

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Kako dolgo čakamo na avtobus v Cuernavci?

Seminar v 3. letniku I. stopnje Fizike (FMF)

Avtor: Anja Pirnat
Mentor: prof. dr. Marko Žnidarič

Ljubljana, 2019

Povzetek

Teorija naključnih matrik (RMT) skuša razložiti raznovrstne lastnosti, še posebej statistiko lastnih vrednosti, velikih matrik, katerih elementi so naključne spremenljivke nekega verjetnostnega zakona. Omenjene matrike imenujemo ansambel naključnih matrik, najbolj poznani so trije klasični ansambli: Gaussov ortogonalni, Gaussov unitarni in Gaussov simpleksični. Statistiko RMT najdemo v različnih vejah fizike in matematike, dobro opiše razmike pozicij nevtronskih resonanc, porazdelitev ničel Riemannove funkcije zeta, pa tudi razmike med prihodi avtobusov v mehiškem mestu Cuernavaca.

Kazalo

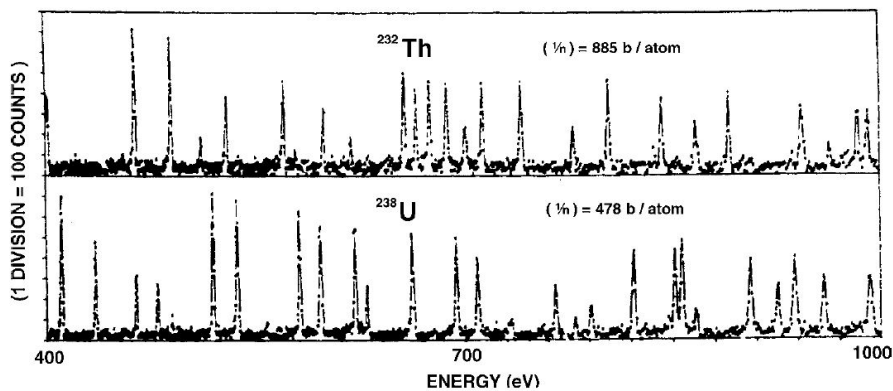
1	Uvod	2
1.1	Teorija naključnih matrik v jedrski fiziki	2
1.2	Teorija naključnih matrik in ničle Riemannove funkcije zeta	3
2	Teorija naključnih matrik	4
2.1	Simetrije sistema	4
2.1.1	Poissonova statistika	5
2.2	Gaussovi ansambli	5
2.2.1	Gaussov ortogonalni ansambel	6
2.2.2	Gaussov unitarni ansambel	6
2.2.3	Skupna verjetnostna porazdelitev matričnih elementov	6
2.2.4	Skupna verjetnostna porazdelitev lastnih vrednosti	7
2.2.5	Porazdelitev razmikov najbližjih sosednjih lastnih vrednosti	8
3	Avtobusni sistem v Cuernavaci	9
4	Zaključek	11

1 Uvod

Naključne matrike so se najprej pojavile v matematični statistiki v tridesetih letih prejšnjega stoletja, vendar niso bile deležne večjega zanimanja. Približno dvajset let za tem so Wigner, Mehta, Dyson in drugi razvili teorijo naključnih matrik (RMT, ang. random matrix theory). RMT se ukvarja z velikimi matrikami, katerih matrični elementi so naključne spremenljivke danega verjetnostnega zakona. Glavni cilj teorije je razložiti statistične lastnosti lastnih vrednosti in lastnih vektorjev teh matrik. Sprva se je RMT uporabljala predvsem v jedrski fiziki, kjer so s pomočjo naključnih matrik skušali razumeti statistične lastnosti nevtronskih resonanc. Kasneje pa je RMT postala pomembna tudi v ostalih vejah matematike in fizike, kot so karakterizacija kaotičnih sistemov, teorija števil, sistemi več teles, kvantna gravitacija, kvantna kromodinamika, teorija strun itn. (podrobnejši pregled RMT v [1] in [2]). Nenazadnje pa najdemo statistiko RMT tudi v prometu avtobusov.

V seminarju si bomo v uvodnem delu pogledali dva različna primera, kjer lahko statistične lastnosti sistema napovemo s teorijo naključnih matrik, in sicer primer iz jedrske fizike in primer iz teorije števil, kjer bomo predstavili povezavo med ničlami Riemannove funkcije zeta in RMT. V omenjenem uvodnem delu bomo že spoznali nekatere ideje in pojme iz RMT, v naslednjem nekoliko bolj matematično obarvanem poglavju 2 pa jih bomo ustrezno definirali in izpeljali glavne statistične lastnosti ansamblov naključnih matrik. V zadnjem poglavju si bomo ogledali zanimiv primer avtobusnega prometa v mestu Cuernavaca, kjer lahko porazdelitev razmikov med avtobusnimi prihodi opišemo s statistiko RMT.

1.1 Teorija naključnih matrik v jedrski fiziki

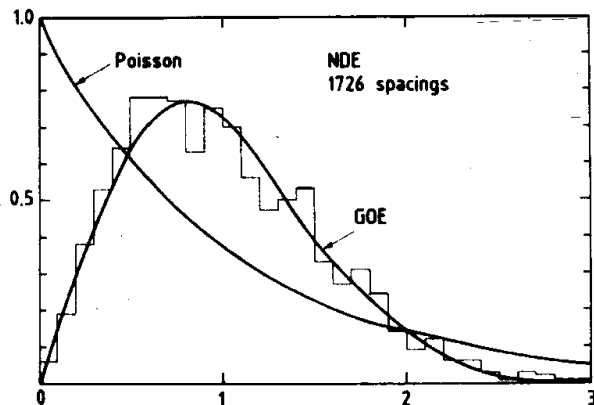


Slika 1: Presek nevtronskih resonanc na jedrih torij 232 in uran 238. Povzeto po [3].

Slika 1 prikazuje tipični graf nevtronskih resonanc v območju visokih energij, nekje okoli stotega vzbujenega stanja. Zanima nas porazdelitev leg vrhov, katerih pozicije ustrezajo jedrskim energijskim nivojem. Osnovno stanje in energijska stanja v območju nizkih energij dobro opišejo jedrski modeli, pri višjih eksitacijskih energijah pa tovrstni modeli odpovejo. Energijska stanja namreč postajajo vse gostejša, interakcije med nukleoni pa so preveč kompleksne, da bi jih znali natančno opisati. Wigner je predlagal, da lahko fluktuacije pozicij nevtronskih resonanc opišemo v smislu statističnih lastnosti lastnih vrednosti velikih simetričnih matrik z neodvisno in identično porazdeljenimi matričnimi elementi. Njegova ugotovitev je znana kot Wignerjeva hipoteza (ang. Wigner surmise), ki opiše porazdelitev razmikov najbližjih sosednjih resonanc

$$p_W(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4} s^2\right), \quad (1.1)$$

kjer je $s = S/D$ normaliziran razmik med sosednjima resonancama, $S_i = E_{i+1} - E_i$, D je srednja vrednost S_i . Wignerjev pristop temelji na statistični mehaniki, kjer sistem opišemo z ansamblom vseh možnih stanj. V primeru atomskega jedra si neznano Hamiltonovo matriko predstavljamo kot črno škatlo, sistem pa popišemo z ansamblom naključnih Hamiltonovih matrik. V nadaljevanju (poglavje 2.2) si bomo podrobneje pogledali, kakšne so omejitve in dovoljene Hamiltonove matrike. Prav tako bomo videli, da Wignerjeva hipoteza (1.1) ustreza ravno porazdelitvi razmikov najbližjih sosednjih lastnih vrednosti Gaussovega ortogonalnega ansambla GOE (enačba (2.29)).



Slika 2: Porazdelitev razmikov najbližjih sosednjih resonanc. Nabor podatkov (v ang. literaturi znan kot "nuclear data ensemble") vsebuje skupaj 1726 energijskih stanj 32 različnih atomskih jeder. S polno črto je označena Wignerjeva hipoteza $p_W(s)$ (na sliki GOE) in Poissonova statistika (Poisson). Histogram prikazuje podatke, ki so narisani v odvisnosti od normaliziranega razmika s . Povzeto po [1].

Na sliki 2 vidimo histogram razmikov najbližjih sosednjih resonanc 32 različnih jeder. Opazimo, da Wignerjeva hipoteza zelo dobro opiše izmerjeno porazdelitev.

1.2 Teorija naključnih matrik in ničle Riemannove funkcije zeta

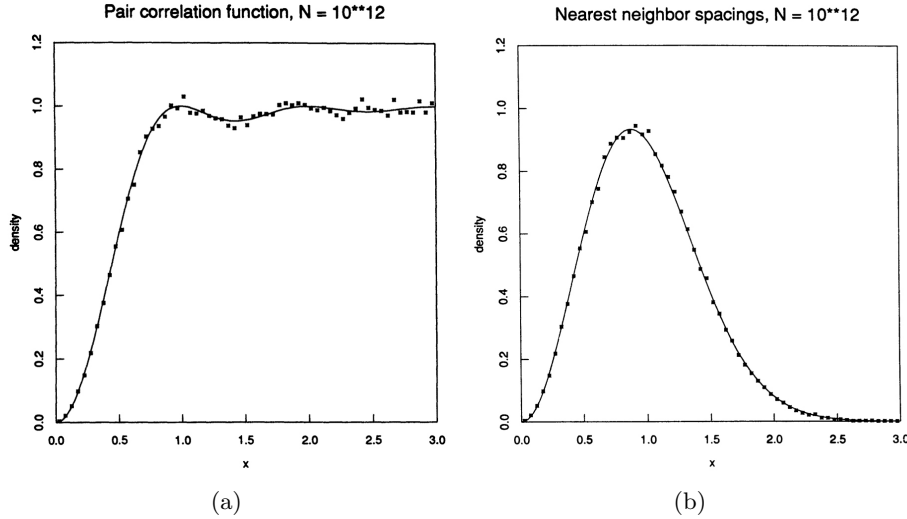
Riemannova funkcija zeta je definirana za $\Re(z) > 1$ kot

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} = \prod_p (1 - p^{-z})^{-1}, \quad (1.2)$$

za ostale vrednosti z pa s pomočjo analitičnega nadaljevanja. Produkt v zgornji enačbi (1.2) je znan kot Eulerjev produkt in ga izračunamo čez vsa praštevila p . Funkcija $\zeta(z)$ zavzame vrednost 0 za $z = -2n$, $n = 1, 2, \dots$. Ničle take oblike so dobro znane in jih imenujemo trivialne ničle, vse preostale ničle pa se nahajajo v pasu $0 < \Re(z) < 1$ in so simetrične glede na kritično premico $\Re(z) = 1/2$. Riemannova domneva (RD) pravi, da se vse netrivialne ničle nahajajo ravno na kritični premici $\Re(z) = 1/2$. Če privzamemo, da domneva velja, lahko vse netrivialne ničle zapišemo v obliki $z = 1/2 \pm i\gamma_n$, kjer je γ_n realno in pozitivno število. V zapisu smo že upoštevali, da če je z ničla, potem je ničla tudi z^* , kar sledi iz $\zeta(z^*) = \zeta^*(z)$. Zanima nas, kako so porazdeljene realne γ_n . Do 1970 ni bilo velikega zanimanja za porazdelitev γ_n , saj je vladalo prepričanje, da se ni smiselno spraševati po težjih stvareh, dokler se RD ne dokaže oz. ovrže. Kasneje je Montgomery prevzel pobudo za preučevanje porazdelitve γ_n in izpeljal izraz za parsko korelacijsko funkcijo $R_2(r)$, ki nam pove, kakšna je verjetnost, da najdemo dve ničli $\gamma < \gamma'$ na razdalji $r = \gamma' - \gamma$,

$$R_2(r) = 1 - \left(\frac{\sin \pi r}{\pi r} \right)^2. \quad (1.3)$$

Izkaže se, da je to tudi parska korelacijska funkcija lastnih vrednosti naključne hermitske matrike Gaussovega unitarnega ansambla (GUE). Ugotovitev je konsistentna z domnevo Hilberta in Polye, da so ničle Riemannove funkcije zeta povezane z lastnimi vrednostmi hermitskega operatorja. Glede na to, da je parska korelacijska funkcija enaka za ničle funkcije zeta in lastne vrednosti GUE, je upravičena domneva, da obstaja ujemanje tudi med ostalimi statističnimi lastnostmi, npr. porazdelitev najbližjih sosednjih lastnih vrednosti. Da bi preveril Montgomeryjevo domnevo o parski korelacijski funkciji je Odlyzko [4] izračunal veliko število ničel $z = 1/2 \pm i\gamma_n$, in sicer sete 10^5 ničel γ_n , $N + 1 \leq n \leq N + 10^5$, za $N = 0$, $N = 10^6$, $N = 10^{12}$, $N = 10^{18}$ in $N = 10^{20}$ z natančnostjo $\pm 10^{-8}$. Še posebej dobro ujemanje se pojavi pri visokih vrednostih ničel γ_n , glej sliko 3.



Slika 3: (a) Parska korelacijska funkcija ničel funkcije zeta γ_n . Polna črta predstavlja Montgomeryjevo domnevo, enačba (1.3), točkovne oznake pa označujejo empirične podatke γ_n za $10^{12} + 1 \leq n \leq 10^{12} + 10^5$. (b) Porazdelitev najbližjih sosednjih ničel funkcije zeta γ_n . Polna črta predstavlja napoved GUE. Točkovne oznake pa označujejo empirične podatke γ_n za $10^{12} + 1 \leq n \leq 10^{12} + 10^5$. Povzeto po [4].

Vidimo, da RMT zelo dobro opiše različne primere, tako jedrske energijske nivoje kot porazdelitev ničel γ_n .

2 Teorija naključnih matrik

2.1 Simetrije sistema

Obravnavali bomo sisteme, ki jih karakteriziramo s Hamiltonovim operatorjem H , ki ga predstavimo s Hamiltonovo matriko. V klasični mehaniki simetrije povezujemo s konstantami gibanja, v kvantni mehaniki pa vsaka simetrija implicira novo kvantno število. Velja namreč, da kadar je Hamiltonov operator invarianten na simetrijsko operacijo, obstaja pridružen operator O , ki komutira s H , pričakovana vrednost operatorja pa je konstantna. Če pri matrični reprezentaciji H za baze funkcije izberemo lastne funkcije operatorja O , se Hamiltonova matrika prevede v diagonalno bločno matriko, kjer vsak blok ustreza posamezni pričakovani vrednosti operatorja O . Vsi ostali matrični elementi, ki ležijo izven blokov, pa so enaki 0. V nadaljevanju bomo privzeli, da je bila ustrezna baza že izbrana, osredotočili pa se bomo na posamezen blok, matriko dimenzije $N \times N$, kjer je N veliko število.

2.1.1 Poissonova statistika

Vzemimo primer, kjer je ob upoštevanju vseh simetrij sistema bločna matrika diagonalna. To se zgodi v primeru integrabilnih sistemov, kjer je število dobrih kvantnih števil enako številu prostostnih stopenj sistema. Vsaka lastna vrednost ustreza svojemu simetrijskemu razredu, zato lahko pričakujemo, da so med sabo popolnoma nekorelirane. Zanima nas porazdelitev razmikov najbližjih sosednjih lastnih vrednosti $p(s)$. S $p(s)ds$ označimo verjetnost, da naslednjo lastno vrednost najdemo na razdalji $s + ds$ od izbrane lastne vrednosti, vmes pa nobene druge. Za izračun verjetnosti razdelimo interval s na N podintervalov dolžine s/N . Dobimo

$$p(s)ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{s}{N}\right)^N ds, \quad (2.1)$$

kjer prvi faktor na desni strani označuje verjetnost, da ne najdemo nobene lastne vrednosti v N podintervalih dolžine s/N , drugi faktor pa verjetnost, da lastno vrednost najdemo na razdalji med s in $s + ds$. Ko izvedemo limito $N \rightarrow \infty$, dobimo Poissonovo statistiko

$$p(s) = \exp(-s). \quad (2.2)$$

Pri izpeljavi je bila ključna predpostavka o nekoreliranosti lastnih vrednosti, saj smemo le v tem primeru na desni strani enačbe (2.1) posamezne verjetnosti množiti med sabo. Za integrabilne sisteme torej pričakujemo, da razmike med najbližjimi sosednjimi lastnimi vrednostmi opiše porazdelitev (2.2).

2.2 Gaussovi ansamblji

V primeru neintegrabilnih sistemov (ni dovolj ohranjenih količin) pa pričakujemo drugačno porazdelitev razmikov lastnih vrednosti. Na koncu poglavja bomo ob upoštevanju vseh zahtev, prišli do iskane porazdelitve. Na dovoljeno Hamiltonovo matriko še posebej vpliva simetričnost sistema ob obratu časa. Če je Hamiltonov operator invarianten na obrat časa in na rotacije, ga lahko predstavimo z realno simetrično matriko. Če Hamiltonov operator ni invarianten na obrat časa, potem mu ustreza kompleksna hermitska matrika. Kadar imamo opravka s Hamiltonovim operatorjem, ki je invarianten na obrat časa, ne pa na rotacije, in ima polovično skupno vrtilno količino, ga zapišemo z realno kvaternionsko matriko (matrični elementi so realni kvaternioni, predstavljeni z 2×2 kompleksno matriko) [5].

Simetrija na obrat časa	Skupna vrtilna količina	Rotacijska simetrija	Hamiltonova matrika	Kanonična grupa	β	Št. neodvisnih realnih param.
✓	Celoštevilska	-	Realna simetrična	Ortogonalna	1	$\frac{1}{2}N(N+1)$
	Polovična	✓				
	Polovična	x	Realna kvaternionska	Simplektična	4	$N(2N-1)$
x	-	-	Kompleksna hermitska	Unitarna	2	N^2

Tabela 1: Klasifikacija dovoljenih Hamiltonovih matrik glede na simetrijske lastnosti sistema.

V nadaljevanju se bomo osredotočili predvsem na primera realne simetrične ($\beta = 1$) in kompleksne hermitske Hamiltonove matrike ($\beta = 2$), primer realne kvaternionske matrike ($\beta = 4$) pa smo v tabelo 1 vključili zaradi completeness in bomo zanj občasno navedli le končne rezultate. β (glej zgornjo tabelo), v literaturi pogosto imenovan Dysonov indeks, je univerzalnostni indeks, ki ga bomo še srečali v nadaljevanju, in je enak številu realnih spremenljivk, ki jih potrebujemo za zapis matričnega elementa dane matrike.

2.2.1 Gaussov ortogonalni ansambel

Gaussov ortogonalni ansambel (GOE, ang. Gaussian orthogonal ensemble) je definiran v prostoru realnih matrik z dvema zahtevama:

(1) Ansambel je invarianten na vsako ortogonalno transformacijo

$$H' = W^T H W, \quad (2.3)$$

kjer je W poljubna ortogonalna matrika, $W W^T = W^T W = I$. Sledi da je tudi verjetnost $P(H)dH$, da je matrika H v volumskem elementu $dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij}$, invariantna na ortogonalne transformacije:

$$P(H')dH' = P(H)dH. \quad (2.4)$$

(2) Matrični elementi H_{ij} , $i \leq j$, so med sabo statistično neodvisni. Verjetnostno porazdelitev tako zapišemo kot produkt funkcij, ki so odvisne le od ene spremenljivke:

$$P(H) = \prod_{i \leq j} f_{ij}(H_{ij}). \quad (2.5)$$

2.2.2 Gaussov unitarni ansambel

Podobno kot GOE definiramo tudi Gaussov unitarni ansambel (GUE, ang. Gaussian unitary ensemble). GUE zadošča naslednjima zahtevama:

(1) Ansambel je invarianten na vsako unitarno transformacijo

$$H' = U^\dagger H U, \quad (2.6)$$

kjer je U unitarna matrika, $U U^\dagger = U^\dagger U = I$. Sledi da je tudi verjetnost $P(h)dH$, da je matrika H v volumskem elementu $dH = \prod_{i \leq j} dH_{ij}^{(0)} \prod_{i < j} dH_{ij}^{(1)}$, kjer sta H_{ij}^0 in H_{ij}^1 realni in imaginarni del H_{kj} , invariantna na unitarne transformacije:

$$P(H')dH' = P(H)dH. \quad (2.7)$$

(2) Matrični elementi H_{ij} , $i \leq j$, so med sabo statistično neodvisni. Verjetnostno porazdelitev tako zapišemo kot produkt funkcij, ki so odvisne le od ene spremenljivke:

$$P(H) = \prod_{i \leq j} f_{ij}^{(0)}(H_{ij}^{(0)}) \prod_{i < j} f_{ij}^{(1)}(H_{ij}^{(1)}). \quad (2.8)$$

2.2.3 Skupna verjetnostna porazdelitev matričnih elementov

Izkaže se, da zgornji dve zahtevi o invariantnosti in statistični neodvisnosti, enolično določita verjetnostno porazdelitev matričnih elementov $P(H_{11}, \dots, H_{NN}) := P(H)$. Funkcije matričnih elementov H , ki so invariantne na ortogonalne oz. unitarne transformacije lahko izrazimo kot funkcijo sledi potenc H

$$P(H) = f[\text{tr}(H), \text{tr}(H^2), \text{tr}(H^3)\dots] \quad (2.9)$$

Zahteva po statistični neodvisnosti matričnih elementov pa še dodatno zoži nabor dovoljenih funkcij $P(H)$, in sicer so dovoljene le funkcije, ki so odvisne od sledi prvih dveh potenc H , pa še ti se lahko nahajata le v eksponentu. Verjetnostno porazdelitev tako zapišemo

$$P(H) = C \exp [B \text{tr}(H) - A \text{tr}(H^2)], \quad (2.10)$$

kjer so A , B in C realne konstante, za A pa velja še, da mora biti pozitivna. Za B lahko brez izgube splošnosti vzamemo $B = 0$, saj to predstavlja le premik povprečne energije. C pa je določena z normalizacijskim pogojem

$$\int P(H)dH = 1. \quad (2.11)$$

2.2.4 Skupna verjetnostna porazdelitev lastnih vrednosti

Porazdelitev matričnih elementov (2.10), ki smo jo izračunali v prejšnjem poglavju ne omogoča direktne primerjave z eksperimenti, saj pri poskusih navadno merimo lastne vrednosti sistema (npr. lastno energijo). Torej je za primerjavo dosti bolj praktična porazdelitev lastnih vrednosti. Verjetnostno porazdelitev lastnih vrednosti bomo zaradi preprostosti izračunali za ortogonalni primer. Najprej upoštevamo dejstvo, da lahko vsako simetrično matriko diagonaliziramo z ortogonalno transformacijo

$$H = OH_D O^T, \quad (2.12)$$

oz. zapisano po komponentah

$$H_{ij} = \sum_k O_{ik} E_k O_{jk}, \quad (2.13)$$

kjer je H_D diagonalna matrika z elementi $(H_D)_{kl} = E_k \delta_{kl}$. Ortogonalno matriko O karakterizira $\frac{1}{2}N(N-1)$ neodvisnih spremenljivk p_α . Prvi enotski vektor dolžine N določa $N-1$ spremenljivk, drugega, prvemu pravokotnega, $N-2$ spremenljivk in tako dalje. V enačbi (2.13) je $\frac{1}{2}N(N+1)$ neodvisnih spremenljivk H_{ij} na levi strani izraženo z N lastnimi vrednostmi E_k in $\frac{1}{2}N(N-1)$ spremenljivkami p_α na desni. Skupno verjetnostno porazdelitev matričnih elementov iz poglavja (2.2.3) lahko sedaj izrazimo z novimi spremenljivkami,

$$P(H)dH \propto \exp(-A \sum_k E_k^2) |J| dE_k dp_\alpha, \quad (2.14)$$

kjer smo uporabili $\sum_{i,j} H_{ij}^2 = \sum_k E_k^2$. Določiti moramo še Jacobijevo determinatno

$$|J| = \left| \frac{\partial(H_{ij})}{\partial(E_k, p_\alpha)} \right| \quad (2.15)$$

transformacije spremenljivk. Enačbo (2.12) odvajamo glede na E_k in p_α in dobimo

$$\frac{\partial H}{\partial E_k} = O \frac{\partial H_D}{\partial E_k} O^T, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \frac{\partial O}{\partial p_\alpha} H_D O^T + O H_D \frac{\partial O^T}{\partial p_\alpha} = O(S_\alpha H_D - H_D S_\alpha) O^T, \quad (2.17)$$

kjer smo v zadnji enačbi uvedli matriko

$$S_\alpha = O^T \frac{\partial O}{\partial p_\alpha} = -\frac{\partial O^T}{\partial p_\alpha} O. \quad (2.18)$$

Iz zgornjih enačb (2.16) in (2.17) dobimo za matrične elemente

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial E_k} = O_{ik} O_{jk}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial p_\alpha} = \sum_{n,m} O_{in} O_{jm} (S_\alpha H_D - H_D S_\alpha)_{nm} = \sum_{n,m} O_{in} O_{jm} (S_\alpha)_{nm} (E_m - E_n). \quad (2.20)$$

Matrične elemente Jacobijeve determinante lahko tako zapišemo kot

$$J_{ij,k\alpha} = \sum_{n,m} O_{in} O_{jm} M_{nm,k\alpha}, \quad (2.21)$$

kjer so $M_{nm,k\alpha}$ elementi matrice

$$M = \begin{pmatrix} \delta_{nm} & 0 \\ 0 & (S_\alpha)_{nm} (E_m - E_n) \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Vrstni red je urejen tako, da je v vrsticah najpej N H_{nm} , zatem sledi $\frac{1}{2}N(N-1)$ H_{nm} elementov, kjer je $n > m$. V stolpcih N lastnim vrednostim E_k sledi $\frac{1}{2}N(N-1)$ p_α .

Iz enačbe (2.21) vidimo, da lahko Jacobijevo matriko zapišemo kot produkt $\frac{1}{2}N(N+1) \times \frac{1}{2}N(N+1)$ matrice \tilde{O} in M , kjer je \tilde{O} matrika z elementi $(\tilde{O})_{ij, nm} = O_{in} O_{jm}$. Ob upoštevanju pravil za računanje determinante zmnožka matrik dobimo

$$|J| = |\tilde{O}| \cdot |M| = |\tilde{O}| \cdot |S| \cdot \prod_{n>m} (E_n - E_m). \quad (2.23)$$

Tu je S matrika velikosti $\frac{1}{2}N(N-1) \times \frac{1}{2}N(N-1)$ z elementi $(S_\alpha)_{nm}$. Niti \tilde{O} niti S ne poznamo zares, vendar to ni pomembno, saj sta odvisni le od p_α . Da dobimo verjetnostno porazdelitev lastnih vrednosti $P(E_1, \dots, E_N) := P(E)$ moramo enačbo (2.14) integrirati po p_α , dobimo

$$P(E) \propto \prod_{i>j} (E_i - E_j) \exp(-A \sum_i E_i^2). \quad (2.24)$$

Zgornji rezultat ustreza skupni verjetnostni funkciji lastnih vrednostih GOE, za GUE je izpeljava podobna, najdemo jo v knjigi [3]. Obe lahko zapišemo z eno samo formulo

$$P(E) \propto \prod_{i>j} (E_i - E_j)^\beta \exp(-A \sum_i E_i^2), \quad (2.25)$$

kjer je β univerzalnostni indeks, ki ga najdemo v tabeli 1. Zavzame vrednosti 1 za GOE, 2 za GUE in 4 za Gaussov simplektični ansambel (GSE, Gaussian symplectic ansambel), na katerega se v našem seminarju nismo osredotočili. Iz zgornjega izraza vidimo, da so lastne vrednosti v nasprotju z matričnimi elementi med sabo korelirane. Prvi produktni del $\prod_{i>j} (E_i - E_j)^\beta$ skrbi, da lastne vrednosti niso preblizu skupaj, drugi eksponentni del $\exp(-A \sum_i E_i^2)$ pa poskrbi, da lastne vrednosti niso preveč razprešene oz. predaleč od povprečne vrednosti.

2.2.5 Porazdelitev razmikov najbližjih sosednjih lastnih vrednosti

Porazdelitev razmikov $p(s)$, kjer je s razmik med sosednjima lastnima vrednostima, lahko izračunamo iz verjetnostne porazdelitve lastnih vrednosti (2.25), vendar je izračun računsko zahteven in presega naše znanje. Dolgemu izračunu se lahko izognemo, če namesto za splošen primer poljubne $N \times N$ matrice, pogledamo posebni primer 2×2 matrice. Dobimo:

$$\begin{aligned} p(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} dE_1 \int_{-\infty}^{\infty} dE_2 P(E_1, E_2) \delta(s - |E_1 - E_2|) \\ &= C \int_{-\infty}^{\infty} dE_1 \int_{-\infty}^{\infty} dE_2 (E_2 - E_1)^\beta \exp(-A \sum_{i=1}^2 E_i^2) \delta(s - |E_1 - E_2|). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Konstanti A in C določimo iz normalizacijskih pogojev

$$\int_0^{\infty} p(s) ds = 1, \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\infty} sp(s) ds = 1. \quad (2.28)$$

S prvim pogojem celotno porazdelitev normiramo na 1, z drugim pa srednjo vrednost s . Ko izračunamo integrala v (2.26) pridemo do

$$p(s) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} s \exp(-\frac{\pi}{4} s^2) & \beta = 1 \text{ (GOE)} \\ \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp(-\frac{4}{\pi} s^2) & \beta = 2 \text{ (GUE)}. \\ \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp(-\frac{64}{9\pi} s^2) & \beta = 4 \text{ (GSE)} \end{cases} \quad (2.29)$$

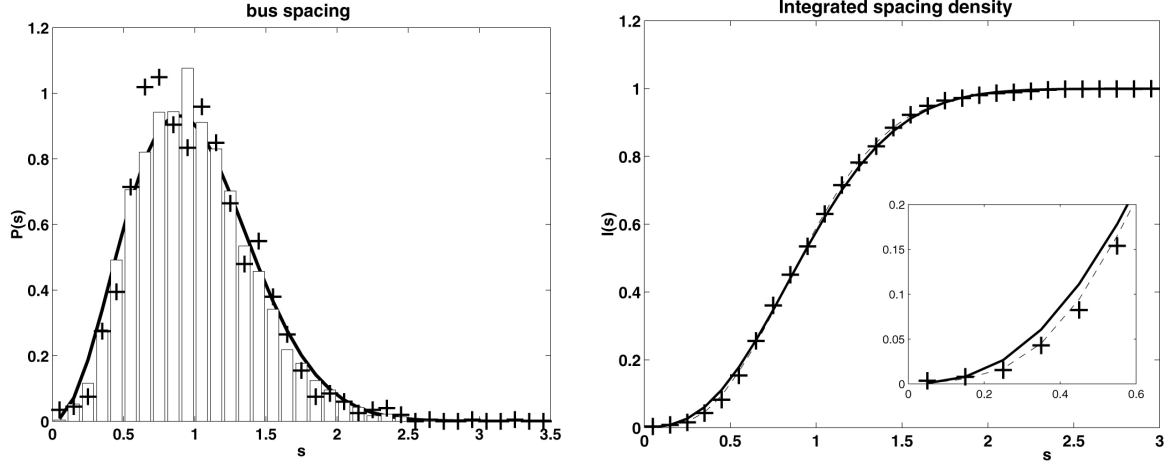
Kljub temu da smo do zgornjih izračunov prišli z obravnavo Gaussovega ansambla 2×2 matrik, dobljena porazdelitev z visoko natančnostjo opiše tudi matrike poljubnega ranga [6]. Zgornje porazdelitve (2.29) imenujemo tudi Wignerjeve porazdelitve, saj je Wigner z obravnavo naključne simetrične 2×2 matrike prvi izpeljal to porazdelitev za GOE.

V nasprotju s Poissonovo statistiko razmikov (2.2), ki smo jo izračunali ob upoštevanju nekoreliranosti lastnih vrednosti, v primeru Wignerjevih porazdelitev opazimo značilni odboj lastnih vrednosti pri majhnih s . Se pravi, da je verjetnost, da najdemo dve lastni vrednosti zelo blizu skupaj majhna (glej krivulji Poisson in GUE na sliki 2).

3 Avtobusni sistem v Cuernavaci

V poglavju bomo pokazali, da statistične lastnosti avtobusnih prihodov v Mehiškem mestu Cuernavaca dobro opiše GUE. V mestu ne obstaja nobeno krovno avtobusno podjetje, ki bi skrbelo za organizacijo in razpored vozil, ampak je vsak voznik lastnik svojega avtobusa. Prav tako ni posebnih zunanjih omejitev, kot je npr. vozni red, ki bi vplivale na prihode avtobusov. Vsak voznik skuša maksimirati svoj dobiček, se pravi število pobranih potnikov. To vodi v konkurenčnost med vozniki in njihovo medsebojno interakcijo. Ko interakcije med vozniki ni in so prihodi med seboj nekorelirani, lahko pričakujemo, da bo statistika razmikov med prihodi avtobusov zelo blizu Poissonovi [8]. Takšno porazdelitev so opazili v Mehiškem mestu Puebla [9] in na eni od linij newyorške podzemne železnice [8]. Poissonova statistika implicira, da je verjetnost, da dva zaporedna avtobusa prispeta na postajo v kratkem časovnem intervalu, zelo velika, kar pa je neugodno za dobiček voznika. To bi pomenilo, da prvi voznik, ki prispe na postajo, pobere vse potnike, drugi, ki prispe le malo za njim, pa skoraj nobenega. Da bi se izognili neprikladnemu prekrivanju prihodov so vozniki v Cuernavaci pozvali ljudi na določenih postajah vzdolž linije, da si zapisujejo prihode avtobusov. Tako na postaji navadno stoji otrok ali pa starejša oseba, ki beleži čas prihodov. Ko voznik prispe na postajo, v zameno za majhno plačilo pridobi podatke o predhodnih prihodih. S pomočjo omenjene informacije skuša optimizirati svoj naslednji prihod, tako da ustrezno prilagodi hitrost vozila.

Avtorji članka [7] so zbrali podatke prihodov avtobusov linije številka 4 blizu mestnega centra Cuernavace. Podatki vsebujejo skupno 3500 zabeleženih prihodov, zbranih v časovnem obdobju 27 dni, prihode na različne dni so obravnavali kot statistično neodvisne. Iz nabora podatkov so ovrednotili izbrane verjetnostne porazdelitve in jih primerjali z napovedmi modela GUE. Osredotočili so se na porazdelitev avtobusnih razmikov, to je verjetnostna porazdelitev $p(s)$, da



(a) Porazdelitev razmikov med prihodom zaporednih avtobusov $p(s)$. (b) Integrirana porazdelitev avtobusnih razmikov $I(s)$.

Slika 4: Grafa prikazujeta (a) porazdelitev razmikov med prihodom zaporednih avtobusov $p(s)$ in (b) integrirano porazdelitev avtobusnih razmikov $I(s)$. Polna črta predstavlja napoved GUE (3.1), oznake (+) predstavljajo zabeležene podatke, stolpci (a) oz. črtkana črta (b) pa napoved (3.1) z 0.8 % zavrženih podatkov. Pri (b) je v spodnjem desnem kotu še povečava grafa porazdelitve blizu izhodišča. Povzeto po [7].

je časovni interval med dvema zaporednima avtobusoma enak s . Napoved GUE za porazdelitev razmikov avtobusov smo izpeljali v podpoglavju 2.2.5, dobili smo

$$p(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right). \quad (3.1)$$

Na sliki 4 vidimo primerjavo porazdelitve avtobusnih razmikov z napovedjo GUE (3.1). Avtobusni podatki so označeni (+). Manjše neujemanje podatkov z napovedjo GUE lahko pojasnimo, če upoštevamo dejstvo, da zbrani podatki ne vsebujejo vseh avtobusnih prihodov. Ob predpostavki, da okoli 0.8 % prihodov ni bilo zabeleženih in tako naključno zavrnmemo 0.8 % lastnih vrednosti naključne matrike, dobimo bolj zadovoljivo ujemanje. Še bolj očitno ujemanje z GUE pa dobimo, če namesto porazdelitve razmikov, primerjamo integrirano porazdelitev $I(s) = \int p(s') ds'$, glej sliko 4 (b).

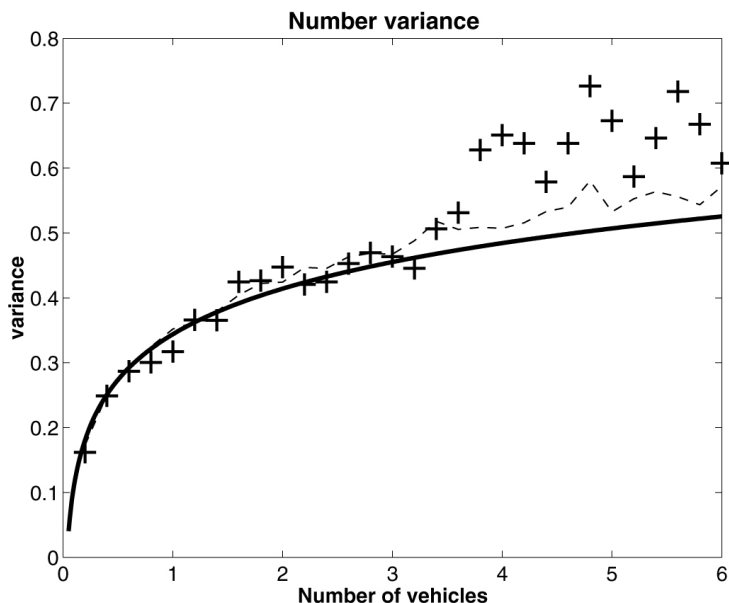
Porazdelitev razmikov je ena izmed najbolj preučevanih spektralnih statistik in eden prvih indikatorjev, da sistem lahko opišemo s teorijo naključnih matrik, lahko pa primerjamo tudi napovedi ostalih spektralnih statistik. Avtorji članka so si za primerjavo nabora podatkov in napovedi GUE izbrali še številsko varianco avtobusov $N(T)$, ki meri fluktuacije števila $n(T)$ vseh avtobusov, ki prispejo na postajo v časovnem intervalu T :

$$N(T) = \langle (n(T) - T)^2 \rangle, \quad (3.2)$$

kjer $\langle \rangle$ predstavlja povprečenje po vzorcu. Tu upoštevamo, da je povprečni razmik med avtobusoma nastavljen na 1. Številsko varianco opiše

$$N(T) \approx \frac{1}{\pi^2} (\ln 2\pi T + \gamma + 1), \quad (3.3)$$

kjer je $\gamma = 0.57721\dots$ Euler-Mascheronijeva konstanta [3].



Slika 5: Številaska varianca $N(T)$. Polna črta prikazuje napoved GUE 3.3, oznake (+) pa za beležene podatke. Povzeto po [7].

Slika 5 prikazuje primerjavo številске variance pridobljene iz podatkov in napoved GUE. Opazimo, da je ujemanje dobro do časovnega intervala $T \sim 3$. Za večje čase pa se številaska varianca avtobusov nahaja nad napovedjo 3.3, kar nakazuje, da so korelacije med več kot tremi avtobusi šibkejše kot bi jih pričakovali po GUE. Obstaja enostavna razlaga. Ko voznik prispe na postajo, izve prihod predhodnega avtobusa in na podlagi pridobljene informacije skuša optimizirati svojo pozicijo. Poleg tega pa mora upoštevati domnevni časovni interval voznika za njim, saj ga lahko ta ob prepočasni vožnji prehit. Sledi, da mora voznik upoštevati tako predhodni kot naslednji avtobus, kar vodi do opažene korelacije.

4 Zaključek

Tekom seminarja smo se lahko prepričali o široki uporabnosti RMT. Njena statistika dobro opiše razmike nevtronskih resonanc, kjer imamo opravka z večdelčnimi interakcijami znotraj jedra, porazdelitev ničel funkcije zeta in porazdelitev razmikov avtobusnih prihodov. Poleg primerov, omenjenih v seminarju, dobro opiše tudi ostale kvantnomehanske sisteme, kot so spektri kaotičnih sistemov [5], tu so predvsem reprezentativni kvantni biljardi (klasični analog so navadni biljardi), kjer preučujemo spekter Laplaceovega operatorja v potencialni jami posebne oblike (oblika stadiona, pravokotnik z izrezanim krogom ...). Statistiko RMT najdemo tudi izven kvantnomehanskih sistemov, npr. v vibracijskem spektru stadionsko oblikovane plošče [6].

Lepota RMT je predvsem v njeni univerzalnosti, v seminarju smo spoznali tri klasične ansamble (GOE, GUE, GSE), kjer so matrični elementi porazdeljeni po Gaussovi porazdelitvi, vendar pa spektralne statistike, ki smo jih izpeljali, dobro veljajo tudi za matrike z drugačno porazdelitvijo elementov. Velja namreč, da v limiti velikih matrik ($N \rightarrow \infty$), statistične lastnosti lastnih vrednosti niso odvisne od verjetnostne porazdelitve matričnih elementov. Pomembno je le, da je matrika simetrična, hermitska ali kvaternionska [3]. Omenjena univerzalnost je glavni razlog, da najdemo statistiko RMT na tako različnih področjih.

Literatura

- [1] Guhr, T., Müller–Groeling, A. in Weidenmüller, H. A. (1998). Random-matrix theories in quantum physics: common concepts. *Physics Reports*, 299(4-6), 189-425.
- [2] Forrester, P. J., Snaith, N. C. in Verbaarschot, J. J. M. (2003). Developments in random matrix theory. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(12), R1.
- [3] Mehta, M. L. (2004). *Random matrices* (Vol. 142). Elsevier.
- [4] Odlyzko, A. M. (1987). On the distribution of spacings between zeros of the zeta function. *Mathematics of Computation*, 48(177), 273-308.
- [5] Bohigas, O. in Giannoni, M. J. (1984). Chaotic motion and random matrix theories. *Mathematical and computational methods in nuclear physics* (pp. 1-99). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [6] Stöckmann, H. J. (2000). *Quantum chaos: an introduction*.
- [7] Krbálek, M. in Seba, P. (2000). The statistical properties of the city transport in Cuernavaca (Mexico) and random matrix ensembles. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33(26), L229.
- [8] Jagannath, A. in Trogdon, T. (2017). Random matrices and the New York City subway system. *Physical Review E*, 96(3), 030101.
- [9] Krbalek, M. in Seba, P. (2002). Headway statistics of public transport in Mexican cities. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(1), L7.