Predavanja: Matematično fizikalni seminar za VSŠ

Borut Paul Krševan

Dostopno na http://www-f9.ijs.si/~kersevan/
COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242203648]
ISBN: 978-961-92548-3-7

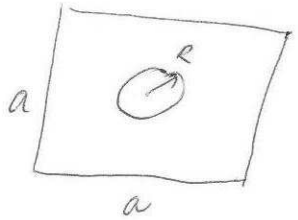
Naslov: “Predavanja: Matematično fizikalni seminar za VSŠ”
Avtor: Borut Paul Kerševan,
Fakulteta za matematiko in fiziko,
Jadranska 19,
1000 Ljubljana
Izdaja: Učno gradivo na spletu: http://www-f9.ijs.si/∼kersevan/
Izdano v samozaložbi, Ljubljana 2008
COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242203648]
ISBN: 978-961-92548-3-7

MC integracija

→ računanje ploščin/volumnov ipd: (*) pseudo-random stuff!

↳ dolžina premice

uvod ↳ ploščina kroga:



→ $\frac{S_K}{S_{tot}} = p$ → verjetnost za zadetek: N poskusov uspešnih od Z vseh

$$\hat{p} = \frac{N}{Z}$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{N(Z-N)}{Z^3}} \sim \sqrt{\frac{p(1-p)}{Z}} \sim \frac{1}{\sqrt{Z}}$$

↳ D.N.: ploščina kroga v $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$!; odvisnost napake od Z ...

↳ analogno za sfero!

↳ uporabno, dokler znaš omejiti funkcijo...

→ ploščine funkcij:

↳ pseudo-random stuff *

$\xi \in [0,1]$, inverzne transformacije

↳ "izrek" o povprečni vrednosti: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = \bar{f}$ (v lim $N \to \infty$ točno)

$$\sigma_f^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} f^2(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\right)^2}{N-1} = \frac{\overline{f^2} - \bar{f}^2}{N-1} \sim \frac{1}{N}!$$

dobro? relativno robustno!

$\underline{x = (b-a)\xi + a}$

↳ porazdeljeni enakomerno med $[a,b]$!

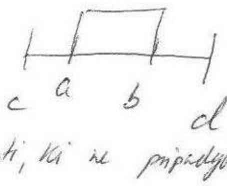
↳ ploščina enakomerne porazdelitve med $[a,b]$: konstanta

$f(x) = 1 \qquad \int_a^b f(x)\,dx = b-a$ seveda

$\bar{f} = 1 \qquad \sigma_f = \emptyset$! → ideal, seveda...

$\overline{f^2} = 1$

Če si zberemo širše območje



moramo "vreči stran" vse vrednosti, ki ne pripadajo a,b : $f(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \in [a,b] \\ 0 & \end{cases}$

verjetnost, da se to zgodi je $p = \frac{b-a}{c-d}$ (uspeh)

$\overline{f} \sim p$; $\overline{f^2} \sim p$!

$\sigma_f^2 = \frac{p-p^2}{N} = \frac{p(1-p)}{N}$! (seveda ...)

↳ p majhen, velika napaka ...

naloga ↳ izračunaj ploščino eksponentne $f(x) = e^{-\lambda x}$ $\lambda = 10^{-3}, 1, 10, 100$ v $[\emptyset, 1]$
primerjaj z preprosto trapezno ali sorodno metodo

→ funkcije seveda niso konstante; kako si pomagamo?

tipični dogodek: $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\, w(x)\,dx = \overline{f}$ po naši definiciji iz Ma-Fi !

$w(x) = \frac{1}{b-a}$

↳ pa poskusimo iti naprej na sprem. ρ:

$$\int_a^b f(x)\, w(x)\,dx = \int_{\rho(a)}^{\rho(b)} f(x(\rho))\, w(\rho)\,d\rho = *$$

$x(\rho) = (b-a)\rho + a$ $\quad w(\rho) = w(x)\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1$ (seveda, ker pričakujemo...)

$\rho(x) = \frac{x-a}{b-a}$

$\rho(a) = \emptyset$ $\quad * = \int_0^1 f(x(\rho))\, \underset{1}{\underbrace{w(\rho)}}\, d\rho$

$\rho(b) = 1$

→ ali smo lahko pri preslikavi $\rho \to x$ bolj zviti?

↳ poglejmo: postavimo:

$$\int_a^x g(z)\,dz = \rho \int_a^b g(z)\,dz \;\Big/ \frac{d}{d\rho}$$

↳ $g(x)\frac{dx}{d\rho} = \int_a^b g(z)\,dz$

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{\int_a^b g(z)\,dz}{g(x)}$$

$$w(\rho) = w(x)\frac{dx}{d\rho} = 1 \Rightarrow w(x) = \frac{g(x)}{\int_a^b g(z)\,dz}$$

→ x je torej porazdeljen po $g(x)$

↳ tehnikalije ; kako dobimo x iz ρ ...

↳ kaj to pomaga pri num. integraciji:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \underbrace{\frac{f(x)}{g(x)}\left[\int_a^b g(z)\,dz\right]}_{\mathcal{Q}(x)} \overbrace{\left[\int_a^b g(z)\,dz\right] w(x)}^{g(x)}\,dx = \cancel{\frac{1}{b-a}}\left[\int_a^b g(z)\,dz\right]\frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{g(x_i)}}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathcal{Q}(x_i)}{N}$$

↳ x_i porazdeljeni po $w(x)$!

"IMPORTANCE SAMPLING"

↳ v idealnem primeru: $\mathcal{Q}(x_i) = \text{konst} = \int_a^b g(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz$

$$g(x) = f(x)$$

$$\sigma = 0 \;!$$

↳ integracija po čudni funkciji → <u>vzorčenje</u> po čudni funkciji ...!

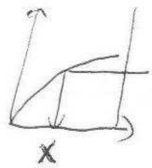
recept: $\int_a^x g(z)\,dz = \rho \int_a^b g(z)\,dz$

$$G(x) = \rho\left[G(b) - G(a)\right] + G(a)$$

$$x = G^{-1}\left\{\left[\rho\, G(b) - G(a)\right] + G(a)\right\}$$

↳ funkcija mora biti integrabilna, monotono naraščajoča $(g(z) \geq 0 \;\forall z)$ in imeti inverz integrala...

↳ grafično kumulanta



$\rho(G(b)-G(a))\;(\pm G(a))$

↳ primer: $g(z) = \lambda e^{-\lambda z}$

$a = 0$, $b = \infty$

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \rho \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \rho$$

$$1 - e^{-\lambda x} = \rho$$

$$1 - \rho = e^{-\lambda x}$$

$$\underline{x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\rho)}$$ ← x porazdeljen po eksponentni porazdelitvi

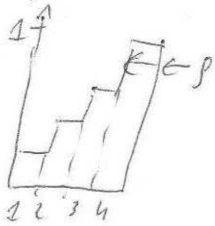
↳ $\underline{w(x) = \lambda e^{-\lambda x}}$

↳ naloga: izračunaj $\bar{X} = \int_0^\infty x \pi e^{-\pi x} dx = \int_0^\infty x\, w(x)\, dx = ?$

$\sigma_x^2 = \dots$

→ v praksi težje "analitične" aproksimacije $f(x)$ ...

↳ diskretne porazdelitve: diskretne kumulative



↳ naloga: zgeneriraj št. dogodkov po binomski porazdelitvi $\left[\begin{array}{l} z=5 \\ p=0.1 \end{array} \right.$

→ drugi recepti za vzorčenje ... npr Gauss:
(Mullerova transf...)

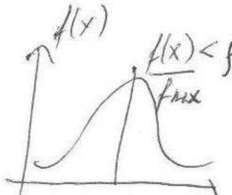
$\rho_1, \rho_2 \in [0,1]$

$z_1 = \sin 2\pi\rho_2 \sqrt{-2\ln\rho_1}$

$z_2 = \cos 2\pi\rho_1 \sqrt{-2\ln\rho_2}$

↳ gaussovsko porazdeljeni, neodvisni!

→ bolj "grobe" metode: če ne znamo ponetrb vzorčiti: "Hit & miss" → odmetavanje



↳ naloga: dobi eksponentno porazdelitev še z odmetavanjem; primerjaj + ocenimo metodo...

↳ npr spet za točke naključno porazdeljene po krogu ...

Numerična integracija: Simpsonova formula: $\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = h\left[\frac{f(x_1)}{3} + \frac{4}{3} f(x_2) + \frac{1}{3} f(x_3)\right]$ ✓ do x^3 $h = \frac{b-a}{6}$ interval širine $2h$

$\int_{x_1}^{x_4} f(x)dx = h\left[\frac{3}{8} f(x_1) + \frac{9}{8} f(x_2) + \frac{9}{8} f(x_3) + \frac{3}{8} f(x_4)\right]$ etc... do x^4

$x_i = x_1 + (i-1)\cdot h$

interpolacija

$f(x) = f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)} + f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$

$m = \frac{a+b}{2} = x_2$; $a = x_1$, $b = x_3$

Trapezna: $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$

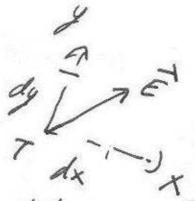
Bode: $\int_{x_1}^{x_5} f(x)dx = h\left[\frac{14}{45} f_1 + \frac{64}{45} f_2 + \frac{24}{45} f_3 + \frac{14}{45} f_5\right]$

3. NALOGA: PRIKAZ VEKTORSKEGA POLJA

→ silnice: v vsaki točki tangente na $\vec{E}$

• $\dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} = \dfrac{dz}{E_z}$ ali $\dfrac{dx}{B_x} = \dfrac{dy}{B_y} = \dfrac{dz}{B_z}$

kompaktni zapis: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{E_y}{E_x} = k(x)$ → tangenta



→ seveda je to sistem DE; potrebujemo še začetno točko oz. točke.

→ kot je običajno hočemo imeti še silnice narisane z ustrezno gostoto: gostejše v močnejšem polju!

↳ potrebujemo ustrezen izbor začetnih točk (recimo iz ekvipot. ploskev...)

↳ slika ni enolična! (kot bi bila za EP ploskve)

→ enostavno/lepo je rešljiv 2D problem:

! a) potencialna polja

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

→ hočemo podoben trik kot v mag. polju; seveda velja: $\Delta\varphi = \emptyset$ (v izvorih se silnice sekajo); imamo torej:

$$\begin{bmatrix} E_x = -\dfrac{d\varphi}{dx} \\ E_y = -\dfrac{d\varphi}{dy} \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{E_x} = \dfrac{dy}{E_y} \end{bmatrix}$$

→ trik nam da uporaba Cauchy-Riemannovih enačb:

• definiramo kompleksno funkcijo: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ v $\mathbb{C}$; $u, v \in \mathbb{R}$, $z = x+iy$

• odvod v z_0 lahko teče po realni ali im. osi (ali katerikoli drugi..)

$$f'(z) = \lim_{h\to\emptyset} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

$$\overset{\text{re}}{=} \lim_{h\to\emptyset} \frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y) - (u(x,y)+iv(x,y))}{h}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \lim_{h\to\emptyset} \frac{f(z+ih)-f(z)}{ih} \overset{\text{im}}{=} \lim_{h\to\emptyset} \frac{u(x,y+h)+iv(x,y+h) - (u(x,y)+iv(x,y))}{ih}$$

$$= \underline{\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}}$$

če te dve izenačimo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

in mora veljati:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right] \quad \text{Cauchy - Riemann - enačbi}$$

↳ posledično morata u in v ustrezati tudi Laplace-a (?) ker:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \underline{\Delta u = 0} \checkmark$$

analogno $\underline{\Delta v = 0}$

→ torej lahko rečemo: $\underline{u = \varphi}$

$v = \psi$ → konjugirani potencial, ko ga imamo:

$$\frac{dx}{+\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{+\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \Rightarrow \frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial \psi}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = 0$$

$\underline{\psi(x,y) = \text{konst}}$ → pa imamo silnice!

a) pri mag. polju imamo silnice 'gratis' z uporabo vek. potenciala $\vec{A}$:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\partial_y A_z - \partial_z A_y\right) + \hat{j}\left(-\partial_x A_z + \partial_z A_x\right) + \hat{k}\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right)$$

ker je to pač 2D: $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$ in po pravili vek. produkta $\vec{A} = (0, 0, A_z)$

torej: $\left[\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ B_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} \end{aligned}\right]$ skupaj z $\left[\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y}\right]$

dobimo: $$\frac{dx}{\frac{\partial A_z}{\partial y}} = -\frac{dy}{\frac{\partial A_z}{\partial x}} \Rightarrow \left(\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)dy = 0$$ → totalni diferencial? v smeri A_z = konst?

$\underline{A_z(x,y) = \text{konst}}$

↳ z izbiro konstant dobimo posamezne silnice?

↳ ekvivalentno EP ploskvam?

→ žica iz zadnjega kolokvija/izpita:

$\underline{\vec{A} = -C\, \hat{e} \ln|\hat{e} \times \vec{r}|}$

4. vaja : Fourier-ova analiza

Fourier Transform : za nas preslikava v v spekter

$$\to H(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{i2\pi\nu t}\, dt$$

$$\leftarrow h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(\nu)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

↳ tipično $h(t)$ merjen le diskretno v točkah? : $h_k = h(t_k)$; $t_k = k\Delta$; $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$\nu_s = \frac{1}{\Delta}$ (frekv. vzorčenja) ↑ N točk...

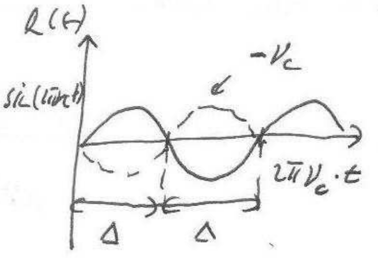
↳ obstaja 'naravna' meja frekv. spektra : Nyquist-ova frekvenca : $\nu_c = \frac{1}{2\Delta} = \frac{\nu_s}{2}$

→ harmonični val s to ν_c ima v naši gostoti vzorčenja ravno 2 vzorca v periodi.

↳ npr avdio : CD : 44.100 kHz
$\nu_c = 22.050$ kHz

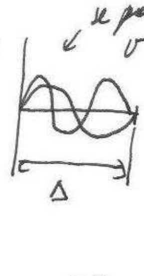
odprti interval?

· Če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na $[-\nu_c, \nu_c]$ potem ob vzorčenju nismo izgubili informacije, če je spekter izven tega intervala pa pride do POTUJITVE/ALIASING → zunanji del spektra se preslika v ta interval.



$$2\pi\nu_c \cdot t = 2\pi$$
$$2\pi\nu_c \cdot 2\Delta = 2\pi$$
$$\nu_c = \frac{1}{2\Delta}$$

vse kar je zunaj tega : se preslika v ν_c !?..



→ zato bi dal ±1

· Če hočemo, da se ohrani količina informacij moramo vzeti enako točk pri transf.?

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k\, e^{i2\pi \frac{k \cdot n}{N}}$$

$n = -N/2, N/2$ diskretni FT

↳ očitno (povezuje) : $H\left(\frac{n}{N\Delta}\right) \doteq \Delta \cdot H_n$

→ POTUJITEV : $H_{-n} = H_{N-n}$: $n = 0, N$ točk dela ; spodnji del nad $[0, \nu_c]$ ($\nu > 0$) ; zgornji $[-\nu_c, 0]$ ($\nu < 0$)

→ obratna transf:

$$h_k = \frac{1}{N}\sum_{L=0}^{N-1} H_L \, e^{-i2\pi \frac{kL}{N}}$$

→ h, H v splošnem kompleksne; simetrije se kopirajo ... : npr realni h: $H(-\nu) = H(\nu)^*$

Računska izpeljava:

$$h_s(t) = h(t)\cdot\left(T\,Ш_T(t)\right)$$

$$= h(t)\cdot T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT) = \underbrace{h(t)\cdot\Delta\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-k\Delta)}\ *$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} h(t)\cdot\Delta\cdot\frac{1}{\Delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n\cdot t/\Delta}$$

$$= \underbrace{h(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi n\nu_s\cdot t}}$$

$\nu_s = \frac{1}{\Delta}$ → frekvenca vzorčenja

$$* = \Delta\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k\,\delta(t-k\Delta)$$

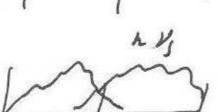
$$H_s(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_s(t)e^{-2\pi\nu t}\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int h(t)e^{i2\pi(n\nu_s-\nu)t}\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H(\nu-n\nu_s)$$

$(-i2\pi(\nu-n\nu_s)t)$ ↓ FT od $h(t)$

ni aliasinga

← enake kopije ...



$n\nu_s$

aliasing

→ torej, če je $H(\nu)=0$ za $|\nu|>B$

$n\nu_s + B < (n+1)\nu_s - B$ da ni prekrivanja!

$B < \nu_s - B$

$2B < \nu_s = \frac{1}{\Delta} \Rightarrow B = \frac{1}{2\Delta} = \nu_c$!

↳ potrebujemo filter, da se znebimo duplikatov! filter: $\begin{cases} 1 & |\nu| < \frac{\nu_c}{2} \\ 0 & |\nu| > \frac{\nu_c}{2} \end{cases}$

6. Lastne vrednosti simetričnega tenzorja

↱ nimamo degeneracij ?

$\underline{A}$ ranga j : $\underline{A}\,\vec{x}_i = \lambda_i\,\vec{x}_i$ $i = 1\ldots j$; simetrična (= Hermitska realna $A = A^+$) ponuja realne lastne vrednosti !

sekularna enačba $\left(\underline{A} - \lambda\cdot\underline{I}\right)\vec{x} = \emptyset$

a) lažje : $\det\left(\underline{A} - \lambda\underline{I}\right) = \emptyset$

↳ če poznamo katero metodo iz iskanja ničle !

b) iteracija : $y^{(i+1)} = \underline{A}\,x^{(i)}$; $x^{(i)} = \hat{a}\cdot y^{(i)}$

↳ normalizacija

→ ko a konvergira smo našli lastno vrednost (največjo)

→ enako najmanjšo lastno vrednost (za $\underline{A}^{-1}$ največja ...)

↳ npr. H: le še kvadratno E !

┌ Jacobijeva transformacija simetrične matrike

če se spomnimo : skonstruiramo matriko $\underline{Z}$ ranga j : $\underline{Z} = \left[\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3 \ldots \vec{x}_j\right]$ → lastni vektorji; ortonormalni za sim. matriko !

$$\underline{A}\,\underline{Z} = \underline{Z}\cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_j)$$

$$\underline{Z}^{-1}\underline{Z} = \underline{I}$$

$$\underline{Z}^{-1} A\,\underline{Z} = \mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_j)$$ to hočemo

↳ $\underline{Z}^{-1} = \underline{Z}^{T}$!

↳ $\underline{A} \to \underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z}$ 'podobnostna' transformacija

↳ lastne vrednosti ostanejo enake : $\det\left(\underline{Z}^{-1}\underline{A}\,\underline{Z} - \lambda\underline{I}\right)$

$= \det\left(Z^{-1}(A - \lambda\underline{I})Z\right)$

$= \det\left(Z^{-1}\right)\cdot\det\left(A - \lambda\underline{I}\right)\det(Z)$ ciklično

$= \det\left(A - \lambda\underline{I}\right)$:

→ kaj poskusimo s sekvenco podobnostnih transf. priti do diag. vrednosti ! $\underline{Z} = \underline{P}_1\cdot\underline{P}_2\cdot\underline{P}_3\ldots$ $\underline{A} \to \underline{P}_i^{-1}\underline{A}\,\underline{P}_i$

za Jacobijevo transf.:

$$
\begin{array}{cc}
P_{pq} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots \\ \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p \\ q \end{array} \\
\quad q \qquad\qquad p &
\end{array}
$$

velja:

$c^2 + s^2 = 1$

$c = \cos\varphi \quad (s = \sin\varphi)$

$\underline{A}' = \underline{P}_{pq}^T \underline{A} \, \underline{P}_{pq}$ → sledi:

$a_{pp}' = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2sc\, a_{pq}$

$a_{qq}' = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2sc\, a_{pq}$

$a_{pq}' = (c^2 - s^2) a_{pq} + sc(a_{pp} - a_{qq})$

↳ identično za a_{qp}'!

$a_{rp}' = c a_{rp} - s a_{rq}$

$a_{rq}' = c a_{rq} + s a_{rp}$

$r \neq p, q$

→ izberemo: $a_{pq}' = 0$

$$\frac{c^2 - s^2}{2sc} = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2 a_{pq}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \alpha$$

$t = s/c \Rightarrow \underset{\sim\sim\sim}{t^2 + 2t\alpha - 1 = 0}$ → manjši koren ($< \frac{\pi}{4}$) (koren) izberemo

$$t = \frac{\operatorname{sign}(\alpha)}{|\alpha| + \sqrt{\alpha^2 + 1}}$$

→ vsaka nadaljnja transformacija nam to sicer pokvari, vendar je a 'neat trick':

$S = \sum_{r \neq s} (a_{rs})^2$ → vsota vseh izvendiagonalcev:

$\underset{\sim\sim\sim}{S' = S - 2(a_{pq})^2}$ (ostali člani $a_{rp}'^2 + a_{rq}'^2 = a_{rp}^2 + a_{rq}^2$)

↳ pri vsaki transf. vsota izven diag monotono pada, torej lahko dosežemo 0!

↳ dobimo: $D = V^T A V$; $V \equiv Z$ (stolpci lastne vrednosti)

↳ $\operatorname{diag}(\lambda_1 \ldots \lambda_j)$

$V = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots$!

→ katere elemente tlačimo na ničlo!

↳ v originalu največje (iskanje sicer stane kvadratnik!, slabo)

↳ po vrsti: $P_{12}\ P_{13}\ P_{1 \ldots n}$

$P_{23}, P_{24} \ldots P_{2n}$ ($P_{21} \equiv P_{12} \ldots$ je že 0)

$\frac{n(n-1)}{2} \equiv$ sweep!

↳ ponavljamo ... 6–10× ali ...

↳ red $12n^3 - 30n^2$ operacij

⌈ Predelava na tridiag ~~(trikotne)~~ matrike?
tridiagonalne

↳ Givens & Householderjeni metodi ; glej nč

↳ Givensova pogrusta: pri P_{pq} postavimo na $\emptyset$ element, ki ni v vogalih, t.j. ni a_{pq}, a_{pp}, a_{qq}

P_{23} anihilira a_{31} (in a_{13})

P_{24} anihilira a_{41} (in a_{14})

P_{jk} anih. a_{kj-1}

dela, ker a_{pp}' in a_{pq}' LK starih vrednosti, torej če sta a_{pp} in a_{pq} že nič bodi ostaneta

↳ potrebnih končno mnogo korakov $\left(\frac{n^2}{2}\right)$

↳ ko imamo tridiag. matriko je mnogo lažje iskanje ničel karakterističnega polinoma simpl; ko imamo λ_i poiščemo še lastne vektorje A dovolj hitro... tricky najti vse?

→ lepše : QR in QL dekompozicija

↳ postulat : vsako matriko se lahko zapiše kot:

$$\underline{A} = \underline{Q} \cdot \underline{R}$$

↳ zgornje ▽

↳ ortogonalna

→ če postavimo : $A' = \underline{R} \cdot \underline{Q} \Rightarrow / \cdot Q^T \cdot (\Leftrightarrow) \underline{Q}^T \underline{A} = \underline{R}$

$$\underline{A}' = \underline{Q}^T \underline{A} \underline{Q} = \underline{Q}^T \underline{A} \underline{Q}$$? podobnostna transf!

↳ ohranja simetrijo, tridiag obliko etc..

↳ velja tudi $\underline{A} = \underline{Q} \cdot \underline{L}$

L △ spodnji trik..

↳ QL algoritem:

$$A_s = Q_s L_s$$

$$A_{s+1} = L_s \cdot Q_s \; (= Q_s^T A_s Q_s)$$

↳ teorem : $|\lambda_i|$ lastne vrednosti različnih velikosti $A_s \to$ △ ko gre $s \to \infty$

drugače pri... reda ($\sim n^3$) za tridiag pa le $O(n)$!

↳ vemo kar Jacobijeve rotacije? P_{pq} ... ($P_{12}, P_{23} \ldots P_{n-1,n}$)

$$Q_s^T = P_1^{(1)} P_2^{(1)} P_{n-1}^{(1)}$$

→ ko imamo △ = L imamo tudi lastne vrednosti? (kar vrednosti na diagonali?)

iteracija:
za $\vec{x}_j$!

$(\underline{A} - \tau \underline{I})\cdot\vec{y} = \vec{b}$

↳ izvoljeni vektor

↳ rešiš enačbo da dobiš $\vec{y}$; τ blizu neke λ_i

$(\underline{A} - \tau I)\,\vec{y}^{(s+1)} = \vec{y}^{(s)}$

$$\left.\begin{aligned} \vec{y} &= \sum_j \alpha_j \vec{x}_j \\ \vec{b} &= \sum_j \beta_j \vec{x}_j \end{aligned}\right\} \quad \sum_j \alpha_j (\lambda_j - \tau)\vec{x}_j = \sum_j \beta_j \vec{x}_j$$

↳ $\alpha_j = \dfrac{\beta_j}{\lambda_j - \tau}$

↳ če τ blizu λ_j ta člen absolutno prevlada!

↳ vsaka iteracija

$\alpha_j^{(s+1)} = \dfrac{\alpha_j^{(s)}}{(\lambda_j - \tau)^2}$!

etc.. ; moramo poznati dobre
(~~[illegible]~~) ocene lastnih vrednosti!

Hitro računanje determinant LU dekompozicija $\Delta \cdot \nabla = A$! $\det(A) = \det(L)\cdot\det(U)$
$= a_{11}^{L} \cdots a_{jj}^{L} \cdot a_{11}^{U} \cdots a_{jj}^{U}$

→ Cholesky: če A simetrična in poz. definitna (le pozitivne λ_i)

$LL^T = A$

↳ Δ : $L_{ij}^T = L_{ji}$

$$L_{ii} = \Big(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2\Big)^{1/2}$$

$$L_{ji} = \frac{1}{L_{ii}}\Big(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} L_{jk}\Big) \qquad j = i+1,\ i+2 \dots$$

↳ 2x hitreje kot LU

↳ se upošteva simetrija!

Richardsonova ekstrapolacija in Bulirsch-Stoer:

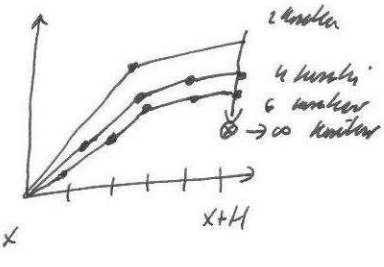
↳ le za gladke funkcije brez singularnosti v intervalu ...

→ korak $x \to x+H$

↳ H lahko velik

↳ n podkorakov, zaporedje npr: $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 \ldots$ ($n_j = 2j$); modificiran midpoint

↳ naredi polinomska ekstrapolacija..



$\to \infty$ korakov (limita) → polinomska ekstrapolacija?

v redih $(h^2)^n$?

7. naloga: Enačbe hode/evolucija

→ ponovi, da imamo DE z podano začetno situacijo / zač. pogoji
robni

↳ metode reševanja ∅.) Eulerjeva
1.) Runge-Kutta
2.) Richardsonova ekstrapolacija (Bulirsch-Stoer)
3.) prediktor-korektor

∅.) diference namesto integralov/odvodov..

1.) R-K: kombinacija informacij iz Euler-style korakov, vmesne, ne preveč natančne...

2.) ekstrapolacija k koraku manjše vrijem od dejanskega (manjši idejni..)
cilj

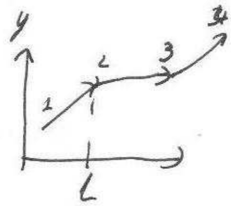
3.) popravljamo prejšnje rezultate.. komplicirano – SKIP

Runge-Kutta: $\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1 \ldots y_n) \qquad i = 1 \ldots n$

Euler: $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) \quad ; \quad f(x,y) = \frac{dy}{dx}$

$O(h^2)$

→ preprosta, obstajajo pa boljše $\qquad x_{n+1} = x_n + \underset{\text{korak}}{h}$



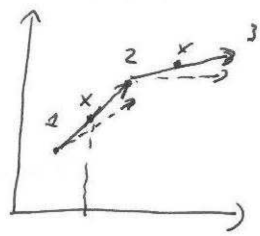
Midpoint: $k_1 = h f(x_n, y_n)$ ← vmesna točka

$O(h^3)$

$k_2 = h f\left(x_n + \frac{1}{2} h, y_n + \frac{1}{2} k_1\right)$

$y_{n+1} = y_n + k_2$

R-K II. reda (2 oceni f)



"Klasični" R-K IV. reda

$$k_1 = h f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = h f(x_n + h, y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} + O(h^5)$$

↳ 4 ocene $f(x,y)$; torej bo boljši od midpoint, če lahko uporabimo 2x večji korak!
za isto natančnost

↳ visok red ni nujno boljši...

Modificiran midpoint:

korak $x \to x+H$ razdelimo na n podkorakov: $h = H/n$

↳ potrebujemo $n+1$ evalvacij f

$$z_0 = y(x)$$

$$z_1 = z_0 + h f(x, z_0)$$

$$z_{m+1} = z_{m-1} + 2h f(x + mh, z_m) \qquad m = 1, 2, \ldots n-1$$

$$y(x+H) \simeq y_n = \frac{1}{2}\left[z_n + z_{n-1} + h f(x+H, z_n)\right]$$

↳ potrebuje manj ocen kot runge-kutta primerljivega reda...

↳ pomemben trik: $y_n - y(x+H) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h^{2i}$ ← le sode potence

↳ z triki odštevanja redov pridobimo 2x natančnost/korak!

↳ recimo: $n \to$ sod $y_{n/2} \to$ rezultat dobljen z pol manj koraki;

$$y(x+H) = \frac{4y_n - y_{n/2}}{3}$$

je $O(h^5)$ (reda 4 enako kot R-K)

vendar rabimo ~1.5 f ocen za korak h namesto 4 !

Newtonov zakon

$$m\frac{dx^2}{dt^2}=F$$

$$p = m\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dp}{dt}=F$$

↳ klasično reševanje: sistem dveh DE? (I. reda)

↳ spet lahko euler, runge-kutta etc:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\vec{y}}{dt}=f(x,\vec{y})\\[2ex] \vec{y}_{n+1}=\vec{y}_n+h\,f(x_n,\vec{y}_n)\end{array}\right\}$$ mi potrebujemo, rabimo pa začetne pogoje! $(x(0),p(0))$

↳ uporaba tu: Stoermerjeva metoda!

če imamo: $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y)$ $\left[\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x)\right.$, brez prvih odvodov! $\left.\right]$

tu je uporaben naslednji pristop: $y''=f(x,y)$; $y(x_0)=y_0$ $y'(x_0)=z_0$

$h=H/m$ $y_1=y_0+h\left[z_0+\frac{1}{2}h\,f(x_0,y_0)\right]$

v bistvu II. odvod! $y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}=h^2 f(x_0+kh,y_k)$ $k=1,\dots,m-1$

$z_m=\frac{(y_m-y_{m-1})}{h}+\frac{1}{2}h\,f(x_0+H,y_m)$ (=) $z_m=y'(x_0+H)$

Henrici
HENRICI prepiše to v:
z manjšimi zaokrožitvenimi napakami!

$$\Delta_k=y_{k+1}-y_k$$

$$\Delta_0=h\left[z_0+\frac{1}{2}h\,f(x_0,y_0)\right]$$

$$\Delta_k=\Delta_{k-1}+h^2 f(x_0+kh,y_k)$$

$$y_{k+1}=y_k+\Delta_k$$

$$z_m=\frac{\Delta_{m-1}}{h}+\frac{1}{2}h\,f(x_0+H,y_m)$$

↳ Gragg: napaka spet $\sum_i \alpha_i h^{2i}$ → Bulirsch-Stoer npr... namesto modificirane midpoint metode ...

prenastavitev tega je trapezna shema iz lita!

$$y(x+H) = y(x) + H z\left(x+\frac{H}{2}\right)$$

$$z\left(x+\frac{H}{2}\right) = z\left(x-\frac{H}{2}\right) + H f(x,y)$$

→ za dani problem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0$$ dobiš točno rešitev eliptični integral!

→ dodatna naloga:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = \nu \sin \omega_0 t = F$$

$$\frac{du}{dt} + \beta u + \sin x = \dots \Rightarrow u\left(t+\frac{h}{2}\right) - u\left(t-\frac{h}{2}\right) + \beta u(t)\cdot h = h \cdot F$$

↑ oceni izračuni iteracijo!

$$x = \frac{du}{dt}$$

Robni problem lastnih vrednosti

→ v DE moramo zadeti končno točko!

↳ splošni zapis: N sklopljenih DE I. reda;

n_1 začetnih pogojev v x_1

$n_2 = N - n_1$ končnih pogojev v x_2 } N robnih pogojev

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1 \ldots y_N) \qquad i = 1 \ldots N$$

$$B_{1j}(x_1, y_1 \ldots y_N) = 0 \qquad j = 1 \ldots n_1$$

$$B_{2k}(x_2, y_1 \ldots y_N) = 0 \qquad k = 1 \ldots n_2$$

↳ problemi, ki se lahko zreducirajo na ta primer:

a) lastne vrednosti DE

$$\frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1 \ldots y_N, \lambda) \qquad N+1 \text{ robnih pogojev: pre-determiniran sistem, rešljiv le za neke } \lambda \ldots$$

↳ vpeljemo: $y_{N+1} = \lambda$

$$\frac{dy_{N+1}}{dx} = 0$$

b) primer prosta meja / free boundary

↳ x_1 znan

↳ x_2 določimo naknadno tako, da imamo $N+1$ izpolnjenih r.p.

$$y_{N+1} = x_2 - x_1$$

$$\frac{dy_{N+1}}{dx} = 0$$

vpeljemo tudi: $t = (x - x_1)/y_{N+1}$ (neodvisna spr.)

$$t \in [0, 1]$$

↳ $\frac{dy_i}{dt} \ldots$ $N+1$ DE v standardni obliki, t variira znotraj znanega intervala...

Metoda streljanja / shooting

v zač. točki x_1 imamo n_1 pogojev iz N y_i, ki jih določamo..., $n_2 = N - n_1$ je torej štev. prostih parametrov : $\vec V \equiv$ parametrizirani prosti parametri (lahko y_i ali kaj bolj uporabnega)

$$\dim \vec V = n_2$$

$$y_i(x_1) = y_i(x_1, \vec V) \equiv \vec y(x_1)$$

↳ propagiramo do $x_2 \Rightarrow \vec y(x_2)$

↳ izmerimo diskrepanco, npr: $F_k = B_{2k}(x_2, \vec y)$ $\quad k = 1..n_2$

$\vec F(\vec V)$

↳ lahko tudi kar-koli drugega...

iščemo $\vec F = 0$

↳ rešujemo z Newton-Raphsonovo metodo v n_2 dimenzijah

↳ splošni opis: $F_i(x_1 .. x_M) = 0 \quad i = 1..M$ $\quad$ M enačb $\vec F$, M neznank $\vec x$

↳ uporabimo Taylorja:

$$F_i(\vec x + \delta \vec x) = F_i(\vec x) + \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta \vec x^2)$$

J_{ij} → Jacobijeva determinanta!

$$\vec F(\vec x + \delta \vec x) = \vec F(\vec x) + J \cdot \delta \vec x + O(\delta \vec x^2)$$

↳ postavimo na 0 (zanemarimo x^2 člene in višje):

$$0 = \vec F(\vec x) + J \cdot \delta \vec x \Rightarrow \underbrace{J \cdot \delta \vec x = -\vec F}$$

↳ lahko rešimo za $\delta \vec x$ (LU ali podobno)

$$\vec x_{novi} = \vec x_{stari} + \delta \vec x$$

↳ konvergira k ničli... (ali pa ne...)

→ torej imamo: $\vec F(\vec V)$; $M = n_2$

$$J \cdot \delta \vec V = -\vec F$$

$$\vec V_{novi} = \vec V_{stari} + \delta \vec V$$

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial V_j} \simeq \frac{F_i(V_1 .. V_j + \Delta V_j ...) - F_i(V_1 .., V_j ..)}{\Delta V_j}$$ → aproksimiramo...

↳ vsak cikel $\underbrace{n_2 + 1}$ integracij: 1 za diskrepanco

n_2 za jakobijo! ($F_i(V_1 .. \underbrace{V_j + \Delta V_j}) ..$)

→ če so DE linearne je en cikel dovolj! (N-R metoda lin. točna!)

Streljanje v skupno točko

če so r.p. čudni (singularnosti) ali kaj drugega vmes med x_1 in x_2 (FF[?])

↳ integriramo od x_1 do x_f

x_2 do x_f (← obratna smer)

n_2 prostih pogojev v x_2
n_1 prostih pogojev v x_1 } N prostih vrednosti ... $\vec{V} = \vec{V}_{n_1} \cup \vec{V}_{n_2}$

$$y_i(x_f; \vec{V}_{n_1}) = y_i(x_f; \vec{V}_{n_2}) \quad i = 1..N$$

↳ pogoji ...

Dobimo točko: $\vec{F}[\quad]$ na ničli [?], seveda ...

Relaksacijske metode

↳ zapišemo najprej diferenčni zapis; npr: $\frac{dy}{dx} = g(x,y)$

$$y_k - y_{k-1} - (x_k - x_{k-1})\, g\left[\tfrac{1}{2}(x_k + x_{k-1}), \tfrac{1}{2}(y_k + y_{k-1})\right] = \emptyset$$

$k = 1 ... M \rightarrow$ pač mreža!

↳ če imamo N DE I. reda:

↳ naša rešitev N vrednosti v M točkah: $N \times M$ točk ...

↳ začnemo z ugibanjem in neko rešitvijo ... relaksiramo v pravo rešitev ...

↳ iteracija: N-R ali diagonalizacija ...

x_k v M točkah: x_1 in $x_M = x_2$ ..

$$\vec{y}_k = \vec{y}(x_k) \quad (\dim \vec{y} = N)$$

v splošnem: $\vec{E}_k = \vec{y}_k - \vec{y}_{k-1} - (x_k - x_{k-1})\, g[x_k, x_{k-1}, \vec{y}_k, \vec{y}_{k-1}]$ $\quad k = 2, 3, ... M$

$\vec{E}_k = \emptyset$

N enačb sklaplja $2N$ spremenljivk

$M-1$ točk ... : $(M-1) \times N$ enačb za $M \times N$ neznank ...

ostalih N enačb iz r.p.: $\vec{E}_1 = \vec{B}(x_1, \vec{y}_1) = \emptyset$ $\quad n_1$ ne-ničelnih vrednosti $\begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \end{bmatrix}$

$\vec{E}_{M+1} = \vec{C}(x_2, \vec{y}_M) = \emptyset$ $\quad n_2$ ne-ničelnih vrednosti $\begin{bmatrix} n_2 \\ \emptyset \end{bmatrix}$

→ to moramo nekako rešiti ...

→ spet Taylor:

$$\vec{E}_k(\vec{y}_k+\Delta y_k, \vec{y}_{k-1}+\Delta\vec{y}_{k-1}) \approx \vec{E}_k(\vec{y}_k,\vec{y}_{k-1}) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial E_k}{\partial y_{n,k-1}}\Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=1}^{N}\frac{\partial E_k}{\partial y_{n,k}}\Delta y_{n,k}$$

↳ posti $\emptyset$:

$$\sum_{n=1}^{N} S_{j,n}\,\Delta y_{n,k-1} + \sum_{n=N+1}^{2N} S_{j,n}\,\Delta y_{n-N,k} = -E_{jk} \qquad j=1\dots N$$

S_{jn} – $N\times 2N$ matrika

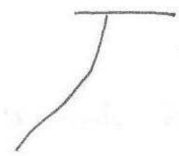
→ spet robni pogoji: $\sum_{n=1}^{N} S_{jn}\,\Delta y_{n,1} = -E_{j,1}$ $\quad j=n_1+1\dots N$ (n_2 vrednosti)

$$\sum_{n=1}^{N} S_{jn}\,\Delta y_{n,M} = -E_{j,M+1} \qquad j=1,2\dots n_2$$

↳ matrika S blok-diagonalna, ni tako hudo...

Naš primer:

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dz}{dy}\right)+\frac{\omega^2}{g}z=\emptyset$$ (gledamo od prostega konca navzgor)



$$z(y)=\begin{cases} z(\emptyset) \text{ omejena} \\ z(l)=\emptyset \text{ (pripeta...)} \end{cases}$$

analitično: $J_0(j_{0s}\sqrt{y/l})$ $\quad j_{0s}$ s-ta ničla J_0, ($\omega=\frac{1}{2}\sqrt{g/l}\,j_{0s}$)

↳ predlog: mreža N: $h=l/N$

$$i\cdot(z_{i+1}-2z_i+z_{i-1})+\frac{1}{2}(z_{i+1}-z_{i-1})+hp\,z_i=\emptyset$$

$i=1\dots N-2$

$\underbrace{z_N=\emptyset}$

$h\cdot p = l/N\cdot \omega^2/g$ → lastna vrednost...

$\underbrace{i=\emptyset}$: vzamemo asimetrično dif. odvoda... (z_1-z_0)..

pa rešiš...

9. PDE → začetni problem / ne robni?

↳ več 'prostorskih' stopenj → ponovadi kar 'diferenčne' metode

↳ a) difuzijska enačba:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{\rho c} \qquad 0<x<a \qquad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$T(x, t=0) = G(x)$$

↳ $$\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = D\,\frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + Q$$

$\left(\Delta t = \frac{t}{k}\right)$ k – časovni korak

h – prostorski korak

$i=0$ je podan z zač. pogojem $G(x)$...

$p = \frac{Dk}{h^2} \leq 1/2$ pogoj za stabilnost

↳ sorazmerno točen za $p = 1/6$ → $6N^2$ korakov (preveč)

Crank-Nicholson : II. red v času

časovno diferenco izračunamo za aritmetično sredino krajevnih diferenc v sloju (i) in $(i+1)$

↳ dobimo tridiag. sistem enačb (zahtevnost ~ N, ni problem..), stabilnost dobra ..

$$u_{i+1,j} - u_{i,j} = p\left(u_{i,j+1} - 2u_{ij} - u_{ij-1}\right) + kQ$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2}\left[p(\quad)_{i+1} + p(\quad)_i\right] + kQ$$

$$(-pu_{j+1} + (2p+2)u_j - pu_{j-1})_{i+1} = (pu_{j+1} - 2(p-2)u_j + pu_{j-1})_i + 2kQ$$

↳ inherentno stabilno!

b) valovna enačba

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \qquad 0 < x < a$$

$$z(x, t=0) = f(x)$$
$$\dot{z}(x, t=0) = g(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \rightarrow \frac{u_{i+1} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{k^2}$$

↳ če rač. hitrost enaka 0: $u_{i=0}^{-1} = u_{i=1}$ $\left(\text{odvod } \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{j+1} - u_{i-1}}{2k}\right)$

$$u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j} = \left(\frac{kc}{h}\right)^2 \left[u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}\right]$$

$i = 1$

$$u_{2,j} = u_{1j} + \frac{1}{2}\left(\frac{kc}{h}\right)^2 \left[\ \ldots\ \right]$$

od Neumanna kriterij za stabilnost

$$u_{ij} = \xi^i e^{i\varkappa jh} = \xi^i e^{i\varkappa j \Delta x}$$

↳ lastni način.. $\xi = \xi(\varkappa)$

$\xi^i \rightarrow$ ima meje? $|\xi(\varkappa)| < 1$? pogoj za stabilnost

→ za difuzijsko dobimo:

$$\xi = \frac{1 - 2p \sin^2\left(\frac{\varkappa \Delta x}{2}\right)}{1 + 2p \sin\left(\frac{\varkappa \Delta x}{2}\right)} \checkmark$$

$$\xi - 2 + \frac{1}{\xi} = \left(\frac{kc}{h}\right)^2 \left[e^{i\varkappa h} - 2 + e^{-i\varkappa h}\right]$$

$$= \left(\frac{kc}{h}\right)^2 2\left[\cos \varkappa h - 1\right] = \left(\frac{kc}{h}\right)^2 \cdot 4 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2}$$

$$= -p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2}$$

$$\xi - 2 + \frac{1}{\xi} = -p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2}$$

$$\xi^2 - \left(2 - p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2}\right)\xi + 1 = 0$$

$$\xi_{1,2} = \frac{2 - p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2} \pm \sqrt{(\ \ )^2 - 4}}{2} = 1 - \frac{p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2p^2 \sin^2 \frac{\varkappa h}{2} + p^4 \sin^4 \frac{\varkappa h}{2}}}{2}$$

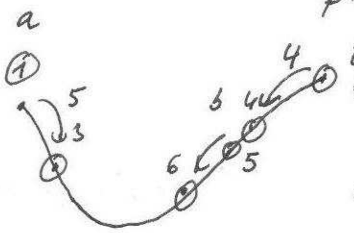
Iskanje ekstremov

"bisekcija" minimuma ($max = -f$!) : Golden section

↳ 3 točke : $a < b < c$: $f(b) < f(a) \wedge f(c)$!

↳ min v $[a, c]$

↳ x med $[b$ in $c]$ ali $[a, b]$



$f(x)$: $f(b) < f(x) \rightarrow c \rightarrow x$: $a < b < x$

$f(b) > f(x) \rightarrow b \rightarrow x$, $a \rightarrow b$: $b < x < c$

} najboljši min do sedaj ($b \Leftrightarrow x$)

ponavljamo, dokler interval ni dovolj majhen:

$$f(x) \simeq f(b) + \frac{1}{2} f''(b)(x-b) \quad b \sim \text{min!}$$

↳ $|x-b| < \sqrt{\varepsilon}\, b \sqrt{\frac{2|f(b)|}{b^2 f''(b)}}$ → da je drugi člen ε popravek manjši!

↳ $\sqrt{\varepsilon} \sim 10^{-4}$ single

10^{-8} – double precision! $\varepsilon f(b)$!

↳ izbira x glede na (a, b, c):

$$\frac{c-a}{c-a} = 1 : \quad \frac{b-a}{c-a} = w \quad \frac{c-b}{c-a} = 1-w$$

$$\frac{x-b}{c-a} = z \quad (x > b)$$

novi odsek ali $w + z = \frac{x-a}{c-a}$ (novi b)

$1 - w = \frac{c-b}{c-a}$ (novi a)

↳ najslabši primer: $w + z = 1 - w$, $z = 1 - 2w$ } → sim. točka: lastnost b-ja v tem intervalu $|b-a| = |x-c|$

x v večjem od obeh segmentov ($z > 0 \Rightarrow w < \frac{1}{2}$)

↳ če konsistentno optimiziramo x:

scale similarity:

x v enakem deležu od b do c (če to večji segment) kot b od a do c

$$\left.\begin{array}{l} \frac{z}{1-w} = w \\ \frac{x-b}{c-b} = \frac{b-a}{c-a} \end{array}\right\} z = 1 - 2w \Big\} \quad \begin{array}{l} w^2 - 3w + 1 \\ \bar{V} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.38197 \end{array}$$

↑ zlati rez!

novi x za $\bar{V}$ globlje v večjega od obeh segmentov

→ začetno iskanje: dve podajoči točki: a, b; iščemo c (lahko z velikimi koraki), kjer je

$$f(c) > f(b) \ldots$$

↳ potem bolje: parabolična interpolacija: skozi 3 točke (a, b, c) [DN: $x^2 e^{-x}$, išči MAX . . .

min podan z:
$$x = b - \frac{1}{2}\,\frac{(b-a)^2\left[f(b)-f(c)\right] - (b-c)^2\left[f(b)-f(a)\right]}{(b-a)\left[f(b)-f(c)\right] - (b-c)\left[f(b)-f(a)\right]}$$

↳ težava za kolinearne točke

↳ kombinacija Brentova metoda (BRENT)

→ če poznamo odvode: Newton-Raphson ipd. . .

→ več dimenzij: Downhill simplex . . . (trikotnik, tetraeder . . .)

DN → drugačna geometrija
↳ z drugimi geometrijami