

Boštjan Golob

Jedra, kvarki in leptoni

Učbenik za študijski program 2. stopnje
Fizika

November 30, 2014

Springer

Predgovor

Ta učbenik je nadaljevanje učbenika Fizika jedra in osnovnih delcev, za 3. letnik študijskega programa 1. stopnje Fizika.

Ljubljana,

Boštjan Golob
september 2014

Vsebina

1	Simetrije in grupe	1
1.1	Rotacije	1
1.2	Simetrije in ohranitveni zakoni	3
1.3	Grupa SU(2).....	5
1.4	Izražava reprezentacij	7
1.5	Grupa SU(3) za barve	9
1.6	Grupa SU(3) za okuse	11
2	Kvarkonij	21
2.1	Osnovni mezoni in barioni	21
2.2	Čarmonij	24
3	Osnovni detektorji delcev	29
3.1	Meritev gibalne količine	29
3.2	Identifikacija nabitih delcev	31
4	Amplitude procesov in propagatorji	35
4.1	Teorija perturbacij	35
5	Struktura hadronov	37
5.1	Elastično sipanje elektronov na hadronih	37
5.2	Neelastično sipanje elektronov na hadronih	43
A	Operator tirne vrtilne količine	45
B	Rotacijske funkcije	47
C	Determinanta	49
D	Clebsch-Gordanovi koeficienti	51

E Parnost dvo-fotonskega stanja	53
References	55
Index	57

Poglavje 1

Simetrije in grupe

Abstract ...

1.1 Rotacije

Rotacije (transformacije) v prostoru (tri rotacije okoli vsake od osi) tvorijo grupo :

$$\begin{aligned}R_j R_i &= R_k \\R_i(\theta = 0) &= I \\R_3(R_2 R_1) &= (R_3 R_2) R_1 .\end{aligned}\tag{1.1}$$

Lastnosti zgoraj predstavljajo lastnosti grupe: produkt dveh elementov je prav tako element grupe, obstaja identiteta (ničelna rotacija), rotacije so asociativne. Zavedati se je seveda treba, da rotacije niso komutativne, $R_i R_j \neq R_j R_i$.

Rotacije spadajo v posebno skupino grup - Lijeve grupe . Za slednje velja, da so vsi elementi grupe povsem določeni s produktom zaposrednih infinitezimalnih transformacij; matematiki temu pravijo, da je grupa določena z okolico identitete.

Fizikalni zakoni niso odvisni od izbire koordinatnega sistema. Če torej označimo valovno funkcijo, ki opisuje stanje nekega sistema, s $|\psi\rangle$, enako funkcijo v zarotiranem sistemu s $|\psi'\rangle$, torej

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle ,\tag{1.2}$$

kjer U predstavlja operator rotacije , tedaj mora veljati

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2 = |\langle\phi|U^\dagger U|\psi\rangle|^2 .\tag{1.3}$$

Operator U , ki opiše rotacijo, mora biti unitaren, $U^\dagger U = I$. Nabor operatorjev $U(R_1), U(R_2), \dots$ tvori grupo z enako strukturo kot originalna grupa rotacij. Takemu naboru pravimo unitarna reprezentacija grupe (rotacij) .

Hamiltonian, s katerim opišemo sistem, mora biti invarianten na rotacije:

$$\langle \phi' | H | \psi' \rangle = \langle \phi | U^\dagger H U | \psi \rangle = \langle \phi | H | \psi \rangle . \quad (1.4)$$

Velja torej

$$\begin{aligned} H &= U^\dagger H U \\ UH - HU &= 0 \\ [U, H] &= 0 , \end{aligned} \quad (1.5)$$

U torej komutira s Hamiltonianom. Če zapišemo enačbo gibanja, recimo časovno odvisno Schrödingerjevo enačbo ,

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle , \quad (1.6)$$

in hermitsko adjungirano enačbo

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi| = \langle \psi| H^\dagger , \quad (1.7)$$

ter upoštevamo hermitskost Hamiltoniana, $H^\dagger = H$, ugotovimo za pričakovano vrednost operatorja U

$$\begin{aligned} & -i \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | U | \psi(t) \rangle = \\ & = -\langle \psi(t) | H U | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | U H | \psi(t) \rangle = \\ & = \langle \psi(t) | UH - HU | \psi(t) \rangle = 0 . \end{aligned} \quad (1.8)$$

Posledica invariantnosti H na rotacije je torej, da je pričakovana vrednost operatorja U konstanta gibanja.

Zapišimo rotacijo okoli tretje osi (ali osi z) za infinitezimalen kot ε do linearnega člena:

$$U = 1 - i\varepsilon J_3 . \quad (1.9)$$

Operator J_3 , ki smo ga uporabili pri zapisu rotacije, imenujemo generator rotacij okoli tretje osi. Dejstvo, da je operator U hermitski pomeni, da je hermitski tudi operator J_3 :

$$1 = U^\dagger U = (1 + i\varepsilon J_3^\dagger)(1 - i\varepsilon J_3) \approx 1 + i\varepsilon(J_3^\dagger - J_3) . \quad (1.10)$$

Hermitskost operatorja J_3 pa pomeni, da njegova pričakovana vrednost predstavlja kvantno-mehansko opazljivko .

Če želimo ugotoviti, kaj predstavlja operator J_3 , moramo zapisati zvezo med zarotirano in orgininalno valovno funkcijo sistema. $\psi'(\mathbf{r})$, ki predstavlja zarotirano stanje na mestu \mathbf{r} , mora biti enaka kot $\psi(R^{-1}\mathbf{r})$, ki opisuje originalno (nezarotirano) stanje na mestu $R^{-1}\mathbf{r}$.¹ Velja tudi en. (1.2). Če izpišemo učinek infinitezimalne

¹ Potiho smo skrajšali zapis $|\psi\rangle$ v zgolj ψ . Obe notaciji bomo tudi v prihodnje izmenjavali, kjer bo to nedvoumno.

rotacije do linearnega reda:

$$\begin{aligned}
 U\psi(x, y, z) &= \psi(R^{-1}\mathbf{r}) \approx \psi(x + \varepsilon y, y - \varepsilon x, z) \approx \\
 &\approx \psi(x, y, z) + \varepsilon \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \\
 &= (1 - i\varepsilon(xp_y - yp_x))\psi.
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

V zadnji vrstici smo uporabili definicijo operatorja gibalne količine, $\mathbf{p} = -(i/\hbar)\nabla$. Upošteva je en. (1.9) lahko v J_3 prepoznamo operator tretje komponente tirne vrtilne količine. J_3 je torej eden od generatorjev grupe rotacij, preostala generatorja grupe sta še J_1 in J_2 (dodatek A).

Ker operator U komutira s Hamiltonianom, velja enako tudi za J_3 . To seveda pomeni, da je pričakovana vrednost operatorja J_3 konstanta gibanja (ali dobro kvantno število). Posledica simetrije sistema na rotacije je torej ohranitev vrtilne količine.

Iz infinitezimalnih rotacij lahko sestavimo rotacijo za končen kot (kot velja za elemente Lijeve grupe):

$$U(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} (U(\varepsilon))^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - i\frac{\theta}{n}J_3)^n = e^{-i\theta J_3}. \tag{1.12}$$

Pri tem velja spomniti, da operator v eksponentu smiselno uporabimo z razvojem

$$e^{-i\theta J_3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-iJ_3)^n \frac{\theta^n}{n!} \tag{1.13}$$

1.2 Simetrije in ohranitveni zakoni

V prejšnjem razdelku smo videli, da invariantnost Hamiltoniana na rotacije privede do ohranitve tirne vrtilne količine. Poglejmo si povezavo med simetrijami in ohranitvenimi zakoni še nekoliko splošneje.

V klasični mehaniki sledijo enačbe gibanja iz Lagrangeove enačbe,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \tag{1.14}$$

kjer je L Lagrangian, razlika med kinetično in potencialno energijo sistema, $L = T - V$, q_i so (generalizirane) koordinate sistema, \dot{q}_i pa njihovi časovni odvodi, $\dot{q}_i = dq_i/dt$. V kvantni mehaniki naredimo preskok iz diskretnega sistema (recimo sistema delcev s koordinatami q_i) v zvezen sistem (recimo sistem, opisan z valovno funkcijo ϕ). Lagrangian torej ni več funkcija $L(q_i, \dot{q}_i, t)$, pač pa funkcija $L(\phi, \partial\phi/\partial x_\mu, x_\mu)$, x_μ seveda predstavlja četverec časa in koordinat. Lagrangeova enačba postane Euler-Lagrangeova enačba

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial\phi/\partial x_\mu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0, \quad (1.15)$$

ali krajše (z uvedbo četverca odvodov)

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0, \quad (1.16)$$

Če dopustimo možnost kompleksne valovne funkcije, tedaj Euler-Lagrangeova enačba velja neodvisno za ϕ in ϕ^* ; poleg en. (1.16) imamo torej še enačbo

$$\partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi^*)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi^*} = 0, \quad (1.17)$$

Z ustreznimi izbiro Lagrangiana,

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^*\phi, \quad (1.18)$$

in en. (1.16) in (1.17) dobimo Klein-Gordonovo enačbo za ϕ in ϕ^* :

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi^{(*)} + m^2\phi^{(*)} = 0. \quad (1.19)$$

Lagrangian (1.18) je očitno invarianten na transformacijo $\phi' = e^{i\alpha}\phi$. Pri taki transformaciji se L ne spremeni. Če si ogledamo inifinitezimalno transformacijo te oblike, $\phi' = (1 + i\alpha)\phi$, mora veljati

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\delta(\partial^\mu\phi) + \frac{\partial L}{\partial\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\delta(\partial^\mu\phi^*) = 0 \quad (1.20)$$

Ob upoštevanju $\delta\phi = i\alpha\phi$ in $\delta(\partial^\mu\phi) = i\alpha\partial^\mu\phi$ data prva dva člena v zgornji enačbi

$$\frac{\partial L}{\partial\phi}i\alpha\phi + \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}i\alpha\partial^\mu\phi, \quad (1.21)$$

kar lahko prepišemo v obliko

$$i\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial\phi} - \partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)} \right) \right] \phi + i\alpha\partial^\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)} \phi \right). \quad (1.22)$$

Razlika v oglatem oklepaju je po en. (1.16) enaka nič. Analogno lahko zapišemo druga dva člena enačbe (1.20). Na ta način dobimo

$$\begin{aligned} \delta L &= i\alpha\partial^\mu \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi)}\phi - \frac{\partial L}{\partial(\partial^\mu\phi^*)}\phi^* \right], \\ &= i\alpha\partial^\mu \left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - (\partial_\mu\phi)\phi^* \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Spomnimo se kontinuitetne enačbe,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.24)$$

oz. v zapisu s četverci $\partial_\mu j^\mu = 0$.² Enačba (1.23) pa pravi prav to, namreč da je odvod nekega četverca (toka) enak nič. Iz enačbe razberemo, da je tok, ki se ohranja, oblike

$$(\partial^\mu \phi^*) \phi - (\partial^\mu \phi) \phi^*, \quad (1.25)$$

kar je četverec toka verjetnosti, ki sledi iz Klein-Gordonove enačbe. Simetrija Lagrangiana na transformacijo $\phi' = e^{i\alpha} \phi$ torej privede do ohranitve toka (1.25). Če le-tega pomnožimo z nabojem ustreznega delca, dobimo četverec elektromagnetnega toka, ki se ohranja.

Zgornje dejstvo je zgolj primer splošnejše zakonitosti: vsaka simetrija, ki jo izraža fizikalni sistem, se odrazi v ohranitvenem zakonu. To zakonitost imenujemo teorem Noetherjeve, imenovan po nemški matematičarki Emmy Noether, ki ga je dokazala l. 1915.

1.3 Grupa SU(2)

Stanja z velikostjo vrtilne količine j in tretjo komponento m označimo z $|j, m\rangle$ (glej dodatek A). Najosnovnejšo reprezentacijo grupe rotacij (za najmanjši netrivialen $j = 1/2$) lahko sestavimo iz generatorjev oblike

$$J_i = (1/2) \sigma_i, \quad (1.26)$$

kjer so σ_i Paulijeve matrike :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$(1.28)$$

Za operatorje oblike $U_i = e^{i\sigma_i}$ velja $\det(U_i) = 1$, ker so sledi matrik σ_i enake nič (glej dodatek C). Operatorji U_i tvorijo grupo, ki jo imenujemo SU(2).³ Paulijeve matrike predstavljajo reprezentacijo grupe SU(2) za $j = 1/2$, ali dvodimenzionalno reprezentacijo (dimenzija je določena kot $2j + 1$). Za višje j obstajajo reprezentacije, ki jih lahko izrazimo z reprezentacijo za $j = 1/2$.

² Mimogrede smo uvedli četverec toka, $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$.

³ SU(2) označuje posebno grupo unitarnih matrik 2x2, katerih determinanta je enaka ena. Ta grupa je podgrupa splošnejše grupe U(2), ki jo sestavljajo vse unitarne matrike dimenzije 2x2.

Grupa SU(2) ni vezana izključno na obravnavo vrtilne količine oz. spina. Paulijeve matrike predstavljajo tudi reprezentacijo grupe rotacij v prostoru izospina. Podobno kot imamo dve osnovni stanji delca s spinom $1/2$ ($m = \pm 1/2$), imamo dve stanji delca z izospinom $1/2$ ($i_3 = \pm 1/2$, proton in nevtron ali, na nivoju kvarkov, kvarka u in d). Ti stanji lahko označimo kot

$$|p\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Pri tem imamo svobodo odločitve, kateremu od obeh stanj pripišemo $I_3 = +1/2$ in kateremu $I_3 = -1/2$. Dogovor je, da ima najbolj pozitivno nabit delec (v tem primeru proton) največjo tretjo komponento izospina. Seveda velja

$$I_3|p\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}|p\rangle, \quad (1.30)$$

proton je lastno stanje operatorja tretje komponente izospina $I_3 = (1/2)\sigma_3$ z lastno vrednostjo $i_3 = +1/2$. Operatorja višanja in nižanja tretje komponente izospina sta $(1/2)(\sigma_1 \pm i\sigma_2)$.

Pri določanju izospina za antidelce naletimo na komplikacijo. Oglejmo si rotacijo v prostoru izospina okoli druge osi za kot π :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p' \\ n' \end{bmatrix} &= e^{i\pi\sigma_2/2} \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = \\ &= \left(1 - i\frac{\pi}{2}\sigma_2 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}i\left(\frac{\pi}{2}\right)^3\sigma_2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots\right) \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = \\ &= \left(\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots\right] - i\sigma_2\left[\frac{\pi}{2}\sigma_2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \dots\right]\right) \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = \\ &= \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sigma_2 \sin\frac{\pi}{2}\right) \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = -i\sigma_2 \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

V zgornji zpeljavi smo upoštevali $(\sigma_2) = 1$, $(\sigma_2)^3 = \sigma_2$, itd.

Antiproton in antinevtron definiramo z operatorjem konjugacije naboja, $C|p\rangle = |\bar{p}\rangle$ in $C|n\rangle = |\bar{n}\rangle$. Če s tem operatorjem delujemo na en. (1.31) dobimo

$$\begin{bmatrix} \bar{p}' \\ \bar{n}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

oziroma $\bar{p}' = -\bar{n}$ in $\bar{n}' = \bar{p}$. Zgornja enačba sicer izgleda analogna transformaciji za delce, vendar: v en. (1.31) je zgornje stanje v dubletu p , torej najbolj pozitivno nabito stanje. V en. (1.32) pa je zgoraj \bar{p} , torej najbolj negativno nabito stanje. Zato dublet antidelcev preuredimo tako, da je na vrhu \bar{n} in uvedemo dodaten negativen predznak, da ostaja transformacijska matrika enaka:

$$\begin{bmatrix} -\vec{n}' \\ \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\vec{n} \\ \vec{p} \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

Ali povedano drugače: da se dublet antidelcev pri rotacijah v prostoru izospina transformira enako, kot dublet delcev, definiramo kot lastno stanje tretje komponente izospina z lastno vrednostjo $i_3 = +1/2$ stanje $-\lvert\vec{n}\rangle$.

1.4 Izražava reprezentacij

Če imamo dva sistema s kvantnimi števili j_A, m_A in j_B, m_B , ju lahko opišemo s produktom enosistemskih funkcij $\lvert j_A, m_A \rangle \lvert j_B, m_B \rangle$. Druga možnost opisa je z uporabo operatorja vsote

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_A + \mathbf{J}_B \quad (1.34)$$

Lastni vrednosti $j(j+1)$ operatorja J^2 in m operatorja J_3 sta prav tako dobri kvantni števili. Namesto s kvantnimi števili j_A, j_B, m_A, m_B lahko sistem opišemo s kvantnimi števili j_A, j_B, j, m . Slednje stanje lahko izrazimo s produktom enosistemskih stanj kot

$$\lvert j_A, j_B, j, m \rangle = \sum_{m_A, m_B} C_{m_A, m_B}^{j, m} \lvert j_A, m_A \rangle \lvert j_B, m_B \rangle. \quad (1.35)$$

Koeficiente $C_{m_A, m_B}^{j, m}$ imenujemo Clebsch-Gordanovi koeficienti (glej dodatek D). V splošnem lahko produkt dveh reprezentacij dimenzij $2j_A + 1$ in $2j_B + 1$ izrazimo kot vsoto reprezentacij dimenzij $2j + 1$, kjer j zavzame vse vrednosti, kot smo jih vajeni pri seštevanju vrtilnih količin, torej $j = \lvert j_A - j_B \rvert, \lvert j_A - j_B \rvert + 1, \dots, j_A + j_B$.

Oglejmo si primer. Sistem dveh delcev s spinom $j_A = j_B = 1/2$ ima lahko spin $j = 1$ ali $j = 0$. Za vsakega posebej obstaja dvodimenzionalna reprezentacija s Paulijevimi matrikami. Za sistem obstaja tri- in eno-dimenzionalna reprezentacija, kar simbolično zapišemo kot

$$\underbrace{2}_{2 \cdot 1/2 + 1} \otimes \underbrace{2}_{2 \cdot 1/2 + 1} = \underbrace{3}_{2 \cdot 1 + 1} \oplus \underbrace{1}_{2 \cdot 0 + 1}. \quad (1.36)$$

Z drugimi besedami: dva delca s spinom $1/2$ sestavljata triplet z $j = 1$ in singlet z $j = 0$. Če nadaljujemo še korak dalje, lahko dobljenemu sistemu dodamo še en delec s spinom $1/2$:

$$(2 \otimes 2) \otimes 2 = (3 \oplus 1) \otimes 2 = \underbrace{4}_{2 \cdot 3/2 + 1} \oplus \underbrace{2}_{2 \cdot 1/2 + 1} \oplus \underbrace{2}_{2 \cdot 1/2 + 1}. \quad (1.37)$$

trije delci s spinom $1/2$ sestavljajo kvadruplet z $j = 3/2$ in dva dubleta z $j = 1/2$.

Konkretnější primer si lahko ogledamo na primeru izospina. Pioni, π^+, π^0 in π^- , sestavljajo izospinski triplet ($i(\pi) = 1$). Protoni imajo izospin $1/2$. V trku pospešenih pionov s protoni v tarči opazimo tipično resonančno obliko preseka pri težiščni en-

ergiji trka okoli 1.2 GeV. Tvori se vmesno kratkoživo stanje, Δ .⁴ Energijska odvisnost sipalnega preseka pri tvorbi vmesne resonance R za proces $a + b \rightarrow R \rightarrow c + d$ ima resonančno obliko,

$$\sigma \propto \frac{2j+1}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}/4}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (1.38)$$

kjer je j spin vmesne resonance, $s_{a,b}$ sta spina začetnih delcev, $\Gamma_{i,j}$ je razpadna širina za $R \rightarrow ij$, Γ pa je celotna razpadna širina resonance R , ki je vsota delnih razpadnih širin, $\Gamma = \sum_f \Gamma_f$. E je težiščna energija trka, E_R pa mirovna energija resonance, v naravnih enotah torej kar m_R . Primer izmerjenega preseka za sipanje pionov na protonih je na sliki 1.1. Opaziti je izrazit vrh pri masi resonance Δ , $m(\Delta) \approx 1232$ MeV. Poleg tega lahko opazimo, da je razmerje presekov za sipanji $\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+ p$ in $\pi^- p \rightarrow \Delta^0 \rightarrow \pi^- p$ (elastični sipanji) precejšnje, v vrhu znaša okoli $\sigma_{\pi^+ p} / \sigma_{\pi^- p} \sim 195 \text{ mb} / 22 \text{ mb} \sim 8,9$.

Ali lahko tako razmerje razumemo na podlagi izospina vpletenih delcev? Omenjeno sipanje je tipičen proces, ki poteka preko močne interakcije, shematski Feynmanov diagram je prikazan na sliki 1.2. Močna interakcija ohranja izospin. V začetnem stanju imamo pion (pozitivno ali negativno nabit) ter proton. Produkt izospinskega tripleta in dubleta lahko v skladu z diskusijo v tem razdelku predstavimo kot

$$3 \otimes 2 = 4 \oplus 2, \quad (1.39)$$

torej kot vsoto kvadrupleta in dubleta (ali z drugimi besedami, začetno stanje ima lahko $i = 3/2$ ali $i = 1/2$). Resonance Δ sestavljajo kvadruplet, saj imamo štiri nabojna stanja, električni naboj pa je povezan s tretjo komponento izospina preko $q = i_3 + (b+s)/2$ (b je barionsko število in s čudnost; za Δ^{++} je $b = 1$ in $s = 0$, torej je $i_3 = 3/2$). Z uporabo enačbe (1.35) in vrednostmi Clebsch-Gordanovih koeficientov iz dodatka D lahko zapišemo (notacija je $|i, i_3\rangle$)

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle|p\rangle &= |1, +1\rangle|1/2, +1/2\rangle = |3/2, +3/2\rangle \\ |\pi^-\rangle|p\rangle &= |1, -1\rangle|1/2, +1/2\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

Presek za sipanje je $\sigma \propto |\langle f|H|i\rangle|^2$. Ker močna interakcija ohranja izospin lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi^+ p} &\propto |\langle 3/2, +3/2|H|3/2, +3/2\rangle|^2 = M_{3/2}^2 \\ \sigma_{\pi^- p} &\propto \left| \sqrt{\frac{1}{3}}\langle 3/2, -1/2| - \sqrt{\frac{2}{3}}\langle 1/2, -1/2|H\left| \sqrt{\frac{1}{3}}|3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1/2, -1/2\rangle \right|^2 = \right. \\ &= \left| \frac{1}{3}M_{3/2} + \frac{2}{3}M_{1/2} \right|^2, \end{aligned} \quad (1.41)$$

⁴ Δ je barion, vezano stanje treh u in d kvarkov, podobno kot p in n . $\Delta^- = ddd$, $\Delta^0 = udd$, $\Delta^+ = uud$, $\Delta^{++} = uuu$.

kjer M_i označuje prispevek začetnega stanja in vmesne resonance z izospinom i . Pri ustrezni težiščni energiji je $M_{3/2} \gg M_{1/2}$ (resonančni presek za sipanje preko resonance Δ in tako dobimo

$$\frac{\sigma_{\pi^+p}}{\sigma_{\pi^-p}} = \frac{M_{3/2}^2}{(1/3)^2 M_{3/2}^2} = 9, \quad (1.42)$$

kar dobro ustreza izmerjeni vrednosti.

1.5 Grupa SU(3) za barve

Nabor unitranih matrik reda 3×3 z determinanto 1 tvori grupo SU(3). Število tri nas v fiziki delcev (med drugim) spomni na število barv ali barvnih nabojev, katere nosijo delci sposobni močne interakcije. Pogosto jih simbolno označimo kot R , G in B (angleško red, green in blue). Generatorjev grupe SU(3) je osem, lahko so katerekoli linearno neodvisne matrike 3×3 z ničelno sledjo. Le dve od teh matrik sta lahko diagonalni. Ponavadi za ti dve vzamemo

$$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (1.43)$$

Lastna stanja lahko zapišemo kot

$$|R\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |G\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |B\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.44)$$

Podobno kot operator višanja in nižanja tretje komponente izospina deluje na stanji $|p\rangle$ in $|n\rangle$:

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2)|n\rangle = |p\rangle, \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2)|p\rangle = |n\rangle, \quad (1.45)$$

lahko definiramo operatorje “višanja” in “nižanja” barvnega naboja:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)|G\rangle &= |R\rangle \\ \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)|B\rangle &= |R\rangle \\ \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)|B\rangle &= |G\rangle \end{aligned} \quad (1.46)$$

Močna interakcija je invariantna na rotacije v prostoru barv, torej na transformacije $|G\rangle \leftrightarrow |R\rangle$, $|B\rangle \leftrightarrow |R\rangle$ in $|G\rangle \leftrightarrow |B\rangle$. To imenujemo barvna simetrija SU(3), ki je eksaktna simetrija. V nadaljevanju se bomo srečali s simetrijo SU(3) druge vrste,

ki pa ni eksaktna, pač pa približna. Tudi izospinska simetrija, ki jo opišemo z grupo $SU(2)$, je zgolj približna. Proton in nevtron namreč tudi ob odsotnosti elektromagnetne interakcije nista povsem identična delca, njuni masi sta rahlo različni. Enako na kvarkovskem nivoju veja za kvarka u in d . Posledica barvne simetrije $SU(3)$ je ohranitev barvnega naboja. Primer je skiciran na sl. 1.3.

Gluoni, posredniki močne interakcije, delci brez mase in s spinom 1, nosijo barvo.⁵ Ta je, kot je razvidno iz sl. 1.3, sestavljena iz barve in anti-barve. Struktura grupe $SU(3)$ je taka, da velja

$$3 \otimes 3 = 8 \oplus 1. \quad (1.47)$$

Gluoni lahko torej nastopajo v barvnem oktetu in singletu. Člane prvega lahko simbolično zapišemo kot $G\bar{B}$, $R\bar{B}$, $G\bar{R}$, $R\bar{G}$, $B\bar{R}$, $B\bar{G}$, $(1/\sqrt{6})(R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B})$ in $(1/\sqrt{2})(R\bar{R} - G\bar{G})$. Barvni singlet je $(1/\sqrt{3})(R\bar{R} + G\bar{G} + B\bar{B})$. V naravi prosti nastopajo le delci, ki imajo nevtralen barvni naboj - so brezbarvni. Vsi hadroni so barvno nevtralni. Gluon, član barvnega singleta, je delec brez barvnega naboja. Nastopal bi lahko prost v naravi. Posrednik interakcije, ki je brezmasen, pomeni interakcijo neskončnega dosega (kot brezmasen foton posreduje elektromagnetno interakcijo neskončnega dosega). Ker vemo, da prostih gluonov v naravi ne opazimo, ter da je doseg močne interakcije velikostnega reda fm, barvnega singleta v naravi ni. Fizikalne gluone predstavlja osem članov okteta.

Lahko pa barvni singlet razumemo v drugem smislu: kot barvni del valovne funkcije kvarka in anti-kvarka (prva barva označuje barvni naboj kvarka, druga barvni naboj anti-kvarka). To pomeni, da so delci sestavljeni kot $q\bar{q}'$ brezbarvni in nastopajo v naravi. To so seveda mezoni. Iz treh barvnih nabojev lahko prav tako sestavimo brezbarvno singletno stanje: $(1/\sqrt{6})(RGB - GRB + GBR - BGR + BRG - RBG)$. To predstavlja barvni del valovne funkcije barionov, ki prav tako nastopajo v naravi. Mimogrede lahko preverimo, da je omenjeno stanje treh kvarkov res singletno. Če nanj delujemo s katerikoli operatorjem višanja ali nižanja barvnega naboja iz en. (1.46) dobimo nič.

Na podlagi zahteve po nevtralnem barvnem naboju lahko ugotovimo, da v naravi lahko nastopajo delci sestavljeni kot $q\bar{q}$ (mezoni), qqq (barioni), pa tudi $q\bar{q}q\bar{q}$ (tetrakvarki), $qqqq\bar{q}$, gg , $gggg$, ... Poleg barionov in mezonov dandanes obstajajo močni eksperimentalni dokazi o obstoju vezanih stanj $q\bar{q}q\bar{q}$, medtem ko ostale konfiguracije kvarkov in gluonov še niso eksperimentalno potrjene.

Posledica barvne nevtralnosti hadronov je tudi manjša verjetnost nekaterih razpadov, ki jih imenujemo barvno potlačeni. Primer je prikazan na sl. 1.4. Ker morajo biti nastali hadroni barvno nevtralni, morajo imeti nastali kvarki ustrezne barvne naboje, ki dajo skupaj s kvarki iz prvotnih hadronov nevtralen barvni naboj. V primeru navadnih drevesnih diagramov (primer $D^0 \rightarrow \pi^+ K^-$) imata lahko kvarka, ki nastaneta iz šibkega bozona W^+ katerokoli od barvnih kombinacij $R\bar{R}$, $G\bar{G}$ ali $B\bar{B}$. V primeru barvno potlačenega diagrama (primer $D^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$) pa morata imeti kvarka, ki nastaneta iz bozona ravno anti-barvi kvarkov, s katerima tvorita končne

⁵ Trditev "gluoni nosijo barvo" razumemo v smislu "gluoni so barvno nabiti" oz. "gluoni imajo barvni naboj".

(berzbarvne) hadrone. V primeru, da imata začetna kvarka v mezonu D^0 barvi $R\bar{R}$ imata lahko nastala kvarka le kombinacijo $\bar{R}R$, kar je tretjina vseh možnosti. Tako lahko naivno pričakujemo, da je verjetnost za barvno potlačen razpad približno tretjina tiste za enakovreden drevesni razpad. Ker imajo mezoni π^+ in π^0 , kot tudi mezoni K^- in \bar{K}^0 približno enake mase, ter ker so elementi matrike CKM, ki nastopajo v prikazanih razpadih, enaki, lahko pričakujemo za razmerje razvejitenih razmerij (verjetnosti za določen razpad) $Br(D^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0)/Br(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-) \sim 1/3$. V resnici so hadroni zapletenejše strukture kot opisana slika, izmerjena vrednost je $Br(D^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0)/Br(D^0 \rightarrow \pi^+ K^-) \approx 0,56$.

1.6 Grupa SU(3) za okuse

Ker imata kvarka u in d približno enaki masi in ker sta glede močne interakcije enakovredna⁶ ju lahko obravnavamo kot enaka delca, ki se razlikujeta po tretji komponenti izospina. Močna interakcija je v zelo dobrem približku invariantna na izospin. Razumljivo je pomisliti na možnost razširitve take simetrije z ostalimi kvarki, najprej seveda s kvarki s . Pri tem se moramo vnaprej zavedati, da bo simetrija v tem primeru precej bolj približna kot izospinska, saj je kvark s znatno težji od kvarkov u in d (nabiti pioni, sestavljeni iz kvarkov u in d imajo maso okoli $140 \text{ MeV}/c^2$, mezon ϕ , sestavljen iz $s\bar{s}$, pa okoli $1 \text{ GeV}/c^2$). Medtem ko ima izospinska simetrija lastnosti grupe $SU(2)$, kot je opisano v razdelku 1.3, imamo v primeru simetrije na okus treh kvarkov opravka z grupo $SU(3)$, ki jo v tem primeru imenujemo okusna simetrija $SU(3)$. Algebro te grupe sestavimo iz generatorjev grupe $SU(3)$, ki smo jih omenili v razdelku 1.5. Na tem mestu zapišimo vseh osem generatorjev, ki jih imenujemo Gell-Mannove matrike:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \lambda_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \lambda_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.48}$$

Če tri okusna stanja predstavimo z

⁶ Ne pa seveda glede elektromagnetne in šibke interakcije, nenazadnje ima prvi naboj $2/3e_0$, drugi pa $-1/3e_0$.

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |d\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |s\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1.49)$$

vidimo, da matrike $(1/2)(\lambda_i \pm \lambda_j)$ predstavljajo operatorje višanja in nižanja okusa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2)|d\rangle &= |u\rangle & \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2)|u\rangle &= |d\rangle \\ \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5)|s\rangle &= |u\rangle & \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5)|u\rangle &= |s\rangle \\ \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7)|s\rangle &= |d\rangle & \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7)|d\rangle &= |s\rangle. \end{aligned} \quad (1.50)$$

V diagramu kvantnih števil tretje komponente izospina in čudnosti (slednjo pripišemo kvarkom s , $s(s) = -1$ in $s(\bar{s}) = 1$, medtem ko $i_3(s) = 0$) lahko razvrstimo kvarke u , d in s kot je prikazano na sl. 1.5.

Če iz teh kvarkov in anti-kvarkov sestavimo mezone imamo $3^2 = 9$ kombinacij. Njihove okusne multiplete lahko dobimo tako, da vsakemu od kvarkov na sl. 1.5(levo) dodamo enega od anti-kvarkov, kar grafično ustreza dodajanju trikotnika anti-kvarkov (sl. 1.5(desno)) na vsako oglišče trikotnika kvarkov. To je prikazano na sl. 1.6. Dobimo 9 stanj (tri stanja z $s = 0$ in $i_3 = 0$). Ta stanja sestavljajo oktet okusnih stanj, ki se pri rotacijah v prostoru okusa transformirajo med seboj, ter singlet, ki pri rotacijah preide sam vase (sl. 1.6(desno), v skladu z en. (1.47)). Kako ugotovimo ustrezno multipletno sestavo presega program tega učbenika, spada v področje teorije grup. Lahko pa si ogleđamo grafični recept. Za poljuben nabor stanj, ki ga predstavimo v dveh dimenzijah (npr. v prostoru s in i_3 za primer naših mezonov), shematsko prikazan na sl. 1.7, lahko izrazimo multipliciteto posameznega heksagona kot

$$\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2). \quad (1.51)$$

Za prikazan največji heksagon je $m = 8$, $n = 4$ in multipliciteta (število vseh stanj) je 360. Enaka enačba velja tudi, ko heksagone zreduciramo v trikotnike. Tako ima modro označen trikotnik $m = 4$, $n = 0$ in multipliciteto 15. V primeru mezonskih stanj na sl. 1.8 prepoznamo šeterokotnik z $m = 1$ in $n = 1$, kar nam pove, da je multipliciteta stanj enaka 8 (oktet). Ko od vseh stanj odštejemo omenjeni šeterokotnik nam preostane le še eno stanje, singlet.

Devet mezonskih stanj torej sestavlja okusni oktet in singlet. V naravi opazimo mezone, označene na sl. 1.6, razen mezonov η_8 in η_0 , ki nastopata kot linearni kombinaciji $\eta = a\eta_0 + b\eta_8$ in $\eta' = -b\eta_0 + a\eta_8$.

Da je med barvno in okusno simetrijo $SU(3)$ bistvena razlika, namreč da je barvna simetrija eksaktna simetrija narave, medtem ko je okusna simetrija zgolj približna, kaže naslednji primer. Mezoni π^+ in K^+ razpadajo v nabiti lepton in nevtrino, proces je prikazan na sl. 1.9. Razpadno širino za tak razpad zapišemo kot

$$\Gamma(P^+ \rightarrow \ell^+ \nu_\ell) = \frac{G_F^2}{8\pi^2} f_P^2 m_\ell^2 m_P \left(1 - \frac{m_\ell^2}{m_P^2}\right) |V_{q_1 q_2}|^2, \quad (1.52)$$

kjer P predstavlja kateregakoli od mezonov⁷, G_F je Fermijeva konstanta, m_i označuje maso delca, $V_{q_1 q_2}$ pa ustrezen element matrike CKM. f_P je razpadna konstanta mezona, ki opiše dejstvo, da v procesu ne sodelujeta prosta kvarka, pač pa kvarka, ki sta vezana v hadronu. V primeru eksaktne okusne simetrije $SU(3)$ bi bili kvarki v pionih in kaonih vezani na identičen način. V tem primeru bi veljalo $f_K = f_\pi$. Meritve pa kažejo $f_K/f_\pi \approx 1,25$, torej na kršitev okusne simetrije $SU(3)$. V nadaljevanju se bomo srečali s procesi, ki v limiti eksaktne okusne simetrije sploh ne bi bili mogoči.

Aplikacija okusne simetrije na barione (stanja, sestavljena iz treh kvarkov) zahteva nekaj več dela kot pri mezonih. Tudi tu začnemo iz kvarkovskih stanj u , d in s (sl. 1.5(levo)). Namesto, da bi tem dodali anti-kvarke, jim najprej dodamo še en kvark, kot je prikazano na sl. 1.10. Na ta način dobimo 9 stanj, sestavljenih iz dveh kvarkov. Vsakemu od teh stanj v naslednjem koraku dodamo še en kvarkovski trikotnik, sl. 1.11. Rezultat je 27 osnovnih barionov, sestavljenih iz treh najlažjih kvarkov.

Razdelitev barionskih stanj na multiplete je mogoče ugotoviti po grafičnem principu, opisanem zgoraj. Na sl. 1.12 opazimo največji multipllet, trikotnik, ki ima po enačbi (1.51) $m = 3$, $n = 0$ in torej multipliciteto 10. To je torej deкупlet stanj, ko le-ta odštejemo ostanejo stanja z največjim multiplletom v obliki šesterokotnika ($m = 1$, $n = 1$, multipliciteta 8) - oktetom, v preostanku je še en oktet in končno še singlet. Razdelitev 27 barionskih stanj, sestavljenih iz kvarkov u , d in s je torej

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \quad (1.53)$$

⁷ V resnici velja enačba za vse psevdoskalarne mezone, torej π^+ , K^+ , D^+ , D_s^+ , ...

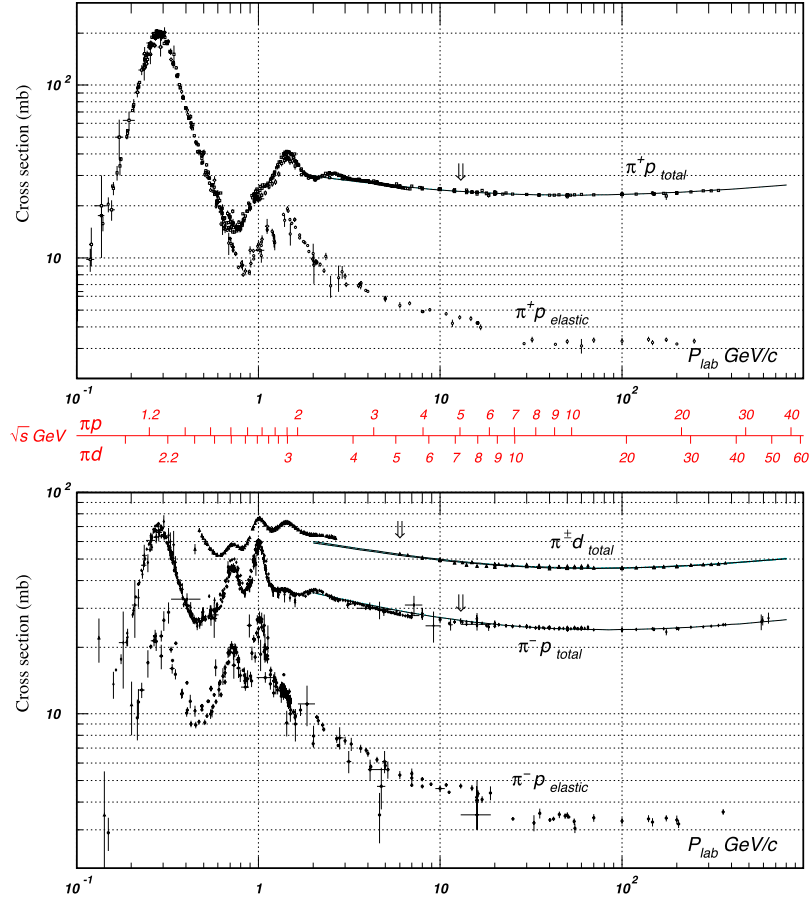


Figure 46.12: Total and elastic cross sections for $\pi^+ p$ and $\pi^+ d$ (total only) collisions as a function of laboratory beam momentum and total center-of-mass energy. Corresponding computer-readable data files may be found at <http://pdg.lbl.gov/current/xsect/>. (Courtesy of the COMPAS Group, IHEP, Protvino, April 2012)

Fig. 1.1 Povzeto po [1]. Izmerjeni sipalni preseki za sipanje πp v odvisnosti od težiščne energije. V okolici 1,2 GeV je presek močno povečan zaradi sipanja preko vmesnega stanja - resonanc Δ (skali sta logaritemski).

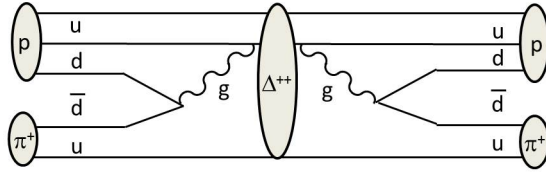


Fig. 1.2 Proces $p\pi^+ \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow p\pi^+$.

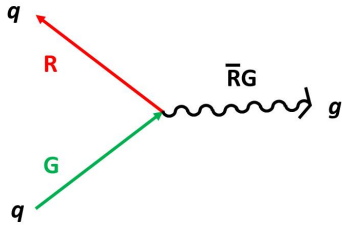


Fig. 1.3 Ohranitev barvnega naboja v vozlišču kvarka in gluona.

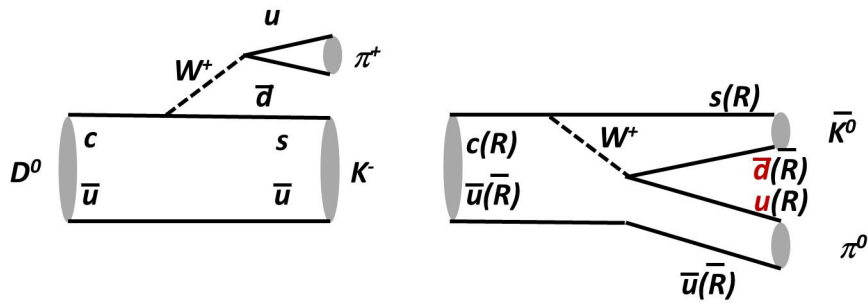


Fig. 1.4 Feynmanov diagram za razpad $D^0 \rightarrow \pi^+ K^-$ in $D^0 \rightarrow \pi^0 \bar{K}^0$. V prvem primeru gre za navaden drevesni diagram (ang. tree diagram), pri katerem se barva začetnih kvarkov iz mezona D^0 (brezbarven) prenese v kvarka, ki sestavljata K^- ; barvi kvarka in anti-kvarka, ki sestavljata π^+ pa sta lahko katerakoli od kombinacij $R\bar{R}$, $G\bar{G}$ ali $B\bar{B}$. V drugem primeru gre za diagram, ki ga imenujemo barvno potlačen (ang. colour suppressed). Barvi kvarkov, ki nastaneta iz šibkega bozona W^+ morata biti ravno anti-barvi kvarkov, ki nastaneta iz začetnih kvarkov (če D^0 npr. sestavljata kvarka $R\bar{R}$ morata imeti nastala kvarka barvi $\bar{R}R$; to je le ena od treh možnosti).

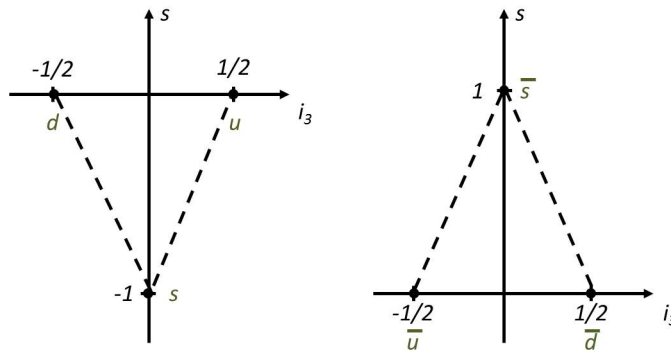


Fig. 1.5 Tretja komponenta izospina in čudnost za kvarke u , d in s (levo) ter za njihove anti-delce (desno).

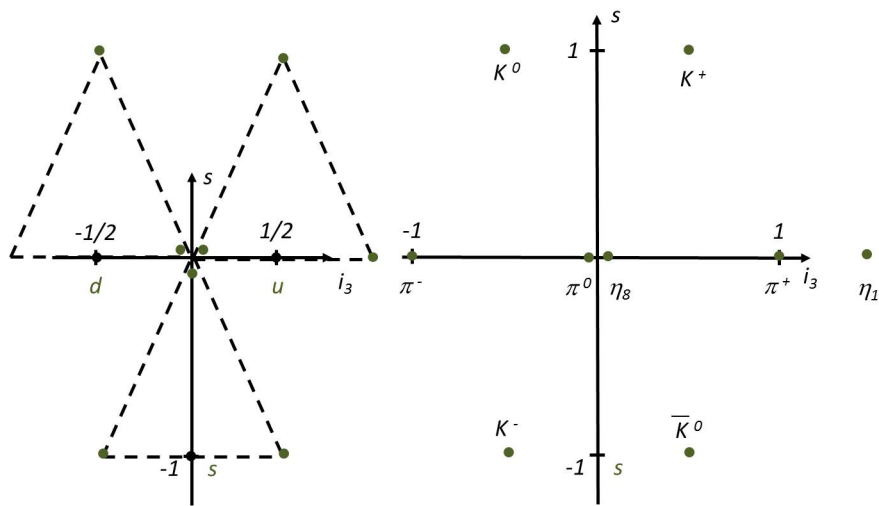


Fig. 1.6 Na vsako oglišče trikotnika kvarkov iz sl. 1.5(levo) dodamo trikotnik anti-kvarkov (označeni s prekinjenimi črtami). Dobimo stanja, označena z zelenimi pikami (levo). Stanja sestavljajo oktet in singlet mezonov (desno).

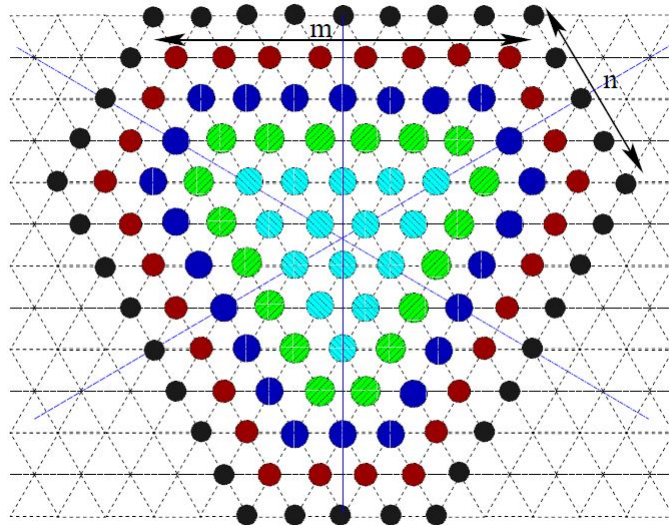


Fig. 1.7 Povzeto po [2].

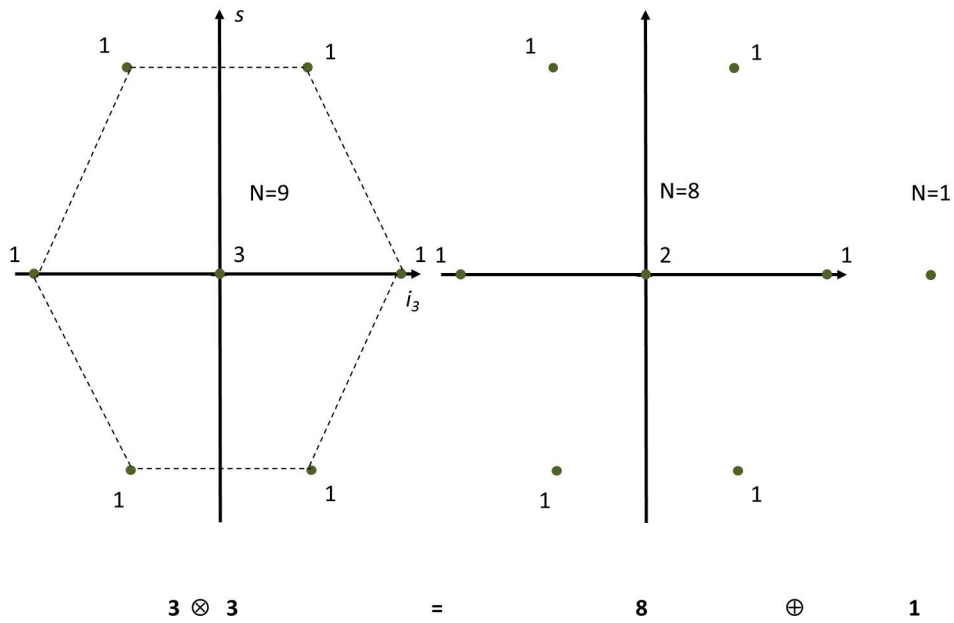


Fig. 1.8 Mezonka stanja, sestavljena iz kvarkov u, d in s (levo). Številke označujejo število stanj z dano čudnostjo in tretjo komponento izospina. Označen šesterokotnik ima multipliciteto 8. Ko od vseh stanj odštejemo ta oktet nam ostane še eno (singletno) stanje.

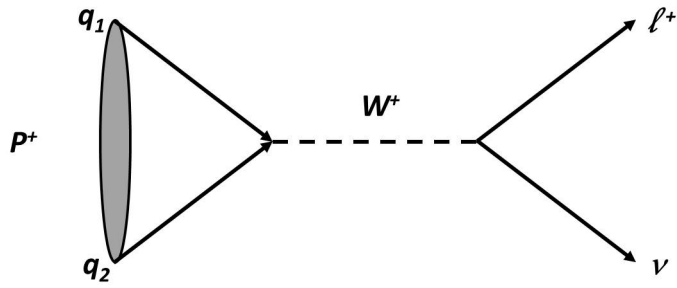


Fig. 1.9 Feynmanov diagram razpada mezona P^+ v nabit lepton in nevtrino.

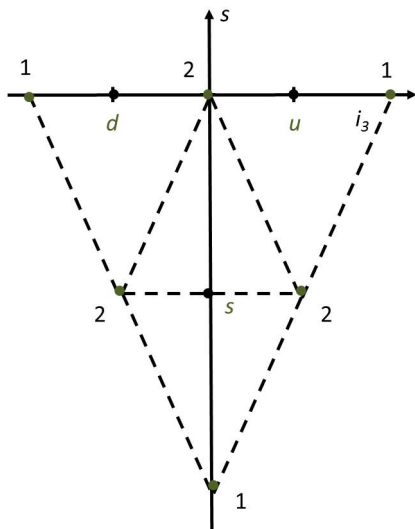


Fig. 1.10 Stanja (zelenе pike), ki jih dobimo, ko vsakemu od kvarkom u , d in s (črne pike) dodamo še en kvark. Številke prikazujejo število stanj z določeno čudnostjo in tretjo komponento izospina.

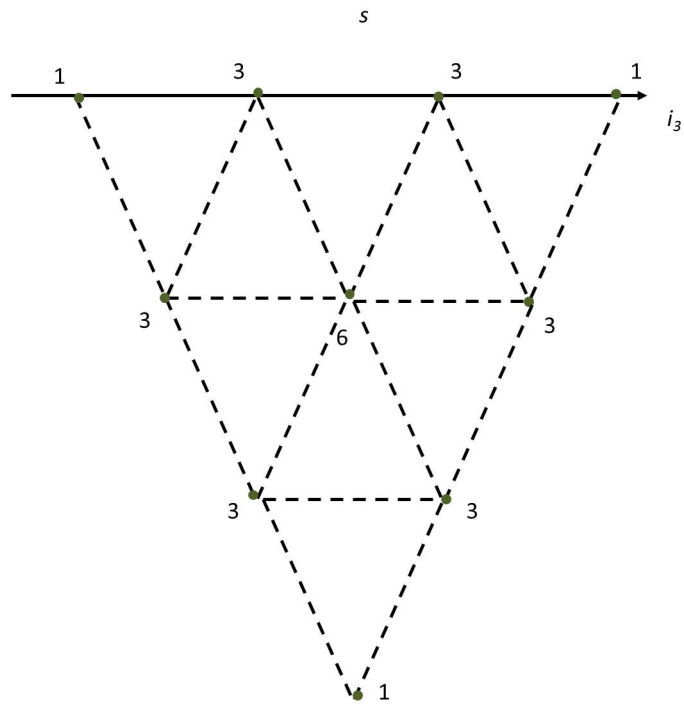


Fig. 1.11 Barioni, sestavljeni iz kvarkov u , d in s , ki jih dobimo, ko dvo-kvarkovskim stanjem na sl. 1.10 dodamo še en kvark. Številke prikazujejo število stanj z določeno čudnostjo in tretjo komponento izospina.

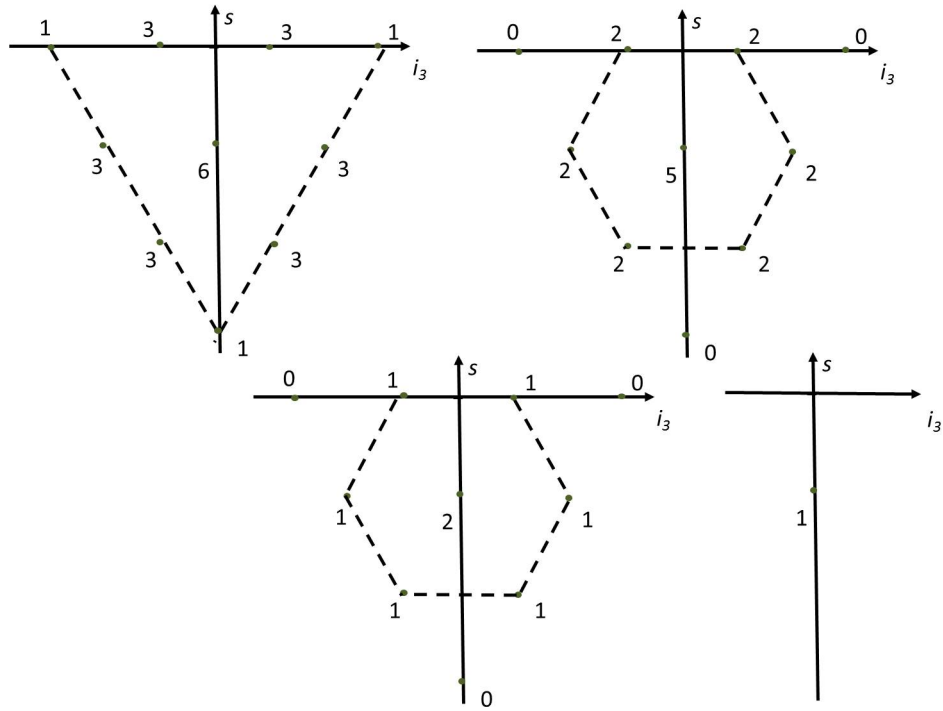


Fig. 1.12 Shematski prikaz razdelitve osnovnih barionov na multiplete. Največji multiplet je deku-plet, označen zgoraj levo. Po odštetju tega multipleta ostanejo stanja na sliki zgoraj desno. Največji multiplet v preostanku je označeni oktet, preostanek (spodaj levo) je še en enak oktet in singlet (spodaj desno).

Poglavje 2

Kvarkonij

Abstract ...

2.1 Osnovni mezoni in barioni

Mezoni, sestavljeni iz kvarkov u , d in s sestavljajo okusni oktet in singlet (sl. 1.8). Zavedati se moramo, da ima vsak član multipleta lahko spin 0 ali 1 (saj je sestavljen iz dveh kvarkov s spinom $1/2$). Celoten nabor osnovnih mezonov iz lahkih kvarkov¹ je tako prikazan na sl. 2.1. Kot smo omenili v razdelku 1.6 v naravi nastopata linearni kombinaciji stanj η_0 in η_8 (η in η') s spinom 0. Enako velja za mezone s spinom 1, kjer v naravi opazimo linearni kombinaciji stanj ϕ_0 in ϕ_8 (imenujemo ju ϕ in ω). Okusna analogija pionov s spinom 0 so mezoni ρ s spinom 1, analogija kaonov pa mezoni, ki jih označujemo kot K^* .

V primeru barionov vsi okusni multipleti (sl. 1.12) ne nastopajo v naravi. Razlog je, da imamo v primeru delcev, sestavljenih iz treh kvarkov, spinski kvadruplet in dva spinska dubleta (en. (1.37)). Barioni so torej fermioni, njihova celotna valovna funkcija (sestavljena iz okusnega, spinskega, prostorskega in barvnega dela) mora biti antisimetrična na zamenjavo katerih koli dveh delcev. Tako niso mogoče vse kombinacije okusnega in spinskega dela. Ustrezno simetrijo ima le okusni deкупlet in okusni oktet. Dobimo osnovne lahke barione, prikazane na sl. 2.2. Na sliki smo na navpični osi namesto čudnosti s prikazali raje pogosto uporabljeno kvantno število hipernaboj y , vsoto barionskega števila in čudnosti.

Ko želimo nabor osnovnih mezonov in barionov dopolniti z vključitvijo kvarkov c , potrebujemo dodatno os, ki označuje kvantno število čarm (za kvarke c je čarm $c = 1$, za antikvarke \bar{c} je $c = -1$, ostali imajo $c = 0$). S tem se seveda nabor osnovnih hadronov močno poveča, prikazan je na slikah 2.3 in 2.4.

¹ Na mestu sta dve pojasnili: z lahkimi kvarki ponavadi označujemo kvarke u , d in s , saj je njihova masa znatno nižja od mas kvarkov c , b in t . Kot osnovne mezone pa razumemo tiste, ki jih sestavljata kvark in anti-kvark z medsebojno tirno količino $\ell = 0$. Obstaja cel spekter vzbujenih stanj teh mezonov.

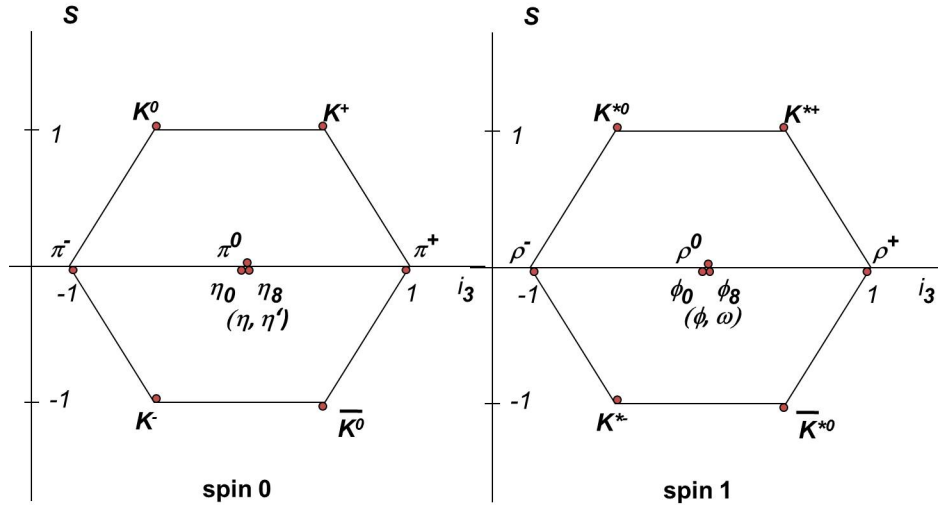


Fig. 2.1 Lahki osnovni mezoni s spino 0 in spinom 1.

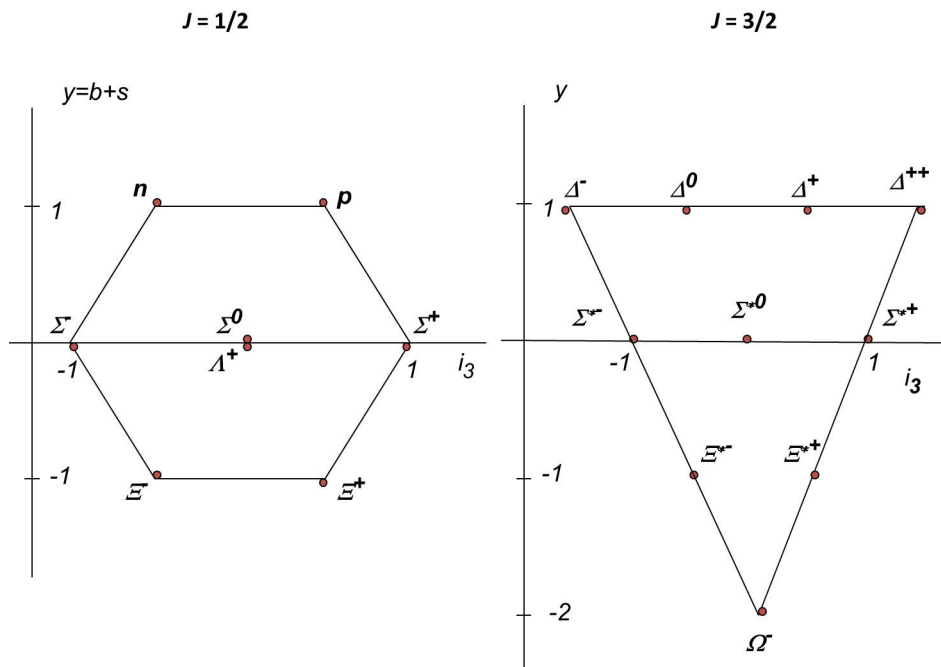


Fig. 2.2 Lahki osnovni barioni s spinom 1/2 in spinom 3/2.

V mezonskem multipletu sta zanimivi stanji η_c in J/ψ . Sestvaljeni sta iz kvarkov c in \bar{c} , zato je njun čarm enak nič (prav tako pa izospin in čudnost). Ker sta

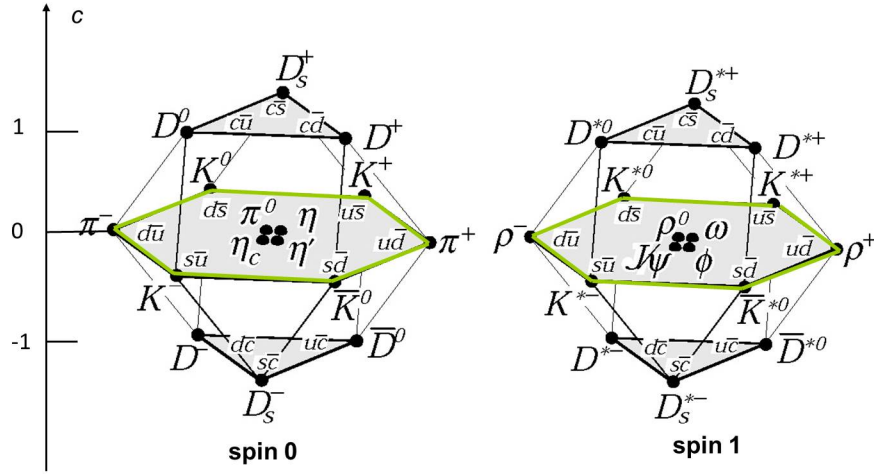


Fig. 2.3 Osnovni mezoni, sestavljeni iz kvarkov u, d, s in c . Označen je multiplet $s = 0$. Povzeto po [1].

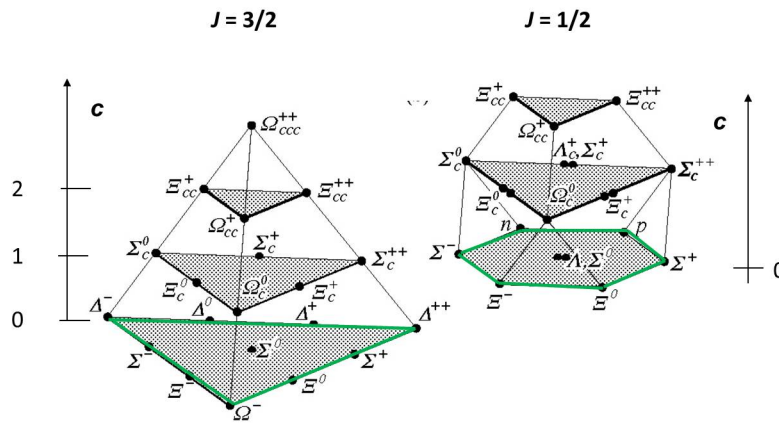


Fig. 2.4 Osnovni barioni, sestavljeni iz kvarkov u, d, s in c . Označen je multiplet $s = 0$. Povzeto po [1].

to mezona, sestavljena iz težjih kvarkov c ($m_c \sim 1,3 \text{ GeV}^2$), je hitrost le-teh v mezonu nizka, velikostnega reda $0,1c$. Tako za nekatere osnovne kvalitativne lastnosti zadošča nerelativistična obravnava.

2.2 Čarmonij

Prvo vezano stanje $c\bar{c}$ je bilo eksperimentalno odkrito novembra 1974. To je stanje J/ψ , edini od hadronov z dvojnimi imenom. Razlog je, da je bilo stanje hkrati odkrito v Stanfordu v trkih elektronov in pozitronov (ψ) in Brookhavenu v trkih protonov z berilijevo tarčo (J). B. Richter in S. Ting, vodji obeh skupin, sta za odkritje prejela Nobelovo nagrado za fiziko l. 1976. J/ψ ima maso $3,097 \text{ GeV}/c^2$ in celotno širino 93 keV . Vezano stanje kvarka in anti-kvarka je analogija vezanega stanja elektrona in pozitrona, imenovanega pozitronij. Slednji je prav tako sestavljen iz dveh fermionov s spinom $1/2$, skupen spin je torej 0 ali 1 . V stanju s spinom 0 lahko pozitronij razpade v dva fotona. Razpadna širina za tak razpad je

$$\Gamma(P \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{4\pi\alpha^2}{m^2} |\psi(0)|^2, \quad (2.1)$$

kjer je α konstanta fine strukture (oz. sklopitvena konstanta elektromagnetne interakcije), m je masa elektrona, $\psi(0)$ pa valovna funkcija sistema elektrona in pozitrona v izhodišču. Striktna izpeljava izraza za razpadno širino presega okvir tega kurza, lahko pa kvalitativno pojasnimo fizikalno interpretacijo. Elektron (ali pozitron) v pozitroniju izseva foton z verjetnostjo α (faktor $\sqrt{\alpha}$ v amplitudi oz. matričnem elementu) energije velikostnega reda mc^2 . Proces sam po sebi ni mogoč, saj ne ohranja energije in gibalne količine. Lahko pa foton v skladu s Heisenbergovim načelom nedoločenosti živi čas $\Delta t \sim \hbar/\Delta E \sim \hbar/mc^2$. V tem času lahko elektron sreča pozitron in se z njim anihilira v drug foton. To je mogoče le, če sta oba delca na razdalji manjši od $c\Delta t \sim \hbar c/mc^2$, če se torej nahajata v prostornini velikostnega reda $(\hbar c/mc^2)^3$. Verjetnost (ρdV , kjer je ρ verjetnostna gostota) za to je približno $|\psi(0)|^2 (\hbar c/mc^2)^3$. Izsevanje drugega fotona prinese dodaten faktor α k verjetnosti. Verjetnost za proces na enoto časa dobimo, če dobljeno sorazmernost delimo s časom trajanja interakcije, torej z Δt , in dobimo $\Gamma \propto \alpha^2 |\psi(0)|^2 (\hbar c/mc^2)^3 / \hbar/mc^2 \propto \alpha^2 |\psi(0)|^2 / m^2$.

Pozitronij razpada v dva fotona preko elektromagnetne interakcije, ki ohranja parnost. Parnost pozitronija ugotovimo iz dejstva, da je prostorski del valovne funkcije sestavljen iz sfernega harmonika $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, pri čemer je ℓ velikost tirne vrtilne količine obeh fermionov. Ta funkcija se pri zrcaljenju prostora obnaša kot $PY_{\ell m}(\theta, \phi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi)$. Poleg tega pri zrcaljenju prostora zamenjamo fermion (elektron) z anti-fermionom (pozitronom) in obratno, zato dobimo v lastni vrednosti operatorja parnosti dodaten faktor -1 . Celotna parnost je torej $(-1)^{\ell+1}$. Pomembna je tudi parnost C , oz. lastna vrednost operatorja konjugacije naboja, ki se pri elektromagnetni interakciji prav tako ohranja. Zamenjava delca z anti-delcom v pozitroniju je enakovredna zrcaljenju prostora ter zamenjavi spinov obeh delcev. Prva operacija ima lastno vrednost $(-1)^{\ell+1}$, kot smo ravnokar ugotovili. Druga operacija je odvisna od skupnega spina obeh delcev. Če je le-ta enak 1 , tedaj se valovna funkcija pri zamenjavi ne spremeni, sicer pa dobimo dodaten faktor -1 . Zamenjava spinov delcev torej prinese faktor $(-1)^{s+1}$. Celotna parnost C pozitronija je $(-1)^{\ell+s}$.

Vsak foton ima negativno parnost C , celotna parnost C sistema n fotonov je $(-1)^n$. Če naj elektromagnetna interakcija ohranja parnost je jasno, da osnovno stanje pozitronija ($\ell = 0$) s spinom 0 ($s = 0$, tako stanje imenujemo tudi orto-pozitronij) razpade v sodo, s spinom 1 ($s = 1$, tako stanje imenujemo para-pozitronij) pa v liho število fotonov. Seveda vsak dodaten foton v končnem stanju prinese dodaten faktor α v razpadno širino. V primeru razpada para-pozitronija je daleč najbolj verjeten razpad v dva fotona. Ali se pri tem ohranja tudi parnost? Para-pozitronij ima parnost -1 . Valovna funkcija dveh fotonov s spinom 1 ima tako del s pozitivno, kot del z negativno parnostjo (glej dodatek E). K razpadu orto-pozitronija prispeva slednji, parnost se ohranja.

Po analogiji s pozitronijem imenujemo vezana stanja težkih kvarkov (poleg stanj $c\bar{c}$ še vezana stanja $b\bar{b}$) kvarkonij (oz. bolj specifično čarmonij ali botomonij). Nekatere osnovne značilnosti čarmonija lahko izračunamo s Schrödingerjevo enačbo ob uporabi potenciala oblike $V = -a/r + br$. Drugi člen upošteva dejstvo, da je pri večjih razdaljah med kvarki energijsko ugodneje, da se rodi nov par kvark-antikvark. Na ta način fenomenološko opišemo dejstvo, da ne opazimo prostih kvarkov. Na sl. 2.5 so označeni energijski nivoji čarmonija, izračunani v takih in podobnih potencialnih modelih, kot tudi eksperimentalno odkrita stanja. Posamezna stanja

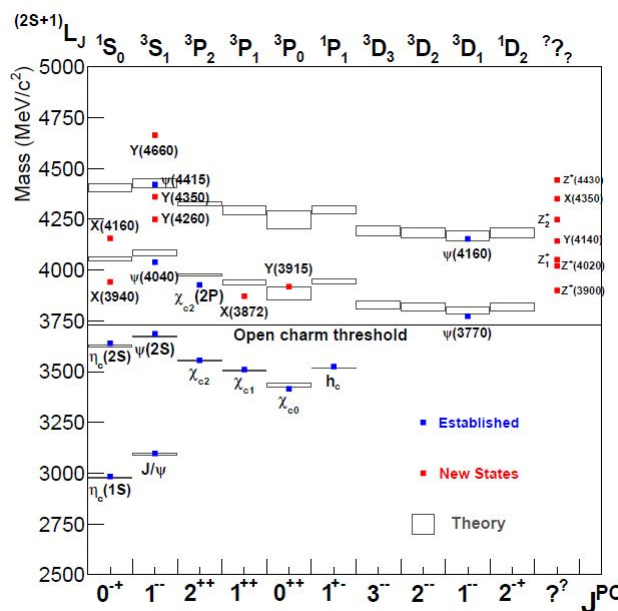


Fig. 2.5 Energijska stanja čarmonija, vezanega staja $c\bar{c}$. Na vodoravni osi so označena kvantna števila spin (J), parnost (P) in parnost C (C , lastna vrednost operatorja konjugacije naboja) v obliki J^{PC} . Črte prikazujejo izračunane mase posameznih stanj in njihove razpadne širine, kvadrati pa eksperimentalne meritve [3].

označimo s spektroskopskimi oznakami, ki nam povedo medsebojno tirno vrtilno količino obeh kvarkov (L , v obliki $S(L=0), P(L=1), D(L=2), F(L=3), \dots$), celoten spin mezona ($2j+1$) in pa zgolj vsoto spinov obeh kvarkov ($2s+1$), v obliki $^{2s+1}L_{2j+1}$. Ugotovitve o pozitroniju lahko s pridom uporabimo za čarmonij. Razpad preko močne interakcije ohranja parnost in parnost C . V končnem stanju v tem primeru najdemo gluone, brezmasne delce s spinom 1, kot fotone. J/ψ ima, kot je razvidno iz sl. 2.5, $s=1$ in $\ell=0$, kar pomeni parnost -1 in parnost $C=1$. V en sam gluon zaradi brezbarvnosti ne more razpasti, razpada pa v 3 gluone. Po analogiji s pozitronijem (en. 2.1) lahko ugotovimo, da je razpadna širina sorazmerna z $\alpha_s^3 |\psi(0)|^2 / m_c^2$. Namesto sklopitvene konstante elektromagnetne interakcije nastopa seveda sklopitvena konstanta močne interakcije α_s , tretja potenca pa je posledica omenjenih izbirnih pravil oz. treh gluonov v končnem stanju. To pojasni tudi relativno majhno celotno razpadno širino mezona J/ψ . Pri tipičnih energijah kvarkov c v mezonu je $\alpha_s \sim 0,2$. Ker je razpadna širina sorazmerna z α_s^3 je rezultat razmeroma majhna razpadna širina. Enako ne velja za vsa stanja čarmonija. Opazimo lahko, da so širine stanj, ki na sl. 2.5 ležijo nad vodoravno črto pri masi okoli $3,73 \text{ GeV}/c^2$, znatno širša od nižje ležečih. Črta označuje kinematsko mejo, nad katero lahko stanja razpadajo v par mezonov D .² Feynmanov diagram takega razpada je prikazan na sl. 2.6(levo). Za J/ψ tak razpad kinematsko ni mogoč (masa J/ψ je manjša od vsote mas dveh mezonov D). Zato preko močne interakcije J/ψ lahko razpade le v tri gluone (ki nadalje rodijo več hadronov, kot je prikazano na sl. 2.6(desno)). Opisano dejstvo je moč formulirati v splošnejše pravilo, imenovano pravilo OZI (neodvisno so ga predlagali S. Okubo, G. Zweig in J. Iizuka v 60-ih letih prejšnjega stoletja). Pravi, da je vsak razpad preko močne interakcije manj verjeten, če ima prekinjene kvarkovske linije (ali drugače: če je njegov Feynmanov diagram tak, da ga je moč prerezati tako, da se sekajo zgolj gluonske linije).

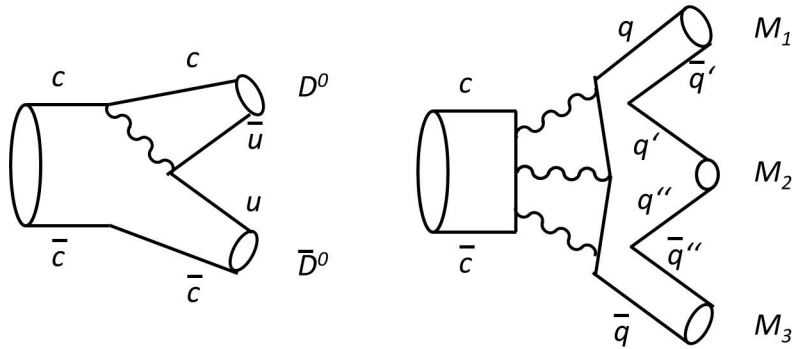


Fig. 2.6 Razpad čarmonija v dva mezona D (levo) in razpad v 3 gluone (desno), ki vodijo do dveh ali več hadronov v končnem stanju.

² Mezioni D^0 so sestavljeni iz kvarka s in \bar{u} , mezioni D^+ pa iz c in \bar{d} . Masa mezonov D^0 je $1,865 \text{ GeV}/c^2$.

Primer pravila OZI na delu so razpadne širine posameznih stanj kvarkonija. Tako ima npr. stanje tik pod kinematsko mejo za razpad v dva mezona D (glej sl. 2.5), $\psi(2S)$, razpadno širino okoli 300 MeV, stanje tik nad mejo, $\psi(3770)$, pa širino okoli 30 MeV. Podobno velja v sistemu botomonija, stanje pod kinematsko mejo za razpad v dva mezona B , $Y(3S)$, ima širino približno 20 keV, stanje nad mejo, $Y(4S)$ pa okoli 21 MeV.

Poglavje 3

Osnovni detektorji delcev

Abstract ...

3.1 Meritev gibalne količine

V fiziki moramo teoretične napovedi preveriti z rezultati poskusov. V fiziki visokih delcev za to seveda potrebujemo pospeševalnike in detektorje delcev. Medtem ko smo nekaj osnov pospeševanja nabitih delcev spoznali pri Moderni fiziki, si na tem mestu oglejmo nekaj najosnovnejših principov detektorjev.

Sodobni detektorji osnovnih delcev so kompleksne (in drage) naprave, sestavljene iz posameznih modulov. Vsak od modulov je namenjen določeni nalogi: določanju gibalne količine nabitih delcev, energije nabitih in nevtralnih delcev, identifikaciji le-teh, ... Na slikah 3.1, 3.2 in 3.3 je prikazanih nekaj primerov detektorjev delcev.

Vsak detektor, namenjen več različnim meritvam v fiziki osnovnih delcev, vsebuje modul(e), ki določajo gibalno količino nabitih detektiranih delcev. Tehnologija takih detektorjev je raznolika, sega od plinskih detektorjev preko mikropasovnih polprevodniških detektorjev do blazinastih polprevodniških detektorjev. Opis tehnologij presega okvir te predavanja, zainteresirani slušatelji se lahko o njih poučijo pri predmetu Fizikalna merjenja. Princip meritve gibalne količine je pri vseh enak: nabiti delci se v magnetnem polju, v katerem se taki detektorji nahajajo, gibljejo po vijačnici. Projekcija vijačnice na ravnino, pravokotno na smer magnetnega polja \mathbf{B} , je krožnica z radijem R . Z detekcijo trajektorije nabitega delca lahko določimo radij, s tem pa gibalno količino preko zveze

$$p_t = eRB, \quad (3.1)$$

kjer je p_t komponenta gibalne količine, pravokotna na smer magnetnega polja, e pa naboj delca. Iz naklona trajektorije glede na smer magnetnega polja, θ , določimo še komponento gibalne količine v smeri te osi:

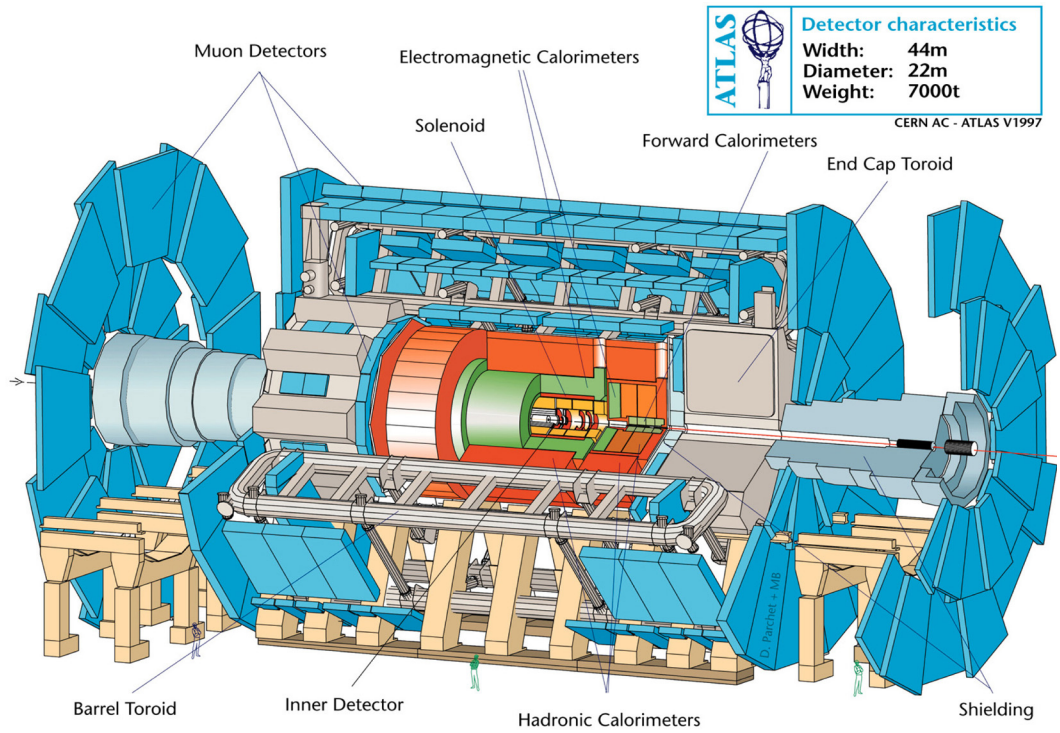


Fig. 3.1

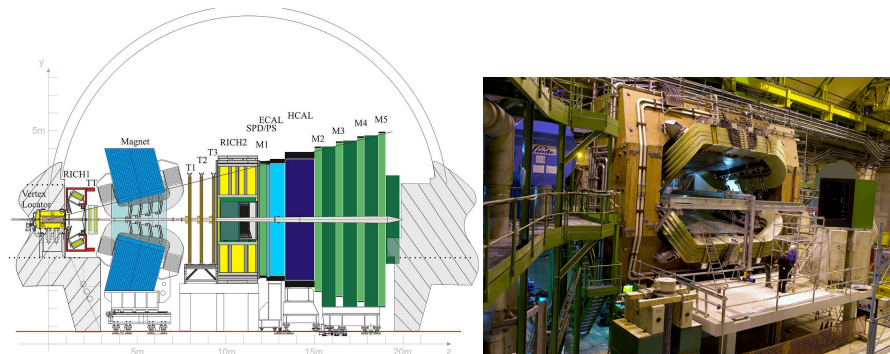


Fig. 3.2

$$p_{\perp} = p_t / \tan \theta . \quad (3.2)$$

Meritev gibalne količine se torej zreducira na meritev trajektorije nabitega delca. Omenjeni detektorji izrabljajo ionizacijo v plinu, ali pa tvorbo parov elektron-vrzel v polprevodniku na poti nabitega delca skozi detektor. Preko naboja, zbrane ga

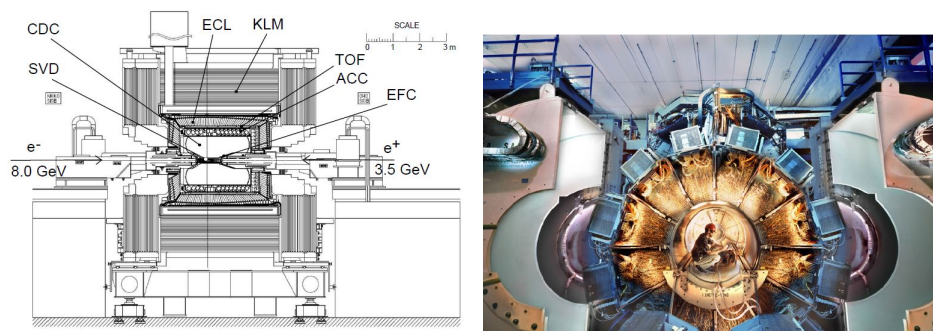


Fig. 3.3

posameznih elektrodah v plinskem detektorju oz. na polprevodniškem detektorju, dobimo informacijo o poti nabitega delca, kot je to shematsko prikazano na sl. 3.4. Pomemben dejavnik pri izvedbi meritev je seveda natančnost meritev. Transverzalna komponenta gibalne količine je tako določena z nezanesljivostjo $\sigma(p_t)$, ki jo lahko parametriziramo v obliki

$$\frac{\sigma(p_t)}{p_t} = \sqrt{k_1 p_t^2 + k_2}. \quad (3.3)$$

Prvi člen pod korenem je posledica intrinzične resolucije detektorskega modula, ki je odvisna od števila zadetkov, ki jih delec pusti v detektorju, od natančnosti določanja pozicije posameznega zadetka, ter integrala magnetnega polja po poti, ki jo delec napravi skozi detektor ($\int B ds$) (ti faktorji vplivajo na velikost konstante k_1). Izkaže se, da je ta člen odvisen od p_t , kot je zapisano v en. (3.3). Drugi člen je posledica večkratnega sipanja delca v snovi detektorja. Trajektorija namreč zaradi inetrakcije z atomi snovi naključno odstopa od idealne vijačnice. Ta člen je neodvisen od p_t in je opisan s konstanto k_2 . Za ilustracijo navedimo zanesljivost določanja gibalne količine v detektorju Belle (sl. 3.3):

$$\frac{\sigma(p_t)}{p_t} = \sqrt{(1.9 \cdot 10^{-3} \frac{c p_t}{GeV})^2 + (3 \cdot 10^{-3})^2}. \quad (3.4)$$

Ionizacija v plinu.....

3.2 Identifikacija nabitih delcev

Identifikacija delcev zaznanih v detektorju pomeni določitev njihove mase. Metode identifikacije so raznovrstne, seveda se znatno razlikujejo za nevtralne in nabite delce. Pri slednjih se določanje mase, ob predpostavki, da je njihova gibalna količina izmerjena na način, kot je opisano v prejšnjem razdelku, prevede na neodvisno

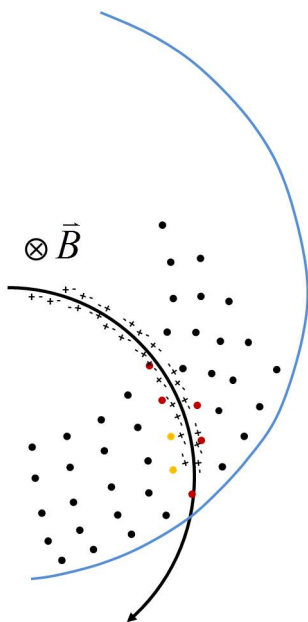


Fig. 3.4 Shematski prikaz delovanja plinskega detektorja sledi. V preseku prečno na smer magnetnega polja so prikazane žične elektrode (črne pike) na visoki napetosti. Nabit delec potuje skozi plin in pri tem ionizira atome (+, -). Naboj se zbere na najbližjih elektrodah (tiste označene rdeče zberejo največ, rumene pa nekoliko manj naboja). V polprevodniških detektorjih nabiti delec namesto ionizacije povzroča nastanek parov elektron-vrzel.

določanje njihove hitrosti. Iz zveze

$$p = \gamma m v , \quad (3.5)$$

kjer je $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, $\beta = v/c_0$, lahko iz znane gibalne količine in hitrosti določimo maso.

Time of Flight.....

V sodobnih eksperimentih v fiziki visokih energij se za identifikacijo delcev pogosto uporablja pojav sevanja Čerenkova. Nabiti delci v snovi, v kateri njihova hitrost presega hitrost elektromagnetnega valovanja v tej snovi, sevajo elektromagnetno valovanje, poimenovano po ruskem fiziku P.A. Čerenkovu, ki je tako svetlobo prvi detektiral v 30-ih letih prejšnjega stoletja. Teoretično sta pojav opisala I.M. Frank in I.Y. Tamm. Vsi trije so si za odkritje razdelili Nobelovo nagrado za fiziko l. 1958. Sevanje je shematsko prikazano na sl. 3.5. Na sliki vidimo, da nabit delec v času t prepotuje razdaljo $\beta c_0 t$, kjer je c_0 hitrost elektromagnetnega valovanja v vakuumu. V enakem času svetloba prepotuje razdaljo $ct = (c_0/n)t$, če je n lomni količnik snovi. Čerenkova svetloba se torej izseva pod kotom

$$\cos \theta_C = \frac{1}{\beta n} . \quad (3.6)$$

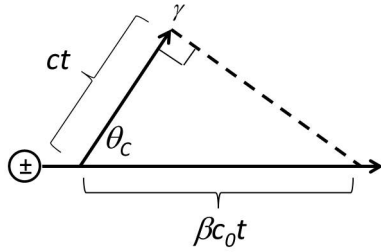


Fig. 3.5 Shematski prikaz sevanja Čerenkova in Čerenkovskega kota.

Meritev Čerenkovskega kota θ_C omogoča določitev hitrosti nabitega delca. Število izsevanih fotonov na enoto poti in frekvenčni interval (spekter sevanja) je

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dx d\omega} = \frac{Z^2 \alpha}{c_0} \sin^2 \theta_C \quad (3.7)$$

Detektorjev sevanja Čerenkova je več vrst. Veliko skupino predstavljajo pragovni števeci sevanja. Le-ti ločujejo med delci, ki v neki snovi sevajo (so hitrejši), od tistih, ki v snovi ne sevajo Čerenkove svetlobe (so počasnejši). Pogoji za pojav sevanja Čerenkova je seveda $1/(\beta n) \leq 1$ oz. $n \geq 1/\beta$. Kot primer si mislimo, da za sevalec izberemo snov z lomnim količnikom $n = 1/\beta_1$, kjer je β_1 brezdimenzijska hitrost prvega delca, ki ravno še ne seva. V ultrarelativistični limiti lahko zapišemo $\beta = c_0 p / E = c_0 p / \sqrt{c_0^2 p^2 + m^2 c_0^4} \approx 1 - m^2 c_0^2 / (2p^2)$. Relativna razlika hitrosti delcev z enako gibano količino je tedaj $\Delta\beta / \beta_1 = (\beta_2 - \beta_1) / \beta_1 \approx n c_0^2 (m_2^2 - m_1^2) / (2p^2) = n c_0^2 (m_2 + m_1)(m_2 - m_1) / (2p^2) \propto \Delta m / p^2$.

Število fotonov, ki jih izseva drugi delec (en. (3.7)), je $N_{\gamma 2} \propto \sin^2 \theta_C = 1 - 1/(\beta_2^2 n) = 1 - \beta_1^2 / \beta_2^2 = (1 - \beta_1 / \beta_2)(1 + \beta_1 / \beta_2) \approx 2(1 - \beta_1 / \beta_2) \approx \Delta\beta / \beta_1 \propto \Delta m / p^2$. Slednjo proporcionalnost,

$$\Delta m \propto N_{\gamma 2} p^2, \quad (3.8)$$

razumemo v naslednjem smislu: pri danem številu detektiranih fotonov Čerenkova (ki je odvisno od uporabljenega fotonškega detektorja, tipično fotopomnoževalk) lahko pri dani gibalni količini ločimo delce z masama m_1 in m_2 . Pri enakem številu detektiranih fotonov pri višji gibalni količini lahko ločimo le še delce z ustrezno večjo masno razliko (odvisnost od gibalne količine je celo kvadratična). Očitno je torej, da je uporabnost pragovnih detektorjev omejena na nižje gibalne količine.

Pri višjih gibalnih količinah so uporabnejši detektorji obročev Čerenkova. Slednji ne detektirajo zgolj izsevanih fotonov, pač pa tudi njihovo smer in na ta način določijo Čerenkov kot. Primer takega detektorja v krogelni geometriji je skiciran na sl. 3.6. V primeru, da je radij detektorske površine polovica radija krogelnega zrcala, $R_D = R_S / s$, se fotoni, izsevani pod enakim kotom θ_C , na ravnini detektorjev sfokusirajo v obroč z radijem $r = R_S \theta_C / 2$. Seveda pri vseh izvedenkah detektorjev obročev Čerenkova taka preprosta geometrija ni izvedljiva, še vedno pa

velja zveza $r = f(\theta_C)$, na podlagi katere je moč iz radija določiti Čerenkov kot. Pri konstrukciji in izvedbi detektorjev sevanja Čerenkova je seveda pomembno

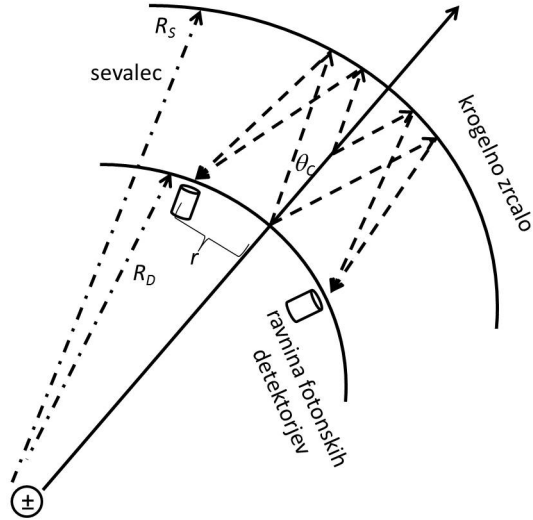


Fig. 3.6 Shematski prikaz delovanja detektorja Čerenkovih obročev.

izbrati sevalce s primernim lomnim količnikom. Medtem ko imajo plinski sevalci $n - 1 \sim \mathcal{O}(10^{-4} - 10^{-3})$, kapljevine $n - 1 \sim \mathcal{O}(10^{-1})$ in trdnine $n - 1 \sim \mathcal{O}(1)$, vrzel med plini in kapljevinaami zapolnjujejo aerogeli z $n - 1 \sim \mathcal{O}(10^{-2})$.

Poglavje 4

Amplitude procesov in propagatorji

Abstract ...

4.1 Teorija perturbacij

Spomnimo se nekaj osnov ideje perturbacij pri iskanju opisa kvantnomehanskega sistema. Privzemimo, da poznamo rešitve Schrödingerjeve enačbe za prost delec,

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n . \quad (4.1)$$

Rešitve za sistem pod vplivom potenciala $V(\mathbf{r}, t)$ lahko vedno zapišemo v obliki

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(\mathbf{r})e^{-iE_nt} . \quad (4.2)$$

Če zgornji nastavek vstavimo v časovno odvisno Schrödingerjevo enačbo

$$(H_0 + V(\mathbf{r}, t))\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (4.3)$$

dobimo

$$i\sum_n \frac{\partial a_k}{\partial t}\phi_n e^{-iE_nt} = \sum_n a_n V(\mathbf{r}, t)\phi_n e^{-iE_nt} . \quad (4.4)$$

Če to enačbo pomnožimo z ϕ_k^* z leve in upoštevamo ortonormiranost funkcij ϕ_n , pridemo do enačbe za določitev koeficientov $a_n(t)$:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = -i\sum_n a_n(t) \int \phi_k^* V \phi_n d\mathbf{r} e^{i(E_k - E_n)t} .^1 \quad (4.5)$$

¹ Skalarni produkt $\langle\phi_k|V|\phi_n\rangle$ smo zapisali v bolj tehnični obliki, kot $\int \phi_k^* V \phi_n d\mathbf{r}$.

Začetni pogoji so določeni z začetnim stanjem, i , kar pomeni, da je pred pričetkom delovanja potenciala (recimo ob času $t = -T/2$, če bomo z T označili čas trajanja interakcije)

$$\begin{aligned} a_i(-T/2) &= 1 \\ a_n(-T/2) &= 0, \quad n \neq i \\ \frac{\partial a_k}{\partial t} &= -i \int \phi_k^* V \phi_i d\mathbf{r} e^{i(E_k - E_i)t} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Če je potencial majhen (glede na energijo opisano z H_0) in kratkotrajen, tedaj lahko predpostavimo, da začetni pogoji veljajo približno ves čas delovanja potenciala; zgornjo enačbo integriramo ter dobimo:

$$a_k(t) = -i \int_{-T/2}^t e^{i(E_k - E_i)t} dt \int \phi_k^* V \phi_i d\mathbf{r} . \quad (4.7)$$

Za časovno neodvisen potencial lahko zapišemo v kovariantni obliki

$$a_k(T/2) = -i \int_{-T/2}^{T/2} d^4x \phi_k^*(x) V \phi_i(x) = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) . \quad (4.8)$$

Za prehod $i \rightarrow f$, ki ga povzroči Hamiltonian $H = H_0 + V(\mathbf{r}, t)$, podaja $a_f(T/2)$ kar matrični element za prehod:

$$T_{fi} = \langle f | H | i \rangle = a_f(T/2) . \quad (4.9)$$

Rezultat velja, če je $a_f \ll 1$, saj smo predpostavili, da je potencial V majhen in kratkotrajen. Približek lahko izboljšamo, če rezultat za a_f v en. (4.7) vstavimo nazaj v en. (4.5) (namesto osnovnega približka (4.6)). Ta nadaljnji člen prispeva k izrazu za a_f :

Poglavje 5

Struktura hadronov

Abstract ...

5.1 Elastično sipanje elektronov na hadronih

V tem poglavju se zanimamo, kaj lahko izvemo o notranji strukturi sestavljenih delcev - hadronov - z meritvami, pri katerih sipamo visokoenergijske elektrone na takih delcih. Takih meritev v fiziki delcev ne smemo pozabiti, nenazadnje je to (sodobna) ponovitev Rutherfordovega poskusa s katerim je odkril atomska jedra.¹

Za začetek se spomnimo elektromagnetnega sipanja dveh nesestavljenih delcev, elektrona in miona, torej $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Feynmanov diagram z označenimi četverci gibalne količine je prikazan na sl. 5.1. Podrobneje ta proces obravnavamo

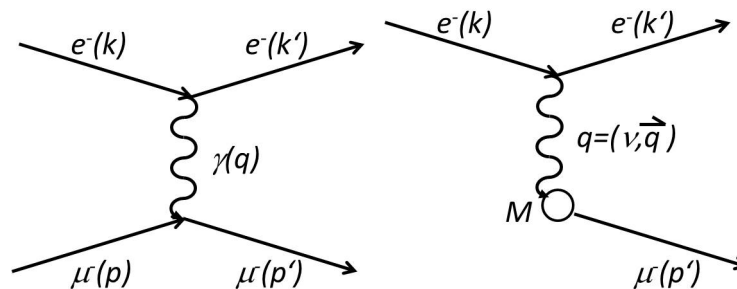


Fig. 5.1 Levo: Feynmanov diagram sipanja $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Desno: enak proces v laboratorijskem sistemu, kjer začetni mion z maso M miruje.

¹ O Rutherfordovem poskusu smo se poučili pri Moderni fiziki in kasneje še pri Fiziki jedra in osnovnih delcev. V vlogi elektronov so tam nastopali delci α oz jedra He , v vlogi hadronov pa atomi zlata.

pri Fiziki jedra in osnovnih delcev. Kvadrat matričnega elementa v Lorentzovo invariantni obliki zapišemo kot

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(k'p')(kp) + (k'p)(kp') - m^2(p'p) - M^2(k'k) + 2m^2M^2], \quad (5.1)$$

m označuje maso elektrona, M pa maso miona.

Spomniti velja, da je matrični element eden od treh sestavnih delov diferencialnega sipalnega preseka,

$$d\sigma = \frac{|M|^2}{F} dQ, \quad (5.2)$$

v katerem nastopata še gostota toka vpadnih delcev F in fazni prostor dQ . Vsi trije členi so Lorentzovo invariantni. Slednja s četverci iz sl. 5.1 zapišemo kot

$$F = 4[(pk)^2 - m^2M^2]^{1/2}$$

$$dQ = (2\pi^4)\delta^4(k+p-k'-p') \frac{d^3p'}{(2\pi^3)2\omega'} \frac{d^3k'}{(2\pi^3)2E'}, \quad (5.3)$$

ω' je energija končnega miona, E' pa energija končnega elektrona.

Sipalni presek je dopolnjen zapis Fermijevega zlatega pravila, ki podaja verjetnost za prehod iz začetnega stanja i v končno stanje f na enoto časa, W_{fi} :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dW_{fi}/d\Omega}{j_i}. \quad (5.4)$$

Diferencial prostorskega kota, $d\Omega$, se skriva v faznem prostoru, kot bomo videli v nadaljni izpeljavi.²

Nadaljni izračun si poenostavimo tako, da zanemarimo maso elektrona, $m \ll M$, tretji in zadnji člen v (5.1) odpadeta. Hkrati to pomeni, da sta kvadrata velikosti četvercev k in k' , $k^2 = k'^2 = m^2$ zanemarljiva. Tedaj je $q^2 = (k-k')^2 \approx -2kk'$. Četverec končnega miona izrazimo s preostalimi, $p' = k - k' + p$. S tem pridemo do

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{q^2}{2}(kp - k'p) + 2(k'p)(kp) + \frac{M^2q^2}{2} \right]. \quad (5.5)$$

Nadaljujemo v laboratorijskem sistemu, v katerem mion na začetku miruje (saj imamo v mislih uporabo rezultata za primer, ko se elektron siplje na mirujočem protonu v tarči), torej $p = (Mc^2, 0)$. V tem sistemu je proces prikazan na sl. 5.1(desno). Za poenostavitev zapisa preidemo v naravni sistem enot z $c = \hbar = 1$.³ V tem sistemu so skalarni produkti četvercev v (5.5) enostavni, ob upoštevanju $q^2 \approx -2kk' = -2(E E' - \mathbf{k} \mathbf{k}') \approx -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2(\theta/2)$ dobimo

² Tudi enote izraza so primerne imenu presek. W_{fi} je v s^{-1} , gostota toka j_i se nerelativistično izrazi kot $\rho_i v_i$, torej ima enote $m^{-2}s^{-1}$. Enote za presek so m^2 .

³ Na koncu lahko rezultate vedno prevedemo v običajne enote z uporabo ustreznih potenc hitrosti svetlobe, c , ter konstante $\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$.

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} 2EE'M^2 \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \frac{M(E-E')}{2EE'} \right]. \quad (5.6)$$

Nadalje označimo energijo izmenjanega fotona z $E - E' = \nu$, q^2 pa izrazimo iz $q + p = p'$, torej $q^2 + p^2 + 2qp = p'^2$ in $q^2 = -2\nu M$ (saj $p^2 = p'^2 = M^2$). Na ta način dobimo zapis matričnega elementa v obliki, ki jo bomo lahko uporabili pri sipanju elektronov na hadronih,

$$|M|^2 = \frac{8e^4}{q^4} 2EE'M^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (5.7)$$

Da zapišemo diferencialni sipalni presek za proces $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ dodamo še F in fazni prostor:

$$F = 4ME$$

$$dQ = \frac{1}{4\pi^2} \delta^4(q + p - p') \frac{d^3 p'}{2\omega'} \frac{1}{2} E' dE' d\Omega. \quad (5.8)$$

Pri tem smo upoštevali (v ultrarelativistični limiti) $d^3 k' = E'^2 dE' d\Omega$. Fazni prostor lahko poenostavimo oz. delno integriramo po spremenljivkah, ki nas ne bodo zanimale. Taki sta energija in tridimenzionalna gibalna količina končnega miona, ω' in \mathbf{p}' . Pri tem uporabimo naslednjo lastnost štiridimenzionalne funkcije delta:

$$\int \frac{d^2 p'}{2\omega'} \delta^4(q + p - p') = \int d^3 p' d\omega' \delta^4(q + p - p') \theta(\omega') \delta(p'^2 - M^2). \quad (5.9)$$

$\theta(\omega')$ je Heavisideova funkcija, enaka 1 pri pozitivnem in 0 pri negativnem argumentu. Z zgornjim izrazom lahko izvedemo integracijo 4-dimenzionalne funkcije delta po $d^3 p'$, rezultat je

$$\begin{aligned} \delta((p+q)^2 - M^2) &= \delta(2pq + q^2) = \delta(2\nu M + q^2) = \frac{1}{2M} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) = \\ &= \frac{1}{2M} \delta\left(\nu - \frac{4EE' \sin^2(\theta/2)}{2M}\right) = \frac{1}{2M} \delta\left(E - E' - \frac{4EE' \sin^2(\theta/2)}{2M}\right) = \\ &= -\frac{1}{2M} \delta\left(E' \left(1 + \frac{2E \sin^2(\theta/2)}{M}\right) - E\right) = -\frac{1}{2MA} \delta\left(E' - \frac{E}{A}\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

kjer smo z A označili $A = 1 + 2E \sin^2(\theta/2)/M$.

Za diferencialni sipalni presek dobimo s tem

$$\left(\frac{d\sigma}{dE' d\Omega}\right)_{e^- \mu^-} = \frac{e^4}{4\pi^2 q^4} E'^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right). \quad (5.11)$$

Izraz predstavlja porazdelitev končnih elektronov po energiji (E') in sipalnem kotu ($\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$). Zaradi funkcije delta ga lahko tudi trivialno integriramo po energiji:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^{-}\mu^{-}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (5.12)$$

Zgornja enačba je zapisana matematično nekoliko neprimerno, saj smo navkljub integraciji po E' to spremenljivko pustili v izrazu (da smo zamenjali spremenljivko $A = E/E'$), pa tudi q^2 , ki bi ga v principu lahko izrazili zgolj z E in θ , smo pustili nedotaknjen. Osnovni naboj e smo nadomestili z brezdimenzijsko sklopitveno konstanto elektromagnetne interakcije, t.j. s konstanto fine strukture, $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, v naravnih enotah $e^4 = (4\pi\alpha)^2$. Je pa izraz primeren za eksperimentalno uporabo, saj pri meritvi sipanja elektronov predvidevamo znano začetno energijo le-teh (E), izmerjeno končno energijo (E') in sipalni kot (θ). Da dobimo sipalni presek (5.12) v običajnih enotah, torej m^2 , ga moramo pomnožiti s $(\hbar c)^2$.

Kako preidemo od sipanja dveh nesestavljenih delcev na sipanje elektronov na delcih z notranjo strukturo? Izraz za matrični element, ki smo ga uporabili zgoraj, sledi iz

$$M \propto j_\mu \frac{1}{q^2} J^\mu \quad (5.13)$$

z

$$\begin{aligned} j_\mu &= e\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)e^{i(k'-k)x} \\ J^\mu &= e\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)e^{i(p'-p)x}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

$u(p_i)$ predstavljajo rešitve Diracove enačbe za fermion s četvercem gibalne količine p_i . Če namesto nesestavljenega fermiona nastopa drug delec, četverca toka J^μ ne moremo zapisati na preprost način kot zgoraj. Ker mora biti J^μ še vedno četverec, je splošen zapis oblike $J^\mu = e\bar{u}(p')[\dots]^\mu u(p)e^{i(p'-p)x}$. Oklepaj $[\dots]^\mu$ lahko sestavimo iz četvercev povezanih z začetnim in končnim delcem. V poštev pridejo seveda četverci gibalne količine, $(p' - p)^\mu$ ali $(p' + p)^\mu$, pa γ^μ kot za nesestavljen delec, ter še $\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu$ in $\sigma^{\mu\nu}(p' + p)_\nu$, kjer je $\sigma^{\mu\nu}$ antisimetričen tenzor sestavljen iz Diracovih matrik gama, $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)[\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu]$. Na podlagi simetrijskih lastnosti teh izrazov in nekaterih zvez lahko ugotovimo, da nekateri izrazi ne nastopajo v četvercu toka. Tako npr. t.i. Gordonova dekompozicija toka podaja zvezo

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \frac{1}{2M}\bar{u}(p')[(p' + p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu]u(p), \quad (5.15)$$

kar pomeni, da nam $(p' + p)^\mu$ ni potrebno upoštevati, saj se izraža z γ^μ in $\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu$. Podobno, kot smo na primeru Klein-Gordonove enačbe ugotavljali, da je posledica simetrijskih lastnosti Lagrangiana ohranitev toka (en. (1.25)), velja tudi za Diracovo enačbo. Ohranitev toka, $\partial_\mu J^\mu = 0$, pomeni, da v toku ne more nastopati $(p' - p)^\mu$, saj

$$\begin{aligned} J^\mu &= a\bar{u}(p')(p' - p)^\mu u(p)e^{i(p'-p)x} \\ \partial_\mu J^\mu &= a\bar{u}(p')(p' - p)^2 u(p)e^{i(p'-p)x} = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

in mora biti torej $a = 0$. Na tak način ugotovimo, da je splošna oblika toka J^μ za sestavljen delec

$$J^\mu = e\bar{u}(p') \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] e^{iqx} . \quad (5.17)$$

Funkciji $F_{1,2}(q^2)$ imenujemo oblikovna faktorja. Sta posledica našega nepoznavanja notranje strukture hadrona in morata biti določena empirično. Izraz se mora v limiti $|q^2| \rightarrow 0^4$ povrniti v obliko (5.14) za nesestavljen delec. Majhna vrednost $|q^2|$ namreč pomeni foton z majhno energijo ($q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2)$), ali drugače povedano dolgovalovni foton. Tak foton otipa hadron kot enoten, nesestavljen delec. Pri tem prvi člen v en. (5.14) opisuje elektromagnetno interakcijo na točkastem delcu z nabojem e , pa tudi z dipolnim magnetnim momentom, ki je posledica lastne vrtilne količine - spina - in znaša za fermione opisane z Diracovo enačbo $\mu = (e/2M)g_s$. Spinsko giromagnetno razmerje znaša $g_s = 2$. Če naj prvi člen en. (5.17) preide v (5.14) ko $|q^2| \rightarrow 0$ mora veljati $F_1(0) = 1$. Kaj pa drugi člen v toku (5.17)? Ta dopušča možnost, da dipolni magnetni moment sestavljenega hadrona ni enak zgolj $(e/2m)g_s$ (slednji izraz sledi le iz Diracove enačbe, ki opisuje nesestavljene delce; če ima delec notranjo strukturo, je njegov dipolni magnetni moment lahko drugačen, in tudi v dolgovalovni limiti bodo fotoni otipali celoten magnetni moment z vrednostjo različno od tiste za nesestavljene delce). Celoten dipolni magnetni moment hadrona, ki ga občuti dolgovalovni foton, je $(e/2M)g_s + (e/2M)g_s\kappa$, če predpostavimo $F_2(0) = 1$ (prvi člen je posledica prvega člena v toku, dodaten člen s κ pa posledica drugega člena v toku). κ imenujemo tudi anomalni magnetni moment (anormalen v smislu, da predstavlja odstopanje od nesestavljenega fermiona). Za proton je izmerjen dipolni magnetni moment $\mu_p = 5,6(e/2M) = 5,6\mu_N$ in $(e/2M)g_s + (e/2M)g_s\kappa_p = 5,6\mu_N$, torej $\kappa_p = 1,8$. Nevtroni so električno nevtralni in zato tudi nimajo običajnega fermionskega dipolnega momenta, zaradi notranje strukture pa imajo vseeno anomalni magnetni moment. Izmerjena vrednost je $-3,8\mu_N$, $(e/2M)g_s\kappa_n = -3,8\mu_N$, $\kappa_n = -1,9$.

Ob uporabi toka (5.17) dobimo z analognim računom kot za sipanje $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ za diferencialni sipalni presek

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{e^- p} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[(F_1^2(q^2) - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2^2(q^2)) \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M} (F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2))^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] . \quad (5.18)$$

Ponavadi uporabljamo drugo linearno kombinacijo oblikovnih faktorjev in sicer električni oblikovni faktor

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2 \quad (5.19)$$

in magnetni oblikovni faktor

$$G_M = F_1 + \kappa F_2 , \quad (5.20)$$

⁴ Zakaj uporabljamo absolutno vrednost q^2 ? Velikost četverca fotona je negativna, kar je razvidno iz $q^2 = -4EE' \sin^2(\theta/2)$. Pogosto zato uvedemo $Q^2 = -q^2$ za lažjo diskusijo.

s katerima se sipalni presek zapiše kot

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e-p} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 + \beta G_M^2}{1 + \beta} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\beta G_M^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (5.21)$$

Funkcija β zgoraj je okrajšava za $\beta = -q^2/4M^2$.

Izvedba poskusa s sipanjem elektronov na protonih (ali drugih hadronih), pri katerem merimo kotno porazdelitev sipanih elektronov, omogoča določitev obeh oblikovnih faktorjev. Prve meritve so opravili že v šestdesetih letih prejšnjega stoletja v SLAC, primer meritve je prikazan na sl. 5.2. Iz meritve je razvidno, da je pri majhnih vrednostih $|q^2|$ vrednost dipolnega magnetnega momenta res pričakovana ($G_M(0)/\mu_p = 1$), pri višjih $|q^2|$ pa foton otipa notranjo strukturo protona zato seveda oblikovni faktor $G_M(q^2)$ ni konstanten. Z enako meritvijo na tarči, ki poleg protonov vsebuje tudi nevtrone (npr. devterij) lahko določimo tudi oblikovne faktorje nevtrona. Primer je prikazan na sl. 5.3, kjer vidimo, da imata protonski in nevtronski magnetni oblikovni faktor enako odvisnost od q^2 .

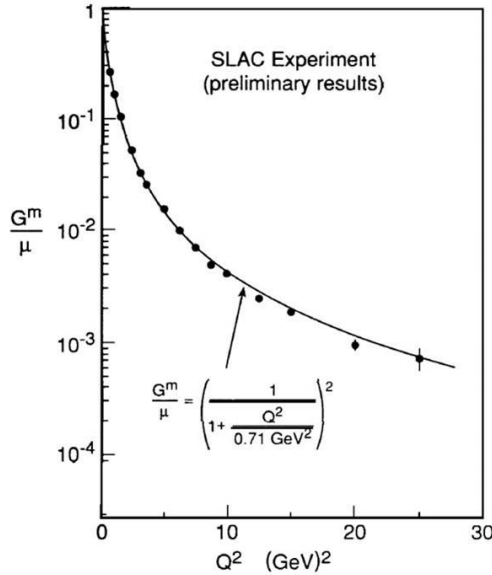


Fig. 5.2 Meritev protonskega magnetnega oblikovnega faktorja v odvisnosti od $|q^2|$.

Rezultati meritev elastičnega sipanja elektronov na protonih in nevtronih nas prepričajo, da imajo nukleoni res notranjo strukturo. Iz kakšnih sestavnih delov so sestavljeni pa nam pričajo šele rezultati neelastičnega sipanja, torej sipanja pri še višjih energijah elektronov.

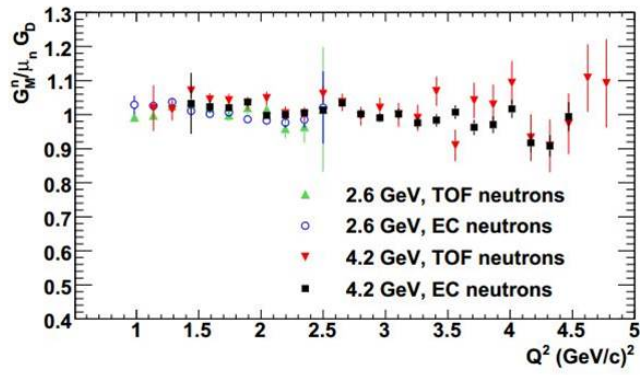


Fig. 5.3 Izmerjeno razmerje med protonskim in nevtronskim magnetnim oblikovnim faktorjem v odvisnosti od $|q^2|$.

5.2 Neelastično sipanje elektronov na hadronih

Dodatek A

Operator tirne vrtilne količine

Operatorje komponente vrtilne količine J_i definiramo po analogiji z operatorjem tretje komponente, J_3 , v en. (1.11). Prepričamo se lahko, da operatorji posameznih komponent ne komutirajo med seboj. Velja

$$[J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, \quad (\text{A.1})$$

kjer je $\varepsilon_{ijk} = 1$, če so indeksi i, j, k ciklična, oziroma -1 če so le-ti anti-ciklična permutacija $1, 2, 3$. To pa pomeni, da je pričakovana vrednost zgolj enega od treh operatorjev (npr. J_3) dobro kvantno število. Tvorimo pa lahko operator kvadrata velikosti tirne vrtilne količine, $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, za katerega velja

$$[J^2, J_i] = 0. \quad (\text{A.2})$$

Torej sta dobri kvantni števili hkrati ena od komponent in pa velikost tirne vrtilne količine. Lastna stanja teh dveh operatorjev ponavadi označimo z $|j, m\rangle$, kjer j in m predstavljata kvantna števila velikosti in tretje komponente tirne vrtilne količine:

$$\begin{aligned} J|j, m\rangle &= j(j+1)|j, m\rangle \\ J_3|j, m\rangle &= m|j, m\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

m lahko zavzame vrednosti $-j, -j+1, \dots, j$.

Dodatek B

Rotacijske funkcije

Pri rotaciji okoli določene osi se lastno stanje $|j, m\rangle$ transformira kot

$$e^{-i\theta J_i} |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m'm}^j(\theta) |j, m'\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Funkcije $d_{m'm}^j(\theta)$ imenujemo rotacijske funkcije. Pri rotaciji torej stanje $|j, m\rangle$ postane linearna kombinacija vseh $2j + 1$ stanj $|j, m'\rangle$. Rotacijske funkcije za $j = 1/2$ in $j = 1$ so navedene spodaj.

$$\begin{aligned}
 & j = 1/2 \\
 & d_{1/2,1/2}^{1/2} = d_{-1/2,-1/2}^{1/2} = \cos \frac{\theta}{2} \\
 & d_{-1/2,1/2}^{1/2} = -d_{1/2,-1/2}^{1/2} = \sin \frac{\theta}{2} \\
 & j = 1 \\
 & d_{0,1}^1 = -d_{1,0}^1 = -d_{0,-1}^1 = d_{-1,0}^1 = \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \theta \\
 & d_{1,1}^1 = d_{-1,-1}^1 = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \\
 & d_{-1,1}^1 = d_{1,-1}^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \\
 & d_{0,0}^1 = \cos \theta
 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dodatek C

Determinanta

Sled matrike je po definiciji vsota lastnih vrednosti λ_k , za katere velja

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_k &= \lambda_k \mathbf{x}_k, \\ \text{Tr}(A) &= \sum_k \lambda_k \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Če je λ_k lastna vrednost matrike A , tedaj je λ_k^n lastna vrednost matrike A^n , kar je lahko videti. Enačbo (C.1) pomnožimo z leve z A :

$$\begin{aligned} A^2 \mathbf{x}_k &= \lambda_k A \mathbf{x}_k = \lambda_k^2 \mathbf{x}_k / \cdot A \text{ z leve} \\ A^3 \mathbf{x}_k &= \lambda_k^2 A \mathbf{x}_k = \lambda_k^3 \mathbf{x}_k \\ &\vdots \\ A^n \mathbf{x}_k &= \lambda_k^{n-1} A \mathbf{x}_k = \lambda_k^n \mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Torej je

$$\begin{aligned} e^A \mathbf{x}_k &= \left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots\right) \mathbf{x}_k = \\ &= \left(1 + \lambda_k + \frac{\lambda_k^2}{2!} + \frac{\lambda_k^3}{3!} + \dots\right) \mathbf{x}_k = e^{\lambda_k} \mathbf{x}_k. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Determinanta diagonalne matrike je enaka produktu njenih elementov:

$$\begin{aligned} \det(e^A) &= e^{\lambda_1} e^{\lambda_2} \dots = e^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots} = \\ \det(e^A) &= e^{\text{Tr}(A)} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Dodatek D
Clebsch-Gordanovi koeficienti

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

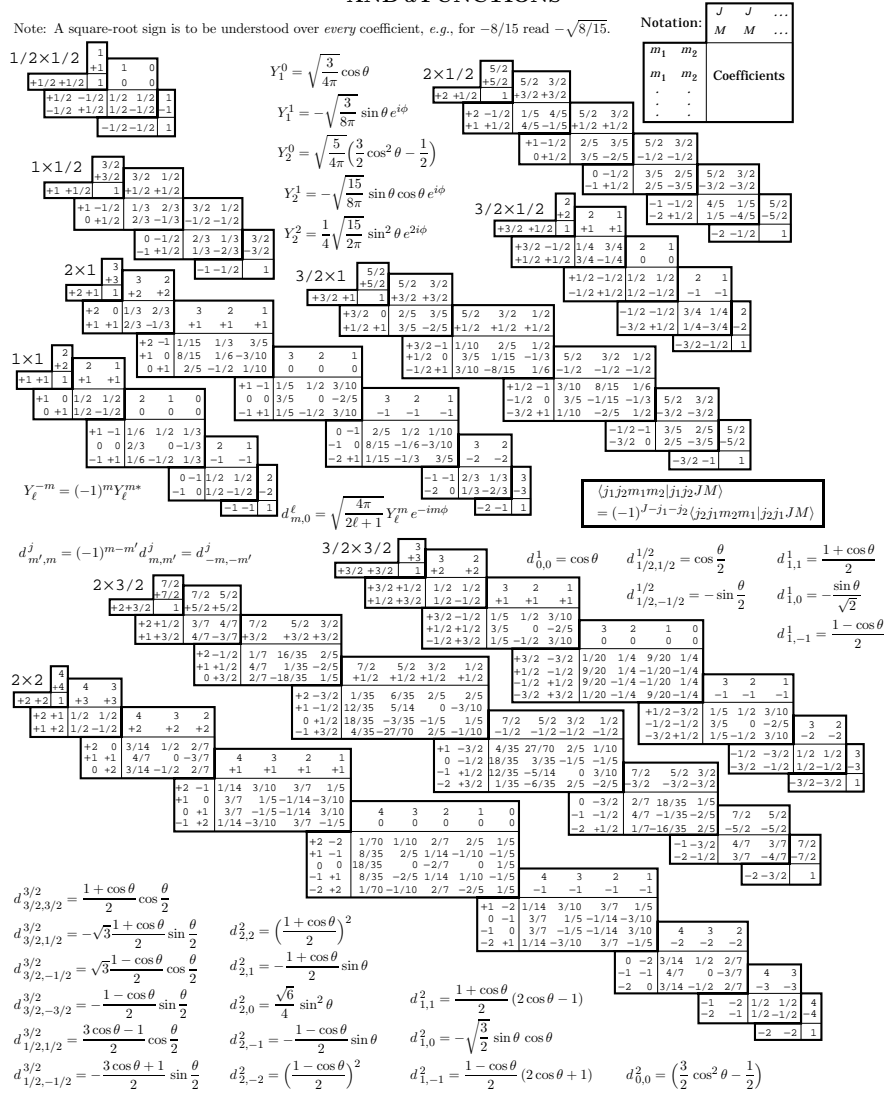


Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Dodatek E

Parnost dvo-fotonskega stanja

Stanje fotona s polarizacijo ε^1 in valovnim vektorjem \mathbf{k} lahko opišemo v osnovnem približku z valovno funkcijo

$$e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)}|\varepsilon\rangle. \quad (\text{E.1})$$

Fotona sta bozona, delca s spinom 1, zato mora biti njuna valovna funkcija simetrična na zamenjavo enega z drugim. Primerno simetrizirana valovna funkcija za dva fotona v mirovnem sistemu (torej z valovnima vektorjema \mathbf{k} in $-\mathbf{k}$) s polarizacijama ε_1 in ε_2 je

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = & e^{i(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)}|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_2\rangle \\ & + e^{i(-\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)}|\varepsilon_2\rangle|\varepsilon_1\rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Hitro se lahko prepričamo, da je funkcija ob zamenjavi delcev, $1 \leftrightarrow 2$, res simetrična. Lahko pa jo z nekoliko algebre prepíšemo v obliko

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = & \frac{1}{2} [|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_2\rangle + |\varepsilon_2\rangle|\varepsilon_1\rangle] [e^{i(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)} + e^{i(-\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)}] \\ & + \frac{1}{2} [|\varepsilon_1\rangle|\varepsilon_2\rangle - |\varepsilon_2\rangle|\varepsilon_1\rangle] [e^{i(\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)} - e^{i(-\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - 2\omega t)}] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

S to obliko pa se lahko prepričamo, da je prvi del simetričen na zrcaljenje prostora (ki v tem primeru pomeni $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \leftrightarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$), drugi del pa antisimetričen.

¹ Polarizacija predstavlja smer spina.

References

1. J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012).
2. <https://workspace.imperial.ac.uk/theoreticalphysics/public/MSc/PartSymm/SU%283%29Notes.pdf> (oktober 2014).
3. Ed. A.J. Bevan, B. Golob, Th. Mannel, S. Prell, and B.D. Yabsley, submitted to EPJC, SLAC-PUB-15968, KEK Preprint 2014-3.

Index

- J/ψ , 24
- čarm, 21
- čarmonij, 24
 - energijski nivoji, 25
- čudnost, 8, 12, 21

- antinevtron, 6
- antiproton, 6

- barioni, 21
 - osnovni, 21
- barionsko število, 8
- barva, *see* barvni naboj
- barvni naboj, 9

- Clebsch-Gordanovi koeficienti, 7

- Euler-Lagrangeova enačba, 3

- generator, 2, 5
 - $SU(3)$, 9
 - rotacij, 2
- gluoni, 10
- grupa, 1
 - $SU(3)$, 9
 - Lijeve, 1

- hipernaboj, 21

- izospin, 6
 - nevtrona, 6
 - protona, 6

- Klein-Gordonova enačba, 4
- kontinuitetna enačba, 4
- kršitev simetrije
 - okusne $SU(3)$, 13

- kvantno število
 - dobro, 3
- kvantno število, dobro, 27
- kvarkonij, 25
 - čarmonij, 25
 - botomonij, 25

- Lagrangeova enačba, 3
- Lagrangian, 3
- Lagrangian;za Klein-Gordonovo enačbo, 4

- matrike
 - Gell-Mannove, 11
- matrike, Paulijeve, 5
- mezoni, 21
 - D , 26
 - osnovni, 21
- multiplieti
 - okusni, 12
- multipliciteta, 12

- Noether Emmy, 5

- opazljivka, 2
- operator, 1
 - gibalne količine, 3
 - izospina, 6
 - Konjugacije naboja, 6
 - pričakovana vrednost, 2
 - rotacije, 1
 - v eksponentu, 3
 - vrtilne količine, 3
- OZI; pravilo OZI, 26

- pozitronij, 24
 - orto-pozitronij, 25
 - para-pozitronij, 25

pravilo OZI, 26

razpadi

barvno potlačeni, 10, 15

drevesni, 10, 15

reprezentacija grupe, 1

unitarne, 1

Richter, B., 24

Schrödingerjeva enačba, 2

simetrija

barvna $SU(3)$, 9, 12

izospinska, 10, 11

okusna $SU(3)$, 11, 12

teorem Noetherjeve, 5

tetrakvarki, 10

Ting, S., 24