

Predstavitev diplomskega dela

Izračun mase najlažjih mezonov s kromodinamiko na mreži

Luka Šantelj

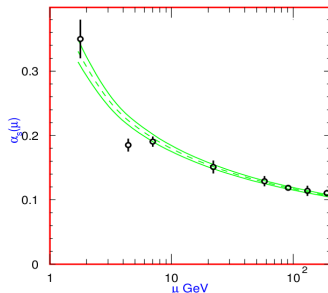
Mentorica: doc. dr. Saša Prelovšek Komelj

20. januar 2010

- 1 Kromodinamika na mreži
 - Korelacijska funkcija
 - Energija lastnih stanj
- 2 Skalarno polje
 - Energija skalarnega delca na mreži
- 3 Masa mezonov
 - Kvantna kromodinamika
 - Mezonska korelacijska funkcija
 - Efektivna masa
 - Določitev mase ρ -mezona
- 4 Razsežni ponori
- 5 Zaključek

Kromodinamika na mreži

- Pri hadronskih energijah ($\sim 1\text{ GeV}$) je močna interakcija res **močna**.
- To onemogoča uporabo standardnega perturbacijskega razvoja.
- Kromodinamika na mreži je neperturbativen pristop k kromodinamiki.
- Temelj: Numeričen izračun ustreznih popotnih integralov teorije, na diskretni mreži točk prostora-časa.

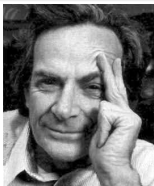


vir: S. Eidelman et al., *Physics Letters B* 592, 1 (2004)

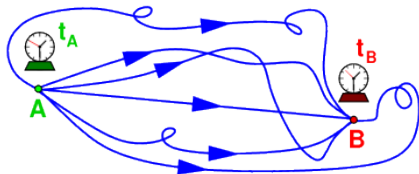
Kvantna mehanika

Propagator:

$$\langle B | e^{-iH(t_B - t_A)/\hbar} | A \rangle = \int \mathcal{D}X e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t L(x, \dot{x}; t') dt'} = \int \mathcal{D}X e^{\frac{i}{\hbar} S[x]}.$$



vir: www.desy.de



vir: www.aei.mpg.de

Teorija polja

Korelacijska funkcija:

$$\mathcal{C}(\vec{x}, t) = \langle \Omega | \mathbf{O}(\vec{x}, t) \mathbf{O}^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathbf{O}(\vec{x}, t) \mathbf{O}^\dagger(\vec{0}, 0) e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi]}}$$

(za skalarno polje: $\mathbf{O} = \phi$, za π in ρ -mezon $\mathbf{O} = \bar{\mathbf{u}} \Gamma \mathbf{d}$)

Imaginarni čas

- Izrazi tipa $\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{\hbar}S[\phi]}$ so neprimerni za numeriko.
- Trik:

$$t \rightarrow -i\tau$$

- **Minkovski** \rightarrow **Evklid**.
- Akcija: $iS[\phi] \Rightarrow -S_E[\phi]$

Evklidska korelacijska funkcija

$$C(\vec{x}, \tau) = \langle \Omega | \mathbf{O}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathbf{O}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}^\dagger(\vec{0}, 0) e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{\hbar}S_E[\phi]}}$$

Določitev energije lastnih energijskih stanj teorije

- 1 Fourierovo transformiramo $\mathcal{C}(\vec{x}, \tau) \rightarrow \mathcal{C}(\vec{k}, \tau) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \mathcal{C}(\vec{x}, \tau)$.
- 2 Pokažemo lahko, da velja:

$$\mathcal{C}(\vec{k}, \tau) = \sum_n w_n e^{-E_n(\vec{k})\tau},$$

kjer je $w_n = \langle \Omega | \mathbf{O} | n, \vec{k} \rangle \langle n, \vec{k} | \mathbf{O}^\dagger | \Omega \rangle / 2E_n(\vec{k})$.

- 3 Pri dolgih časih τ torej:

$$\mathcal{C}(\vec{k}, \tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} w_1 e^{-E_1(\vec{k})\tau}$$

- 4 Do $E_1(\vec{k})$ pridemo s prilagajanjem eksponentne funkcije korelacijski funkciji.

Prosto skalarno polje

- Lagrangian skalarnega polja: $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2$.
- Ustrezna Evklidska oblika akcije:

$$S_E[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) (-\square + M^2) \phi(x)$$

- Pokažemo lahko, da velja:

$$C(\vec{k}, \tau) = \int d^3x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \langle \Omega | \underbrace{\phi(\vec{x}, \tau)}_0 \underbrace{\phi(0)}_{0^\dagger} | \Omega \rangle = \int d^3x e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \text{Prop}_{(0) \rightarrow (\vec{x}, \tau)}^\phi$$

- Propagator** je **Greenova funkcija** valovnega operatorja:

$$(-\square + M^2) \text{Prop}_{(\vec{0}, 0) \rightarrow (\vec{x}, \tau)}^\phi = \delta^3(\vec{x}) \delta(\tau).$$

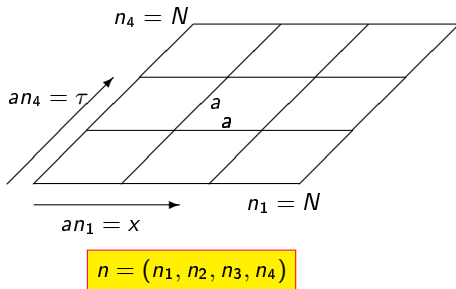
Energija skalarnega polja na mreži

- Vpeljemo diskretno 4D mrežo točk.
- Diskretiziramo val. operator:

$$(-\square + M^2) \rightarrow K$$

- Velja $K_{mn}K_{n0}^{-1} = \delta_{m0}$, torej

$$\text{Prop}_{(\vec{0},0) \rightarrow (\vec{x},\tau)}^{\phi} \rightarrow K_{n0}^{-1}$$

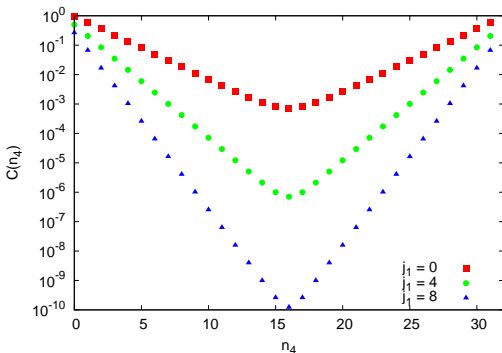


- Energijo $E(\vec{k})$ na mreži določimo z:

$$\begin{aligned} C(\vec{k}, n_4) &= \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}} K_{n0}^{-1} = \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}} \bullet \begin{array}{c} (\vec{n}, n_4) \\ \text{---} \\ (\vec{0}, 0) \end{array} \\ &= w e^{-E(\vec{k})n_4} \end{aligned}$$

Energija skalarnega polja na mreži (2)

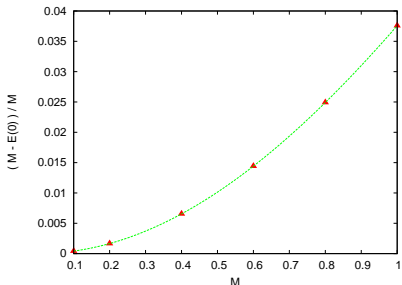
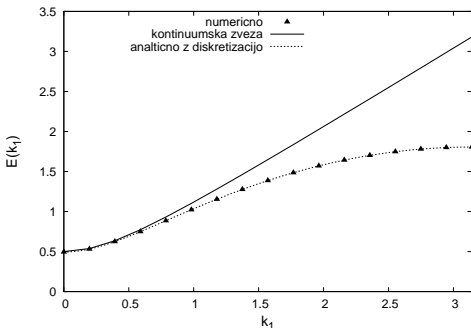
- Mreža z $N = 32 \Rightarrow$ velikost matrike $K \sim 10^6 \times 10^6$.
- Do $K_{n_0}^{-1}$ pridemo z reševanjem sistema $K\vec{v}' = \vec{v}$ ($\vec{v} = (1, 0, \dots)$)
- z iterativno metodo bikonjugiranega gradienta.
- Dobljene korelacijske funkcije pri $\vec{k} = \frac{2\pi}{32}(j_1, 0, 0)$:



$$C(n_4) = w e^{-E(\vec{k})n_4}$$

Energija skalarnega polja na mreži (3)

- V kontinuumu: $E(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$.
- Na mreži:



- Analitičen račun z upoštevanjem diskretizacije:

$$\sinh^2 \left(E(\vec{k})/2 \right) = \sum_i \sin^2 (k_i/2) + \frac{M^2}{4}$$

Kvantna kromodinamika

- Je teorija močne interakcije.
- Izhaja in zahteva po invariantnosti Lagrangiana **kvarkovskih** polj:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)\Psi, \quad \text{kjer je} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

na lokalne umeritvene transformacije v internem **barvnem** prostoru (transf. grupa $SU(3)$).

- Izpolnitev terja vpeljava 8 umeritvenih polj G_μ^a . Ta ustrezajo prenašalcem močne interakcije, **gluonom**.
- Lagrangian in akcija kromodinamike:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_q)\Psi - g(\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi)G_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$$

$$S = \int d^4x \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)\Psi - \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = S^F[\bar{\Psi}, \Psi, G_\mu^a] + S^G[G_\mu^a]$$

Mezonska korelacijska funkcija

- **Mezoni** so vezana stanja kvarka in antikvarka.
- V delu izračunamo masi **piona in ρ -mezona** na mreži.
- Za to potrebujemo ustrezno korelacijsko funkcijo.

Mezonska korelacijska funkcija

$$\begin{aligned}
 C_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) &= \langle \Omega | \mathbf{O}_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle \\
 &= \frac{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathbf{O}_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}
 \end{aligned}$$

Mezonski operatorji

$$\mathbf{O}_{\pi,\rho}(x) = \bar{\mathbf{d}}(x) \Gamma \mathbf{u}(x), \quad \mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}u \mathcal{D}d$$

kjer je $\Gamma = \gamma^5$ za pion in $\Gamma = \gamma^i$ za ρ -mezon

Mezonska korelacijska funkcija

- **Mezoni** so vezana stanja kvarka in antikvarka.
- V delu izračunamo masi **piona in ρ -mezona** na mreži.
- Za to potrebujemo ustrezno korelacijsko funkcijo.

Mezonska korelacijska funkcija

$$\begin{aligned}
 C_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) &= \langle \Omega | \mathbf{O}_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle \\
 &= \frac{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi O_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) O_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}
 \end{aligned}$$

Mezonski operatorji

$$\mathbf{O}_{\pi,\rho}(x) = \bar{\mathbf{d}}(x) \Gamma \mathbf{u}(x), \quad \mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}u \mathcal{D}d$$

kjer je $\Gamma = \gamma^5$ za pion in $\Gamma = \gamma^i$ za ρ -mezon

Mezonska korelacijska funkcija

- **Mezoni** so vezana stanja kvarka in antikvarka.
- V delu izračunamo masi **piona in ρ -mezona** na mreži.
- Za to potrebujemo ustrezno korelacijsko funkcijo.

Mezonska korelacijska funkcija

$$\begin{aligned}
 C_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) &= \langle \Omega | \mathbf{O}_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) | \Omega \rangle \\
 &= \frac{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathbf{O}_{\pi,\rho}(\vec{x}, \tau) \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger(\vec{0}, 0) e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^F[\bar{\Psi}, \Psi, G]}}
 \end{aligned}$$

Mezonski operatorji

$$\mathbf{O}_{\pi,\rho}(x) = \bar{\mathbf{d}}(x) \Gamma \mathbf{u}(x), \quad \mathcal{D}\Psi = \mathcal{D}u \mathcal{D}d$$

kjer je $\Gamma = \gamma^5$ za pion in $\Gamma = \gamma^i$ za ρ -mezon

Mezonska korelacijska funkcija (2)

- Ob diskretizaciji $(i\gamma^\mu D_\mu - m_q) \Rightarrow K$ ($K_{\mu\nu}^{c_1 c_2}(n|m)$).
- Matrika K je odvisna od konfiguracije polja G_μ^a ($D_\mu = \partial_\mu + igT_a G_\mu^a$).
- Pri določeni gluonski konfiguraciji lahko iz vrednotimo fermionske integrale.
- Pokažemo lahko, da velja:

$$C_{\pi,\rho}(\vec{n}, n_4) = \frac{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G} C_{\pi,\rho}^G(\vec{n}, n_4) \det^2(K)}{\int \mathcal{D}G e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G} \det^2(K)},$$

kjer je

$$C_{\pi,\rho}^G(\vec{n}, n_4) = \text{Tr} [\Gamma K^{-1}(n|0) \Gamma K^{-1}(0|n)]$$

$$C_{\pi,\rho}^G(\vec{n}, n_4) =$$

Mezonska korelacijska funkcija (3) in mase mezonov

- Generiramo P gluonskih konfiguracij G z verjetnostno porazdelitvijo

$$e^{-\frac{1}{\hbar} S_E^G[G]} \det(K), \text{ torej:}$$

$$C_{\pi,\rho}(\vec{n}, n_4) = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P C_{\pi,\rho}^j(\vec{n}, n_4)$$

- Maso mezonov** izluščimo iz:

$$C_{\pi,\rho}(\vec{k} = 0, n_4) \equiv C_{\pi,\rho}(n_4) = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P \sum_{\vec{n}} C_{\pi,\rho}^j(\vec{n}, n_4),$$

saj vemo, da velja:

$$C_{\pi,\rho}(n_4) \xrightarrow{n_4 \rightarrow \infty} w_{\pi,\rho} e^{-m_{\pi,\rho} n_4}$$

Numerično računanje korelacijske funkcije

- Uporabim že izračunane propagatorje $K^{-1}(n|0)$.
- Mreža velikosti $16^3 \times 32_t \Rightarrow$ velikost K je $\sim 2 \cdot 10^7 \times 2 \cdot 10^7$
- Propagatorji izračunani na **100** gluonskih konfiguracijah ($P = 100$).
- Numerično izračunam korelacijske funkcije:

$$C_{\pi,\rho}(n_4) = \frac{1}{P} \sum_{j=1}^P \sum_{\vec{n}} \text{Tr} [\Gamma K^{-1}(\vec{n}, n_4|0) \Gamma K^{-1}(0|\vec{n}, n_4)]$$

Masa kvarkov m_q

- Prost parameter teorije.

- Običajno računamo pri $m_q > m_q^{phys}$.

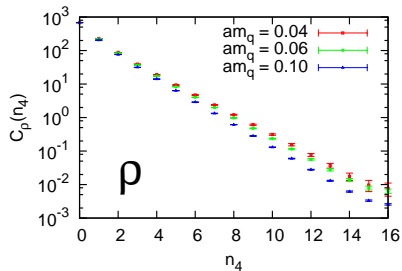
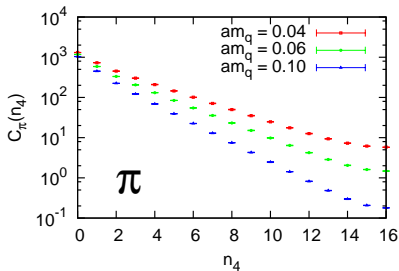
- Vzroki:

- Velikost pionskega oblaka.

$$m_q \Rightarrow 0, \quad \lambda_\pi \Rightarrow \infty$$

- Numerika. Pri manjši m_q časovno zahtevnejši račun K^{-1} in $\det(K)$
- Nestabilnost numeričnih algoritmov za iskanje K^{-1} pri nekaterih diskretizacijah akcije.
- Račune izvedemo pri večih $m_q > m_q^{phys}$ in rezultate ekstrapoliramo k $m_q = m_q^{phys}$.

Izračunane korelacijske funkcije



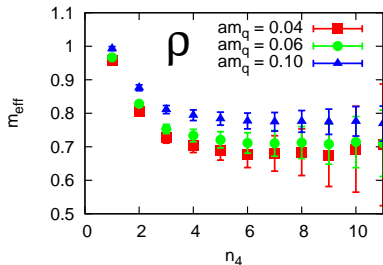
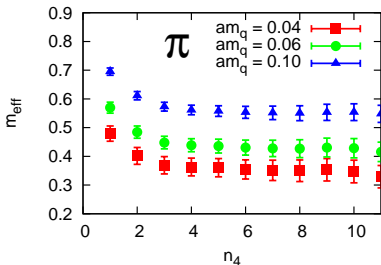
- Iz naklona premic hitro ocenimo $m_\pi < m_\rho$.

Efektivna masa

- **Efektivno maso** definiramo kot:

$$m_{eff}(n_4) = \ln \left(\frac{\mathcal{C}(n_4)}{\mathcal{C}(n_4 + 1)} \right)$$

- Dobro ker iz $\mathcal{C}(n_4) = \sum_n w_n e^{-E_n n_4}$ sledi $m_{eff}(n_4) \xrightarrow{n_4 \rightarrow \infty} m_{\pi, \rho}$.
- Lažje določimo dobro območje prilagajanja.

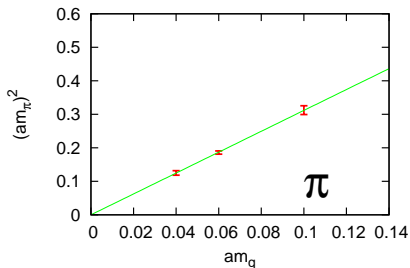
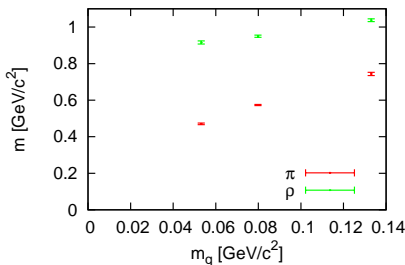


Določitev mase ρ -mezona

- Maso mezonov določimo s prilagajanjem funkcije

$$f(n_4; w, m_{\pi, \rho}) = w e^{-m_{\pi, \rho} n_4} \text{ korelacijskim funkcijam } \mathcal{C}(n_4).$$

- Na dobro izbranem časovnem intervalu.
- Dobimo:



- Pričakujemo $m_{\pi}^2 \propto m_q$.
- Eksp. masa m_{π}^{exp} je vhodni podatek za določitev m_q .

Določitev mase ρ -mezona (2)

- Maso ρ -mezona ekstrapoliram k pravi masi kvarka m_q .
- Uporabim enostavno linearno ekstrapolacijo.

- Rezultat:

$$m_\rho = (0.83 \pm 0.02) \text{ GeV}/c^2$$

- Eksperiment: $m_\rho^{\text{exp}} = 0.775 \text{ GeV}/c^2$.
- Boljši rezultat:
 - Račun pri več m_q .
 - Račun pri več N in a in ekstrapolacija v $N \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0$.

Razsežni ponori

- Vemo že:

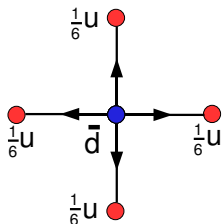
$$C_{\pi,\rho}(n_4) = \sum_n w_n e^{-E_n n_4},$$

kjer je $w_n = \langle \Omega | \mathbf{O}_{\pi,\rho} | n \rangle \langle n | \mathbf{O}_{\pi,\rho}^\dagger | \Omega \rangle / 2E_n$.

- Torej $w_n \propto \langle \Omega | \mathbf{O}_{\pi,\rho} | n \rangle$.
- V delu preizkusimo različne oblike operatorja $\mathbf{O}_{\pi,\rho}$.
- Izkaže se, da imajo razsežni operatorji \mathbf{O}_r relativno boljšo sklopitev z osnovnim en. stanjem

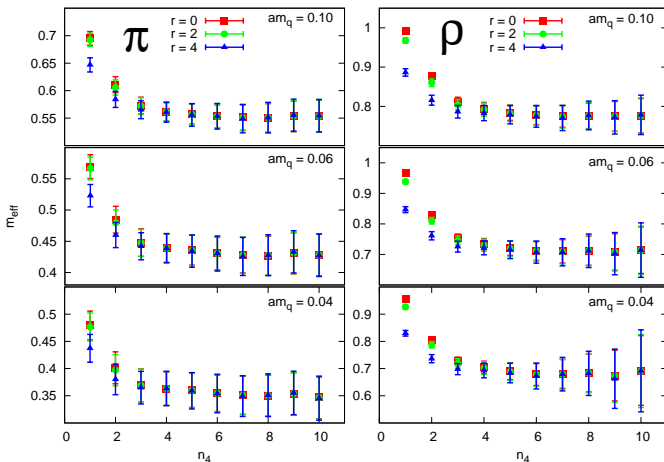
$$\frac{\langle \Omega | \mathbf{O}_r | \pi, \rho \rangle}{\langle \Omega | \mathbf{O}_r | n \rangle} > \frac{\langle \Omega | \mathbf{O}_0 | \pi, \rho \rangle}{\langle \Omega | \mathbf{O}_0 | n \rangle}$$

$$n > 1$$



Efektivne mase

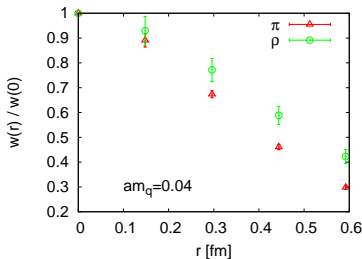
- Tezo potrdijo dobljene efektivne mase:



Amplituda sklopitve

- Odvisnost amplitude sklopitve $\langle \Omega | \mathbf{O}_r | \pi, \rho \rangle$ od r določim iz:

$$C_{\pi, \rho}(n_4) \xrightarrow{n_4 \rightarrow \infty} \frac{\langle \Omega | \mathbf{O}_r | \pi, \rho \rangle \langle \pi, \rho | \mathbf{O}^\dagger | \Omega \rangle}{2m_{\pi, \rho}} e^{-m_{\pi, \rho} n_4} = w(r) e^{-m_{\pi, \rho} n_4},$$



- Največja verjetnost je, da sta kvarka u in \bar{d} v isti točki ($L = 0$).
- “Velikost” piona in ρ -mezona je ~ 1 fm.

Pion wave function from lattice QCD vs. chiral quark models

Wojciech Broniowski ^{a,b}, Sasa Prelovsek ^{c,d}, Luka Šantelj ^d, Enrique Ruiz Arriola ^e

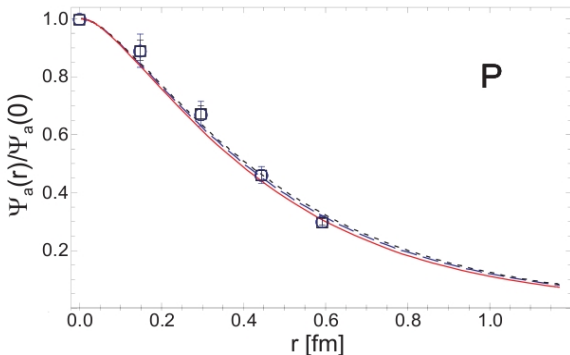
^aThe H. Niewodniczański Institute of Nuclear Physics, Polish Academy of Sciences, PL-31342 Kraków, Poland

^bInstitute of Physics, Jan Kochanowski University, PL-25406 Kielce, Poland

^cDepartment of Physics, University of Ljubljana, 1000 Ljubljana, Slovenia

^dJozef Stefan Institute, 1000 Ljubljana, Slovenia

^eDepartamento de Física Atómica, Molecular y Nuclear, Universidad de Granada, E-18071 Granada, Spain



Zaključek

V delu smo:

- preučili zvezo med energijo in gibalno količino skalarne delca na mreži.
- s pomočjo mezonske korelacijske funkcije določili maso ρ -mezona.
- pokazali, da se razsežni ponori relativno boljše sklapljajo z nižje energijskimi stanji.
- raziskali odvisnost sklopitve ponora s stanjem piona in ρ -mezona od razsežnosti ponora.