

Zbirka nalog iz Matematične fizike za Bolonjski program fizike

Borut Paul Kerševan

Dostopno na <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>

COBISS ID:

ISBN:

Naslov: "Zbirka nalog iz Matematične fizike za Bolonjski program fizike"

Avtor: Borut Paul Kerševan,
Fakulteta za matematiko in fiziko,
1000 Ljubljana

Izdaja: Učno gradivo na spletu: <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>

Izdano v samozaložbi, Ljubljana 2012

COBISS ID: [COBISS.SI-ID]

ISBN:

1 Računanje z diferenciali

1. Dve enaki svetilki, ki sevata, v skladu z novimi predpisi o temnem nebu, enakomerno v spodnji polprostor, sta obešeni v višini 10 m nad razsežnim trgom. Kako daleč vsaksebi smeta biti, da bo osvetljenost tal pod njima imela en sam maksimum?
2. Siroka vijačna vzmet tehta 200 g in ima koeficient 0.1 N/cm, ozka tehta 400 g in ima koeficient 0.3 N/cm. Drugo vzmet vtaknemo v prvo, ju spojimo na obeh koncih in postavimo pokonci na ravno podlago. Za koliko se sesede vrh?
3. Detektor za mehke žarke γ je 3 cm širok, zelo dolg trak iz germanija. Zelo majhen radioaktivni izvir, ki oddaja delce γ enakomerno v vse smeri, postavimo 1.5 cm nad sredino traku. Kolikšen delež sevanja, ki ga oddaja izvir, pade na detektor? Za koliko se spremeni delež, če spremenimo višino izvira za 0.5 mm?
4. Zanko iz 1 m dolgega gumijastega traku obesimo prek dveh lahkih majhnih škripcev v isti višini, tako da ima pri zelo šibki napetosti obliko enakostraničnega trikotnika z vodoravno zgornjo stranico. Nanjo obesimo utež 0.15 kg, zaradi česar se obesišče zniža za 5 cm. Kolikšen je nihajni čas, ko utež izmaknemo za 5 mm v navpični smeri?
5. Iz 5 mm debele gume izrežemo 1 m dolg in 12 mm širok trak. Ko ga obesimo za en konec, se raztegne za 15 mm. Potem ga, še vedno obešenega, od spodaj navzgor razrežemo s premim, a poševnim rezom, tako da dobimo en trak, ki je zgoraj širok 4 mm, spodaj pa 8 mm, drugi pa ima ravno obratne mere. Za koliko se razlikujeta višini spodnjih koncev?
6. 1 m dolgemu, 1 cm širokemu in 1 mm debelemu gumijastemu traku odrežemo polovico širine na polovici dolžine. Trak obesimo čez majhen lahek škripec, prosta konca pa spodaj spnemo in na sponko obesimo utež 0.1 kg. Kje se ustali meja med široko in ozko polovico traku, če se je prvotni, nepoškodovani trak s težo te uteži raztegnil za 10 cm? (Neenakomerno porazdelitev tlaka v bližini stika obeh polovic lahko zanemarimo.) Za koliko se spremeni rezultat, če vračunamo tudi učinek lastne teže traku? Gostota gume je 2 g/cm^3 .
7. Plastenka za kokakolo je prožna, meritve kažejo, da se njena prostornina poveča za 10 cm^3 za vsak bar razlike med notranjim in zunanjim tlakom. V polni plastenki blago gazirane mineralne vode je 1.5 litra pijače, nad njo pa 40 cm^3 ogljikovega dioksida pri tlaku 2.5 bar. Pri normalnih pogojih (1 bar, 25° C) se v litru vode raztopi 0.9 mg CO_2 , po Raoultovem zakonu je koncentracija raztopljenega CO_2 sorazmerna s tlakom plina nad raztopino. Plastenko obrnemo na glavo in zamašek odvijemo samo toliko, da začne tekočina počasi curljati ven, na začetku s tokom $0.5 \text{ cm}^3/\text{s}$, potem pa vse počasneje, sorazmerno tlačni razliki. Koliko časa preteče, da se tlak zniža na 2.3 bar? Koliko pa, da se zniža na 1.5 bar? (1 mol CO_2 tehta 44 g. Sprememba volumna tekočine zaradi stisljivosti in zaradi raztapljanja plina je
8. Nihalo za precizno uro iz XIX. stoletja je v idealizirani obliki sestavljeno iz 1 m dolge železne palice z maso 0.5 kg, ki je vstavljena v nekoliko širšo bakreno cev in

- nanjo privarjena na spodnjem koncu. Masa cevi je enaka masi palice. Razteznostna koeficienta za Fe in Cu sta po vrsti 12 in 17 milijonink na stopinjo C. Kolikšen je nihajni čas tega nihala in kolikšen je njegov temperaturni koeficient, če gre os skozi zgornji konec palice in je cev enako dolga kot palica? Ali je mogoče izbrati dolžino cevi tako, da je nihajni čas neobčutljiv na majhne spremembe temperature?
9. Po razsežni planparalelni 5 cm debeli plasti iz neke snovi teče električni tok z gostoto 90 A/cm^2 vzdolž njene dolge osi. Plast z obeh strani oblijemo z ledeno vodo s temperaturo 0° C . Nekje znotraj plasti se zgodi fazni prehod, v katerem se toplotna prevodnost spremeni od 30 W/mK pri nižji temperaturi na 10 W/mK pri višji, v tabelah pa lahko najdemo podatek, da je temperatura faznega prehoda snovi enaka 70° C . Kolikšen delež snovi doživi fazni prehod? Kolikšna je temperatura na sredini plasti? Specifična upornost snovi je $10 \text{ } \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$ in se ob faznem prehodu ne spremeni.
 10. Tanka plastična folija, dopirana z jodom, šibko prevaja električni tok. Upor kvadratnega centimetra folije, merjen med vzporednima robovoma, je 100 ohmov. Kolikšen je upor balona s premerom 1 m, iz iste folije, če ga merimo med kovinskima elektrodama v obliki diskov s premerom 4 cm, pritisnjenih ob nasprotnih polih balona? Kako se spremeni upor, če balon dodatno napihnemo in s tem povečamo premer za 1%? Privzemi, da se pri raztegovanju gostota plastike ne spremeni (kolikor se raztegne, se tudi stanjša) in da se enako ne spremeni specifična upornost.
 11. Enakomerno navito 1 m dolgo vijačno vzmet z maso 1 kg in koeficientom 100 N/m nataknemo na enako dolgo valjasto vodilo in jo na obeh konceh pritrdimo nanj. Vzmet se vodilu prilega, vendar po njem prosto drsi. Vodilo z vzmetjo postavimo pokonci: za koliko se premakne srednja točka vzmeti? Ne pozabi, da velja koeficient vzmeti samo za celo vzmet!
 12. V gravitacijskem detektorju položimo testno maso 10 t na štiri stebričke, ki so postavljeni v ogliščih kvadrata. Stebrički so visoki 25 cm in imajo presek 3 cm^2 , po dva sta iz bakra in dva iz jekla, postavljeni so navzkriž. Njihove vrhnje ploskve so brušene na natanko enako višino, enako natančno je brušena ravna spodnja ploskev testne mase. Za koliko se posedejo stebrički, ko previdno položimo maso nanje, tako da je njeno težišče ravno nad središčem kvadrata? Kako je višina stebričkov odvisna od temperature? Za koliko se mora spremeniti temperatura, da nosita težo samo dva stebrička? Prožnostna modula jekla in bakra sta $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ in $8 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, koeficienta linearne razteznosti pa znašata $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ in $17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.
 13. V projektu Auger gradijo velik detektor za mione v ultraenergijskih kozmičnih pljuskih. Detektor ima v načrtu obliko na tleh sedeče polkrogle z radijem 20 m in je sestavljen iz izmenčnih vodoravnih slojev aluminijske pločevine z debelino 4 mm in aerogela z debelino 6 mm. Gostota aluminija je $2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, aerogela pa 100 kg/m^3 . Aluminijske plošče so praktično toge, aerogel pa se zaradi velike

poroznosti zlahka elastično deformira, njegov elastični modul je $2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$. Za koliko je prava višina detektorja manjša od načrtovane?

Namig: aluminijeve plošče so tako toge, da je tlak v detektorju odvisen samo od višine in nič od prečnih koordinat.

2 Vektorski in Tenzorski Račun

1. Homogen asteroid ima (približno) obliko polovice enakostraničnega valja, prerezanega skozi os. Kje na osi je gravitacijski potencial največji? Kakšno smer ima sila teže na prebodišču osi skozi osnovno ploskev?
2. Dielektrično nitko zvijemo v krog z radijem R in po njej enakomerno razporedimo naboj e , nato pa jo prepognemo za pravi kot okoli premera. Kolikšna sta potencial in električno polje v središču kroga? Če postavimo tja majhen električni dipol p v smeri pregiba, določi navor in silo nanj. (Namig: razvij izraz za potencial po majhnem odkliku okoli izhodišča.)
3. Mnogožilni kabel za elektronske naprave je 2 cm širok plastični trak, v katerega je zalitih (vzporedno v enakih razmikih) 20 tankih bakrenih žil. Kolikšno je magnetno polje 1 cm nad sredino dolgega ravnega kosa kabla, po katerem tečejo po 19 žilah tokovi 10 mA v eno smer, po dvajseti (robni) žili pa skupni tok v nasprotno smer? Izmerimo še polje v razdalji 1 m od kabla: v kateri smeri je polje najmočnejše?
4. Tri homogene palice z maso 0.2 kg in dolžino 50 cm zvarimo v paličje: najprej povežemo dve palici s koncema pod pravim kotom, nato pa privarimo tretjo s sredino na konec druge palice, spet pod pravima kotoma na obe prejšnji palici. Določi vztrajnostni tenzor paličja za vrtenje okrog težiščne osi. Kolikšen kot oklepata kotna hitrost in vrtilna količina pri vrtenju okoli osi druge palice?
5. Potencial električnega polja v prostoru ima obliko

$$U = U_0 \operatorname{Arth} \left(\frac{2a\sqrt{r^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r})^2}}{r^2 + a^2} \right) = \frac{U_0}{2} \ln \frac{r^2 + 2a\sqrt{r^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r})^2} + a^2}{r^2 - 2a\sqrt{r^2 - (\vec{e} \cdot \vec{r})^2} + a^2},$$

kjer je a dolžinski parameter in \vec{e} enotni vektor. Pokaži, da polje (skoraj) nikjer v prostoru nima izvirov.

6. Iz bakrene žice napravimo kvadratno zanko s stranico 10 cm, nato pa jo prepognemo za pravi kot okoli diagonale. Kolikšno je magnetno polje v (prvotnem) središču kvadrata, ko poženemo po zanki tok 10 A?
7. Majhen delec z električnim dipolom 10^{-5} Asm izstrelimo s hitrostjo 10^4 m/s pravokotno proti dolgi ravni žici, po kateri teče tok 10^3 A. Dipolni moment ima smer hitrosti delca. Kolikšna sila deluje na delec in kakšno smer ima? Kolikšna pa je sila, če ima dipolni moment smer vzdolž magnetnega polja?
8. Skalarni potencial električnega polja ima obliko

$$U(\vec{r}) = \exp(-w), \quad w = [(\vec{p} \times \vec{r}) \times \vec{r}] \cdot \vec{p},$$

kjer je \vec{p} poljubni konstantni vektor. Kako so v prostoru porazdeljeni naboji, ki so izviri polja? V kateri smeri glede na \vec{p} je pri konstantni razdalji gostota največja?

9. Safir razmeroma dobro prevaja toploto, toplotna prevodnost v smeri osi c je 36 W/m.K , v pravokotnih smereh pa 32 W/m.K . Iz safirnega monokristala izrežemo paličico $5 \text{ mm} \times 5 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$, tako da oklepa kristalna os c z geometrijsko osjo paličice kot 30 stopinj, nagnjena pa je proti eni od bočnih prizmatičnih ploskev. Čelni ploskvici vzorca tesno staknemo s toplotnima rezervoarjema, katerih temperaturi se razlikujeta za 10 K , bočne ploskve pa toplotno izoliramo. Kolikšen toplotni tok teče skozi paličico v stacionarnem stanju? Kolikšno največjo temperaturno razliko med istoležnima točkama na nasprotnih bočnih ploskvah nekje na sredini višine paličice?
10. Vektorski potencial \vec{A} magnetnega polja \vec{B} , za katerega velja $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, je podan z izrazom:

$$\vec{A} = \vec{b} \left[\ln |\vec{b} \times (\vec{r} - \vec{a})| + \ln |\vec{b} \times (\vec{r} + \vec{a})| \right],$$

- kjer sta \vec{b} in \vec{a} pravokotna vektorja. Pokaži, da daje \vec{A} pravo magnetno polje, katerega divergenca je enaka nič. Ali je mogoče v točko $\vec{r} = 0$ postaviti majhen magnetni dipol tako, da bo nanj delovala sila? Kako pa je z navorom?
11. Dolg raven trak iz dielektrika, širok $2a$, je enakomerno posut z električnim nabojem, ploskovna gostota je ρ_S . Nad njegovo sredino v višini z je vzporedno s trakom napeta enakomerno naelektrena dielektrična nitka, linearna gostota je ρ_l . Kolikšna je sila na dolžinsko enoto med obema dielektrikoma? Dodatno vprašanje: kolikšna je sila na drug, enak trak, ki ga napnemo nad prvim v vzporedni ravnini?
12. V kroglasti lupini iz tanke pločevine je skrito nekakšno togo telo, togo pritrjeno v lupino. S kotaljenjem po ravni podlagi ugotovimo, da ima težišče v središču kroglice. Nekako izberemo kartezični koordinatni sistem in izmerimo vztrajnostni tenzor (v kgm^2):

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 1.5 \\ 0 & 1.5 & 4.5 \end{pmatrix}$$

- Kolikšen kot oklepa vrtilna količina telesa s kotno hitrostjo, ko ga zasučemo okoli stalne težiščne osi, ki oklepa enake kote s koordinatnimi osmi? Kolikšen je efektivni vztrajnostni moment okrog te osi? Določi glavne vztrajnostne momente telesa in lego lastnih osi!
13. Porazdelitev nabojev v prostoru ustvarja elektrostatično polje s potencialom:

$$U(\vec{r}) = A \ln |\vec{a} \times \vec{r}|,$$

kjer je \vec{a} konstanten vektor. Kolikšna sila deluje na električni dipol \vec{p} in kakšno smer ima, če je dipol v točki \vec{r}_0 in ima smer:

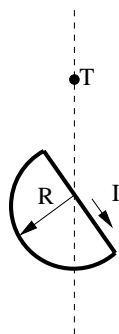
- a) \vec{r}_0 ,
 b) pravokotno na \vec{r}_0 in \vec{p} .

14. Dve 20 cm dolgi nitki iz dielektrične snovi napnemo drugo nad drugo v pravokotnih smereh, tako da je najkrajša razdalja med njima 10 cm, in to ravno med njunima razpoloviščema. Na nitki nanesemo naboj $\pm 10^{-8}$ As/cm enakomerno po dolžini, in sicer tako, da na eno od nitk do polovice nanesemo naboj enega znaka, na drugo polovico pa nasprotnega, na drugo nitko pa po celi dolžini naboj pozitivnega predznaka. Kolikšna je sila med njima in v kateri smeri?
15. Iz snovi, ki kristalizira v tetragonalnem sistemu, dobimo z meritvami naslednji enoosni tenzor toplotne prevodnosti (v W/mK):

$$\begin{pmatrix} 3.92 & -1.44 & 0 \\ -1.44 & 3.08 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

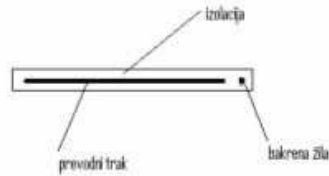
Kakšen kot oklepa smer največje toplotne prevodnosti s koordinatnimi osmi? Kolikšna je efektivna toplotna prevodnost ploščice, ki jo izrežemo v smeri (1,1,1) v gornjem koordinatnem sistemu?

16. Dve razsežni tanki dielektrični plošči v obliki kvadrata postavimo vzporedno drugo nad drugo v razmiku 1 cm. Plošči nosita enakomerno porazdeljen naboj (nasprotnih znakov) s ploskovno gostoto $\pm 10^{-9}$ As/m². Kolikšno je električno polje v točki, ki je na sredini med istoležnima vogaloma?
Dodatno vprašanje: Koliko dela opravimo, ko prenesemo en elektron ($e_0 = 1.6 \cdot 10^{-19}$ As) z vogala pozitivne plošče na vogal negativne plošče?
17. Izračunaj jakost magnetnega polja na osi polkrožne zanke z radijem R, po kateri teče tok I, kot to prikazuje skica!

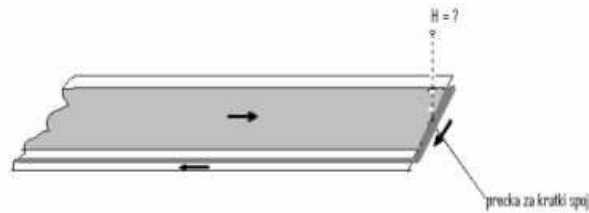


18. V ploščatem napajalnem kablu za posebne namene je v izolacijo zalit 1 cm širok trak iz slabše prevodne snovi, ob robu katere teče (izolirana) tanka dobro prevodna bakrena žica. Dolg raven kos kabla kratko sklenemo z dobro prevodno prečko. Izračunaj magnetno polje 1 cm nad sredino prečke - jakost in smer! Predpostavljamo, da je tok enakomerno porazdeljen po vsej širini traku.

V prerezu



V narisu



19. Vesoljski lovci na kovine so našli asteroid v obliki polovice krogle s polmerom 40 km in z gostoto 12 ton na kubični meter. Kolikšen je težni pospešek na tem asteroidu na polu in koliko v srediču ravne ploskve? Ko lovci vrtajo po asteroidu išoč žepe posebno dragocenih kovin, v kateri točki asteroida je težni pospešek enak nič ?
20. Dve dolgi dielektrični nitki napnemo v pravokotnih smereh, tako da je med njima najmanjša razdalja a (kot v znani nalogi v knjigi). Na nitki nanesemo električni naboj z enakomerno linearno gostoto σ , vendar na vsaki samo do polovice, to je (iz neskončnosti) do točke, v kateri sta si nitki najbliže. Kolikšna je sila med nitkama in kakšno smer ima?
21. Vodnik je sestavljen iz treh vzporednih žic, zloženih v enakostranični trikotnik. Razdalja med središči posameznih žic je $6R$, pri čemer je R radij posamezne žice. Kolikšna je jakost magnetnega polja v točkah na površini žic, ki so najbolj oddaljene druga od druge? Kolikšna sila deluje na vsako žico? (Tok je seveda enakomerno porazdeljen po preseku vsake žice.)
22. Magnetno polje je podano z vektorskim potencialom:

$$\vec{A} = -C \hat{e} \ln |\hat{e} \times \vec{r}|,$$

kjer sta C konstanta in je \hat{e} normiran konstanten vektor. Izračunaj jakost magnetnega polja in nato tako rotor kot tudi divergenco tega polja brez uporabe specifičnih koordinat. Kakšen je izvor tega polja?

23. Elektrostatični potencial v delu prostora $|\vec{r}| > a/2$ ima obliko

$$U(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{1}{|2\vec{r} - \vec{a}/2|} \right)$$

Pokaži, da je potencial konstanten na sferi, ki omejuje prostor. Določi ploskovno gostoto naboja na tej sferi!

24. Posebna konfiguracija izvirov da elektrostatično polje s skalarnim potencialom

$$U(\vec{r}) = q \operatorname{Arsh} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\sqrt{r^2 - (\vec{a} \cdot \vec{r})^2}} = q \ln \sqrt{\frac{r - \vec{a} \cdot \vec{r}}{r + \vec{a} \cdot \vec{r}}},$$

kjer je q jakost izvirov in \vec{a} enotni vektor. Določi jakost električnega polja in pokaži, da to polje nima v prostoru zvezno porazdeljenih izvirov.

Dodatno vprašanje: kje pa so izviri tega polja?

25. Vektorsko polje ima obliko:

$$\vec{v} = A e^{-(\vec{a} \times \vec{r})^2} (\vec{b} \times \vec{r}),$$

kjer je A konstanta, \vec{a} in \vec{b} pa poljubna konstantna vektorja. Kakšna morata biti \vec{a} in \vec{b} , da gornji izraz opiše fizikalno veljavno magnetno polje? Kakšna je prostorska porazdelitev tokov, ki ustvarjajo to polje?

Dodatno vprašanje: Kakšna sila deluje v tem polju na majhen magnetni dipol, ki stoji v točki \vec{r}_0 , podani z $|\vec{a} \times \vec{r}_0| = 1$, in ki ima smer vektorja $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{r})$?

26. Elektrostatični potencial v bližini izhodišča ima obliko $A \ln(s)$ kjer je $s = |\vec{a} \times (\vec{r} \times \vec{a})|$, pri čemer je \vec{a} poljuben enotni vektor in \vec{r} radij-vektor. Pokaži, da je to polje nima zvezno porazdeljenih izvirov! Od kod torej izvira?

27. Anizotropni dielektrik ima lastne vrednosti enake $\epsilon_1 = 4$, $\epsilon_2 = 3$ in $\epsilon_3 = 3$. Iz velikega bloka te snovi izrežemo dve razsežni plošči debeline 2 cm in površine 2 m^2 , pri čemer je kot med normalo na ploščo in lastnim vektorjem, ki pripada prvi lastni vrednosti, pri prvi plošči enak 45° in pri drugi 60° . Obe plošči tesno staknemo in na zunanji površini naparimo plast kovine. Kolikšna je kapaciteta tako dobljenega kondenzatorja?

28. Kroglica z radijem 5 mm iz dielektrične snovi z lastnimi vrednostmi dielektričnosti 2, 2.5 in 3.5 je v električnem polju z gostoto 1000 V/m. Smer polja oklepa enake kote z osmi dielektričnega tenzorja. Kolikšen navor deluje na kroglico in kako je usmerjen? Kakšna sila deluje na kroglico, če polje izvira iz točkastega naboja v razdalji 50 cm?

29. Skalarnemu polju

$$U(\vec{r}) = \frac{[(\vec{p} \times \vec{r}) \times \vec{r}] \cdot \vec{p}}{r^{m+2}},$$

Kjer je \vec{p} poljuben konstanten vektor, dodaj toliko polja

$$V(\vec{r}) = \frac{p^2}{r^m},$$

da bo divergenca gradienta njune vsote (skoraj) povsod enaka nič. Za katere vrednosti parametra m je to mogoče?

Dodatno vprašanje: Kje so izviri vektorskega polja, ki je gradient kombinacije polj U in V ?

30. Iz lesa z gostoto 800 kg/m^3 izstružimo stožec z radijem osnovne ploskve 10 cm in višino 10 cm ter ga prežagamo skozi os v dve skladni polovici. Za nastali polstožec določi tenzor vztrajnostnega momenta za vrtenje okrog težiščnih osi. S kolikšim navorom deluje to telo na ležaje, če ga vrtimo s kotno hitrostjo $10 \pi \text{ s}^{-1}$ okoli osi, ki je vzporedna geometrijski osi stožca in gre skozi težišče telesa? Kolikšen je kot med kotno hitrostjo in vrtilno količino?

Dodatno vprašanje: Določi lastne vrednosti tenzorja. Kako so usmerjene lastne osi?

Namig: Račun se najlaže izteče v cilindričnih koordinatah. Ne pozabi na težišče!

31. Na tanek obroč z maso 200 g in radijem 30 cm namestimo tri majhne uteži z maso 25 g . Prva je 2 cm nad ravnino obroča, druga 2 cm pod njo, tretja pa v ravnini obroča. Vse tri so na radiju 25 cm , pritrdišča pa so razmaknjena po obroču za 120° , tako da se težišče sistema ostane v središču obroča. Določi vztrajnostni tenzor sistema. Za kolikšen kot se nagne os največje lastne vrednosti?
32. Enoosni anizotropni toplotni prevodnik ima eksotično lastnost, da je smer osi, v kateri material anizotropno prevaja (s koeficientom $\lambda_{\parallel} = 200 \text{ W/mK}$, v ostalih prečnih smereh pa $\lambda_{\perp} = 40 \text{ W/mK}$) funkcija položaja. Iz tega materiala izrežemo razsežno plast debeline 1 cm tako, da je smer anizotropne osi odvisna samo od globine plasti in se enakomerno zasuče od kota 0° (vzporedno z normalo na plast) na eni strani plasti do kota 90° na drugi strani plasti. To plast položimo med toplotna rezervoarja s temperaturno razliko 10 K . Kolikšna je gostota prepuščenega toplotnega toka?
33. Določena vrsta lesa ima toplotno prevodnost vzdolž vlaken 12 W/mK , povprek nanje pa 8 W/mK . Iz tega lesa izrežemo dve plasti z debelino 5 mm . V eni je kot med vlakni in normalo na ploskvi 30° , v drugi pa 60° . Obe plasti zlepimo s tankim slojem dobro prevodnega lepila v nekakšno furnirno ploščo. Kolikšno gostoto toplotnega toka prepušča ta plošča pri temperaturni razliki 10 K ?
34. Asteroid je v preteklosti doživel hud trk, tako da ima v grobem obliko polkrogle z radijem 20 km . Masa v njem je porazdeljena homogeno in ima gostoto 5 kg/dm^3 . Kolikšen je pospešek prostega pada v središču ravne ploskve in kolikšen na vrhnji točki kapice? (Gravitacijska konstanta je $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$).
35. Majhen električni dipol p_e leti s hitrostjo v v razdalji a vzporedno z dolgo ravno žico, po kateri teče tok I . Kolikšna sila deluje na dipol in kolikšen navor, če je dipol

usmerjen

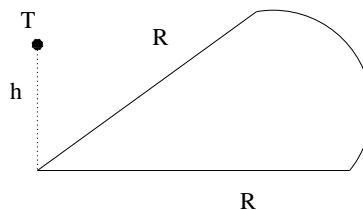
a) pravokotno proti žici

b) pravokotno na smeri žice in hitrosti?

36. Mnogožilni kabli v elektroniki so dostikrat oblikovani v trak, tako da so prevodne žile v majhnih enakih razmikih druga ob drugi zalite v plastiko. Opiši magnetno polje, ki nastane okoli 8 cm širokega, dolgega ravnega traku, če teče po vsaki od 40 žil leve polovice električni tok 0.1 A v eno smer, po vsaki od 40 žil desne polovice pa enak tok v nasprotno smer. Kakšna sila deluje na majhen magnetni dipol z momentom 10^{-4} Am^2 , ki je postavljen 4 cm nad sredino traku vzporedno z ravnino traku, a pravokotno na smer toka?
37. Na prevodno krožno zanko z radijem a nanese električni naboj e , v središče zanke pa postavimo enako velik točkast naboj nasprotnega znaka. Določi električno polje v okolici zanke za razdalje $r \gg a$, zadošča vodilni člen v razvoju po a/r . V kateri smeri je polje najmočnejše?
38. Dolga ravna nitka je enakomerno posuta z nabojem z gostoto 10^{-7} As/m . V pravokotni smeri ustrelimo mimo nje točkast naboj 10^{-8} As s hitrostjo 100 m/s in maso $10 \mu\text{g}$, tako da je ta v najbližji točki oddaljen 2 cm. Naboj ima dovolj veliko hitrost in maso, da se njegova smer pri prehodu mimo žice nič ne spremeni. Kolikšen sunek sile prejme žica?
39. Asteroid z maso 10^{10} ton je izrazito podolgovat, tako da njegovo obliko lahko aproksimiramo s homogeno palico z dolžino 10 km. V kateri razdalji od asteroidove osi v njegovi ekvatorialni ravnini (v pravokotni ravnini, ki ga razpolavlja po dolžini) je gravitacijski pospešek majhne testne mase največji?
40. Tanko kovinsko krogelno lupino z radijem R prerežemo na pol in eni polovici v diametralnih točkah oboda privarimo dovodni žici. Po njiju poženemo tok I , ki se v polkrogli porazdeli enakomerno po kotih, kakor terja simetrija. Izračunaj magnetno polje v središču polkrogle, če sta dovodni žici potegnjeni po isti premici skozi središče polkrogle.
41. Po dveh zelo dolgih mimobežnih bakrenih žicah, ki sta položeni v pravokotnih smereh z minimalno razdaljo 10 cm, poženemo dve fazi trifaznega toka z amplitudo 10 A in frekvenco 50 Hz. Magnetnemu polju, ki ga generirata žici v točki na sredini njune najmanjše razdalje, določi največjo amplitudo in smer!
42. Tanek obroč (kot hulahup) je sklopljen iz dveh enakih delov. Na enem stiku ju razklopimo in okoli drugega stičišča zavrtimo, tako da je med njunima ravninama kot $\pi/2$ (nekakšen zlomljen S). Izračunaj vztrajnostni tenzor tega telesa okoli težišča. Ali je os, ki gre skozi težišči obeh polkrožnih delov, lastna os?
43. Tanko okroglo ploščo z maso 1 kg in radijem 20 cm prepognemo okoli premera za pravi kot. Določi vztrajnostni tenzor telesa. Kolikšen kot oklepa vrtilna količina s

kotno hitrostjo, če se telo vrti okoli težiščne osi, ki oklepa enake kote z osmi pravokotnega sistema, položenimi po vrsti v smeri pregiba in obeh smeri, ki razpolavljata polkroga?

44. Dva enaka asteroida približno paličaste oblike z dolžino 100 m in maso 5000 t, letita vzporedno po vesolju, tako kot dve vzporedni stranici kvadrata. Kolikšna sila deluje med njima, če lahko računamo, da sta razmeroma tanka in da je masa porazdeljena enakomerno po dolžini?
45. Dve zelo dolgi vzporedni žici v razdalji 1 cm sta povezani s kratkim prečnim žičnim mostičkom, po njiju tečeta tokova 10 A v nasprotnih smereh. Potem zamenjamo priključka na (oddaljenih) koncih žic, tako da sta na prvi oba konca na pozitivni napetosti, na drugi pa oba na negativni in da teče tok od obeh koncev k mostičku, po njem v drugo žico in po njej vsaksebi do obeh koncev. Za koliko se po preklopu spremeni sila med žicama, pri čemer lahko učinek mostička zanemarimo?
46. Dolgo krožno cev iz tankega izolatorja z radijem 10 cm enakomerno naelektrimo z gostoto naboja $3 \cdot 10^{-7} \text{ As/m}^2$. Nad ustje pokončne cevi položimo v os cevi majhno kroglico z nabojem $2 \cdot 10^{-6} \text{ As}$ istega znaka in z maso 5 mg. V kateri legi kroglica obmiruje? S pomočjo Maxwellovih enačb oceni, ali je ta lega stabilna ali labilna?
47. Na raven list iz neprevodne snovi enakomerno nanese elektrini naboj s ploskovno gostoto ρ in nato iz njega izrežemo ploskev v obliki četrta kroga z radijem R . Kolikšno je električno polje v točki, ki leži pravokotno nad vogalom lista v višini h . Določi velikost in smer polja.



48. Model curkov (angl. jets) iz galaktičnih jeder nam podaja naslednji (poenostavljeni) model: predstavljajmo si, da se enakomerno iz vseh smeri v ravnini steka proti izhodišču električni tok, od tam pa v dveh enakih nasprotno usmerjenih curkih, ki sta pravokotna na ravnino, odteče na obe strani v neskončnost. Kako je magnetno polje te tokovne porazdelitve odvisno od radialne koordinate in višine nad ravnino?
49. Dve enaki krožni zanki iz bakrene žice (radij R) sta v razmiku $2R$ na skupni osi. Po njiju poženemo enak električni tok v nasprotnih smereh. S pomočjo Maxwellovih enačb oceni jakost magnetnega polja v točki, ki je od simetrijskega središča odmaknjena $0.01 R$ po osi in $0.01 R$ pravokotno na os.

3 Diferencialne enačbe

1. Optična pinceta deluje na dejstvu, da čuti dielektrični delec v gostem homogenem curku laserske svetlobe silo, ki je sorazmerna z njegovim odmikom od osi curka in ga vrača proti središču. Delec torej v homogenem svetlobnem polju sinusno niha v prečni smeri. Kakšno je gibanje delca v optični pinceti, ki jo napravimo s sunkovnim laserjem, n.pr. s takim, ki sveti le tisočinko periode med sunki, a je zato njegova moč v sunku (in z njo sila na delec) tisočkrat večja. Poišči najenostavnejše periodično gibanje delca, tako, ki se ponavlja po dveh svetlobnih sunkih.
2. Homogeno palico z dolžino a in maso m obesimo za konca na dve navpični nitki z enako dolžino b . Določi lastna nihanja sistema. Zapiši časovno odvisnost odklikov obeh koncev, če na enem koncu palico udarimo s kratkim prečnim sunkom sile Ft .
3. Milni mehurček ima radij 10 cm, v njem je nadtlak 3 Pa. Kratek kos cevke, s katero smo ga napihbili, ima notranji presek 1 mm², in mehurček se skozenj prazni. Učinek viskoznosti pri iztekanju plina skozi cevko lahko zanemarimo, prav tako tudi učinek malih sprememb tlaka na gostoto plina. Koliko časa traja, da se mehurček izprazni? Koliko časa se prazni do polovice začetne prostornine?
4. Laboratorijski lijak, ki ima obliko stožca z dolgo ozko cevko, potopimo v pokončni legi v viskozno olje tik do roba. V kolikem času se nateče olja do $3/4$ višine stožca? Stožec je enakostraničen, s premerom 6 cm (kot ob vrhu 60°), dolžina cevke je 6 cm in notranji premer 1 mm, viskoznost olja pa 0.2 Ns/m². Čas na začetku, v katerem se olje dvigne do vrha cevke, lahko zanemarimo.
5. Termostat s toplotno kapaciteto 5000 J/K hladimo z vodo, tako da je odvedeni toplotni tok sorazmeren z razliko med temperaturo v notranjosti in temperaturo okolice. Sorazmernostna konstanta je 10 W/K. Svetlobni tok iz okolice prinaša v termostat stalen tok 20 W. Temperaturo v termostatu vzdržujemo z zelo kratkimi sunki moči 40 J skozi grelec v stalnih časovnih razmikih. Kolikšni sta najvišja in najnižja temperatura glede na okolico, ko doseže termostat stacionarno stanje pri periodi sunkov 5 sekund?
6. Posoda ima obliko polkrogle z radijem 20 cm, v najnižji točki pa ima luknjico z radijem 1 mm. V prazno posodo začnemo nalivati vodo s stalnim tokom 10 cm³/s. V kolikem času je posoda polna?
7. Kos cevi z maso 0.5 kg in radijem 20 cm se prosto kotali po vodoravnih tleh. V cev pritrdimo nihalo, ki ga sestavljata lahka 8 cm dolga paličica in utež maso 0.2 kg. Pritrdišče je 1 cm pod osjo cevi, nihalo niha le v smeri, ki je pravokotna na os. Določi lastna nihanja sistema. Kako močno se dušita lastni nihanji, če deluje pri kotaljenju cevi viskozna sila, ki znaša 0.05 N pri hitrosti 1 cm/s?
8. Polkrogla z radijem 10 cm iz prozornega litijevega fluorida ima v središču izdolbeno polkrogelno votlino z radijem 2 cm. Polkroglo postavimo na ravno ploskev, tako da je v središču votline droben izvir infrardeče svetlobe, ki seva izotropno v gornji

polprostor moč 20 W. Svetloba se v snovi krogle nič ne siplje, pač pa se v njej absorbira 5% svetlobnega toka. Na stiku s podlago je krogla toplotno izolirana, enako velja tudi za površino vdolbine, medtem ko na zunanji krogelni površini vzdržujemo stalno temperaturo 20 stopinj Celzija. Kolikšna je temperatura na notranji polkrogelni steni? Toplotna prevodnost LiF je 11.3 W/m.K.

Dodatno vprašanje: Zapiši rešitev za primer, ko se v polkrogli absorbira 50% svetlobe.

9. Dve enaki vzmetni nihali, sestavljeni iz lahke vijačne vzmeti s koeficientom 5 N/cm in uteži 50 g, obesimo na konca 20 cm dolge homogene toge prečke z maso 50 g, vrtljive okrog težišča. Masi sta prevrtani in nataktnjeni na vodili, ki omejujeta njuno gibanje na navpično smer. Kakšna so lastna nihanja sistema za majhne nagibe prečke? Določi lastne frekvence in (kvalitativno) oceni smeri gibanj teles.

Dodatno vprašanje?: Kako se giblje sistem iz mirovanja, ko eno od uteži od spodaj frcemo navzgor s hitrostjo 2 cm/s?

10. V populacijskem modelu laserja obravnavamo samo časovne spremembe števila fotonov f in števila vzbujenih atomov a v laserjevem resonatorju ter se ne menimo za krajevno odvisnost teh količin. Dobimo enačbi

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= A \cdot a \cdot f - p \cdot f \\ \frac{da}{dt} &= -A \cdot a \cdot f - \lambda \cdot a + R,\end{aligned}$$

kjer pomeni A Einsteinov koeficient stimulirane emisije (verjetnost za rojstvo fotona je sorazmerna produktu števila vzbujenih atomov in številu fotonov, ki so že v koherentnem curku), p je koeficient izgub (recimo puščanje skozi okenca resonatorja, s katerim dobimo zunanji laserski curek), λ je verjetnost, da vzbujeni atom razpade z nekoherentnim izsevanjem fotona (n.pr. v napačno smer), R pa je moč črpanja (s ksenonsko lučjo, z električnim tokom), ki je konstantna. Vsi koeficienti imajo enoto 1/s, a in f pa sta čisti števili. Poišči zastojne točke tega sistema in določi njihov tip. Kakšno je ravnovesno delovanje laserja, ki se ustali po daljšem času? Kako se približuje temu stanju? (Napiši aproksimacijo za majhne odmike od ravnovesnega stanja.)

11. Gorsko jezero v Kolumbiji ima prostornino 0.5 km³. Napajajo ga lokalni studenci z dokaj stalnim tokom 1000 m³/dan čez vse leto, enako stalen je tudi izliv. V vodi pritokov je raztopljen redki element skandij in sicer 2 mg/liter. Ob jezeru deluje tovarna, ki zajema 2000 m³ jezerske vode na dan in iz nje s svojimi ionskimi izmenjevalci izloči ves skandij (ter vodo nato vrača v jezero). Kako se je s časom spreminjal dnevni pridelek skandija od zagona tovarne dalje? Kolikšen je dnevni pridelek skandija danes, 3 leta po začetku obratovanja?

12. Dve drobceni uteži mase M z radijem r , povezani z vzmetjo s koeficientom K , lebdi v viskozni tekočini z znanim η . Skozi tekočino spustimo valovanje (zvok), katerega valovni vektor je vzporeden z vzmetjo in ima frekvenco enako $\Omega = \sqrt{3K/M}$, njegova valovna dolžina pa je štirikrat večja od razdalje med njima, torej je hitrost tekočine na mestu x ob času t podana z izrazom $\tilde{v} = \text{Re}[(v_0, 0, 0)\exp(ikx - i\Omega t)]$. Kako se gibljeta uteži po dolgem času?
13. Dve razsežni bakreni plošči v vakuumu postavimo vzporedno, tako da je med njima konstanten razmik. Na notranjih ploskvah sta počrnjeni, navzven pa zrcalno zglajeni: tako si lahko izmenjujeta toploto s sevanjem, izmenjavo z okolico pa lahko zanemarimo. Kako se spreminjata njuni temperaturi s časom, če sta v začetku 290 K in 300 K? Plošči sta debeli 5 mm, gostota bakra je 8.9 g/cm^3 , specifična toplota pa 380 W/kgK . Stefanova konstanta je $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$.
14. Napravimo si nihalo iz kroglice z maso 5 g, ki jo nataknemo na konec 10 cm dolge lahke paličice, drugi konec paličice pa je prosto vrtljiv okoli vodoravne osi. Nihalo postavimo navpik in ga z obeh strani omejimo s togima stenama, ki mu dovoljujeta odklon 5° na vsako stran in na katerih se kroglica prožno odbije. Kolikšna je hitrost kroglice v vršni (navpični) legi, če je perioda gibanja 1 s?
15. Posoda ima obliko stožca z radijem odprtine 20 cm in višino 20 cm, konica stožca, ki je spodaj, pa je odrezana, tako da je nastala luknjica z radijem 1 mm. V prazno posodo začnemo nalivati vodo s stalnim tokom $10 \text{ cm}^3/\text{s}$. V kolikem času je posoda polna?
16. Majhno homogeno gumijasto kroglico s polmerom r vstavimo čašo s kroglastim dnom z radijem 10 r. Kroglica se po posodi kotali brez zdrsavanja. Poišči frekvenco majhnih nihanj okoli ravnovesne lege!
17. Dva vozička z maso 0.5 kg se gibljeta po tiru z zanemarljivim trenjem. Spojena sta z amortizerjem, ki je v bistvu bat (pritrjen na prvi voziček) v dolgem valju (pritrjenem na drugem vozičku), tako da deluje med vozičkoma viskozna sila (tanke plasti olja med batom in valjem), ki je sorazmerna z relativno hitrostjo, sorazmernostni koeficient je 50 Ns/m . Sistem miruje, dokler enega vozička ne sunemo, da dobi hitrost 0.1 m/s . Opiši gibanje vozičkov v času po sunku. Za koliko se v teku poskusa spremeni razdalja med vozičkoma? (Masi bata in valja sta že všteti v maso vozičkov.)
18. Homogena, 1 m dolga deska je vzdolž krajše stranice obešena na vodoravno os, okrog katere je prosto vrtljiva. Pravokotno na desko piha stalen veter: njegov navor je sorazmeren kvadratu kosinusa kota med desko in navpičnico, ravnovesje pa je doseženo pri kotu 35° . S kolikšno frekvenco zaniha deska, če jo malo zmotimo iz ravnovesnega odklona?
19. Majhen električni dipol p_e leti s hitrostjo v v razdalji a vzporedno z dolgo ravno žico, po kateri teče tok I . Kolikšna sila deluje na dipol in kolikšen navor, če je dipol

usmerjen

a) pravokotno proti žici

b) pravokotno na smeri žice in hitrosti?

20. Dve enaki nitni nihali sestavimo iz nitk z dolžino 50 cm in majhnih kovinskih kroglic z maso 20 g. Nihali sta obešeni z vodoravnega nosilca 20 cm vsaksebi. Kolikšni sta lastni frekvenci njunih (majhnih) nihanj, ko ju sklopimo s tem, da ju naelektrimo z nabojevma 10^{-7} As nasprotnega predznaka?
21. V votlo bakreno kroglo z zunanjim radijem 10 cm in notranjim radijem 3 cm vstopa skozi tanko, dobro izolirano izvrtino voda s temperaturo 30 C in s pretokom 20 ml na minuto. Skozi enako izvrtino voda na drugi strani izstopa. Na zunanji površini je krogla hlajena na 0 C. Kolikšna je temperatura izstopajoče vode ob privzetku, da se voda v votlini učinkovito meša?
22. Na milni mehurček z radijem 5 cm in debelino stene 1 mikron (v zraku pri normalnih pogojih) naneseimo električni naboj 10^{-8} As, ki se hipoma porazdeli enakomerno po površini mehurčka. Kolikšna je frekvenca nihanja, s katerim se mehurček prilagodi na novo velikost? Učinke dušenja zanemari! ($\gamma = 0.025$ N/m).
23. Majhen električni čolniček ima maso 200 g, njegov motorček pa razvija stalno moč 0.02 W. Zaradi majhnih hitrosti računamo, da deluje na čolniček linearni viskozni upor, pri hitrosti 1 cm/s je sila upora enaka 0.005 N. Zapiši enačbo za gibanje čolnička, upoštevaje da je moč pogona (ne sila!) konstantna in da je sila upora sorazmerna s hitrostjo. Uvedi smiselne brezdimenzijske spremenljivke in reši enačbo. Kolikšna je časovna konstanta, s katero se hitrost približuje svoji limitni vrednosti? V kolikšnem času doseže čolniček iz mirovanja polovico limitne hitrosti?
Namig: če ne gre drugače, poskusi rešiti enačbo za kinetično energijo čolnička.
24. Po močno viskozni tekočini plava modelska podmornica z maso 0.3 kg in pogonom s stalno močjo 50 W. S tem motorjem doseže pri premem gibanju v vodoravni smeri največjo (končno) hitrost 10 cm/s. V kolikšnem času doseže polovico te hitrosti, če se začne gibati iz mirovanja?
25. Vzmet s koeficientom 20 N/m je z enim koncem pritrjena na strop, na njenem drugem koncu pa je obešena majhna utež z maso 50 g. Zaradi šibkega dušenja pade amplituda nihanja na polovico začetne vrednosti po 50 nihajih. Nihalo vzbujamo z električno silo, ki ima amplitudo 0.1 N in krožno frekvenco 20 s⁻¹. Sila začne delovati ob času $t = 0$ na mirujoče nihalo in ima časovni potek $\sin \omega t$. Kolikšen je odmik nihala ob času, ko je sila opravila tri nihaje? Kolikšna je hitrost nihala v tem trenutku?
26. Lahka cevka dolžine 20 cm, ki ima na obeh koncih enaka svinčena čepa z maso 1 kg, je simetrično vtaknjena v kratek nosilec, ki je pritrjen na navpično vrtilno os. Na tej osi cev vrtimo s stalno kotno hitrostjo $\omega = 10$ s⁻¹ in zaradi simetrije cev ostane

- na svojem mestu. Potem na en konec sede muha z maso 10 mg. V kolikem času zdrsne cev iz ležišča, če med njo in nosilcem ni trenja?
27. Kolo z vztrajnostnim momentom 0.1 kgm^2 se vrti okoli stalne osi. Ob pogonu s konstantno močjo 1 W doseže zaradi (viskoznega) trenja v ležaju kotno hitrost $5 \pi/\text{s}$. V kolikem času doseže iz mirovanja polovico te končne hitrosti?
 28. Vodoravna cevka je na enem koncu pritrjena na vijačno vzmet in sinusno niha vzdolž svoje osi s frekvenco 0.25 Hz in amplitudo 1 cm . V cevki je kovinsko jedro (kroglični ležaj), ki se cevki tesno prilega in je podmazano s kapljo olja. Če kovinsko jedro v mirujoči cevki porinemo z neko začetno hitrostjo, se mu hitrost zmanjša na polovico začetne po eni sekundi. S kakšno amplitudo niha kaplja? Kakšen je fazni zamik?
 29. Na krožno ploščo z radijem 20 cm in maso 1 kg , ki je vrtljiva okrog vodoravne osi skozi središče, obesimo na diametralnih točkah, ki sta na isti višini kot os, dve vzmetni nihali z utežema z masama 20 g in z vzmetema, ki podelita nihaloma nihajni čas 2 s . Kakšne so lastne frekvence sklopljenih nihanj sistema? (Kakšni so lastni nihajni načini?)
 30. V posodo v obliki polkrogle z radijem 20 cm nalivamo vodo, tako da je volumski tok 2 litra na minuto. Posoda, ki ima v dnu majhno luknjico, se napolni v 10 minutah. Čez koliko časa potem, ko zapremo pipo, se izprazni?
 31. Votlo jekleno kroglico z radijem 2 cm in debelino stene 1 mm napolnimo z živim srebrom in zavarimo. Za koliko se poveča tlak v kroglici, ko se zviša temperatura za 10 K ? Elastični modul jekla je $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, linearni razteznostni koeficient $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, volumski razteznostni koeficient zivega srebra $18 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ in stisljivost $3.5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$.
 32. Utež maso 1 kg je pripeta na konec vijačne vzmeti s koeficientom 200 N/m . Drugi konec vzmeti, ki je v neraztegnjenem stanju dolga 1 m , je pripet na stalno os. Maso in vzmet poženemo v enakomerno kroženje, tako da opisuje masa krožni tir z radijem 1.2 m . S kakšno frekvenco zaniha masa, ko jo med enakomernim kroženjem rahlo sunemo v radialni smeri? Ali je mogoče nastaviti kotno hitrost (in radij) enakomernega kroženja tako, da bo masa opisovala zaključen tir? (Masa vzmeti je seveda zanemarljivo majhna.)