Emmy Noether
nemška matematičarka, 1882 - 1935

večinoma delala na univ. v Göttingenu;
l. 1933 izgnana iz Nemčije kot Židinja,
emigrirala v ZDA, kot veliko drugih židovskih znanstvenikov

Invariante Variationsprobleme.

(F. Klein zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.)

Von

**Emmy Noether** in Göttingen.

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.





die partielle Integration zeigt, sind diese Randglieder über *Divergenzen*, d. h. über Ausdrücke

$$\mathrm{Div}\, A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

wobei $A$ linear in $\delta u$ und seinen Ableitungen ist. Somi

(3) $$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \mathrm{Div}\, A.$$

Enthält $f$ insbesondere nur erste Ableitungen der $u$, Fall des einfachen Integrals die Identität (3) identisch von Heun sogenannten „Lagrangeschen Zentralgleichung"

(4) $$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{d}{dx}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial u_i'} \delta u_i\right), \qquad \left(u_i' = \frac{du_i}{dx}\right),$$

während für das $n$-fache Integral (3) übergeht in:

(5) $$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}} \delta u_i\right) - \cdots - \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_n}} \delta u_i\right).$$

Für das einfache Integral und $\varkappa$ Ableitungen der $u$ ist (3) gegeben durch:

(6) $$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f -$$
$$- \frac{d}{dx}\left\{\sum\left(\binom{1}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(1)}}\delta u_i + \binom{2}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i^{(1)} + \cdots + \binom{\varkappa}{1}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\varkappa)}}\delta u_i^{(\varkappa-1)}\right)\right\} +$$
$$+ \frac{d^2}{dx^2}\left\{\sum\left(\binom{2}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}}\delta u_i + \binom{3}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(3)}}\delta u_i^{(1)} + \cdots + \binom{\varkappa}{2}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\varkappa)}}\delta u_i^{(\varkappa-2)}\right)\right\} + \cdots$$
$$\vdots$$
$$+ (-1)^\varkappa \frac{d^\varkappa}{dx^\varkappa}\left\{\sum \binom{\varkappa}{\varkappa}\frac{\partial f}{\partial u_i^{(\varkappa)}}\delta u_i\right\}$$

und eine entsprechende Identität gilt beim $n$-fachen Integral; $A$ enthält insbesondere $\delta u$ bis zur $(\varkappa-1)$ten Ableitung. Daß durch (4), (5), (6) tatsächlich die Lagrangeschen Ausdrücke $\psi_i$ definiert sind, folgt daraus, daß durch die Kombinationen der rechten Seiten alle höheren Ableitungen der $\delta u$ eliminiert sind, während andererseits

članek o njenem
teoremu, l. 1918