

# Zbirka nalog iz Matematične fizike za VSŠ

---

Borut Paul Kerševan

Dostopno na <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>

COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242144000]

ISBN: 978-961-92548-1-3

Naslov: "Zbirka nalog iz Matematične fizike za VSŠ"

Avtor: Borut Paul Kerševan,

Fakulteta za matematiko in fiziko,

1000 Ljubljana

Izdaja: Učno gradivo na spletu: <http://www-f9.ijs.si/~kersevan/>

Izdano v samozaložbi, Ljubljana 2008

COBISS ID: [COBISS.SI-ID 242144000]

ISBN: 978-961-92548-1-3

# 1 Računanje z diferenciali

1. Za kolikšen kot se odkloni navpična bimetalna paličica dolžine 1 dm, ko jo enakomerno segrejemo za 100 stopinj? Paličica je sestavljena iz enakih delov dveh zlitin s presekom  $1\text{mm}^2$ , koeficienta linearne razteznosti pa znašata  $12 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$  in  $17 \cdot 10^{-4} \text{K}^{-1}$ . Za koliko pa se vrh premakne v navpični in prečni smeri?
2. Plastična masa, dopirana z jodom, šibko prevaja električni tok. Upor kubičnega centimetra mase, merjen med vzporednima ploskvama, je 100 ohmov. Kolikšen je upor sfere s polmerom 10 cm, iz iste mase, če ga merimo med kovinskima elektrodama v obliki diskov s premerom 4 cm, pritisnjenih ob nasprotnih polih sfere? Kako se spremeni upor, če sfero dodatno segrejemo in s tem povečamo premer za 1%?
3. Semi-empirična masna formula podaja vezavno energijo  $A=Z+N$  nukleonov v jedru:

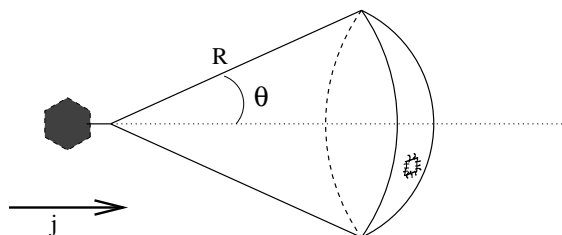
$$W_v(Z, A) = -w_0A + w_1A^{2/3} + w_2 \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + w_3 \frac{(A-2Z)^2}{A} + w_4 \frac{\delta_{ZN}}{A^{3/4}}$$

Z uporabo le-te *oceni*, kateri element ( $Z=?$ ,  $A=?$ ) ima najvišjo vezavno energijo **na nukleon** (torej, pri katerem elementu so nukleoni najmočneje vezani)! ( $w_0 = 15.6 \text{ MeV}$ ,  $w_1 = 17.3 \text{ MeV}$ ,  $w_2 = 0.70 \text{ MeV}$ ,  $w_3 = 23.3 \text{ MeV}$ ,  $w_4 = 33.5 \text{ MeV}$ ,  $\delta_{ZN} = -1$ ).

4. V valjasto posodo visoko 1 meter s presekom  $10 \text{ cm}^2$  nalijemo liter tekočine z gostoto  $1.4 \text{ g/cm}^3$  in stisljivostjo  $\chi = 5 \cdot 10^{-2} \text{ bar}^{-1}$ .
  - Za koliko moramo segreti tekočino, da sega gladina do roba posode, če je temperaturni koeficient prostorninskega raztezka  $\beta = 3 \cdot 10^{-3}$  ?
  - Kolikšna masa tekočine se zlije čez rob posode, ko posodo segrejemo za 100 K?

Temperaturno in napetostno raztezanje posode je zanemarljivo. Namig: Spomni se formul:  $\Delta V/V = \chi \cdot p$  in  $\Delta V/V = \beta \Delta T$ .

5. Janez se odloči, da bo družinske prihodke izboljšal z domačo proizvodnjo diamantov. V ta namen na vrečo oglja za žar začne nalagati pesek s povprečno gostoto  $\rho_0 = 12 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Kako visok kup peska bi moral naložiti, da bi na dnu kupa dosegel tlak  $p_0 = 9 \cdot 10^3 \text{ bar}$ , pri katerem se oglje konvertira v diamante, če upoštevamo efektivno stisljivost peska  $\chi = 10^{-5} \text{ bar}^{-1}$ ? Napiši tudi odvisnost gostote od globine v (stisnjenem) kupu peska.
6. Vesoljec se po dolgem ujetništvu na Zemlji vrača domov. Ob pomanjkanju višje tehnologije si v vesolju zgradi ladjico s pogonom na solarno jadro. Jadro je zgrajeno iz zrcalnega materiala in ima obliko krogelnega izseka s kotom  $\vartheta = 30^\circ$  in radijem  $R = 100 \text{ m}$  (glej skico). Ob štartu v zemljini orbiti je jadro enakomerno osvetljeno s sončevo svetlobo z gostoto energijskega toka  $j = 1.3 \text{ kW/m}^2$ . Izračunaj, kolikšna sila v smeri simetrijske osi deluje na jadro ob začetku potovanja! Privzemi, da zrcalo odbija vso vpadno svetlobo, pri čemer za odboj seveda velja odbojni zakon.



**Nekaj namigov:** Sila svetlobe na jadro se računa popolnoma analogno kot sila/tlak curka vode na oviri: V času  $dt$  se ob odboju spremeni gibalna količina diferencialnega dela  $d\vec{p}_z \rightarrow d\vec{p}_k$ , kar povzroči sunek sile  $d\vec{F}dt$  na površini  $dS$ , pri čemer pa za svetlobo/fotone velja zveza med energijo in gibalno količino  $p = E/c$ , pri odboju na oviri pa odbojni zakon za svetlobo...

7. Nihalo je sestavljeno iz dveh 1 meter dolgih kovinskih palic z maso 0.5 kg. Ena palica je železna, druga pa bakrena. Železna palica je na krajišču vpeta v os, bakrena palica pa je privarjena na drugi konec (skupna dolžina je torej 2 metra). Razteznostna koeficienta za Fe in Cu sta po vrsti 12 in 17 milijonink na stopinjo C. Za koliko se spremeni nihajni čas takšnega nihala, ko se temperatura poveča za 10 K?

## 2 Verjetnost in statistika

1. Raziskovalec v svojem laboratoriju opazuje razpade eksotičnega elementa. V povprečju pričakuje 4 razpade na dan. Eksperiment vsako jutro začne ob 6h zjutraj in konča ob 18h popoldne, žal pa opoldne tajnica vedno vklopi grelec za kavo, ki povzroči navidezen signal (razpad) v aparaturi raziskovalca.
  - Kolikšna je verjetnost, da do poldneva ne zazna nobenega signala?
  - Kolikšna je verjetnost, da v celem dnevu zazna le napačni signal?
  - Kolikšno je povprečno število sunkov, ki jih zazna v dnevnem eksperimentu? Kolikšna je varianca te napovedi?
  - Kolikšna je verjetnost, da v mesecu meritev zazna le grelec za kavo v dveh ali več dneh?
2. Na žico se naključno posedejo ptice z gostoto 4 ptice/meter.
  - Kolikšna je povprečna razdalja med pticami? Kolikšna je varianca te razdalje?
  - Kakšna je porazdelitev razdalje med ptico in njeno najbližjo sosedo? Kolikšna je verjetnost, da je sosedo ptici oddaljena več kot 0.5 metra?
  - Kolikšna je verjetnost, da ima med stotimi pticami le ena ptica sosedo več kot pol metra daleč?

3. Pri gorenju termita ( $\text{Al} + \text{Fe}_2\text{O}_3$ ) pršijo naokrog zvezdice, ki so kroglaste kapljice raztaljenega železa. Ko jih ohlajene zberemo, ugotovimo, da je njihova verjetnostna porazdelitev po masah približno sorazmerna z  $me^{(-m/M)^{\frac{1}{3}}}$ , kjer ima parameter  $M$  vrednost 0.5 mg.

- Kolikšen je povprečni radij kroglice in kolikšen je njegov efektivni odmik (varianca)?
- Kolikšna je verjetnost, da ima naključno izbrana kapljica radij, ki je štirikrat večji od njene povprečne vrednosti?

Gostota železa je  $7.8 \text{ g/cm}^3$ . **Namig:** Spomni se Gama funkcije:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

4. Z merilnim sistemom merimo razpadni čas kratkoživega elementa z razpadnim časom 2 ms. V merilnem sistemu je elektronska napaka, zaradi katere v 30% primerov sistem vrne rezultat točno 1 ms.

- Zapiši verjetnostno porazdelitev dogodkov razpada po času za dani merilni sistem.
- Kolikšna sta pričakovani čas razpada in njegova varianca ter za koliko odstopata od vrednosti, ki bi jih vrnil pravilno delujoč merilni sistem?
- Kolikšna je verjetnost, da so med desetimi izmerjenimi dogodki več kot trije napačni (torej 1 ms)?

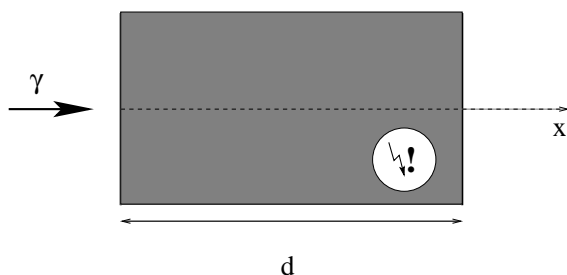
5. Nestabilni kvark  $t$  kmalu po nastanku razpade v različne delce. Razpad kvarka  $t$  v  $W$  in kvark  $u$  je zelo redek, približna ocena za delež razpadov v to končno stanje je 0.02%.

- Kolikšna je verjetnost, da med prvimi 500 000 razpadi ne bo nobenega te vrste?
- Koliko razpadov moramo določiti, da bomo lahko navedli pogostnost za razpad  $t \rightarrow W u$  na 10% natančno?
- Kolikšna je verjetnost, da bo konkurenčna skupina pri dvakrat manjšem številu dogodkov določila pogostnost razpada, ki je za 20% manjša od naše?

6. V rudniku zlata v Zambiji so izmerili, da ruda vsebuje približno 10% čistega zlata ter 30% bakra.

- Kolikšna je povprečna vrednost kilogramskega kosa rude, če je na borzi cena kilograma čistega zlata 1000\$ , kilograma bakra 400\$ , cena kilograma ostalih primesi v rudi pa je enakomerno porazdeljena med 0\$ in 200\$? Kolikšna je nedoločenost vrednosti takšnega kosa rude?
- Kolikšna je verjetnost, da vrednost vreče s 100 kilogramskimi kosi rude preseže 10% njene povprečne vrednosti?

- Kolikšna je verjetnost, da med tremi naključno izbranimi vrečami ni nobene takšne (kjer bi cena presegala 10% povprečne vrednosti)?
7. Z detektorjem poskušamo izmeriti karakteristično dolžino absorbcije fotonov v neki snovi tako, da snov postavimo v aktivno polje detektorja, jo pravokotno osvetlimo z fotonskim izvorom ter (s pomočjo nekaj tehničnih trikov) merimo pot fotonov v snovi. Žal ima detektor pomanjkljivost, namreč da je njegov volumen širok le  $d = 20$  cm, bralna elektronika pa vse fotone, ki preživijo do roba volumna, obravnava kot absorbirane na robu (torej na razdalji  $d$ ).
- Za koliko se spremeni povprečna pot fotonov v snovi ter njena varianca v primerjavi z idealnim (nepopačenim) primerom, če vemo, da je prava karakteristična dolžina enaka  $\mu = 10$  cm?
  - Kolikšno število neodvisnih meritev poti fotona ( $x$ ) je še smiselno opraviti, če naj skupna ocenjena statistična napaka ne bo manjša od odstopanja med pričakovano in pravo vrednostjo ( $\mu$ )?



**Namig:** Verjetnostna gostota za absorbcijo fotonov v snovi kot funkcija poti je seveda

$$w(x|\mu) = \frac{1}{\mu} \cdot e^{-\frac{x}{\mu}},$$

ki pa se zaradi detektorja deformira tako, kot je opisano v tekstu...

8. Zaporedoma mečemo tri utežene kovance, verjetnost da pade 'cifra' je 0.6.
- Kolikšna je verjetnost, da so v enem poskusu vržemo  $N=0,1,2,3$  zaporednih cifer?
  - Kolikšna je verjetnost, da vržemo vsaj eno cifro, pri čemer cifre niso zaporedne?
  - Kolikšna je pričakovano število zaporednih cifer?
9. Dobrodelna loterija, na kateri "zadene" 40% vseh srečk, ima zelo pestro lestvico dobitkov, tako da njihovo pogostnost najlaže aproksimiramo z zvezno verjetnostno gostoto

$$w(x) = \frac{1}{r} e^{-x/r},$$

kjer je  $x$  velikost dobitka, izražena v enotah cene srečke, parameter  $r$  pa ima vrednost 2.

- Kolikšna je povprečna vrednost dobitka?
  - Kolikšna je verjetnost, da bo naključni kupec dobil povrnjeno vrednost svoje srečke?
  - Kolikšna je verjetnost, da bo par igralcev, kjer kupi vsak eno srečko, skupaj zaslužil več, kot sta plačala?
10. Snežinke padajo na stekleno kupolo muzeja ( $R = 2$  m). Ker je v muzeju toplo, se snežinke začnejo topiti in spolzijo po kupoli navzdol.
- Kakšna je porazdelitev po dolžini sledi kapljic?
  - Kolikšna je povprečna dolžina sledi kapljice in kolikšna je njena varianca?
11. V dolgoletni proizvodnji čipov je ugotovljeno, da ima okoli 10 % izdelkov skrite napake, ki se kažejo šele pri vgradnji v končni izdelek. Na podlagi te informacije je kupec izdelal naslednji postopek kontrole: iz velike pošiljke ( $>1000$  kosov) bo na slepo izbral 10 čipov in jih poskusno vgradil v končne izdelke. Če bo ugotovil, da so vsi brez napake, bo pošiljko sprejel, sicer pa jo bo brez plačila zavrnil. Kolikšna je verjetnost, da se bo to zgodilo? Ali bi bilo za prodajalca ugodneje, če bi test razširili na 50 kosov - in pošiljko zavrnil, če bi bilo pokvarjenih 5 ali več čipov?
12. Ribič lovi ribe, ki prijemajo slučajno, z enakomerno verjetnostno gostoto v času 0.20/h. Vsak dan lovi največ 10 ur, prej zaključí, ko ima v torbi tri ribe, kolikor je dovoljeni dnevni ulov.
- Kolikšna je verjetnost, da bo ostal polni čas?
  - Kolikšna je verjetnost, da bo v enem tednu tri dni ostal polni čas?
  - Oceni verjetnost, da bo enem letu (300 delovnih dni) skupno ujel več kot 550 rib.
13. Mase smaragdov v dnevnem izkopu rudnika v Nigeriji lahko opišemo z verjetnostno gostoto, ki je vsota dveh Gaussovih funkcij: prva, ki zajema 90% vse verjetnosti, ima parametra  $\mu = 10$  g in  $\sigma = 2.5$  g, druga, ki opisuje preostalih 10% verjetnosti, pa ima  $\mu = 50$  g in  $\sigma = 15$  g.
- Kolikšni sta povprečna masa izkopanega smaragda in njena varianca?
  - Kolikšna je verjetnost, da bo med 10 na slepo izbranimi jajci vsaj en diamant težji od 50 gramov?
14. Mravlje v amazonskem pragozdu korakajo na zavojevalni pohod. Pri tem korakajo v strnjenih vrstah v isti smeri. Pri pohodu naletijo na hribček sferične oblike z radijem  $R$ .
- Kakšna je porazdelitev poti, ki jo mravlje opravijo čez hribček?
  - Kolikšna je povprečna pot mravlje čez hribček in varianca poti?

15. V središču dolgega valja je izvir monoenergijskih nabitih delcev, katerih doseg v snovi valja je enak premeru valja. Delci se izsevajo izotropno po smereh, od izvira se gibljejo premočrtno, dokler se ne ustavijo. Kolikšna je povprečna dolžina njihovih poti v valju? Kolikšen je efektivni odmik te dolžine?
16. Iz enakomerne porazdelitve realnih števil v intervalu  $[0,1]$  naključno izžrebamo dve števili.
- Kolikšna je verjetnost, da je drugo izžrebano število večje od prvega?
  - Kakšna je verjetnostna porazdelitev večjega izžrebanega števila?
  - Kakšni sta povprečna vrednost in varianca večjega izžrebanega števila?
17. Majhne kroglice enakomerno padajo z velike višine v posodo sferične oblike z radijem  $R$ .
- Kakšna je porazdelitev kroglic po odbojnem kotu?
  - Kolikšen delež kroglic se v posodi odbije samo enkrat? (Predpostavi, da so hitrosti kroglic zelo velike).
18. Detektor za delce beta ima obliko dolgega valja. Drobcen izvir, iz katerega izletavajo delci izotropno, postavimo v središče osnovne ploskve valja.
- Kakšna je porazdelitev tetiv, ki jih izrežejo v valju premice, po katerih odletijo delci (ki se v snovi nič ne sipajo ali odklanjajo, samo ustavljajo)?
  - Maksimalna dolžina (doseg) delca je  $4R$ , kjer je  $R$  polmer valja. Kolikšna je verjetnost, da se bo naključno izbrani delec ustavil v valju? Kolikšni sta v tem primeru povprečna dolžina poti delca in njen efektivni kvadratni odmik ( $\sigma$ )?
19. Strešno okno v obliki enakokrakega pravokotnega trikotnika je v nagnjeno streho vdeleno tako, da je ena kateta vodoravna. Na okno pada dež: kaplje zdrsiyo po steklu navzdol v smeri največjega padca, dokler se ne dotaknejo okvirja.
- Kako so porazdeljene dolžine njihovih sledi? Kolikšna je povprečna dolžina sledi in kolikšen je njen efektivni odmik? (3/4 tocke)
  - Oцени verjetnost, da bodo med 5 naključno izbranimi sledmi več kot 3 take, ki se od povprečne dolžine sledi razlikujejo za manj kot 1 efektivni odmik. (1/4 tocke)
20. V nekem gozdu je v povprečju 200 dreves/ $\text{km}^2$ , pri čemer so drevesa posajena popolnoma naključno. Kolikšna je verjetnost, da je na površini  $2 \text{ km}^2$ , ki jo želimo posekati, število dreves med 380 in 420?



21. Kupola iz stekla pleksi v obliki polkrogle ima premer 1 m in vodoravno osnovno ploskev. Nanjo pada dež: vsaka kaplja, ki pade na kupolo, zdrsi po največji strmini do spodnjega roba. Kako so porazdeljene dolžine njihovih sledi? Kolikšna je povprečna dolžina sledi in kolikšen je njen efektivni odkik? Oцени verjetnost, da bodo med 5 naključno izbranimi sledmi več kot 3 take, ki se od povprečne dolžine sledi razlikujejo za manj kot 1 efektivni odkik.
22. Novoletni okrask je narejen kot sfera iz prosojnega stekla, posejanega z drobnimi bleščicami, ki so posejane enakomerno po vsej površini. Žarnica osvetljuje okrasek navpično navzdol, tako da se na tleh pod okraskom pojavi senca-le tega. Določi verjetnostno porazdelitev senc bleščic v odvisnosti od središča okraskove (sferine) sence. Kolikšna je povprečna razdalja sence bleščice od središča in kolikšen je efektivni odkik (sigma) te razdalje? Privzamemo lahko, da je žarnica dovolj oddaljena, da padajo žarki svetlobe na okrasek vzporedno.
23. Top iz 18. stoletja ima konstanten nagib  $\phi = 30^\circ$ ; domet topa so torej uravnavali le z količino smodnika, ki so ga nasuli vanj. V bitki pogosto ni bilo veliko časa za preračunavanje in so top polnili bolj na slepo; na podlagi tega lahko predpostavimo, da je porazdelitev velikosti izhodne hitrosti krogle iz topa približno Maxwelllova:

$$w(v) = \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \cdot v^2 e^{-\alpha v^2},$$

pri čemer je  $\alpha = 10^{-4} \text{ s}^2/\text{m}^2$ . Izračunaj povprečni domet krogle in njegovo standardno deviacijo.

### 3 Vektorski Račun

1. Skalarni potencial ima obliko:

$$U = A \ln(\vec{a} \times \vec{r})^2 \cdot e^{-\vec{b} \cdot \vec{r}},$$

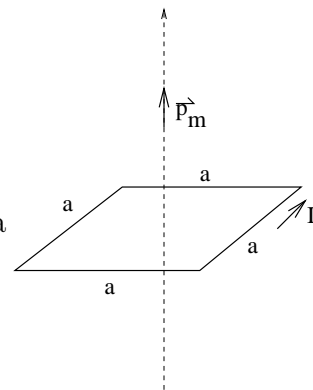
kjer je  $A$  konstanta,  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  pa enotska konstantna vektorja.

- Kakšna morata biti  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ , da gornji izraz opiše brezvrtinčno in brezizvirno električno polje?
- Kakšna je prostorska porazdelitev nabojev, ki ustvarjajo to polje?

**Kot pomoč:**  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Po kvadratni zanki z stranico  $a$  teče tok  $I$ .

2.
  - Izračunaj gostoto magnetnega polja v osi zanke!
  - Izračunaj silo te zanke na magnetni dipol  $\vec{p}_m$ , ki je postavljen na višini  $h$  in usmerjen v smeri osi zanke!



3. Po dolgem ravnem polkrožnem žlebu s krivinskim radijem  $R$  teče tok  $I$ .
  - Kolikšna je gostota magnetnega polja v osi žleba?
  - Kolikšna je sila na dolžinsko enoto, ki deluje na raven vodnik, postavljen v os žleba in po katerem teče tok  $I/2$  v enaki smeri kot tok v žlebu?
4. Elektrostatski potencial je podan s formulo:

$$U = V_0 - E_0 x + \frac{E_0 R^2}{r^2} x,$$

pri čemer je  $x$  kartezična koordinata,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  razdalja od osi  $z$ ,  $R$  in  $E_0$  pa sta konstanti.

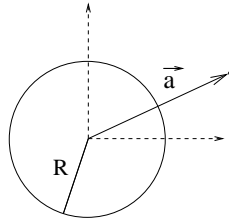
- Določi jakost električnega polja pri  $r = R$ .
  - Pokaži, da je rotor jakosti električnega polja res identično enak nič.
  - Izračunaj divergenco jakosti električnega polja ter argumentiraj, da je dobljeni potencial popačen potencial homogenega električnega polja jakosti  $E_0$  v smeri osi  $x$ , ko vanj postavimo dolg kovinski valj z radijem  $R$  orientiran v smeri osi  $z$ .
5. Magnetno polje *pol*-neskončne žice, po kateri teče tok  $I$ , je podano z enačbo:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\vec{e} \times \vec{r}}{|\vec{e} \times \vec{r}|^2} \cdot \left( 1 + \frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{r} \right).$$

- Dokaži, da je divergenca tega polja enaka nič!
  - Izpelji, koliko je rotor tega polja!
  - Ali lahko tudi pokažeš, da je izvor magnetnega polja res *pol*-neskončna žica?
6. Potencial med neskončno nabito žico in kovinskim valjem je podan z izrazom:

$$U(\vec{r}) = A \ln \left( \frac{|\vec{r} - \vec{a}|}{|\vec{r} - \left(\frac{R}{a}\right)^2 \vec{a}|} \right)$$

v **dveh dimenzijah**, kjer vektor  $\vec{a}$  podaja lego nabite žice in  $R$  radij prevodnega valja (glej skico).



- (a) Pokaži, da ta potencial za  $|\vec{r}| \geq R$  res ne izvira iz prostorsko porazdeljenih nabojev!
- (b) Pokaži, da je potencial na površini kovinskega valja ( $|\vec{r}| = R$ ) konstanten, kot bi pričakoval za smiselno stacionarno stanje.

7. Izračunaj magnetni moment enakomerno nabite sfere z radijem  $R$  in površinskim nabojem  $\sigma$ , ki se vrti okoli navpične osi s konstantno kotno hitrostjo  $\omega$ .
8. Skalarni potencial elektrinega polja ima obliko

$$U(\vec{r}) = \exp(-w), w = [(\vec{p} \times \vec{r}) \times \vec{r}] \cdot \vec{p},$$

kjer je  $\vec{p}$  poljuben konstanten vektor. Kako so v prostoru porazdeljeni naboji, ki so izviri polja? V kateri smeri glede na  $\vec{p}$  je pri konstantni razdalji gostota največja?

9. Po volumnu sfere z radijem  $R$  in maso  $M$  je enakomerno porazdeljen naboj  $e$ . Kolikšen je magnetni moment sfere, ko jo zavrtimo s kotno hitrostjo  $\omega$ ? Kakšno je giromagnetno razmerje  $p_m/\Gamma$ ?  
 Namig: Formula za magnetni moment prostorsko porazdeljenih tokov je podana z:

$$\vec{p}_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{j} dV$$

10. Izračunaj silo med dvema krožnima tokovnimi zankama z radijem 10 cm, ki sta postavljeni vzporedno na razdalji 20 cm, ce po njima teče tok 10 A:
- v isti smeri.
  - v nasprotnih smereh.
11. Vektorsko polje ima obliko:

$$\vec{v} = Ae^{-(\vec{a} \times \vec{r})^2} (\vec{b} \times \vec{r}),$$

kjer je  $A$  konstanta,  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$  pa poljubna konstantna vektorja.

- Kakšna morata biti  $\vec{a}$  in  $\vec{b}$ , da gornji izraz opiše fizikalno veljavno magnetno polje?
- Kakšna je prostorska porazdelitev tokov, ki ustvarjajo to polje?

**Kot pomoč:**  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

12. Magnetno polje je podano z vektorskim potencialom:

$$\vec{A} = -C \hat{e} \ln |\hat{e} \times \vec{r}|,$$

kjer sta  $C$  konstanta in je  $\hat{e}$  normiran konstanten vektor. Izračunaj jakost magnetnega polja iz zveze  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  in nato tako rotor kot tudi divergenco tega polja brez uporabe specifičnih koordinat. Poišči izvor tega polja: kje teče ustrezen električni tok?

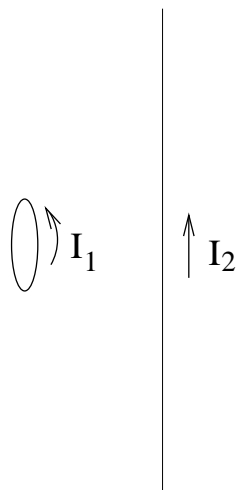
13. Posebna konfiguracija izvirov da elektrostatično polje s skalarnim potencialom

$$U(\vec{r}) = q \operatorname{Arsh} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{\sqrt{r^2 - (\vec{a} \cdot \vec{r})^2}} = q \ln \sqrt{\frac{r - \vec{a} \cdot \vec{r}}{r + \vec{a} \cdot \vec{r}}},$$

kjer je  $q$  jakost izvirov in  $\vec{a}$  enotni vektor.

- Določi jakost električnega polja in pokaži, da to polje nima v prostoru zvezno porazdeljenih izvirov.
  - Kje pa so izviri tega polja?
14. Mnogožilni kabli v elektroniki so dostikrat oblikovani v trak, tako da so prevodne žile v majhnih enakih razmikih druga ob drugi zalite v plastiko.
- Opiši magnetno polje, ki nastane okoli 8 cm širokega, dolgega ravnega traku, če teče po vsaki od 40 žil leve polovice električni tok 0.1 A v eno smer, po vsaki od 40 žil desne polovice pa enak tok v nasprotno smer.
  - Kakšna sila deluje na majhen magnetni dipol z momentom  $10^{-4} \text{ Am}^2$ , ki je postavljen 4 cm nad sredino traku vzporedno z ravnino traku, a pravokotno na smer toka?
15. Na notranjo steno plastične tanke sfere z radijem  $R$  nanesemo naboj z enakomerno površinsko gostoto  $\sigma$ .
- Kolikšno je električno polje v središču sfere?
  - Izračunaj, kolikšen tlak deluje na stene sfere zaradi odboja površinsko nanešenega naboja?
16. Naboj  $e$  je enakomerno nanešen na ploščati obroček z notranjim radijem  $r_1$  in zunanjim radijem  $r_2$ . Kolikšna je jakost električnega polja na osi obročka (t.j. na višini  $h$  nad ravnino obročka)?
17. Asteroid je v preteklosti doživel hud trk, tako da ima v grobem obliko polkrogle z radijem 20 km. Masa v njem je porazdeljena homogeno in ima gostoto  $5 \text{ kg/dm}^3$ . Kolikšen je pospešek prostega pada v središču ravne ploskve in kolikšen na vrhnji točki kapice? (Gravitacijska konstanta je  $6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ ).

18. Tokovna zanka z radijem 1 cm, po kateri teče tok 1 A, je postavljena pravokotno na neskončno ravno žico, po kateri teče tok 10 A, pri čemer je razdalja med središčem zanke in najbližjo točko žice enaka 0.5 metra (glej skico!). Kolikšna sta sila in navor med zanko in žico? Namig: Računaj s približkom majhne zanke!

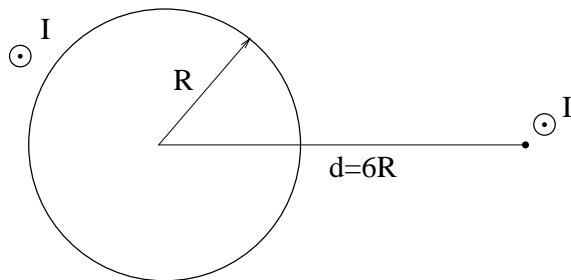


19. Izračunaj navor in silo na točkast dipol  $p_e = 10^{-2}$  Asm, ki se nahaja na razdalji  $a = 0.2$  m od neskončne ravne enakomerno nabite žice z dolžinsko gostoto naboja  $\lambda = 2 \cdot 10^{-2}$  As/m in je glede na žico odklonjen za kot  $\varphi = 60^\circ$ .
20. V razsežen homogen tok idealne tekočine, ki teče s konstantno hitrostjo  $\vec{U}$  postavimo krožni valj tako, da je os pravokotna na smer toka. Zmoteno hitrostno polje se zapiše:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{U}(1 - R^3/2r^3) + \frac{3R^3}{2r^5}(\vec{U} \cdot \vec{r})\vec{r}$$

Pokaži, da je to polje brezvrtnično. Kakšno je polje pospeškov, ki jih čutijo delci tekočine?

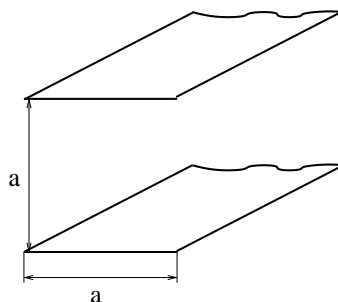
21. Tanka žica je postavljena vzporedno z vodnikom radija R na razdalji  $d = 6R$  (glej skico). Kolikšna sila (velikost in smer) deluje med žico in vodnikom, če po obeh teče enak tok I v isti smeri?



Pri izračunu pride prav integral:

$$\int_0^\pi \frac{d\phi}{C + \cos \phi} = \frac{\pi}{\sqrt{C^2 - 1}}$$

22. Izračunaj silo na dolžinsko enoto med dvema vzporednima neskončnima ravnima trakovoma širine  $a = 5\text{cm}$ , ki sta prav tako razmaknjena za razdaljo  $a$  (glej skico). Oba trakova sta enakomerno nabita z enakim nabojem na dolžinsko enoto  $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-2}\text{ As/m}$ .

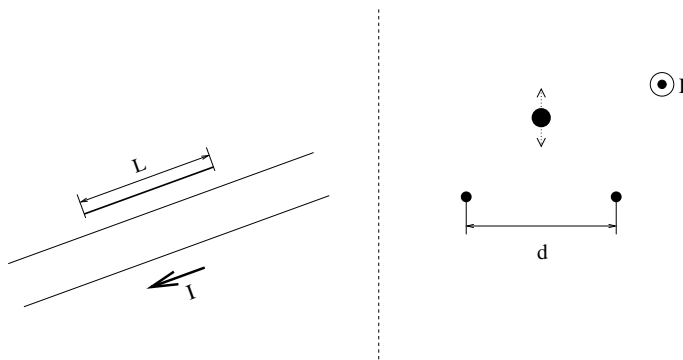


## 4 Diferencialne enačbe

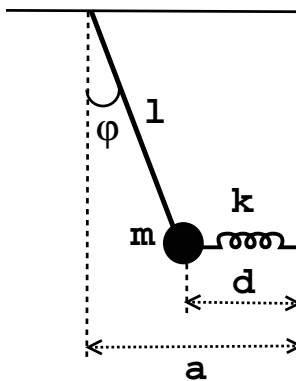
1. Dve posodi z enakim volumnom  $V = 1\text{ dm}^3$  napolnimo s čisto vodo ter ju povežemo s kratko cevjo. V prvo posodo umešamo dva grama barvila. Nato začnemo v prvo posodo dotakati čisto vodo z volumnim tokom  $0.1\text{ dm}^3/\text{s}$ . Kako se koncentracija barvila v prvi in drugi posodi spreminjata s časom?
2. Kondenzator z površino plošč  $1\text{ dm}^2$ , razmaknjenih za  $1\text{ cm}$  postavimo v elektrolitsko kopel nikljeve soli. Kako debelina niklja na plošči narašča s časom, če kondenzator priklopimo na konstantno napetost  $10\text{ kV}$ ? Nikljevi ioni so dvojno nabiti ( $\text{Ni}^{++}$ ), specifična upornost elektrolita je  $10^{-6}\Omega\text{ mm}^2/\text{m}$ , molska masa niklja je  $58.69\text{ kg/kmol}$ , gostota niklja pa  $8.9\text{ g/cm}^3$ .
3. Roleta lahko v približku opišemo kot meter dolgo, lahko in togo ploščo, na konec katere je obešena nezanemarljiva utež. Roleta je vzdolž krajše stranice obešena na vodoravno os, okrog katere je prosto vrtljiva. Vzemimo primer, ko pravokotno na roleta piha stalen veter: njegov navor je sorazmeren kvadratu kosinusa kota med roleta in navpičnico, ravnovesje pa je doseženo pri kotu  $30^\circ$ . S kolikšno frekvenco zaniha roleta, če jo malo zmotimo iz ravnovesnega odklona?
4. Majhna kovinska kroglica z maso  $1\text{ gram}$  je obešena na  $10\text{ cm}$  dolgo vrvico, tako da lahko prosto niha. Kroglico naelektrimo z nabojem  $5 \cdot 10^{-6}\text{ As}$ , nihalo pa stoji  $20\text{ cm}$  stran od ozemljene kovinske stene, ki deluje na kroglico s silo, s kakršno bi

deloval naboj nasprotnega znaka v zrcalni legi glede na steno. Kolikšna je frekvenca nihanja, ki ga vzbudimo, če kroglico malo izmaknemo iz mirovne lege?

5. Po dveh vzporednih žicah, pritrjenih na razdalji  $d = 0.2 \text{ m}$ , teče tok  $I = 100 \text{ A}$  v enaki smeri. V magnetno polje le-teh nato 'obesimo' raven vodnik dolžine  $L = 1 \text{ m}$ , po katerem prav tako teče tok  $I = 100 \text{ A}$  v enaki smeri kot v žicah (glej skico!). Masa vodnika je  $M = 2 \text{ g}$ . S kolikšno frekvenco zaniha vodnik, če ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege v navpični smeri?



6. Utež mase  $m = 1 \text{ kg}$  je pritrjena na strop z lahko vrstico dolžine  $l = 1 \text{ m}$  ter na steno oddaljeno  $a = 1 \text{ m}$  z vzmetjo s koeficientom  $k = 59.12 \text{ N/m}$ . Neraztegnjena vzmet meri  $d = 0.5 \text{ m}$ , v ravnovesju pa utež visi pod kotom  $\varphi_0 = 25^\circ$  glede na navpičnico (glej skico). Izračunaj frekvenco nihanja takšnega nihala za majhne odmike od ravnovesne lege!



**Namig:** Ravnovesni kot seveda ni majhen, zato približki  $\sin \varphi \simeq \varphi$  ne veljajo; treba je razviti funkcije okoli te ravnovesne vrednosti...

7. Igračko podmornico mase  $100 \text{ g}$  poganja majhen elektromotorček s konstantno močjo  $0.04 \text{ W}$ . V banji nanjo deluje linearni zakon upora; pri hitrosti  $1 \text{ cm/s}$  je sila upora enaka  $0.01 \text{ N}$ .

- Zapiši enačbo gibanja podmornice. Kolikšna je njena končna hitrost?
  - V kolikšnem času podmornica doseže iz mirovanja polovico svoje končne hitrosti.
8. Otroška igračka je sestavljena iz pisanega kolesčka mase 0.2 kg in radija 10 cm, ki je nastavljeno na os, povezano z majhnim elektromotorčkom. Os je podmazana s kapljico olja in kolesček se okoli osi prosto vrti, če pa ga pri ugasnjem motorčku zavrtimo z neko začetno kotno hitrostjo, se mu le-ta zaradi trenja zmanjša na polovico začetne po eni sekundi. Kako se giblje kolesček, če ob vklopljenem motorčku os niha z amplitudo  $\pi/2$  in frekvenco 0.5 Hz (amplituda, fazni zamik...)? Predpostavi linearni zakon upora med oljem na osi in kolesčkom.
  9. Zelo lahko vijačno vzmet s koeficientom 10 N/m postavimo navpik na trdno podlago ter nanjo z višine 15 cm spustimo kroglico z maso 20 g. Čez koliko časa bo kroglica zopet priletela v prvotno lego?
  10. Vodoravna cevka je na enem koncu pritrjena na vijačno vzmet in sinusno niha vzdolž svoje osi s frekvenco 0.25 Hz in amplitudo 1 cm. V cevki je kovinsko jedro (kroglični ležaj), ki se cevki tesno prilega in je podmazano s kapljo olja. Če kovinsko jedro v mirujoči cevki porinemo z neko začetno hitrostjo, se mu hitrost zmanjša na polovico začetne po eni sekundi. S kakšno amplitudo niha kaplja? Kakšen je fazni zamik?
  11. Majhen magnetek z magnetnim dipolnim momentom  $p_m$  je v osi pritrjen na razdalji  $R$  od tanke žice, po kateri teče električni tok  $I$ . Magnetek je okoli osi prosto vrtljiv. S kolikšno frekvenco zaniha, ko ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege? Magnetek ima obliko tanke homogene paličice z maso  $m$  in dolžino  $l$ , smer osi pa je vzporedna z žico.
  12. Dve razsežni bakreni plošči v vakuumu postavimo vzporedno, tako da je med njima konstanten razmik. Na notranjih ploskvah sta počrnjeni, navzven pa zrcalno zglajeni: tako si lahko izmenjujeta toploto s sevanjem, izmenjavo z okolico pa lahko zanemarimo. Kako se spreminjata njuni temperaturi s časom, če sta v začetku 290 K in 300 K? Plošči sta debeli 5 mm, gostota bakra je  $8.9 \text{ g/cm}^3$ , specifična toplota pa  $380 \text{ W/kgK}$ . Stefanova konstanta je  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ .
  13. Kolo z vztrajnostnim momentom  $0.1 \text{ kgm}^2$  se vrti okoli stalne osi. Ob pogonu s konstantno močjo 1 W doseže zaradi (viskozne) trenja v ležaju kotno hitrost  $5 \pi/\text{s}$ . V kolikem času doseže iz mirovanja polovico te končne hitrosti?
  14. Iz pipe vodnjaka izteka voda s hitrostjo 0.1 m/s in pada v korito kakšen meter nižje. Radij pipe je približno 5 cm. Kako se radij iztekajočega curka spreminja z višino? Viskoznost zanemari, upoštevaj pa površinsko napetost ( $\gamma = 0.025 \text{ N/m}$ ).  
**Namig:** Sila zaradi površinske napetosti je sorazmerna z obsegom curka, delo zaradi te sile pa potemtakem s spremembo površine. Uporabi energijski izrek!
  15. Po razsežni planparalelni 6 cm debeli plasti iz neke snovi teče električni tok z gostoto  $90 \text{ A/cm}^2$  vzdolž njene dolge osi. Plast z obeh strani oblivamo z ledeno vodo s



temperaturo  $0^\circ \text{C}$ . Znotraj plasti se v območju širokem 2 cm zgodi fazni prehod, v katerem se toplotna prevodnost spremeni od  $30 \text{ W/mK}$  pri nižji temperaturi na  $10 \text{ W/mK}$  pri višji.

- Pri kolikšni temperaturi se zgodi fazni prehod?
- Kolikšna je temperatura na sredini plasti?

Specifična upornost snovi je  $10 \Omega \text{ mm}^2/\text{m}$  in se ob faznem prehodu ne spremeni.

16. Elastično žogico mase  $0.1 \text{ kg}$  spustimo z višine dveh metrov na tla, ter jo nato po odboju prestrežemo s tem, da dlan postavimo nad žogico  $10 \text{ cm}$  nad tlemi. Kolikšen je 'nihajni' čas ko se žogica odbija med tlemi in roko?
17. V raztopino uvedemo dve spojini, AB in CD, ki takoj popolnoma disociirata v ione  $A^+$ ,  $B^-$ ,  $C^+$  in  $D^-$ . Začetna koncentracija je za vse ione enaka in znaša  $1200 \text{ m}^{-3}$ . Ioni naključno trkajo med seboj in z nevtralnimi delci (vodnimi molekulami), pri čemer je relativna pogostnost trkov za vse ionske vrste enaka. Pri trkih ionov  $A^+$  in  $D^-$  takoj nastane molekula AD, ki ne disociira več. Koncentracija ionov  $A^+$  upade na polovico začetne vrednosti po  $200 \text{ ms}$ . Koliko časa je potrebno, da preostane le še četrtnina začetne koncentracije?
18. Naboj  $q = 3 \text{ As}$  je enakomerno porazdeljen po krožni zanki z radijem  $R = 0.3 \text{ m}$ . V sredino damo točkast naboj  $q_0 = 0.2 \text{ As}$  enakega predznaka z maso  $m = 0.02 \text{ kg}$ . S kolikšno frekvenco zaniha ta naboj, če ga malo izmaknemo iz ravnovesne lege v ravnini? (gravitacsko polje zanemarimo, gibanje je omejeno na ravnino zanke).
19. Majhna kovinska kroglica z maso  $10 \text{ mg}$  je obešena na koncu idealne vijačne vzmeti s koeficientom  $2 \text{ N/m}$ . Kroglica nosi naboj  $3 \cdot 10^{-6} \text{ As}$  in visi nad ozemljeno kovinsko ploščo, ki deluje na naboj s silo, s kakršno bi deloval naboj nasprotnega znaka v zrcalni legi glede na ploščo. Kolikšna je frekvenca nihanja, ki ga vzbudimo, če kroglico malo izmaknemo iz mirovne lege v navpični smeri?
20. Gorilni element v reaktorju varujemo pred pregrevanjem z vodnim hlajenjem. Kakšen je temperaturni profil znotraj gorilnega elementa ter temperatura v sredini, ce je gorilni element oblikovan kot dolg valj iz urana z radijem  $r = 10 \text{ cm}$ . Uran ima toplotno prevodnost  $\lambda = 27.5 \text{ J/msK}$  in ima zaradi radioaktivnih razpadov efektivno gostoto toplotnih izvirov  $w = 20 \text{ kW/m}^3$ . Privzemi, da ima hladilna voda konstantno temperaturo  $T_v = 5^\circ \text{C}$ .
21. Posoda ima obliko narobe obrnjenega stožca z odrezanim vrhom (glej skico). Posoda je visoka  $h_0 = 1 \text{ m}$ , radij posode na dnu ( $r$ ) pa znaša 1% radija na vrhu ( $R$ ). Na začetku poiskusa posodi polni vode izbijemo dno. Po kolikšnem času se gladina vode v posodi zniža za 10%? **Namig:** Končnega integrala se sicer ne da izračunati točno, če pa upoštevate še veliko razmerje radijev lahko z nekaj približki pridelate enostaven rezultat.

