

# Zbirka nalog iz Matematične fizike I

---

Borut Paul Kerševan

Dostopno na <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>  
COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242143488]  
ISBN: 978-961-92548-0-6

Naslov: "Zbirka nalog iz Matematične fizike I"

Avtor: Borut Paul Kerševan,  
Fakulteta za matematiko in fiziko,  
1000 Ljubljana

Izdaja: Učno gradivo na spletu: <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>

Izdano v samozaložbi, Ljubljana 2008

COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242143488]

ISBN: 978-961-92548-0-6

# 1 Računanje z diferenciali

1. Nihalo za precizno uro iz XIX. stoletja je v idealizirani obliki sestavljeno iz 1 m dolge železne palice z maso 0.5 kg, ki je vstavljena v nekoliko širšo bakreno cev in nanjo privarjena na spodnjem koncu. Masa cevi je enaka masi palice. Razteznostna koeficienta za Fe in Cu sta po vrsti 12 in 17 milijonink na stopinjo C. Kolikšen je nihajni čas tega nihala in kolikšen je njegov temperaturni koeficient, če gre os skozi zgornji konec palice in je cev enako dolga kot palica? Ali je mogoče izbrati dolžino cevi tako, da je nihajni čas neobčutljiv na majhne spremembe temperature?
2. Po razsežni planparalelni 5 cm debeli plasti iz neke snovi teče električni tok z gostoto  $90 \text{ A/cm}^2$  vzdolž njene dolge osi. Plast z obeh strani oblivamo z ledeno vodo s temperaturo  $0^\circ \text{ C}$ . Nekje znotraj plasti se zgodi fazni prehod, v katerem se toplotna prevodnost spremeni od  $30 \text{ W/mK}$  pri nižji temperaturi na  $10 \text{ W/mK}$  pri višji, v tabelah pa lahko najdemo podatek, da je temperatura faznega prehoda snovi enaka  $70^\circ \text{ C}$ . Kolikšen delež snovi doživi fazni prehod? Kolikšna je temperatura na sredini plasti? Specifična upornost snovi je  $10 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$  in se ob faznem prehodu ne spremeni.
3. Tanka plastična folija, dopirana z jodom, šibko prevaja električni tok. Upor kvadratnega centimetra folije, merjen med vzporednima robovoma, je 100 ohmov. Kolikšen je upor balona s premerom 1 m, iz iste folije, če ga merimo med kovinskima elektrodama v obliki diskov s premerom 4 cm, pritisnjenih ob nasprotnih polih balona? Kako se spremeni upor, če balon dodatno napihnemo in s tem povečamo premer za 1%? Privzemi, da se pri raztegovanju gostota plastike ne spremeni (kolikor se raztegne, se tudi stanjša) in da se enako ne spremeni specifična upornost.
4. Enakomerno navito 1 m dolgo vijačno vzmet z maso 1 kg in koeficientom  $100 \text{ N/m}$  nataknemo na enako dolgo valjasto vodilo in jo na obeh konceh pritrdimo nanj. Vzmet se vodilu prilega, vendar po njem prosto drsi. Vodilo z vzmetjo postavimo pokonci: za koliko se premakne srednja točka vzmeti? Ne pozabi, da velja koeficient vzmeti samo za celo vzmet!
5. V gravitacijskem detektorju položimo testno maso 10 t na štiri stebričke, ki so postavljeni v ogliščih kvadrata. Stebrički so visoki 25 cm in imajo presek  $3 \text{ cm}^2$ , po dva sta iz bakra in dva iz jekla, postavljeni so navzkriž. Njihove vrhnje ploskve so brušene na natanko enako višino, enako natančno je brušena ravna spodnja ploskev testne mase. Za koliko se posedejo stebrički, ko previdno položimo maso nanje, tako da je njeno težišče ravno nad središčem kvadrata? Kako je višina stebričkov odvisna od temperature? Za koliko se mora spremeniti temperatura, da nosita težo samo dva stebrička? Prožnostna modula jekla in bakra sta  $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  in  $8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ , koeficienta linearne razteznosti pa znašata  $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  in  $17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .
6. V projektu Auger gradijo velik detektor za mione v ultraenergijskih kozmičnih pljuskih. Detektor ima v načrtu obliko na tleh sedeče polkrogle z radijem 20 m in je sestavljen iz izmenčnih vodoravnih slojev aluminijeve pločevine z debelino 4 mm in aerogela z debelino 6 mm. Gostota aluminija je  $2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ , aerogela

pa  $100 \text{ kg/m}^3$ . Aluminijske plošče so praktično toge, aerogel pa se zaradi velike poroznosti zlahka elastično deformira, njegov elastični modul je  $2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ . Za koliko je prava višina detektorja manjša od načrtovane?

**Namig:** aluminijske plošče so tako toge, da je tlak v detektorju odvisen samo od višine in nič od prečnih koordinat.

## 2 Verjetnost in statistika

1. V samotni pokrajini stoji avtomatični seizmograf, ki javlja po radijski zvezi podatke o potresih z magnitudo nad 2. Takih dogodkov, ki so slučajni in neodvisni med seboj, je v povprečju petnajst na deset dni. Seizmograf pa zabeleži dnevno tudi vlaka ob 6.00 in 18.00, ki peljeta po oddaljenem tiru in katerih seizmični signal je neločljiv od pravega potresa. Določi povprečni časovni interval med dvema signaloma seizmografa in njegovo standardno deviacijo. Določi tudi mediano in oba kvartila porazdelitve. Kolikšna je verjetnost, da bo seizmograf v 24 urah zabeležil samo prehod obeh vlakov?
2. Pri osnovnošolski telovadbi testirajo skakanje prvosolčkov s kolebnico. Fantek ima pri tem težave in ob vrtenju svoje kolebnice skače v zrak pri vsakem obratu praktično naključno; neodvisno od tega se mu kolebnica v povprečju zaplete vsake tri obrate. Kolikšna je verjetnost, da bo v petih poskusih trikrat uspel skočiti zahtevane tri zaporedne skoke? Kakšno je povprečno število skokov, ki jih deček uspe opraviti v enem poskusu? Privzami, da se kolebnica vrti s frekvenco 0.5 Hz in da je ob skoku fantek v zraku približno eno sekundo.
3. Strešno okno v obliki enakokrakega pravokotnega trikotnika je v nagnjeno streho vdelano tako, da je ena kateta vodoravna. Na okno pada dež: kaplje zdrsijo po steklu navzdol v smeri največjega padca, dokler se ne dotaknejo okvirja.
  - Kako so porazdeljene dolžine njihovih sledi? Kolikšna je povprečna dolžina sledi in kolikšen je njen efektivni odmik? Določi tudi mediano - dolžino, ki je daljša (oz. krajša) od polovice vseh sledi.
  - Ali sta koordinati  $x$  in  $y$  točke, kamor je kaplja padla, korelirani, če usmerimo koordinatni sistem vzdolž obeh katet trikotnika? Določi korelacijski koeficient.
  - Oцени verjetnost, da bodo med 5 naključno izbranimi sledmi več kot 3 take, ki se od povprečne dolžine sledi razlikujejo za manj kot 1 efektivni odmik.
4. Asteroid kroglaste oblike s polmerom 50 km je po vsej površini enakomerno gosto pokrit z rudarskimi naselbinami. Rezervne dele za vrtalne naprave dobavlja servisna služba z majhnim raketnim hopperjem, ki leta po najkrajši poti od klica do klica, ti pa se pojavljajo naključno in enakomerno po vsem površju. Kolikšna je povprečna dolžina poleta in kolikšen je njen efektivni kvadratni odmik? S kolikšno verjetnostjo se pojavljajo poleti, ki so daljši od 100 km? Kolikšna je verjetnost, da bo med desetimi poleti, ki jih opravi ekipa v delovnem dnevu, samo eden krajši od 100 km? Dodatno vprašanje: Oцени verjetnost, da bo imela ekipa več kot 100 takih dni v delovnem letu, ki traja 300 dni.
5. V neimenovanem fiktivnem mestu imajo dve progi mestnega javnega prometa. Na prvi (Viški) vozijo avtobusi popolnoma neurejeno in neodvisno drug od drugega, vendar z dobro definirano povprečno gostoto 6/uro. Na drugi (Šišenski) vozijo avtobusi kot ura točno, natanko na 10 minut. Naš študent se zjutraj ob povsem naključnem trenutku pojavi na avtobusni postaji in vstopi na prvi avtobus, ki

pripelje: ali na predavanja na Vič ali k puncu v Šiško. Kolikšna je verjetnost, da se odpelje na predavanja? Kolikšna je povprečna čakalna doba in koliko je njen efektivni kvadratni odmik  $\sigma$ ? Kolikšna je povprečna čakalna doba v dneh, ko se odpelje na Vič ?

- Po votli stekleni krogli z radijem 50 cm lazijo mravlje, tako da so v povprečju enakomerno posejane po vsej površini. Opazujemo jih na senčni sliki, ki jo projicira Sonce v zenitu na vodoraven zaslon pod kroglo. Določi verjetnostno gostoto mravljih senc v odvisnosti od razdalje od središča kroglina sence. Kolikšna je povprečna razdalja sence od središča in kolikšen je efektivni odmik ( $\sigma$ ) te razdalje? V nekem trenutku kanemo kapljico medu na kroglin (zgornji) pol. Kakšna je verjetnostna gostota (najkrajših) razdalj, ki ločijo mravlje od medu? Kolikšna je povprečna razdalja in njen efektivni odmik?

**Dodatno vprašanje:** Vse mravlje se v trenutku odpravijo po najkrajši poti k medu, vse z enako in enakomerno hitrostjo. Kako se porazdelitev razdalj spreminja s časom? Privzami, da število mravelj na kapljici medu ni omejeno.

- Med naše nove evrske kovance se z difuzijo mešajo tudi kovanci drugih držav evrskega območja. Trenutno je tujih kovancev med našimi 9%. Kolikšna je verjetnost, da med desetimi kovanci v drobižniku ni niti enega tujega? Kolikšna je verjetnost, da najdemo med 600 naključno zbranimi kovanci več kot 50 tujih? V banki pakirajo kovance iste vrednosti v zavitke po 20 kosov. Kolikšna je verjetnost, da je med 500 zavitki kvečjemu 5 takih, v katerih ni nobenega tujega kovanca? Ker smo še v začetni fazi mešanja, lahko domnevamo, da se količina tujih kovancev med našimi povečuje linearno s časom, štetim od 1. 1. 2007, in da je torej prirastek 3% na mesec. Kolikšna je verjetnost, da se je v pušici za dobrodelne namene, ki od uvedbe evra še ni bila izpraznjena, med 600 evrskimi kovanci nabralo več kot 30 tujih? Pri tem naj velja, da se kovanci v pušici nabirajo enakomerno s časom.
- Razpadni čas kratkoživega stanja, ki traja približno 3 ms, določimo kot časovno razliko med signaloma, ki označujeta nastanek vzbujenega stanja in njegov razpad. Po programerski nerodnosti je čas drugega signala zaokrožen (navzgor) na celo mikrosekundo, tako da je izmerjeni čas povečan za zaokrožitveno napako, ki je slučajna in enakomerno porazdeljena v intervalu od 0 do 1 ms. Kakšna je verjetnostna gostota izmerjenih časov? Nastalo napako poskušamo računsko korigirati tako, da dodatni zaokrožitveni premik odštejemo. Ne moremo pa odpraviti povečane nezanesljivosti rezultata. Za koliko je statistična napaka korigiranega razpadnega časa, ki ga dobimo iz povprečja 100 izmerjenih časov, večja od statistične napake rezultata, ki bi ga dobili iz povprečja enakega števila neoporečnih izmerkov?
- Dobrodelna loterija, na kateri “zadene” 40% vseh srečk, ima zelo pestro lestvico dobitkov, tako da njihovo pogostnost najlažje aproksimiramo z zvezno verjetnostno gostoto



$$w(x) = \frac{1}{r} e^{-x/r},$$

kjer je  $x$  velikost dobitka, izražena v enotah cene srečke, parameter  $r$  pa ima vrednost 2. Kolikna je verjetnost, da bosta žena in mož, ki kupita vsak eno srečko, skupaj zaslužila več, kot sta plačala? Oцени verjetnost, da bo mafajska združba, ki poskuša na loteriji z masovnim nakupom 1000 srečk oprati umazani denar, pri tem izgubila manj kot 20% vloženega denarja?

10. V Namibiji pridobivajo diamante iz sedimenta (mivke) v rečni delti. V zgodnji fazi postopka izločijo večino jalovine s sejanjem, tako da ostanejo v postopku le groba zrna in med njimi diamantni drobci z maso nad 0.03 karate. Za maso pridobljenih diamantov (nad omenjeno najmanjšo vrednostjo) dobro velja eksponentna verjetnostna gostota: verjetnost, da je masa na slepo izbranega diamanta med  $m$  in  $m+dm$ , je sorazmerna  $\exp(-m/\mu)$ , kjer ima parameter  $\mu$  vrednost 0.2 karata. Dnevna produkcija znaša v povprečju 5000 karatov. Kolikšna je verjetnost, da bodo v dnevnem izplenu več kot trije kamni z maso nad 2 karata? Kolikšna je verjetnost, da bo v enem letu (250 delovnih dni) več kot 10 dni tako srečnih? Kolikšna pa je verjetnost, da dnevni izkupiček delavca (100 naključno izbranih kamnov) preseže maso 25 karatov?
11. Mase jajc v dnevni produkciji kokošje farme lahko opišemo z verjetnostno gostoto, ki je vsota dveh Gaussovih funkcij: prva, ki zajema 60% vse verjetnosti, ima parametra  $\mu = 65$  g in  $\sigma = 7.5$  g, druga, ki opisuje preostalih 40% verjetnosti, pa ima  $\mu = 75$  g in  $\sigma = 15$  g. Kolikšna je verjetnost, da bo med 500 na slepo izbranimi jajci manj kot 100 lažjih od 60 g? Kolikšna je verjetnost, da bo skupna masa 500 na slepo izbranih jajc večja od 35 kg?
12. Ribič lovi ribe, ki prijemajo slučajno, z enakomerno verjetnostno gostoto v času 0.25/h. Vsak dan lovi največ 8 ur, prej zaključi, ko ima v torbi tri ribe, kolikor je dovoljeni dnevni ulov. Kolikšna je verjetnost, da bo ostal polni čas? Oцени verjetnost, da bo enem letu (300 delovnih dni) skupno ujel več kot 550 rib.
13. Na tehtnico stresamo mešanico dveh vrst makaronov; makaron prve vrste tehta 10.1 g in makaron druge vrste 20.1 g. S postopkom prenehamo, ko masa makaronov na tehtnici preseže 100 g. Zapiši verjetnostno porazdelitev po celotnem številu makaronov na tehtnici! Kolikšna je verjetnost, da na tehtnici konča deset makaronov, če predpostaviš, da sta verjetnosti, da pade nanjo makaron prve ali druge vrste enaki?
14. Kratkoživ osnovni delec nastane v trku dveh gruč protonov v pospeševalniku, tako da poznamo trenutek njegovega nastanka. Delec razpade s (približnim) razpadnim časom  $t_1$  z izsevanjem samih nevtralnih delcev, ki jih detektorski sistem ne zazna. Pač pa zazna sistem razpad njegovega potomca, katerega (približni) razpadni čas je  $t_2$ , tako da lahko določimo vsoto obeh časov. Kakšna je verjetnostna gostota

za to spremenljivko? Ali lahko iz njene povprečne vrednosti in efektivnega odmika določimo obe vrednosti  $t_1$  in  $t_2$ ? Kolikšni sta napaki na ocenjenih  $t_1$  in  $t_2$ ?

15. Obiralec jabolok stoji na lestvi in obira jabolka. Porazdelitev jabolok po masah je enakomerna na intervalu od 100 g do 200 g. Z vsako roko odtrga po eno, nato pa večje od obeh jabolok spravi v levo košaro, manjše pa v desno. Za koliko se razlikujeta povprečni masi jabolok v levi in desni košari? Košari sta polni, ko vsebuje vsaka 100 jabolok: kolikšna je verjetnost, da bodo jabolka v levi košari skupno za več kot 1 kg težja od jabolok v desni košari?
16. Zadetki strelca v tarči so porazdeljeni izotropno okoli središča, porazdelitev je produkt dveh Gaussovih porazdelitev (za  $x$  in  $y$ ) z enakim  $\sigma$ . Določi ta parameter iz  $N$  podatkov za razdaljo zadetka od izhodišča! Kolikšna je efektivna napaka rezultata? Lahko si pomagaš z metodo maksimalne zanesljivosti.
17. Z napredujočo tehniko zna tovarna napraviti rentgensko cev, ki z veliko verjetnostjo zdrži obljubljenih 8000 ur obratovanja, prav kmalu po tem pa pregori. Privzemimo, da je porazdelitev življenjske dobe rentgenskih cevi Gaussova in da tovarna ne more vplivati na širino porazdelitve (sigma), ki znaša 160 ur, lahko pa prilagodi srednjo vrednost ( $8000+x$ ) ur. Kolikšen naj bo presežek  $x$ , da bo zaslužek tovarne največji, če uporabniki cevi nujno potrebujejo in si morajo nabaviti novo takoj, ko stara pregori, zato pa jim vsaka reklamacija, če cev pregori pred rokom 8000 ur, pobere 10-kratni zaslužek 1 cevi.
18. V pridelku surovih diamantov iz nahajališča Golconda so v frakciji, primerni za brušenje, kamni z maso nad 0.05 karata. Verjetnostna porazdelitev teh kamnov po masah se dobro opiše z (odrezano) Gaussovo porazdelitvijo, v kateri je parameter  $\mu = 0$ , parameter sigma pa 0.2 karata. Kolikšna je povprečna masa kamna in kolikšen je njen efektivni odmik? Kolikšen je delež kamnov z masami nad 1 karat? Kolikšna je verjetnost, da skupna masa 100 kamnov ne preseže 18 karatov?
19. S primernim računalniškim programom žrebamo slučajna števila, ki so porazdeljena enakomerno v intervalu  $[-1, 1]$ , in sproti računamo njihovo vsoto. Kolikšna je verjetnost, da ta vsota obrne predznak, ko prištejemo 100-to število?
20. Pasijanse na osebnih računalnikih so opremljene z obsežno statistiko opravljenih iger, poleg deleža dobljenih iger tudi najdaljšo verigo dobljenih (zaporednih) iger in najdaljšo verigo zaporednih izgubljenih iger. Poskusi oceniti zadnji dve števili za zaporedje 500 iger s povprečno uspešnostjo 0.75.  
**Namig:** v padajočem zaporedju verjetnosti za vse daljše verige enakih izidov se ustavimo pri tisti dolžini, katere verjetnost je premajhna, da bi se veriga v seriji iger vsaj enkrat zgodila.
21. V rekah države Montana je popularen ribolov na mavrično postrv (rainbow trout, *oncorhynchus mykiss*). Letni pregled ulova kaže, da v njem gostota verjetnosti glede

na dolžino  $x$  ujete ribe pada približno eksponentno z dolžino,  $w(x) \sim \exp(-x/x_0)$ , kjer ima parameter  $x_0$  vrednost 10 palcev. Dovoljena minimalna dolžina za ulov je 16 palcev, manjše ribe je treba vrniti v vodo. Dnevna kvota na ribiča je 5 postrvi, ki jo glede na živahnost postrvi vsi ribiči brez težav dosežejo.

- Kolikšna je povprečna dolžina ujetih postrvi in kolikšen je njen efektivni odmik?
- Kolikšna je verjetnost, da ima ribič v svojem dnevnem ulovu tudi ribo, daljšo od 25 palcev?
- Kolikšna je verjetnost, da med 100 ribiči ni nikogar, ki bi imel v ulovu same "velikanke" nad 25 palcev?

Privzemamo, da ribičeva spretnost nič ne vpliva na dolžino ulova.

22. Ko ekološki sadjar pospravi svoja jabolka v skladišče, ima v povprečju 20% sadežev črva. Med skladiščenjem napada jabolka gniloba, napada jih naključno, v povprečju je verjetnost za okužbo 0.005 na dan. Ta verjetnost je konstantna ves čas skladiščenja. Kolikšna je verjetnost, da bo po šestdesetih dneh naključno izbrano jabolko še neoporečno? Oцени verjetnost, da bo v tem času od 100 naključno izbranih jabolk več kot 60 neoporečnih.
23. S kolikšno verjetnostjo lahko iz treh na slepo izbranih palic, katerih dolžine so enakomerno porazdeljene v danem intervalu  $[10 \text{ cm}, 30 \text{ cm}]$ , sestavim trikotnik?
24. Zvezde v osrednjem delu kroglaste kopice so porazdeljene po prostoru slučajno in enakomerno, tako da so v povprečju 4 zvezde v kocki z robom 1 svetlobnega leta. Kakšna je verjetnostna porazdelitev razdalj od zvezde do njene najbližje sosede? Kolikšna je verjetnost, da je zvezda oddaljena od najbližje sosede manj kot pol svetlobnega leta? Kolikšna je verjetnost, da je zvezda tudi sama najbližja soseda svoji najbližji sosedi?
25. Na velik list papirja narišem dve družini premic, vzporednih z robovi, torej pravokotnih med seboj. Razdalje med sosedami v vsakem snopu so porazdeljene enakomerno med 0 in  $a$ . Potem list po teh črtah razrežemo in določimo verjetnostno gostoto nastalih pravokotnikov po njihovih dolžinah. Kolikšna je povprečna ploščina in kolikšen je njen efektivni odmik? Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbrani pravokotnik ploščino večjo od  $0.75 a^2$ ? Ali znaš konstruirati tudi verjetnostno porazdelitev po ploščinah?
26. Velemesto ima zunanjo obvoznico krožne oblike s polmerom 20 km. Nezgode in zastoje, ki se pojavljajo naključno in z enakomerno verjetnostjo po vsej dolžini obvoznice, rešuje helikopterska ekipa, ki vedno leti po najkrajši zračni razdalji od enega mesta intervencije do naslednjega. Kolikšna je povprečna dolžina leta, če vštujemo tudi začetni polet iz baze, ki je v strogem središču mesta (in kroga), ter povratek v bazo, ki si ga ekipa zasluži po 9 intervencijah. Kolikšen je efektivni kvadratni odmik porazdelitve dolžin letov? Kolikšna je verjetnost, da v delovnem

dnevu noben od desetih poletov ne bo krajši od 20 km? Dodatno vprašanje: Oцени verjetnost, da je skupna dolžina 100 poletov večja od 2000 km.

27. Po plašču dolgega valja (gladkem deblu drevesa) z radijem 30 cm so slučajno posute kapljice sladkega drevesnega soka s povprečno gostoto  $10/\text{m}^2$ .

- Kolikšna je za mravljo povprečno dolga pot od kaplje do kaplje, če se od ene kaplje vedno napoti po najkrajši poti k najbližji sosedni kaplji. Kolikšen je povprečni kvadratni odmik porazdelitve teh poti?
- Kolikšna je verjetnost, da bo mravljinca pot do naslednje kaplje krajša od polovice povprečne poti?

28. Detektor nabitih delcev ima obliko stožca, katerega višina je enaka polmeru (10 cm). Točkast izvir delcev je nameščen v središču osnovne ploskve in seva delce izotropno. Doseg delcev je mnogo večji od dimenzij detektorja, tako da so njihove poti v sredstvu ravni žarki - tetive stožca. Kolikšna je verjetnost, da je naključno izbrana tetiva krajša od  $0.8 R$ ? Kolikšna je verjetnost, da je med 100 naključnimi tetivami več kot 10 krajših od  $0.8 R$ ? Kolikšna je verjetnost, da je skupna dolžina 100 tetiv krajša od  $80 R$ ?

Uporaben lahko postane integral:

$$\int \frac{\sin(x)dx}{(\cos(x) + \sin(x))^2} = \frac{\text{ArcTanh}\left(\frac{-1+\tan(\frac{x}{2})}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2(\cos(x) + \sin(x))}$$

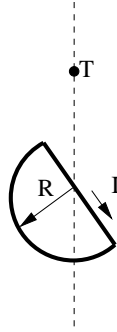
29. Prijatelj astronom, ki živi 100 km vsaksebi, ponavlja naslednjo igro: ob meteorskem roju, v katerem je v povprečju 1 meteor na minuto, začneta ob dogovorjenem znaku (na WWW) opazovati vsak svoje nebo, kdo bo prvi opazil meteor. Kakšna je verjetnostna porazdelitev zmagovalnih (torej boljših od obeh) časov po velikem številu ponovitev? Kakšna je verjetnostna porazdelitev vsakokratnih razlik med časoma obeh opazovalcev?

30. V središču dolgega valja je izvir monoenergijskih nabitih delcev, katerih doseg v snovi valja je enak premeru valja. Delci se izsevajo izotropno po smereh, od izvira se gibljejo premočrtno, dokler se ne ustavijo. Kolikšna je povprečna dolžina njihovih poti v valju? Kolikšen je efektivni odmik te dolžine?

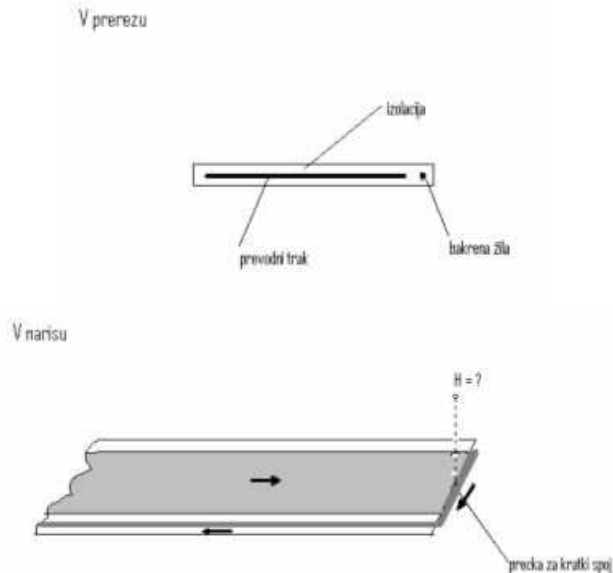
31. Po debeli cevi z notranjim premerom 1 cm in zunanjam premerom 3 cm vodimo vrelo vodo ( $100^\circ \text{C}$ ), zunanost cevi pa hladimo z mešanico vode in ledu ( $0^\circ \text{C}$ ). Snov, iz katere je cev, ima pri  $60^\circ \text{C}$  fazni prehod: visokotemperaturna faza ima toplotno prevodnost  $20 \text{ W/mK}$ , nizkotemperaturna pa  $10 \text{ W/mK}$ . Kolikšen toplotni tok na enoto dolžine uhaža skozi plašč cevi?

### 3 Vektorski in Tenzorski Račun

1. Izračunaj jakost magnetnega polja na osi polkrožne zanke z radijem  $R$ , po kateri teče tok  $I$ , kot to prikazuje skica!



2. V ploščatem napajalnem kablu za posebne namene je v izolacijo zalit 1 cm širok trak iz slabše prevodne snovi, ob robu katere teče (izolirana) tanka dobro prevodna bakrena žica. Dolg raven kos kabla kratko sklenemo z dobro prevodno prečko. Izračunaj magnetno polje 1 cm nad sredino prečke - jakost in smer! Predpostavljamo, da je tok enakomerno porazdeljen po vsej širini traku.



3. Vesoljski lovci na kovine so našli asteroid v obliki polovice krogle s polmerom 40 km in z gostoto 12 ton na kubični meter. Kolikšen je težni pospešek na tem asteroidu na polu in koliko v srediču ravne ploskve? Ko lovci vrtajo po asteroidu išoč žepe posebno dragocenih kovin, v kateri točki asteroida je težni pospešek enak nič?
4. Dve dolgi dielektrični nitki napnemo v pravokotnih smereh, tako da je med njima najmanjša razdalja  $a$  (kot v znani nalogi v knjigi). Na nitki naneseemo električni naboj z enakomerno linearno gostoto  $\sigma$ , vendar na vsaki samo do polovice, to je (iz

neskončnosti) do točke, v kateri sta si nitki najbliže. Kolikšna je sila med nitkama in kakšno smer ima?

5. Vodnik je sestavljen iz treh vzporednih žic, zloženih v enakostranični trikotnik. Razdalja med središči posameznih žic je  $6R$ , pri čemer je  $R$  radij posamezne žice. Kolikšna je jakost magnetnega polja v točkah na površini žic, ki so najbolj oddaljene druga od druge? Kolikšna sila deluje na vsako žico? (Tok je seveda enakomerno porazdeljen po preseku vsake žice.)

6. Magnetno polje je podano z vektorskim potencialom:

$$\vec{A} = -C \hat{e} \ln |\hat{e} \times \vec{r}|,$$

kjer sta  $C$  konstanta in je  $\hat{e}$  normiran konstanten vektor. Izračunaj jakost magnetnega polja in nato tako rotor kot tudi divergenco tega polja brez uporabe specifičnih koordinat. Kakšen je izvor tega polja?

7. Elektrostatični potencial v delu prostora  $|\vec{r}| > a/2$  ima obliko

$$U(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|2\vec{r} - \vec{a}/2|} \right)$$

Pokaži, da je potencial konstanten na sferi, ki omejuje prostor. Določi ploskovno gostoto naboja na tej sferi!

8. Posebna konfiguracija izvirov da elektrostatično polje s skalarnim potencialom

$$U(\vec{r}) = q \operatorname{Arsh} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\sqrt{r^2 - (\vec{a} \cdot \vec{r})^2}} = q \ln \sqrt{\frac{r - \vec{a} \cdot \vec{r}}{r + \vec{a} \cdot \vec{r}}},$$

kjer je  $q$  jakost izvirov in  $\vec{a}$  enotni vektor. Določi jakost električnega polja in pokaži, da to polje nima v prostoru zvezno porazdeljenih izvirov.

Dodatno vprašanje: kje pa so izviri tega polja?

9. Vektorsko polje ima obliko:

$$\vec{v} = A e^{-(\vec{a} \times \vec{r})^2} (\vec{b} \times \vec{r}),$$

kjer je  $A$  konstanta,  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  pa poljubna konstantna vektorja. Kakšna morata biti  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ , da gornji izraz opiše fizikalno veljavno magnetno polje? Kakšna je prostorska porazdelitev tokov, ki ustvarjajo to polje?

**Dodatno vprašanje:** Kakšna sila deluje v tem polju na majhen magnetni dipol, ki stoji v točki  $\vec{r}_0$ , podani z  $|\vec{a} \times \vec{r}_0| = 1$ , in ki ima smer vektorja  $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$ ?

10. Elektrostatični potencial v bližini izhodišča ima obliko  $A \ln(s)$  kjer je  $s = |\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})|$ , pri čemer je  $\vec{a}$  poljuben enotni vektor in  $\vec{r}$  radij-vektor. Pokaži, da je to polje nima zvezno porazdeljenih izvirov! Od kod torej izvira?

11. Anizotropni dielektrik ima lastne vrednosti enake  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\epsilon_2 = 3$  in  $\epsilon_3 = 3$ . Iz velikega bloka te snovi izrežemo dve razsežni plošči debeline 2 cm in površine  $2 \text{ m}^2$ , pri čemer je kot med normalo na ploščo in lastnim vektorjem, ki pripada prvi lastni vrednosti, pri prvi plošči enak  $45^\circ$  in pri drugi  $60^\circ$ . Obe plošči tesno staknemo in na zunanji površini naparimo plast kovine. Kolikšna je kapaciteta tako dobljenega kondenzatorja?
12. Kroglica z radijem 5 mm iz dielektrične snovi z lastnimi vrednostmi dielektričnosti 2, 2.5 in 3.5 je v električnem polju z gostoto  $1000 \text{ V/m}$ . Smer polja oklepa enake kote z osmi dielektričnega tenzorja. Kolikšen navor deluje na kroglico in kako je usmerjen? Kakšna sila deluje na kroglico, če polje izvira iz točkastega naboja v razdalji 50 cm?
13. Skalarnemu polju

$$U(\vec{r}) = \frac{[(\vec{p} \times \vec{r}) \times \vec{r}] \cdot \vec{p}}{r^{m+2}},$$

Kjer je  $\vec{p}$  poljuben konstanten vektor, dodaj toliko polja

$$V(\vec{r}) = \frac{p^2}{r^m},$$

da bo divergenca gradienta njune vsote (skoraj) povsod enaka nič. Za katere vrednosti parametra  $m$  je to mogoče?

Dodatno vprašanje: Kje so izviri vektorskega polja, ki je gradient kombinacije polj  $U$  in  $V$ ?

14. Iz lesa z gostoto  $800 \text{ kg/m}^3$  izstružimo stožec z radijem osnovne ploskve 10 cm in višino 10 cm ter ga prežagamo skozi os v dve skladni polovici. Za nastali polstožec določi tenzor vztrajnostnega momenta za vrtenje okrog težiščnih osi. S kolikšnim navorom deluje to telo na ležaje, če ga vrtimo s kotno hitrostjo  $10 \pi \text{ s}^{-1}$  okoli osi, ki je vzporedna geometrijski osi stožca in gre skozi težišče telesa? Kolikšen je kot med kotno hitrostjo in vrtilno količino?

**Dodatno vprašanje:** Določi lastne vrednosti tenzorja. Kako so usmerjene lastne osi?

**Namig:** Račun se najlaže izteče v cilindričnih koordinatah. Ne pozabi na težišče!

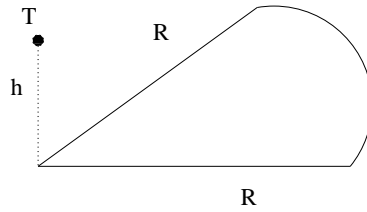
15. Na tanek obroč z maso 200 g in radijem 30 cm namestimo tri majhne uteži z maso 25 g. Prva je 2 cm nad ravnino obroča, druga 2 cm pod njo, tretja pa v ravnini obroča. Vse tri so na radiju 25 cm, pritrdišča pa so razmaknjena po obroču za  $120^\circ$ , tako da se težišče sistema ostane v središču obroča. Določi vztrajnostni tenzor sistema. Za kolikšen kot se nagne os največje lastne vrednosti?



16. Enosni anizotropni toplotni prevodnik ima eksotično lastnost, da je smer osi, v kateri material anizotropno prevaja (s koeficientom  $\lambda_{\parallel} = 200 \text{ W/mK}$ , v ostalih prečnih smereh pa  $\lambda_{\perp} = 40 \text{ W/mK}$ ) funkcija položaja. Iz tega materiala izrežemo razsežno plast debeline 1 cm tako, da je smer anizotropne osi odvisna samo od globine plasti in se enakomerno zasuče od kota  $0^\circ$  (vzporedno z normalo na plast) na eni strani plasti do kota  $90^\circ$  na drugi strani plasti. To plast položimo med toplotna rezervoarja s temperaturno razliko 10 K. Kolikšna je gostota prepuščenega toplotnega toka?
17. Določena vrsta lesa ima toplotno prevodnost vzdolž vlaken  $12 \text{ W/mK}$ , povprek nanje pa  $8 \text{ W/mK}$ . Iz tega lesa izrežemo dve plasti z debelino 5 mm. V eni je kot med vlakni in normalo na ploskvi  $30^\circ$ , v drugi pa  $60^\circ$ . Obe plasti zlepimo s tankim slojem dobro prevodnega lepila v nekakšno furnirno ploščo. Kolikšno gostoto toplotnega toka prepušča ta plošča pri temperaturni razliki 10 K?
18. Asteroid je v preteklosti doživel hud trk, tako da ima v grobem obliko polkrogle z radijem 20 km. Masa v njem je porazdeljena homogeno in ima gostoto  $5 \text{ kg/dm}^3$ . Kolikšen je pospešek prostega pada v središču ravne ploskve in kolikšen na vrhnji točki kapice? (Gravitacijska konstanta je  $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ).
19. Majhen električni dipol  $p_e$  leti s hitrostjo  $v$  v razdalji  $a$  vzporedno z dolgo ravno žico, po kateri teče tok  $I$ . Kolikšna sila deluje na dipol in kolikšen navor, če je dipol usmerjen
- pravokotno proti žici
  - pravokotno na smeri žice in hitrosti?
20. Mnogožilni kabli v elektroniki so dostikrat oblikovani v trak, tako da so prevodne žile v majhnih enakih razmikih druga ob drugi zalite v plastiko. Opiši magnetno polje, ki nastane okoli 8 cm širokega, dolgega ravnega traku, če teče po vsaki od 40 žil leve polovice električni tok  $0.1 \text{ A}$  v eno smer, po vsaki od 40 žil desne polovice pa enak tok v nasprotno smer. Kakšna sila deluje na majhen magnetni dipol z momentom  $10^{-4} \text{ Am}^2$ , ki je postavljen 4 cm nad sredino traku vzporedno z ravnino traku, a pravokotno na smer toka?
21. Na prevodno krožno zanko z radijem  $a$  nanesemo električni naboj  $e$ , v središče zanke pa postavimo enako velik točkast naboj nasprotnega znaka. Določi električno polje v okolici zanke za razdalje  $r \gg a$ , zadošča vodilni člen v razvoju po  $a/r$ . V kateri smeri je polje najmočnejše?
22. Dolga ravna nitka je enakomerno posuta z nabojem z gostoto  $10^{-7} \text{ As/m}$ . V pravokotni smeri ustrelimo mimo nje točkast naboj  $10^{-8} \text{ As}$  s hitrostjo  $100 \text{ m/s}$  in maso  $10 \mu\text{g}$ , tako da je ta v najbližji točki oddaljen 2 cm. Naboj ima dovolj veliko hitrost in maso, da se njegova smer pri prehodu mimo žice nič ne spremeni. Kolikšen sunek sile prejme žica?

23. Asteroid z maso  $10^{10}$  ton je izrazito podolgovat, tako da njegovo obliko lahko aproksimiramo s homogeno palico z dolžino 10 km. V kateri razdalji od asteroidove osi v njegovi ekvatorialni ravnini (v pravokotni ravnini, ki ga razpolavlja po dolžini) je gravitacijski pospešek majhne testne mase največji?
24. Tanko kovinsko krogelno lupino z radijem  $R$  prerežemo na pol in eni polovici v diametralnih točkah oboda privarimo dovodni žici. Po njiju poženemo tok  $I$ , ki se v polkrogli porazdeli enakomerno po kotih, kakor terja simetrija. Izračunaj magnetno polje v središču polkrogle, če sta dovodni žici potegnjeni po isti premici skozi središče polkrogle.
25. Po dveh zelo dolgih mimobežnih bakrenih žicah, ki sta položeni v pravokotnih smereh z minimalno razdaljo 10 cm, poženemo dve fazi trifaznega toka z amplitudo 10 A in frekvenco 50 Hz. Magnetnemu polju, ki ga generirata žici v točki na sredini njune najmanjše razdalje, določi največjo amplitudo in smer!
26. Tanek obroč (kot hulahup) je sklopljen iz dveh enakih delov. Na enem stiku ju razklopimo in okoli drugega stičišča zavrtimo, tako da je med njunima ravninama kot  $\pi/2$  (nekakšen zlomljen S). Izračunaj vztrajnostni tenzor tega telesa okoli težišča. Ali je os, ki gre skozi težišči obeh polkrožnih delov, lastna os?
27. Tanko okroglo ploščo z maso 1 kg in radijem 20 cm prepognemo okoli premera za pravi kot. Določi vztrajnostni tenzor telesa. Kolikšen kot oklepa vrtilna količina s kotno hitrostjo, če se telo vrti okoli težiščne osi, ki oklepa enake kote z osmi pravokotnega sistema, položenimi po vrsti v smeri pregiba in obeh smeri, ki razpolavljata polkroga?
28. Dva enaka asteroida približno paličaste oblike z dolžino 100 m in maso 5000 t, letita vzporedno po vesolju, tako kot dve vzporedni stranici kvadrata. Kolikšna sila deluje med njima, če lahko računamo, da sta razmeroma tanka in da je masa porazdeljena enakomerno po dolžini?
29. Dve zelo dolgi vzporedni žici v razdalji 1 cm sta povezani s kratkim prečnim žičnim mostičkom, po njiju tečeta tokova 10 A v nasprotnih smereh. Potem zamenjamo priključka na (oddaljenih) koncih žic, tako da sta na prvi oba konca na pozitivni napetosti, na drugi pa oba na negativni in da teče tok od obeh koncev k mostičku, po njem v drugo žico in po njej vsaksebi do obeh koncev. Za koliko se po preklopu spremeni sila med žicama, pri čemer lahko učinek mostička zanemariš?
30. Dolgo krožno cev iz tankega izolatorja z radijem 10 cm enakomerno naelektrimo z gostoto naboja  $3 \cdot 10^{-7}$  As/m<sup>2</sup>. Nad ustje pokončne cevi položimo v os cevi majhno kroglico z nabojem  $2 \cdot 10^{-6}$  As istega znaka in z maso 5 mg. V kateri legi kroglica obmiruje? S pomočjo Maxwellovih enačb oceni, ali je ta lega stabilna ali labilna?
31. Na raven list iz neprevodne snovi enakomerno naneseemo električni naboj s ploskovno gostoto  $\rho$  in nato iz njega izrežemo ploskev v obliki četrta kroga z radijem  $R$ . Kolikšno

je električno polje v točki, ki leži pravokotno nad vogalom lista v višini  $h$ . Določi velikost in smer polja.



32. Model curkov (angl. jets) iz galaktičnih jeder nam podaja naslednji (poenostavljeni) model: predstavljamo si, da se enakomerno iz vseh smeri v ravnini steka proti izhodišču električni tok, od tam pa v dveh enakih nasprotno usmerjenih curkih, ki sta pravokotna na ravnino, odteče na obe strani v neskončnost. Kako je magnetno polje te tokovne porazdelitve odvisno od radialne koordinate in višine nad ravnino?
33. Dve enaki krožni zanki iz bakrene žice (radij  $R$ ) sta v razmiku  $2R$  na skupni osi. Po njiju poženemo enak električni tok v nasprotnih smereh. S pomočjo Maxwellovih enačb oceni jakost magnetnega polja v točki, ki je od simetrijskega središča odmaknjena  $0.01 R$  po osi in  $0.01 R$  pravokotno na os.

## 4 Diferencialne enačbe

1. Gorsko jezero v Kolumbiji ima prostornino  $0.5 \text{ km}^3$ . Napajajo ga lokalni studenci z dokaj stalnim tokom  $1000 \text{ m}^3/\text{dan}$  čez vse leto, enako stalen je tudi izliv. V vodi pritokov je raztopljen redki element skandij in sicer  $2 \text{ mg/liter}$ . Ob jezeru deluje tovarna, ki zajema  $2000 \text{ m}^3$  jezerske vode na dan in iz nje s svojimi ionskimi izmenjevalci izloči ves skandij (ter vodo nato vrača v jezero). Kako se je s časom spreminjal dnevni pridelek skandija od zagona tovarne dalje? Kolikšen je dnevni pridelek skandija danes, 3 leta po začetku obratovanja?
2. Dve drobceni uteži mase  $M$  z radijem  $r$ , povezani z vzmetjo s koeficientom  $K$ , lebdita v viskozni tekočini z znanim  $\eta$ . Skozi tekočino spustimo valovanje (zvok), katerega valovni vektor je vzporeden z vzmetjo in ima frekvenco enako  $\Omega = \sqrt{3K/M}$ , njegova valovna dolžina pa je štirikrat večja od razdalje med njima, torej je hitrost tekočine na mestu  $x$  ob času  $t$  podana z izrazom  $\vec{v} = \text{Re}[(v_0, 0, 0)\exp(ikx - i\Omega t)]$ . Kako se gibljeta uteži po dolgem času?
3. Dve razsežni bakreni plošči v vakuumu postavimo vzporedno, tako da je med njima konstanten razmik. Na notranjih ploskvah sta počrnjeni, navzven pa zrcalno zglajeni: tako si lahko izmenjujeta toploto s sevanjem, izmenjavo z okolico pa lahko zanemarimo. Kako se spreminjata njuni temperaturi s časom, če sta v začetku  $290 \text{ K}$  in  $300 \text{ K}$ ? Plošči sta debeli  $5 \text{ mm}$ , gostota bakra je  $8.9 \text{ g/cm}^3$ , specifična toplota pa  $380 \text{ W/kgK}$ . Stefanova konstanta je  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .
4. Napravimo si nihalo iz kroglice z maso  $5 \text{ g}$ , ki jo nataknemo na konec  $10 \text{ cm}$  dolge lahke paličice, drugi konec paličice pa je prosto vrtljiv okoli vodoravne osi. Nihalo postavimo navpik in ga z obeh strani omejimo s togima stenama, ki mu dovoljujeta odklon  $5^\circ$  na vsako stran in na katerih se kroglica prožno odbije. Kolikšna je hitrost kroglice v vršni (navpični) legi, če je perioda gibanja  $1 \text{ s}$ ?
5. Posoda ima obliko stožca z radijem odprtine  $20 \text{ cm}$  in višino  $20 \text{ cm}$ , konica stožca, ki je spodaj, pa je odrezana, tako da je nastala luknjica z radijem  $1 \text{ mm}$ . V prazno posodo začnemo nalivati vodo s stalnim tokom  $10 \text{ cm}^3/\text{s}$ . V kolikem času je posoda polna?
6. Majhno homogeno gumijasto kroglico s polmerom  $r$  vstavimo čašo s kroglastim dnom z radijem  $10 r$ . Kroglica se po posodi kotali brez zdrsavanja. Poišči frekvenco majhnih nihanj okoli ravnovesne lege!
7. Dva vozička z maso  $0.5 \text{ kg}$  se gibljeta po tiru z zanemarljivim trenjem. Spojena sta z amortizerjem, ki je v bistvu bat (pritrjen na prvi voziček) v dolgem valju (pritrjenem na drugem vozičku), tako da deluje med vozičkoma viskozna sila (tanke plasti olja med batom in valjem), ki je sorazmerna z relativno hitrostjo, sorazmernostni koeficient je  $50 \text{ Ns/m}$ . Sistem miruje, dokler enega vozička ne sunemo, da dobi hitrost  $0.1 \text{ m/s}$ . Opiši gibanje vozičkov v času po sunku. Za koliko se v teku poskusa spremeni razdalja med vozičkoma? (Masi bata in valja sta že všteti v maso vozičkov.)

8. Homogena, 1 m dolga deska je vzdolž krajše stranice obešena na vodoravno os, okrog katere je prosto vrtljiva. Pravokotno na desko piha stalen veter: njegov navor je sorazmeren kvadratu kosinusa kota med desko in navpičnico, ravnovesje pa je doseženo pri kotu  $35^\circ$ . S kolikšno frekvenco zaniha deska, če jo malo zmotimo iz ravnovesnega odklona?
9. Majhen električni dipol  $p_e$  leti s hitrostjo  $v$  v razdalji  $a$  vzporedno z dolgo ravno žico, po kateri teče tok  $I$ . Kolikšna sila deluje na dipol in kolikšen navor, če je dipol usmerjen
  - a) pravokotno proti žici
  - b) pravokotno na smeri žice in hitrosti?
10. Dve enaki nitni nihali sestavimo iz nitk z dolžino 50 cm in majhnih kovinskih kroglic z maso 20 g. Nihali sta obešeni z vodoravnega nosilca 20 cm vsaksebi. Kolikšni sta lastni frekvenci njunih (majhnih) nihanj, ko ju sklopimo s tem, da ju naelektrimo z nabojevma  $10^{-7}$  As nasprotnega predznaka?
11. V votlo bakreno kroglo z zunanjim radijem 10 cm in notranjim radijem 3 cm vstopa skozi tanko, dobro izolirano izvrtino voda s temperaturo  $30\text{ C}$  in s pretokom 20 ml na minuto. Skozi enako izvrtino voda na drugi strani izstopa. Na zunanji površini je krogla hlajena na  $0\text{ C}$ . Kolikšna je temperatura izstopajoče vode ob privzetku, da se voda v votlini učinkovito meša?
12. Na milni mehurček z radijem 5 cm in debelino stene 1 mikron (v zraku pri normalnih pogojih) naneseemo električni naboj  $10^{-8}$  As, ki se hipoma porazdeli enakomerno po površini mehurčka. Kolikšna je frekvenca nihanja, s katerim se mehurček prilagodi na novo velikost? Učinke dušenja zanemari! ( $\gamma = 0.025\text{ N/m}$ ).
13. Majhen električni čolniček ima maso 200 g, njegov motorček pa razvija stalno moč  $0.02\text{ W}$ . Zaradi majhnih hitrosti računamo, da deluje na čolniček linearni viskozni upor, pri hitrosti  $1\text{ cm/s}$  je sila upora enaka  $0.005\text{ N}$ . Zapiši enačbo za gibanje čolnička, upošteva da je moč pogona (ne sila!) konstantna in da je sila upora sorazmerna s hitrostjo. Uvedi smiselne brezdimenzijske spremenljivke in reši enačbo. Kolikšna je časovna konstanta, s katero se hitrost približuje svoji limitni vrednosti? V kolikšnem času doseže čolniček iz mirovanja polovico limitne hitrosti?  
**Namig:** če ne gre drugače, poskusi rešiti enačbo za kinetično energijo čolnička.
14. Po močno viskozni tekočini plava modelska podmornica z maso  $0.3\text{ kg}$  in pogonom s stalno močjo  $50\text{ W}$ . S tem motorjem doseže pri premem gibanju v vodoravni smeri največjo (končno) hitrost  $10\text{ cm/s}$ . V kolikšnem času doseže polovico te hitrosti, če se začne gibati iz mirovanja?
15. Vzmet s koeficientom  $20\text{ N/m}$  je z enim koncem pritrjena na strop, na njenem drugem koncu pa je obešena majhna utež z maso  $50\text{ g}$ . Zaradi šibkega dušenja pade amplituda nihanja na polovico začetne vrednosti po 50 nihajih. Nihalo vzbujamo

- z električno silo, ki ima amplitudo  $0.1 \text{ N}$  in krožno frekvenco  $20 \text{ s}^{-1}$ . Sila začne delovati ob času  $t = 0$  na mirujoče nihalo in ima časovni potek  $\sin \omega t$ . Kolikšen je odmik nihala ob času, ko je sila opravila tri nihaje? Kolikšna je hitrost nihala v tem trenutku?
16. Lahka cevka dolžine  $20 \text{ cm}$ , ki ima na obeh koncih enaka svinčena čepa z maso  $1 \text{ kg}$ , je simetrično vtaknjena v kratek nosilec, ki je pritrjen na navpično vrtilno os. Na tej osi cev vrtimo s stalno kotno hitrostjo  $\omega = 10 \text{ s}^{-1}$  in zaradi simetrije cev ostane na svojem mestu. Potem na en konec sede muha z maso  $10 \text{ mg}$ . V kolikem času zdrsne cev iz ležišča, če med njo in nosilcem ni trenja?
  17. Kolo z vztrajnostnim momentom  $0.1 \text{ kgm}^2$  se vrti okoli stalne osi. Ob pogonu s konstantno močjo  $1 \text{ W}$  doseže zaradi (viskozne) trenja v ležaju kotno hitrost  $5 \pi/\text{s}$ . V kolikem času doseže iz mirovanja polovico te končne hitrosti?
  18. Vodoravna cevka je na enem koncu pritrjena na vijačno vzmet in sinusno niha vzdolž svoje osi s frekvenco  $0.25 \text{ Hz}$  in amplitudo  $1 \text{ cm}$ . V cevki je kovinsko jedro (kroglični ležaj), ki se cevki tesno prilega in je podmazano s kapljo olja. Če kovinsko jedro v mirujoči cevki porinemo z neko začetno hitrostjo, se mu hitrost zmanjša na polovico začetne po eni sekundi. S kakšno amplitudo niha kaplja? Kakšen je fazni zamik?
  19. Na krožno ploščo z radijem  $20 \text{ cm}$  in maso  $1 \text{ kg}$ , ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi središče, obesimo na diametralnih točkah, ki sta na isti višini kot os, dve vzmetni nihali z utežema z masama  $20 \text{ g}$  in z vzmetema, ki podelita nihaloma nihajni čas  $2 \text{ s}$ . Kakšne so lastne frekvence sklopljenih nihanj sistema? (Kakšni so lastni nihajni načini?)
  20. V posodo v obliki polkrogle z radijem  $20 \text{ cm}$  nalivamo vodo, tako da je volumski tok  $2 \text{ litra}$  na minuto. Posoda, ki ima v dnu majhno luknjico, se napolni v  $10 \text{ minutah}$ . Čez koliko časa potem, ko zapremo pipo, se izprazni?
  21. Votlo jekleno kroglico z radijem  $2 \text{ cm}$  in debelino stene  $1 \text{ mm}$  napolnimo z živim srebrom in zavarimo. Za koliko se poveča tlak v kroglici, ko se zviša temperatura za  $10 \text{ K}$ ? Elastični modul jekla je  $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ , linearni razteznostni koeficient  $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , volumski razteznostni koeficient zivega srebra  $18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  in stisljivost  $3.5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ .
  22. Utež maso  $1 \text{ kg}$  je pripeta na konec vijačne vzmeti s koeficientom  $200 \text{ N/m}$ . Drugi konec vzmeti, ki je v neraztegnjenem stanju dolga  $1 \text{ m}$ , je pripet na stalno os. Maso in vzmet poženemo v enakomerno kroženje, tako da opisuje masa krožni tir z radijem  $1.2 \text{ m}$ . S kakšno frekvenco zaniha masa, ko jo med enakomernim kroženjem rahlo sunemo v radialni smeri? Ali je mogoče nastaviti kotno hitrost (in radij) enakomernega kroženja tako, da bo masa opisovala zaključen tir? (Masa vzmeti je seveda zanemarljivo majhna.)