text{ enakost velja če } f(t) = k\,\overline{g(t)}$$

Vzemimo: $f = H(\omega)\sqrt{N(\omega)}$ $\qquad g = \dfrac{S(\omega)}{\sqrt{N(\omega)}}e^{j\omega\tau}$

$$\frac{1}{2\pi}\frac{\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega\right]^2}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega} \le \frac{1}{2\pi}\frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{N(\omega)}\,d\omega}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} N(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{N(\omega)}\,d\omega$$

Razmerje S/N je omejeno, maksimalna vrednost pa je enaka:

$$\left[{}^{S}\!/\!{}_{N}\right]_{\max} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{N(\omega)}\,d\omega}$$

Izhod

Kdaj je razmerje S/N maksimalno?

Pomagamo si s pogojem enakosti Schwartzove neenačbe:

$$f(t) = k\overline{g(t)} \quad \Rightarrow \quad H(\omega)\sqrt{N(\omega)} = k\frac{\overline{S(\omega)}}{\sqrt{N(\omega)}}e^{-j\omega\tau}$$

$$\boxed{H(\omega) = k\frac{\overline{S(\omega)}}{N(\omega)}e^{-j\omega\tau}}$$

Prenosna karakteristika optimalnega procesorja!

V primeru ko imamo opravka z belim šumom sledi:

$$H(\omega) = \frac{k}{w}\overline{S(\omega)}e^{-j\omega\tau}$$

PARNOST

PREMAKNITEV

$$\overline{F(\omega)} \leftrightarrow f(-t) \qquad F(\omega)e^{-j\omega\tau} \leftrightarrow f(t-a)$$

Odgovor idealnega procesorja na Diracov impulz je zrcalna slika vhodnega signala premaknjenega za τ.

Izhod