

## Tehnična dokumentacija:

### Zajem in obdelava signalov dinamičnega elektrokemičnega potenciala celic

*Erik Margan*

Signali, ki jih oddajajo celice so zelo šibki. Njihova napetost znaša, odvisno od vrste celic in lastnosti raztopine v kateri se nahajajo, od 10 do 500  $\mu\text{V}$ , jakost toka pa pogosto znaša od 1 do 100 nA. Termični šum medelektrodne efektivne upornosti, skupaj z lastnim šumom ojačevalnika, je pri običajnih ojačevalnikih podobnega velikostnega reda, ali večji. Zato je pri načrtovanju ojačevalnikov namenjenih zajemu celičnih signalov potrebno pristopiti nekoliko drugače kot ponavadi.

#### Načrtovanje ojačevalnika

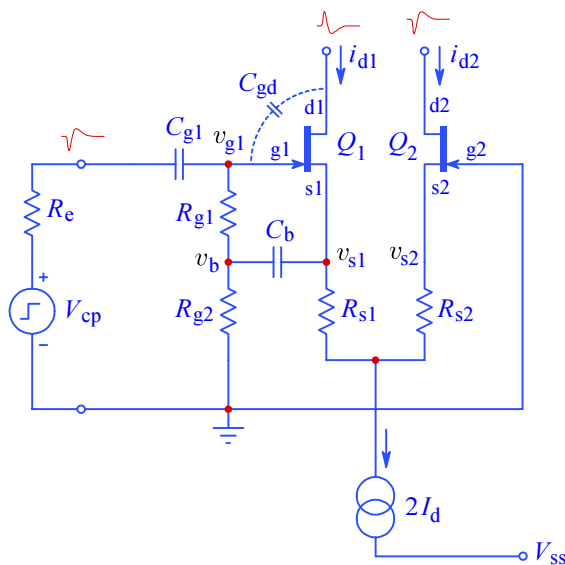
Najnižji lastni šum imajo bipolarni tranzistorji (ang., *bipolar junction transistor*, ali BJT), toda njihova vhodna upornost je razmeroma nizka, pogosto celo nižja od medelektrodne upornosti. Uporaba bipolarnih tranzistorjev bi zato pomenila pomembno izgubo jakosti signala in sorazmerno večji šum. Enospojni tranzistor z učinkom električnega polja (ang., *junction field effect transistor*, ali jFET) ima napetostno komponento šuma nekoliko večjo in tokovno komponento šuma mnogo manjšo kot bipolarni tranzistorji, poleg tega pa imajo jFETi izredno visoko vhodno upornost, okoli  $10^{12} \Omega$ . Še večjo vhodno upornost imajo tranzistorji z kovinsko oksidno izolacijsko plastjo med vrati in silicijevim kanalom (ang., *metal oxide silicon field effect transistor*, ali MOSFET), okoli  $10^{15} \Omega$ , vendar je njihov napetostni šum vsaj  $10\times$  večji. Zato so jFETi najprimernejša izbira.

Ojačiti je treba razliko potencialov med vsako posamično in skupno elektrodo, zato potrebujemo diferencialni ojačevalnik. Z odštevanjem potencialov obenem med seboj izničimo motnje, ki so skupne obema elektrodama — to so predvsem motnje, ki bi jih lahko v visoko vhodno upornost sistema inducirale druge v bližini delujoče naprave: regulator temperature bio-chipa, sistemski napajalniki in usmerniki, računalnik in njegov napajalnik, luči v prostoru in omrežna napeljava, ter morebitne druge naprave. Za naše potrebe sem izbral dvojni jFET tipa LSK389 proizvajalca Linear Integrated Systems. Prednost dveh med seboj zelo podobnih jFETov v istem ohišju je v lažji realizaciji diferencialnih ojačevalnikov, ker sta oba jFETa na enaki temperaturi, zato se tudi temperaturna odvisnost njune prenosne funkcije z odštevanjem izniči.

Specifikacije pomembnejših parametrov LSK389 so:

- tipična gostota napetostnega šuma:  $e_n = 0.9 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$
- tipična gostota tokovnega šuma:  $i_n < 1 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}$
- prenosna prevodnost kanala:  $Y_{fs} = 20 \text{ mS}$
- vhodna reverzna kapacitivnost:  $C_{iss} = 5 \text{ pF}$
- dobro ujemanje napetosti vrat:  $\Delta V_{gs} < 20 \text{ mV}$
- dobro tokovno ujemanje:  $I_{ds1}/I_{ds2} > 0.9$

Analizo prenosne funkcije diferencialnega ojačevalnika bomo naredili na osnovi poenostavljene delne sheme na [Sl.1](#):



Sl.1: Poenostavljena delna shema diferencialnega ojačevalnika.

Spremembo celičnega potenciala zaznamo kot napetostno razliko  $V_{cp}$  med elektrodo najbližjo celici in skupno (ozemljeno) elektrodo, ki se prenaša na vhod ojačevalnika prek efektivne upornosti elektrolita  $R_e$ , ki celico obdaja.

Kondenzator  $C_{g1}$  preprečuje zaznavo enosmernega (nespremenljivega) dela potenciala, omogoča pa zaznavo spremenljivega dela. Upornosti  $R_{g1}$  in  $R_{g2}$  vsilita vratom  $g1$  jFETA  $Q_1$  enak potencial kot je na vratih  $g2$  jFETA  $Q_2$ , zato je njuna statična razlika enaka nič. Posledično se tok  $2I_d$  iz konstantnega tokovnega vira razdeli na enaka dela, ki tečeta skozi enaka upora  $R_{s1}$  in  $R_{s2}$ , ter skozi kanala obeh jFETov dosežeta izhodne sponke, tako da sta izhodna tokova tudi med seboj enaka, torej  $i_{d1} = i_{d2}$ .

Denimo za hip da kondenzatorja  $C_b$  v vezju ni. Izmenična napetost na vratih  $g1$  bi v tem tem primeru znašala:

$$v_{g1} = V_{cp} \frac{\frac{1}{\frac{1}{R_{g1} + R_{g2}} + sC_{gd}}}{R_e + \frac{1}{sC_{g1}} + \frac{1}{\frac{1}{R_{g1} + R_{g2}} + sC_{gd}}} \quad (1)$$

kjer smo kondenzatorju  $C_{g1}$  pripisali impedanco  $1/sC_{g1}$  pri kompleksni frekvenci  $s$  (na splošno v Laplaceovi teoriji kompleksnih spremenljivk izražamo frekvenco  $s$  kot vsoto realnega in imaginarnega dela,  $s = \sigma + j\omega$ , pri čemer običajno vezja evalviramo le za čisto imaginarne frekvence  $s = j\omega = j2\pi f$ ). V enačbi (1) smo tudi notranji kapacitivnosti med elektrodami  $g1$  in  $d1$  jFETA  $Q_1$  pripisali impedanco  $1/sC_{gd}$ , ki nastopa efektivno vzporedno z upornostjo  $R_{g1} + R_{g2}$ .

Ker je v enačbi (1) v imenovalcu več členov kot v števcu je jasno, da bo napetost  $v_{g1}$  lahko le manjša od  $V_{cp}$ . To zmanjšanje lahko v veliki meri odpravimo če bosta člena  $R_e$  in  $1/sC_{g1}$  mnogo manjša od preostalega dela imenovalca. Vrednost kondenzatorja  $C_{g1}$  lahko izberemo razmeroma veliko, in bo njegova impedanca s frekvenco hitro padala. Vendar na  $R_e$  ne moremo dosti vplivati, ker je ta odvisen od pogojev v elektrolitu, ki obdaja celice, pa tudi od gostote celic. Zato je treba izbrati upornosti  $R_{g1} + R_{g2}$  kar se da velike.

Žal pa velika upornost prinaša s seboj tudi veliko šuma. Tu nam v pomoč stopi kondenzator  $C_b$ . Ker napetost na izvoru s1 jFETa sledi napetosti na vratih g1, oziroma  $v_{s1} \approx v_{g1}$ , pomeni da bo ob zadosti veliki vrednosti  $C_b$  tudi napetost na uporu  $R_{g1}$  vedno enaka. Če se napetost na nekem uporu ne spreminja, pomeni da skozi njega ne bo tekkel noben tok, kar posledično pomeni da smo s dodajanjem  $C_b$  dvignili vhodno upornost na efektivno zelo veliko vrednost, čeprav je dejanska vrednost  $R_{g1}$  lahko razmeroma majhna. Na ta način smo učinkovito znižali šum sistema, ne da bi nam bilo treba žrtvovali občutljivost za signal.

Poglejmo kako to zgleda v matematičnih relacijah.

Za jFET (pri razmeroma nizkih frekvencah, denimo pod 1 MHz, ko je mogoče notranjo kapacitivnost  $C_{gs}$  med g1 in s1 zanemariti) velja relacija:

$$(v_{g1} - v_{s1})Y_{fs} = \frac{v_{s1}}{2R_{s1}} \quad (2)$$

kjer smo upoštevali da sta upornosti  $R_{s1} = R_{s2}$ , zato faktor 2 v imenovalcu. Če to razrešimo za  $v_{s1}$  dobimo:

$$v_{s1} = v_{g1} \frac{1}{1 + \frac{1}{2R_{s1}Y_{fs}}} \quad (3)$$

kar pomeni da ob  $Y_{fs} = 0.02 \text{ S}$  moramo imeti  $R_{s1} = 2500 \Omega$ , če naj bo napaka med  $v_{s1}$  in  $v_{g1}$  okoli 1%. Nadalje, vhodno impedanco sistema lahko zapišemo kot:

$$Z_i = \frac{v_{g1}}{i_i} = \frac{v_{g1}}{\frac{(v_{g1} - v_b)}{R_{g1}}} \quad (4)$$

pri čemur je  $v_b$  napetost na stičišču  $R_{g1}$  in  $C_b$ . Ta napetost bo približno:

$$v_b = v_{s1} \frac{R_{g2}}{R_{g2} + \frac{1}{sC_b}} \quad (5)$$

Enačbo (5) lahko zapišemo tudi v tako obliki:

$$v_b = v_{s1} \frac{s}{s + \frac{1}{C_b R_{g2}}} \quad (6)$$

Od tod sledi, da za zadosti visoke frekvence  $s$  postane  $v_b$  praktično enaka  $v_{s1}$ . Zahtevajmo naj bo spodnja mejna frekvenca, ob kateri bo  $v_b = v_{s1}/\sqrt{2}$ , enaka 10 Hz. Če namesto  $s$  pišemo  $j2\pi f$ ; po racionalizaciji imenovalca, ugotovimo da mora veljati

$1/C_b R_{g2} \approx 2\pi \times 10$ . Drugače povedano, če za  $R_{g1}$  izberemo vrednost  $1.6 \text{ M}\Omega$ , moramo za  $C_b$  vzeti vrednost  $10 \text{ nF}$ . Potem bo pri frekvenci  $100 \text{ Hz}$  napetost  $v_b \approx v_{s1}$ . To pomeni da bo enačba (4):

$$Z_i = \frac{v_{g1}}{i_i} = \frac{v_{g1}}{\frac{(v_{g1} - v_{s1})}{R_{g1}}} = R_{g1} \frac{1}{1 - \frac{v_{s1}}{v_{g1}}} \quad (7)$$

In če po rezultatu enačbe (3) privzamemo da se  $v_{s1}$  razlikuje od  $v_{g1}$  le za  $1/100$ , sledi da je vhodna impedanca približno:

$$Z_i \approx 100 \times R_{g1} \quad (8)$$

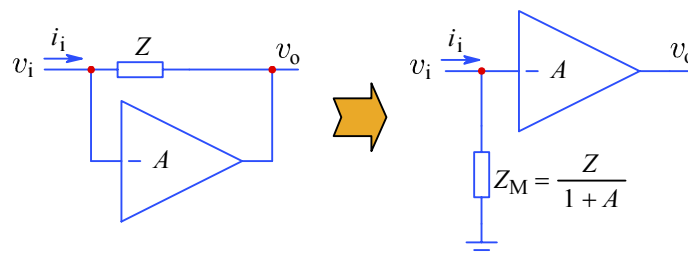
Denimo da pričakujemo največjo vrednost medelektrodne upornosti  $R_e = 100 \text{ k}\Omega$ . Če tudi za  $R_{g1}$  izberemo enako vrednost, bo efektivna vhodna impedanca enaka  $10 \text{ M}\Omega$ , med tem ko bo dejanska šumna napetost enakovredna tisti, ki jo daje vzporedna vezava uporov  $R_e$  in  $R_{g1}$ , torej največ  $50 \text{ k}\Omega$ . Spodnja mejna frekvenca ojačevalnika bo potem določena z  $Z_i$  in  $C_{g1}$ , po relaciji:

$$f_s = \frac{1}{2\pi \cdot 100 \cdot R_{g1} \cdot C_{g1}} \quad (9)$$

kar pomeni da nam za  $10 \text{ Hz}$  zadostuje že vrednost  $C_{g1} = 1.6 \text{ nF}$ .

Poglejmo še zgornjo mejno frekvenco, ki naj bo vsaj  $10 \text{ kHz}$ , kar je nekako najvišja pričakovana frekvenca v celičnih signalih. Zgornjo mejno frekvenco določa medelektrodna upornost  $R_e$  in vhodna enakovredna kapacitivnost jFETA, ki smo jo v enačbi (1) označili z  $C_{gd}$ . Denimo da smo na ponor  $d1$  jFETA  $Q_1$  vezali upornost zadosti veliko, da bo ojačenje sistema okoli  $100\times$ . Ker smo za  $R_{s1}$  že določili vrednost  $2.5 \text{ k}\Omega$ , bi morala biti vrednost hipotetičnega  $R_{d1}$  vsaj  $250 \text{ k}\Omega$ , če upoštevamo tudi enako za jFET  $Q_2$ . Zaradi tega bo naraščanje napetosti  $v_{g1}$  in posledično povečanje toka  $i_{d1}$  povzročilo  $100\times$  večji padec napetosti  $i_{d1} R_{d1}$ . Notranja kapacitivnost  $C_{iss}$ , kot je določena v specifikacijah jFETA s strani proizvajalca, bo tako nabita na  $100\times$  večjo napetost, kot če bi bila na izhodnem koncu ozemljena. To pomeni da bo nakopičila tudi  $100\times$  več naboja, oziroma tako, kot če bi bila namesto  $C_{iss}$  med vhodom in zemljo vezana  $100\times$  večja kapacitivnost. Ta pojav efektivno povečane kapacitivnosti je v literaturi znan kot Millerjev učinek že od leta 1929, ko je bil prvič opažen pri elektronskih ceveh in ustrezno analiziran.

Oprimo se pri analizi na idealiziran invertirajoči ojačevalnik na [Sl.2](#), katerega ojačenje je enako  $-A$  in ki ima v povratni zanki impedanco  $Z$ . Sprašujemo se kakšna je enakovredna vhodna impedanca sistema brez povratne zanke.



Sl.2: Millerjev učinek: ojačenje zniža efektivno impedanco povratne zanke.

Najprej določimo izhodno napetost:

$$v_o = -A v_i \quad (10)$$

Kot posledica napetostne razlike med vhomom in izhodom teče skozi impedanco  $Z$  tok  $(v_i - v_o)/Z$ , ki mora biti enak vhodnemu toku  $i_i$ :

$$i_i = \frac{v_i - v_o}{Z} \quad (11)$$

Enakovredna vhodna impedanca bo potem:

$$Z_M = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i}{\frac{v_i - (-A v_i)}{Z}} = \frac{Z}{1 + A} \quad (12)$$

Torej bo enakovredna vhodna impedanca  $(1 + A)$  krat manjša. Vendar je impedanca kondenzatorja  $Z_C = 1/sC$ , torej bo efektivna vhodna kapacitivnost:

$$\frac{1}{sC_M} = \frac{1}{sC(1 + A)} \quad (13)$$

oziroma:

$$C_M = (1 + A)C \quad (14)$$

torej je enakovredna vhodna kapacitivnost za faktor ojačenja večja od dejanske kapacitivnosti v omrežju.

V našem primeru bi imeli  $A = 100$ , in  $C_{iss} = 5$  pF, kar pomeni da bo efektivna vhodna kapacitivnost  $C_{gd} \rightarrow C_M = (1 + 100) \times 5$  pF, ali 505 pF. Skupaj z vhodno zaporedno upornostjo  $R_e = 100$  k $\Omega$  bi bila zgornja mejna frekvenca sistema:

$$f_z = \frac{1}{2\pi C_M R_e} \approx 3 \text{ kHz} \quad (14)$$

kar je vsekakor premalo. Kako to lahko preprečimo?

Najbolj preprosta rešitev je da se znebimo napetostnega ojačenja in obdržimo le tokovno ojačenje. To dosežemo s tako imenovano 'kaskodno' vezavo. Ime izvira iz časov elektronskih cevi ko so dve cevi vezali eno povrh druge, tako da je anoda spodnje bila vezana na katodo zgornje, čemur so rekli katodna kaskada, ali skrajšano kaskoda. Enako vezavo poznamo tudi pri tranzistorjih, [S1.3](#).

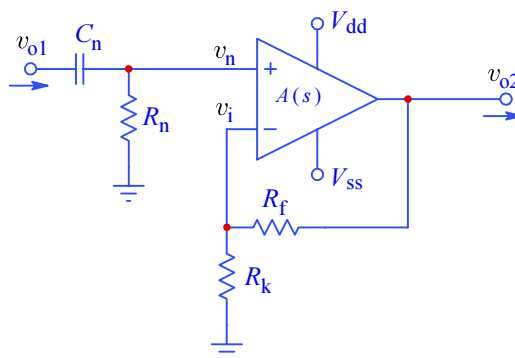
S dodajanjem bipolarnih NPN tranzistorjev  $Q_3$  in  $Q_4$  v ojačevalno verigo dosežemo dvojni učinek:

- Ponora d1 in d2 jFETov imata visoko izhodno impedanco, nekaj k $\Omega$ , med tem ko emiterja bipolarnih tranzistorjev  $Q_3$  in  $Q_4$  v vezavi s skupno bazo izkazuje zelo nizko impedanco (pri toku  $I_e = 1$  mA je enakovredna emitterska dinamična upornost enaka  $r_e = k_B T / q_e I_e$ , kjer je Boltzmannova konstanta  $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$  VAs/K, naboj elektrona  $q_e = 1.6 \times 10^{-19}$  As, in za absolutno temperaturo privzamemo  $T = 300$  K, kar približno ustreza sobni temperaturi 20°C, ali 293 K, povečani za nekaj stopinj zaradi lastnega gretja tranzistorjev; sledi da bo  $r_e = 26$   $\Omega$ ). Zaradi tako velike razlike v impedancah



Ker sta dinamični upornosti na kolektorjih  $Q_4$  in  $Q_6$  zelo veliki, bo tudi napetostno ojačenje zelo veliko, dejansko bo bolj omejeno z vhodno upornostjo naslednje ojačevalne stopnje, kot pa z lastno upornostjo. To pomeni, da bomo z ustrezno izbiro upornosti bremena v razmerju do upornosti  $R_{s1,2}$  določili ojačenje, ki potem ne bo veliko odvisno od proizvodnih toleranc tranzistorjev.

Tolerance tranzistorjev se na splošno gibljejo v zelo velikem razponu, zato je bolje če napetostno ojačenje kaskodnega ojačevalnika s tokovnim zrcalom omejimo z razmerjem upornosti na okoli  $100\times$  in preostalo ojačenje za faktor  $10\times$  realiziramo z navadnim integriranim operacijskim ojačevalnikom, ker po prvem velikem ojačenju šum naslednje stopnje ne more več zakriti šibkih signalov. To stopnjo kaže [Sl.4](#).



Sl.4: Druga ojačevalna stopnja uporablja navadni integrirani operacijski ojačevalnik.

Kot smo že pojasnili, vhodna upornost  $R_n$  določa faktor ojačenja prve stopnje, ki bo približno  $R_n/R_{s1}$ . Hkrati pa  $R_n$  skupaj s  $C_n$  določa tudi spodnjo mejno frekvenco te stopnje po podobni relaciji kot v prejšnjem primeru,  $f_s = 1/(2\pi C_n R_n)$ .  $C_n$  vsekakor potrebujemo da se znebimo velike enosmerne napetosti na kolektorjih  $Q_4$  in  $Q_6$ , ki bi sicer prekrnila tole ojačevalno stopnjo.

Ojačevalnik s frekvenčno odvisnim ojačenjem odprte zanke  $A(s)$  ojači napetostno razliko med svojim neinvertirajočim in invertirajočim vhodom,  $v_n - v_i$ :

$$v_{o2} = (v_n - v_i) A(s) \quad (15)$$

Ojačenje odprte zanke  $A(s)$  ponavadi modeliramo z frekvenčno neodvisnim faktorjem enosmernega ojačenja  $A_0$  in normirano frekvenčno odvisno funkcijo  $1/(-1 + s/\omega_0)$ , kjer z  $\omega_0$  označimo dominantni pol ojačevalnika (pol je dejansko ničla polinoma v imenovalcu prenosne funkcije, ki je posledica določenih omejitev v zgradbi ojačevalnika). Proizvajalci ojačevalnikov si prizadevajo morebitne ostale pole odriniti na zadosti visoke frekvence, kjer je ojačenje že manjše od 1, zato le ti nimajo bistvenega vpliva. Tako bo  $A(s)$ :

$$A(s) = A_0 \frac{-\omega_0}{s - \omega_0} \quad (16)$$

Čeprav potrebujemo le  $10\times$  ojačenje, ki bi ga lahko dosegli tudi brez povratne zanke čez  $R_f$ , nam povratna zanka močno izboljša linearnost in stabilnost, ter zmanjša šum te stopnje, zato se ji ne želimo odreči. Za vozlišče  $v_i$  potem velja tokovna enačba:

$$\frac{v_{o2} - v_i}{R_f} = \frac{v_i}{R_k} \quad (17)$$

Iz (17) izrazimo  $v_i$ :

$$v_i = v_{o2} \frac{R_k}{R_k + R_f} \quad (18)$$

Rešitev (18) za  $v_i$  vstavimo nazaj v enačbo (15):

$$v_{o2} = \left[ v_n - v_{o2} \frac{R_k}{R_k + R_f} \right] A_0 \frac{-\omega_0}{s - \omega_0} \quad (19)$$

ter razrešimo za  $v_{o2}/v_n$ :

$$\frac{v_{o2}}{v_n} = \frac{A_0(-\omega_0)}{s - \omega_0 \left( 1 + A_0 \frac{R_k}{R_k + R_f} \right)} \quad (20)$$

Izraz  $v_{o2}/v_n$  je normirana, frekvenčno odvisna prenosna funkcija sistema, ki jo ponavadi označujemo kot  $F(s)$ , da poudarimo frekvenčno odvisnost. Radi bi dosegli, da bo iz  $F(s)$  neposredno razvidno katere komponente vplivajo na ojačenje in katere na frekvenčne meje. Zato izraz (20) prevedimo v naslednjo obliko:

$$F(s) = \frac{R_k + R_f}{R_k} \cdot \frac{A_0 \frac{R_k}{R_k + R_f}}{\left( 1 + A_0 \frac{R_k}{R_k + R_f} \right)} \cdot \frac{-\omega_0 \left( 1 + A_0 \frac{R_k}{R_k + R_f} \right)}{s - \omega_0 \left( 1 + A_0 \frac{R_k}{R_k + R_f} \right)} \quad (21)$$

Tako smo dosegli da v prenosni funkciji imamo tri ločene faktorje, od katerih ima vsak natančno določeno funkcijo, in sicer:

- prvi faktor  $A_{CL} = (R_f + R_k)/R_k$  je razmerje med celotno upornostjo v povratni zanki in delom, ki je sorazmeren napetosti na invertirajočem vhodu  $v_i$ ; ta faktor je nominalni ojačevalni faktor zaprte zanke za nizke frekvence;
- drugi faktor je malenkostno manjši od 1 in predstavlja ojačevalno napako, ki je posledica dejstva da ojačenje odprte zanke  $A_0$  ni neskončno veliko; toda večje ko je ojačenje  $A_0$ , manjša je napaka;
- tretji faktor pa je čista frekvenčna odvisnost; faktor v oklepaju pa določa kako visoko se bo premaknil pol sistema ob sklenjeni povratni zanki, ter posledično določa novo zgornjo mejno frekvenco; manjše ko je ojačenje  $A_{CL}$  višja bo nova zgornja mejna frekvenca,  $\omega_{CL} = \omega_0(1 + A_0/A_{CL})$ ; dokler je vhodna frekvenca  $s$  manjša od  $\omega_{CL}$ , je frekvenčna odvisnost skoraj enaka 1, ko pa  $s$  preseže  $\omega_{CL}$  pa frekvenčna odvisnost pada proti nič.

Tako za nominalno ojačenje  $A_{CL} = 10$  mora biti  $R_f = 9 R_k$ . Ob ojačevalniku z odprtozanknim ojačenjem  $A_0 = 10^5$  in  $\omega_0 = 2\pi 100$  rad/s (100 Hz), bo zgornja mejna frekvenca ob sklenjeni zanki  $f_z = \omega_{CL}/2\pi = 1$  MHz. Celotna prenosna funkcija vsebuje tudi frekvenčno odvisnost na nizkih frekvencah zaradi  $C_n$  in  $R_n$ :

$$G(s) = \frac{1}{s - \frac{1}{C_n R_n}} \cdot F(s) \quad (22)$$



## Šumna analiza

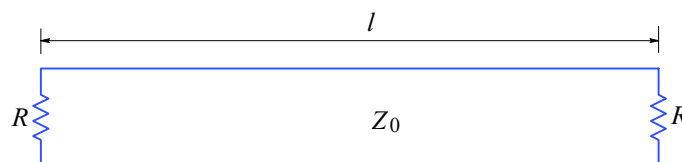
Vsak material na temperaturi večji od absolutne ničle izkazuje termoelektrični šum, ki je posledica kvantno-mehanskih naključnih nihanj prostih nosilcev naboja (elektronov) in nihanj posameznih atomov okoli svoje ravnovesne lege v strukturi materiala. Poleg termičnega šuma pri polprevodnikih opazimo še nekatere druge šumne pojave, predvsem zaradi tokovnega ‘puščanja’ p-n spojev v zaporni smeri (ang., ‘leakage current’; noben P-N spoj ni v zaporni smeri idealni izolator), pa tudi šum zaradi neenakomernosti enosmernega toka v snovi in neenakomerne porazdelitve dopantov.

Šum omejuje ločljivost sistema za majhne signale. Šum sistema je treba analizirati posebej za prispevek šuma v samem signalnem viru in posebej za ostale prispevke, kot so termični šum uporov in lastni šum ojačevalnika, ter upoštevati faktor šumnega ojačenja, ki je v nekaterih konfiguracijah vezja lahko bistveno drugačno od signalnega ojačenja.

Izpeljavo šumnih relacij začnimo s spektrom Diracove idealne impulzne funkcije  $\delta(t)$ , iz katerega sledi da je spektralna magnituda idealnega impulza enaka pri vseh frekvencah (‘beli šum’). Izhajamo iz dejstva da je vsak elektron, ki zaradi naključnih termičnih fluktuacij pridobi zadosti energije da se iztrga iz svoje orbitale in čez kratek čas spet pade v prvo prosto vrzel sosednega atoma, možno obravnavati kot kratek tokovni impulz. Energija tega tokovnega impulza je določena z nabojem elektrona in odvisna od povprečne proste poti do ponovne rekombinacije. Celotni šum zato predstavlja časovno povprečje vseh teh impulznih funkcij. Povprečna življenjska doba prostega elektrona potemtakem določa tudi zgornjo mejno frekvenco šumnega spektra, ki za silicij znaša  $\sim 10^{13}$  Hz (pri drugih polprevodniških materialih je lahko še višja, na pr., pri SiGe in GaAs je že  $\sim 10^{15}$  Hz). Spodnja mejna frekvenca pa je določena prav tako s povprečno prosto potjo elektronov v povezavi s celotnim številom prostih elektronov, ter dimenzijami vezja, in večinoma znaša okoli 0.1 Hz.

Šumni spekter se seveda nadaljuje tudi zunaj mejnih frekvenc, toda tam amplituda šuma pada. Pri prevodnikih, kjer je število prostih elektronov veliko, namesto z življenjsko dobo med generiranjem in rekombiniranjem nosilcev naboja računamo povprečno prosto pot med medsebojnimi ‘trki’ elektronov.

Na osnovi preprostega primera bomo izpeljali splošno veljavne relacije, s pomočjo katerih bomo potem ocenili razmere za naš posebni primer. Vzemimo preprost model vezja kot na [Sl.5](#), kjer sta na obeh koncih dolge transmisijske linije s karakteristično impedanco  $Z_0$  upora z upornostjo  $R$ .



**Sl.5:** Transmisijka linija s karakteristično impedanco  $Z_0$  in dolžino  $l$  je lahko model preprostega vezja na osnovi katerega izpeljemo relacije termičnega šuma.

Naj ima transmisijka linija takšno geometrijo, da je njena impedanca realna v zadosti širokem spektru, torej  $Z_0 = R_0$ . Vrednosti uporov izberimo tako, da bo linija zaključena z lastno karakteristično impedanco,  $R = R_0$ . Ob enakih impedancah na

koncih linije ni odbojev, vsa elektromagnetna energija linije se na uporih spremeni v toploto. Ob primerni izolaciji bo celotno vezje kmalu v termičnem ravnovesju.

Impulze termičnih fluktuacij razstavimo v spekter s pomočjo Fourierove pretvorbe (ta je le poseben primer bolj splošne Laplaceove pretvorbe). Dobimo množico potujočih sinusnih valovanj enake amplitude, ki jih linija prepušča skladno s svojimi karakterističnimi modusi nihanja. Ker odbojev ni, morajo periode teh nihanj ustrezati celoštevilčni dolžini tokokroga (ostale frekvence niso v fazni korelaciji same s seboj in se kmalu izničijo), zato njihove valovne dolžine ustrezajo relaciji:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad (23)$$

kjer je  $n$  celo število. Naravne frekvence nihanja, ki jih tako vezje omogoča, so torej:

$$f_n = c \frac{n}{2l} \quad (24)$$

kjer smo privzeli da v idealnem vezju valovanja potujejo po vezju s svetlobno hitrostjo,  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$  ( $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  [Vs/Am] in  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  [As/Vm] sta magnetilna in dielektrična konstanta vacuuma). Za realna vezja bi morali upoštevati lokalne vrednosti  $\mu = \mu_0 \mu_r$  in  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ , določene z lastnostmi materialov vodnika in izolatorja tako, da bo karakteristična impedanca linije  $Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ , vendar napaka, ki jo tako naredimo ni velika (za bakrene vodnike je  $\mu_r \approx 1$ , za izolacijo običajnega tiskanega vezja iz vitroplasta tipa FR4 je  $\varepsilon_r \approx 4,5$ ; tudi če je efektivna hitrost valovanj  $v \approx c/2$ , bo še vedno na voljo več kot dovolj visokofrekvenčnih komponent). Naj bo razmak med dvema sosednima frekvencama  $\delta f = c/2l$ . Število valov znotraj poljubno izbrane pasovne širine  $\Delta f$  bo potem:

$$N = \frac{2l}{c} \Delta f \quad (25)$$

V termičnem ravnovesju je energija, ki jo nosi posamezna frekvenčna komponenta, določena s Planckovim zakonom:

$$W_f = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \quad (26)$$

zato je celotna energija znotraj izbrane pasovne širine  $\Delta f$  enaka  $NW_f$ , oziroma:

$$W_T = \frac{2l hf}{c \left( e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)} \Delta f \quad (27)$$

Če energija potuje po tokokrogu s hitrostjo  $c$ , je čas obhoda enak  $\tau = 2l/c$ . Moč, ki se v danem frekvenčnem intervalu pretaka po liniji bo enaka  $P = W/\tau$ :

$$P = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \Delta f \quad (28)$$

Običajno so temperaturne in impedančne razmere v realnem vezju take, da je najvišja signalna frekvenca  $f$ , ki jo vezje lahko prenaša, mnogo manjša od  $k_B T/h$ . Ker smo potem zelo daleč od spektralnega maksimuma, lahko rečemo da je spektralna gostota moči  $dP/df$  praktično konstantna in šumni spekter ustreza 'belemu šumu',

po analogiji s belo svetlobo, kjer nastopajo vse frekvence hkrati. In ker je  $c$  velika v primerjavi z velikostjo vezja  $2l$ , imamo praktično opravka z zveznim spektrom. Šumno moč torej lahko zapišemo kot:

$$P = k_B T \Delta f \quad (29)$$

Ker smo vrednosti uporov izbrali tako da na koncih linije ni odbojev, bo moč, ki jo sprejme upor na koncu linije prešla vsa v toploto. Zaradi zahteve po toplotnem ravnovesju se mora potem enaka moč ustvariti tudi v zaključnem upor. Ta moč (29) je torej identično enaka moči termičnega šuma upora.

Zanimata nas enakovredna šumna napetost, oziroma tok. Do teh pridemo, če upor modeliramo kot idealen brezšumni upor z zaporedno vezanim napetostnim generatorjem, ki predstavlja šumno napetost (za tok je model dualen: vzporedno idealnemu uporju je tokovni vir, ki predstavlja šumni tok). Če je povprečni kvadrat napetosti na uporju  $\langle v_n^2 \rangle$ , bo moč ki jo posamezni upor preda liniji na splošno enaka:

$$P = \langle v_n^2 \rangle \frac{R_0}{(R + R_0)^2} \quad (30)$$

Maksimalni prenos moči (razmerje med močjo, ki preide v linijo, proti moči, ki jo generira upor) seveda nastopi kadar je  $R = R_0$ . Z uporabo (29) dobimo povprečni kvadrat šumne napetosti:

$$\langle v_n^2 \rangle = 4k_B T R \Delta f \quad (31)$$

V dualnem modelu šumnega generatorja bo povprečni kvadrat šumnega toka:

$$\langle i_n^2 \rangle = \frac{4k_B T \Delta f}{R} \quad (32)$$

Šum signalnega vira ni mogoče ločiti od samega signala, zato bo ta šum procesiran enako kot signal, s prenosno funkcijo sistema (matematično je ta proces konvolucijski integral šumne napetosti z impulznim odzivom ojačevalnika v časovni domeni, oziroma množenje šumnega spektra s kompleksno prenosno funkcijo v frekvenčni domeni).

Podobno je s termičnim šumom uporov, (31) ali (32), ki ga tudi ni mogoče ločiti od zelenega signala, ker je ojačenje ojačevalnika definirano z razmerjem upornosti v tokovni zanki, oziroma v povratni zanki, in ojačenje določeno z upori efektivno množi vhodni signal.

V nasprotju s šumom signalnega vira in šumom uporov na vходу ali v povratni zanki, je lastni šum ojačevalnika v nekaterih konfiguracijah izpostavljen dodatnemu šumnemu ojačenju, ki se bistveno razlikuje od signalnega ojačenja, ker se v teh primerih vir šuma nahaja znotraj povratne zanke sistema.

Poglejmo velikosti posameznih komponent šuma.

Za upor iz (31) sledi efektivna vrednost spektralne gostote šumne napetosti:

$$v_N(R) = \sqrt{4k_B T R \Delta f} \quad (33)$$

Tukaj je  $k_B$  Boltzmannova konstanta,  $T$  je absolutna temperatura,  $R$  je upornost in  $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$  predstavlja frekvenčni pas sistema. Pogosto ojačujemo

od enosmernega toka ( $f_{\min} = 0$ ) navzgor, takrat je pasovna širina  $\Delta f$  kar enaka zgornji mejni frekvenci,  $\Delta f = f_{\max} = f_h$ .

Poglejmo številčne vrednosti šumnih napetosti za naš primer. Efektivna šumna upornost na vhodu jFETA  $Q_1$  je vzporedna kombinacija medelektrodne upornosti  $R_e$  in vhodne upornosti  $R_{g1}$ . Če je velikost obeh  $100 \text{ k}\Omega$ , je vzporedna vrednost polovična,  $50 \text{ k}\Omega$ . Pasovna širina sistema je približno enaka  $10 \text{ kHz}$  (ker je spodnja mejna frekvenca reda velikosti  $100 \text{ Hz}$ ). Upoštevati je treba še temperaturo, ki zaradi celic mora biti  $37^\circ\text{C}$ , oziroma  $310 \text{ K}$ , zato bo napetostna komponenta šuma enaka:

$$\begin{aligned} v_{\text{NF}} &= \sqrt{4 k_B T R f_h} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} [\text{VAs/K}] \cdot 310 [\text{K}] \cdot 5 \times 10^4 [\text{V/A}] \cdot 10^4 [\text{s}^{-1}]} \\ &= 2.93 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (34)$$

Šum ojačevalnika ima dve med seboj neodvisni komponenti: tokovno, ki je posledica vhodnega toka tranzistorjev, in napetostno, ki je posledica napetostne razlike  $\Delta v_{\text{GS}}$  vhodnega diferencialnega para tranzistorjev. Pri ojačevalnikih, ki imajo na vhodu jFETe, je zaradi zelo visoke vhodne impedance tokovna komponenta šuma zelo majhna, okoli  $10^{-14} \text{ A}/\sqrt{\text{Hz}}$ ; če upoštevamo pasovno širino  $f_z = 10 \text{ kHz}$ , moramo šumno tokovno gostoto  $i_n$  množiti z efektivno šumno upornostjo  $R$ , ter s  $\sqrt{f_z}$ , da dobimo vhodnemu šumnemu toku enakovredno šumno napetost:

$$\begin{aligned} v_{\text{NI}} &= R i_n \sqrt{f_z} = 5 \times 10^4 \left[ \frac{\text{V}}{\text{A}} \right] \cdot 10^{-14} \left[ \frac{\text{A}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \cdot 10^2 \left[ \sqrt{\text{Hz}} \right] \\ &= 0.05 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (35)$$

Ta komponenta šuma je mnogo manjša od  $v_{\text{NF}}$  in jo lahko zanemarimo.

Za jFETe proizvajalec podaja vrednost napetostne spektralne gostote šuma  $e_n = 5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ , zato bo šumna napetost v celotnem frekvenčnem pasu:

$$\begin{aligned} v_{\text{NA}} &= e_n \sqrt{f_h} = 5 \cdot 10^{-9} \left[ \frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \cdot 10^2 \left[ \sqrt{\text{Hz}} \right] \\ &= 0.5 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (36)$$

Tudi ta napetost je dosti manjša od termičnega šuma uporov.

Poleg belega šuma nastopata pri ojačevalnikih še '1/f' šum v območju pod  $100 \text{ Hz}$ , vendar je naša spodnja mejna frekvenca istega velikostnega reda, zato tudi ta šum lahko zanemarimo.

Če želimo biti natančni, ali pa če imamo primer ko sta dve ali več šumnih komponent med seboj podobnega velikostnega reda, potem za oceno celotnega šuma ne moremo posameznih komponent preprosto sešteti. Ker gre pri šumu za naključne količine, in posamezni šumni viri niso med seboj fazno korelirani, ne smemo seštevati napetosti, pač pa efektivne moči; moč pa je sorazmerna kvadratu napetosti. Zato

enakovredno efektivno napetost dobimo če seštejemo kvadrate napetosti vseh prispevkov in rezultat korenimo:

$$v_N = \sqrt{\sum_{k=1}^n (v_{Nk})^2} = \sqrt{v_{NF}^2 + v_{NI}^2 + v_{NA}^2} \approx 2.97 \mu\text{V}_{\text{rms}} \quad (37)$$

Akronim ‘rms’ pomeni ‘root-mean-square’, oziroma ‘koren srednjega kvadrata’, ali preprosto efektivna vrednost šumne napetosti. Kadar pa opazujemo šum na osciloskopu ali po AD-pretvorbi na računalniku, ne vidimo efektivne vrednosti, pač pa trenutne vrednosti. Vršne trenutne vrednosti od najbolj negativnega do najbolj pozitivnega vrha (ang., *peak-to-peak*, pp) so za beli šum približno  $8\times$  večje od efektivne vrednosti. To pomeni da bo spodnja meja detekcije našega ojačevalnika okoli  $24 \mu\text{V}_{\text{pp}}$ . Iz tega bo mogoče z ustreznimi, a ne prezapletenimi računalniškimi algoritmi, ki še dovoljujejo obdelavo v realnem času, prepoznati signale ki so do  $2\times$  manjši, kar pomeni da smo zadosti blizu pričakovani spodnji meji detekcije  $10 \mu\text{V}$ .

## Obdelava signalov

Signal, ojačen za skupni faktor  $1000\times$ , je že zadosti velik ( $10\text{--}500 \text{ mV}$ ), da bi ga lahko vzorčili z analogno-digitalnim pretvornikom (ang., *analogue-to-digital converter*, ADC), ter prenesli v računalnik, kjer bi ga nato z različnimi numeričnimi metodami zgladili. Mnogi sodobni komercialno dostopni ADCji imajo že 16-bitno ločljivost in amplitudno območje  $\pm 10 \text{ V}$ , kar pomeni da kvantizacijo signalov opravimo v korakih po  $20/2^{16} = 0.3 \text{ mV}$ .

Vendar si pri bio-chipu prizadevamo vzorčiti kar se da veliko število kanalov hkrati, vsaj 16, najraje pa vseh 64, kot je ponavadi število elektrod, pa še to po možnosti neprenehoma v realnem času. Za tako delo bi potrebovali izredno zmogljiv računalnik, ki bi z zapletenimi algoritmi signal zgladil in ustrezno interpretiral celične odzive, se nanje odzival in generaliral stimulacijske pulze, prikazoval rezultate na zaslonu, in morda še krmilil druge potrebne naprave v eksperimentu. Ozko grlo poleg tega predstavlja tudi komunikacijski kanal, ki mora biti zadosti hiter da prenaša računalniške ukaze v sistem in vzorčene podatke iz sistema v računalniški spomin.

Računalniku veliko pomagamo če signalu znižamo šum že v sistemu samem. To najpreprosteje naredimo če pasovno širino omejimo na le tiste frekvence znotraj katerih pričakujemo celične signale.

Pasovno širino sistema omejimo s *filtri*. Te si lahko predstavljamo kot frekvenčna sita, ki prepuščajo le tiste frekvence, katerih valovna dolžina je krajša od karakteristične frekvence filtra (vrzeli v situ). To dosežemo z uporabo frekvenčno odvisnih pasivnih komponent, kot so kondenzatorji in tuljave. Upori ne izkazujejo frekvenčne odvisnosti (vsaj ne znotraj frekvenčnega pasu ki nas zanima). Z ustrezno kombinacijo frekvenčno odvisnih in neodvisnih komponent lahko ustvarimo želena razmerja impedanc pri različnih frekvencah, ter posledično prenos, oziroma omejevanje prenosa neželenih frekvenc.

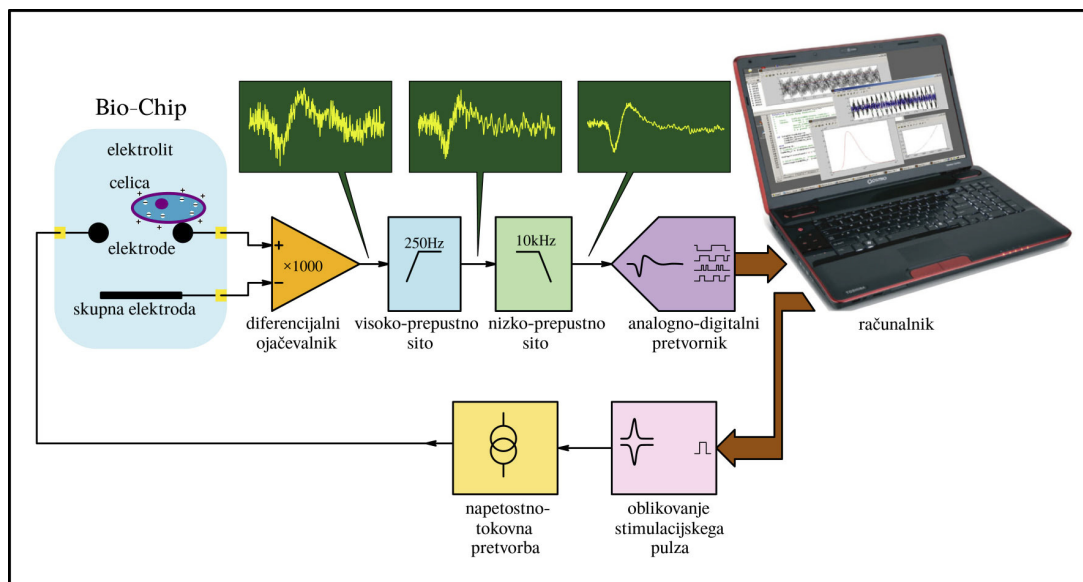
Kondenzator se obnaša kot razklenjen tokokrog pri nizkih frekvencah, zato le teh ne prevaja. Če kondenzator vežemo zaporedno z vzporedno vezano upornostjo dosežemo, da se signal deli v razmerju njunih upornosti na različnih frekvencah, torej bomo višje frekvence spustili skozi, nizke pa ustavili. Če pa vezje obrnemo dosežemo

obraten učinek, da gredo nizke frekvence skozi, visoke pa ne. Z ustrežno izbiro vrednosti posameznih komponent dosežemo, da naše vezje prepušča le natanko določen frekvenčni pas.

Tuljave so pri nizkih frekvencah velike in tudi občutljive za magnetna polja, zato se njihovi uporabi raje izognemo. Vendar obstaja možnost, da z uporabo aktivnih komponent (tranzistorjev, ali v ojačevalnik vezano skupino tranzistorjev) obrnemo obnašanje kondenzatorjev in tako simuliramo induktivnost tuljave. V takem primeru govorimo o aktivnih filtrih.

Kvaliteta filtrov nam govori o njegovi uglašenosti in gladkosti (dušenju neenakomernosti) v prepustnem delu frekvenčnega območja, od stopnje filtra (številca uporov in kondenzatorjev) pa je odvisna ostrina rezanja v neprepustnem delu frekvenčnega območja, ki se kaže v večjem ali manjšem naklonu frekvenčne odvisnosti.

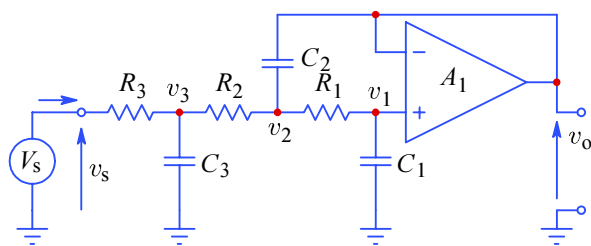
Na [SL.6](#) je blokovni načrt celotnega sistema za zajem celičnih signalov, kjer je ponazorjena pomembna vloga filtrov pri izločanju neželenih frekvenc.



**SL.6:** Blok shema sistema za zajem celičnih signalov. Spremembe električnega potenciala na celični membrani (in posledično toka skozi elektrolit v katerega so potopljene celice) zajame najbližja elektroda. Razliko napetosti med to in referenčno skupno elektrodo ojači ojačevalnik za približno  $1000\times$  in poveča signal na velikost v območju od 10 do 500 mV, kar že zadošča da signal pretvorimo v digitalno (številčno) obliko. Vendar se prej s pomočjo ustreznih filtrov znebimo odvečnega šuma na prenizkih in previsokih frekvencah. Digitalni signal prenesemo v računalnik prek USB vrat, kjer ga nato dodatno obdelujemo in analiziramo. Računalnik lahko celice tudi vzbudi s podobnimi pulzi, s katerimi posnema celični odziv in doseže, da se celica odzove enako, kot če bi jo vzbujala sosedna celica.

V nadaljevanju bom prikazal razmeroma preprosto metodo analize filtrov in njihovo uglaševanje in prilagajanje zahtevanim nalogam. Obstaja mnogo različnih filtrskih topologij, ki se med seboj razlikujejo predvsem po občutljivosti realizirane prenosne funkcije na tolerančne variacije uporabljenih komponent, pa tudi po boljšem ali slabšem preprečevanju nekaterih sekundarnih učinkov. V te podrobnosti se ne bomo spuščali, ker je naše frekvenčno območje razmeroma nezahtevno. Izbrali bomo preprosto in za realizacijo nezahtevno 3-polno Sallen-Key topologijo (poimenovano

po avtorjih), [SL.7](#), predvsem zato ker omogoča tudi preprosto realizacijo tako nizko-prepustnih kot visoko-prepustnih filtrov z enotnim ojačenjem in, razen osnovnih komponent, ter napajalne napetosti za ojačevalnik, ne potrebuje nič drugega.



**SL.7:** Tri-polna Sallen-Key konfiguracija nizkoprepustnega filtra. Vsak  $RC$  člen prispeva po en pol, ojačevalnik pa skrbi za medsebojno razbremenitev posameznih členov, ter ločevanje od morebitne nizke impedance bremena na izhodu.

V naslednji analizi bomo privzeli da ojačevalnik ima mnogo boljše specifikacije kot jih zahtevamo, kar glede na ozko in nezahtevno frekvenčno območje ni težko doseči, ter ga obravnavali kot idealni ojačevalnik z neskončno velikim ojačenjem in dovolj široko pasovno širino. Napaka, ki jo s tem naredimo je zanemarljiva. Ojačevalnik ima kratko sklenjeno povratno zanko, zato je napetost na invertirajočem vhodu identično enaka izhodni napetosti. In če je ojačenje  $A_1$  zelo veliko bo tudi razlika med vhodno in izhodno napetostjo zelo majhna. Ob taki idealni aproksimaciji lahko zapišemo:

$$v_o = v_1 \quad (38)$$

Vsota tokov v vozlišču  $v_1$  bo potem:

$$\frac{v_2 - v_1}{R_1} = \frac{v_1}{sC_1} \quad (39)$$

iz česar sledi relacija za  $v_2$ :

$$v_2 = v_o(sC_1R_1 + 1) \quad (40)$$

Vsota tokov za vozlišče  $v_2$  je:

$$\frac{v_3 - v_2}{R_2} = \frac{v_2 - v_o}{1} + \frac{v_2 - v_1}{R_1} \quad (41)$$

od koder lahko izvlečemo relacijo za  $v_3$ :

$$v_3 = v_o \left[ s^2 C_1 R_1 C_2 R_2 + s C_1 R_1 \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) + 1 \right] \quad (42)$$

Vsota tokov v vozlišču  $v_3$  pa je:

$$\frac{v_s - v_3}{R_3} = \frac{v_3}{1} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} \quad (43)$$

in iz tega izraza lahko izločimo vhodni signal  $v_s$ :

$$v_s = v_3 \left( sC_3R_3 + 1 + \frac{R_3}{R_2} \right) - v_2 \frac{R_3}{R_2} \quad (44)$$

Z substitucijo ustreznih rezultatov za  $v_2$  in  $v_3$  le te izločimo iz enačbe:

$$v_s = v_0 \left( sC_3R_3 + 1 + \frac{R_3}{R_2} \right) \left[ s^2C_1R_1C_2R_2 + sC_1R_1 \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) + 1 \right] - v_0 \frac{R_3}{R_2} (sC_1R_1 + 1) \quad (45)$$

ki jo nato uredimo po potencah frekvence  $s$ :

$$v_s = v_0 \left\{ s^3C_1R_1C_2R_2C_3R_3 + s^2 \left[ C_1R_1C_2R_2 \left( 1 + \frac{R_3}{R_2} \right) + C_1R_1C_3R_3 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \right] + s \left[ C_1R_1 \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1} \right) + C_3R_3 \right] + 1 \right\} \quad (46)$$

Prenosno funkcijo dobimo če delimo izhodno napetost z izhodno,  $v_o/v_s$ , ki jo zapišemo v kanonični obliki, da bo koeficient pri najvišji potenci frekvence  $s$  enak 1:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{K_0}{s^3 + s^2K_2 + sK_1 + K_0} \quad (47)$$

Posamični koeficienti  $K_i$  so potem taki:

$$K_2 = \frac{1}{C_3R_3} \left( 1 + \frac{R_3}{R_2} \right) + \frac{1}{C_2R_2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad (48)$$

$$K_1 = \frac{1}{C_2R_2C_3R_3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_3}{R_1} \right) + \frac{1}{C_1R_1C_2R_2} \quad (49)$$

$$K_0 = \frac{1}{C_1R_1C_2R_2C_3R_3} \quad (50)$$

Te izraze, in tudi obnašanje vezja, je mogoče optimizirati tako da minimiziramo razmerja vrednosti komponent če postavimo zahtevo da naj bodo vse upornosti med seboj enake,  $R_1 = R_2 = R_3 = R$ . Če temu zadostimo, lahko zapišemo končno obliko prenosne funkcije v naslednji obliki:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{1}{s^3 + s^2 \frac{2}{R} \left( \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) + s \frac{1}{R^2} \left( \frac{3}{C_2C_3} + \frac{1}{C_1C_2} \right) + \frac{1}{R^3C_1C_2C_3}} \quad (51)$$

Primerjajmo ta izraz z splošnim normiranim izrazom za prenosno funkcijo tretje stopnje, v kateri nastopajo poli funkcije (poli funkcije so ničle karakterističnega polinoma v imenovalcu):



$$\begin{aligned}
 F(s) &= A_0 \frac{(-s_1)(-s_2)(-s_3)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)} \\
 &= A_0 \frac{-s_1 s_2 s_3}{s^2 + s^2(-s_1 - s_2 - s_3) + s(s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3) - s_1 s_2 s_3}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Na osnovi primerjave je jasno da je ojačenje sistema:

$$A_0 = 1 \tag{53}$$

Poleg tega lahko s primerjavo koeficientov lahko zapišemo sistem enačb, na osnovi katerih lahko izračunamo potrebne vrednosti kondenzatorjev:

$$-s_1 - s_2 - s_3 = \frac{2}{R} \left( \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_2} \right) \tag{54}$$

$$s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{3}{C_2 C_3} + \frac{1}{C_1 C_2} \right) \tag{55}$$

$$-s_1 s_2 s_3 = \frac{1}{R^3 C_1 C_2 C_3} \tag{56}$$

Manjšo težavo predstavlja dejstvo da imamo štiri neznane komponente,  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ , in  $C_3$ , a le tri enačbe. Pomagamo si s dejstvom da vendarle iščemo vrednosti treh časovnih konstant v obliki produktov  $RC_1$ ,  $RC_2$ , in  $RC_3$ , kjer lahko vrednost posameznega produkta po volji prilagajamo za kakršno koli vrednost  $RC$ . Če torej  $C$  povečamo, moramo  $R$  sorazmerno zmanjšati, da ostane vrednost produkta nespremenjena. Zato lahko normiramo vrednost  $R = 1$  in rešimo sistem enačb za prav tako normirane vrednosti kondenzatorjev. S tem bo tudi mejna frekvenca sistema normirana na vrednost  $\omega_0 = 1$  rad/s. Po končanem izračunu bo treba dobljene vrednosti le denormirati za dejansko vrednost zahtevane mejne frekvence. Sistem enačb bomo lažje reševali, če vpeljemo naslednje substitucije:

$$x = -s_1 - s_2 - s_3 \tag{57}$$

$$y = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 \tag{58}$$

$$z = -s_1 s_2 s_3 \tag{59}$$

Najprej iz (56) in (59) izrazimo  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{1}{z C_2 C_1} \tag{60}$$

To vnesemo v (54) oziroma (57):

$$x = 2 \left( z C_2 C_1 + \frac{1}{C_2} \right) \tag{61}$$

odkoder lahko izrazimo  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{\frac{x}{2} - \frac{1}{C_2}}{z C_2} = \frac{C_2 x - 2}{2C_2^2 z} \quad (62)$$

S tem se vrnemo še v (55) oziroma (58):

$$y = 3C_1 z + \frac{2C_2 z}{C_2 x - 2} \quad (63)$$

in zamenjamo še  $C_1$ :

$$y = 3 \frac{C_2 x - 2}{2C_2^2 z} z + \frac{2C_2 z}{C_2 x - 2} \quad (64)$$

kar potem damo na skupni imenovalec:

$$y = \frac{3C_2^2 x^2 - 12C_2 x + 4(C_2^3 z + 3)}{2C_2^2 z} \quad (65)$$

in dobimo enačbo tretje stopnje za  $C_2$ :

$$C_2^3 - C_2^2 \frac{(3x^2 + 4y)}{2(xy - 2z)} + C_2 \frac{6x}{xy - 2z} - \frac{6}{xy - 2z} = 0 \quad (66)$$

Za krajšo pisavo vpeljimo še te substitucije:

$$p = - \frac{(3x^2 + 4y)}{2(xy - 2z)} \quad (67)$$

$$q = \frac{6x}{xy - 2z} \quad (68)$$

$$r = - \frac{6}{xy - 2z} \quad (69)$$

in dobimo navidez preprost izraz:

$$C_2^3 + C_2^2 p + C_2 q + r = 0 \quad (70)$$

Splošna rešitev enačbe tretje stopnje za  $C_2$  ima tri korene, eden je čisto realen, dva pa tvorita kompleksno konjugiran par. Seveda nas zanima le realna rešitev:

$$C_2 = - \frac{2}{3} \sqrt{p^2 - 3q} \sin \left\{ \frac{1}{3} \arctan \left[ \frac{(2p^3 - 9pq + 27r) \sqrt{-1}}{3\sqrt{3} \sqrt{4rp^3 - p^2q^2 - 18pqr + 4q^3 + 27r^2}} \right] \right\} - \frac{p}{3} \quad (71)$$

To enačbo naprej rešimo numerično, tako da za pole  $s_{1,2,3}$  vnesemo zahtevana kompleksna števila (normirana na enotno pasovno širino sistema), ki jih bodisi izračunamo po danih obrazcih, bodisi prepisemo iz tabel, ki jih najdemo v literaturi, in dobimo vrednost za  $C_2$ . Ker poli vedno nastopajo bodisi kot čisto realni ali v kompleksno konjugiranih parih, in ker so imaginarni deli v parih vedno nasprotnega predznaka, je rešitev vedno realna. Pri sistemu tretje stopnje bomo tako imeli en pol čisto realen, ter dva ki tvorita kompleksno konjugiran par.

Iz znanega  $C_2$  in polov lahko potem dobimo še vrednost  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{C_2(s_1 + s_2 + s_3) - 2}{2C_2^2 s_1 s_2 s_3} \quad (72)$$

in končno še  $C_3$ :

$$C_3 = \frac{1}{C_2 C_1 s_1 s_2 s_3} \quad (73)$$

Nazadnje iz zahtevane zgornje mejne frekvence  $\omega_0 = \sqrt[3]{-s_1 s_2 s_3}$  in ene poljubno izbrane vrednosti za enega od kondenzatorjev (ostala dva sta potem že določena v ustreznem razmerju) lahko izračunamo potrebno vrednost za tri enake upore  $R$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{R^3 C_1 C_2 C_3}} \quad (74)$$

$$R = \frac{1}{\omega_0 \sqrt[3]{C_1 C_2 C_3}} \quad (75)$$

S tem so podane vse potrebne relacije za določanje vrednosti posameznih komponent filtra za zahtevano zgornjo mejno frekvenco.

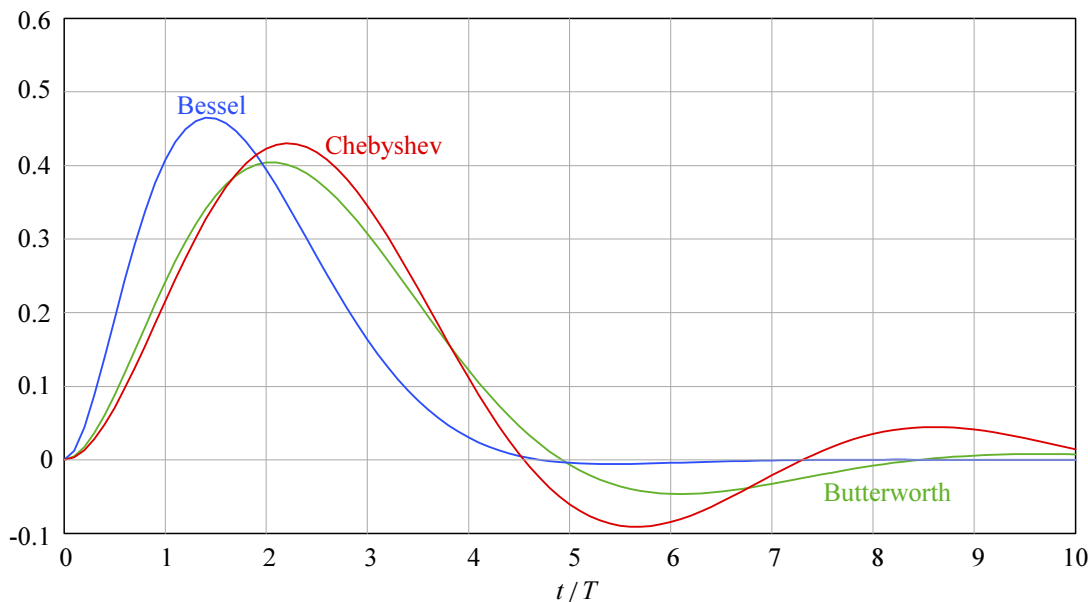
Tisto kar še ni določeno so poli filtra, ki določajo obliko frekvenčnega poteka v okolici mejne frekvence. Kako vemo kje morajo ležati poli v kompleksni ravnini, če naj ima sistemska prenosna funkcija točno določeno obliko?

Prve filterske ojačevalnike je naredil Stephen Butterworth, ki je leta 1930 o tem objavil članek in v njem izpeljal sistem polov, ki danes nosi njegovo ime. Vendar se je hitro izkazalo, da so taki sistemi sicer zelo primerni za neprekinjeno sinusno valovanje, niso pa primerni za pulzne pojave. Ko so iskali drugačne načine optimizacije odziva sistemov so ugotovili da so dejansko večino dela že opravili nekateri matematiki v času, ko so si delovno mizo osvetljevali s svečami, med tem ko so besedo 'elektrika' uporabljali predvsem v zvezi z nenavadno lastnostjo nekaterih snovi da, kadar jih močno natremo, privlačijo k sebi majhne koščke papirja...

Predaleč bi nas odpeljalo če bi tukaj podali celotno teorijo optimizacije frekvenčnega poteka ali časovnega odziva filtrov. Naj zadošča dejstvo da poznamo več različnih družin filtrov, v odvisnosti od izbranih optimizacijskih parametrov, ki so v literaturi znane pod imeni avtorjev samih matematičnih optimizacijskih postopkov. Družine, katerih prenosne funkcije vsebujejo le pole (brez ničel), imajo naslednje lastnosti:

- Butterworthova družina ima maksimalno raven frekvenčni potek v prepustnem pasu skoraj do same mejne frekvence;
- Besselova družina ima maksimalno ravno časovno zakasnitev za vse frekvence v prepustnem pasu, ter posledično najbolje ohranja obliko pulznih signalov v časovni domeni;
- Čebiševljeva družina ima najbolj strmo koleno frekvenčne karakteristike ob mejni frekvenci, strmina pa je sorazmerna določenemu omejenemu periodičnemu odstopanju v prepustnem pasu.

Za bolj nazorno primerjavo si oglejmo [Sl.8](#), kjer so narisani impulzni odzivi zgoraj navedenih treh družin za sisteme tretje stopnje, normirane na enako zgornjo mejno frekvenco, oziroma z njo povezano karakteristično časovno konstanto  $T = 1/\omega_0$ .



**Sl.8:** Primerjava impulznih odzivov sistemov tretje stopnje, normiranih na enako mejno frekvenco. Besselov sistem se najhitreje vrne v ravnovesje, med tem ko vsi drugi sistemi dalj časa nihajo. To je pomembno pri ponavljajočih se pulzih, ker se pri pogostem ponavljanju nihanje zaradi prejšnjega impulza vpliva na amplitudo novega pulza.

Sicer poznamo še druge družine z ničlami in poli v prenosni funkciji, vendar so vse optimizirane za frekvenčni prostor, med tem ko se v časovnem prostoru ne obnesejo najbolje. Tako nam ostale le ena izbira: Besselova družina filtrov.

Kot rečeno, so Besselovi sistemi zasnovani na optimizaciji časovne zakasnitve. Časovno zakasnitev  $T$  v kompleksnem prostoru lahko predstavimo z eksponentno funkcijo:

$$F(s) = e^{-sT} \quad (76)$$

Ta izraz normiramo na enotno zakasnitev,  $T = 1$ , nakar  $e^{-s}$  aproksimiramo s polinomom stopnje  $n$ . Toda če to naredimo z uporabo Taylorjeve vrste, polinomi za  $n > 2$  ne bodo Hurwitzovega tipa (predznaki polinomskih koeficientov ne bodo vsi enaki) in jih zato ne bo mogoče realizirati v praksi. Če pa funkcijo  $e^{-s}$  izrazimo s hiperboličnimi funkcijami:

$$e^{-s} = \frac{1}{\sinh s + \cosh s} = \frac{1}{\frac{\sinh s}{1 + \frac{\cosh s}{\sinh s}}} \quad (77)$$

bo Taylorjeva vrsta za hiperbolični sinus imela lihe potence  $s$ , vrsta za hiperbolični cosinus pa bo imela sode potence  $s$ ; ulomek teh polinomov, razrešen z uporabo verižnih ulomkov, bo polinom Hurwitzovega tipa. Če verižne ulomke okrnimo pri  $n$ -tem členu, dobimo Besselov sistem stopnje  $n$ :

$$F(s) = \frac{c_0}{B_n(s)} \quad (78)$$

Tukaj je  $B_n(s)$  Besselov karakteristični polinom stopnje  $n$ :

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n c_k s^k \quad (79)$$

Vsakemu  $B_n(s)$ , glede na stopnjo  $n$ , ustrezajo na splošno naslednje relacije:

$$\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= s + 1 \\ B_n(s) &= (2n - 1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \end{aligned} \quad (80)$$

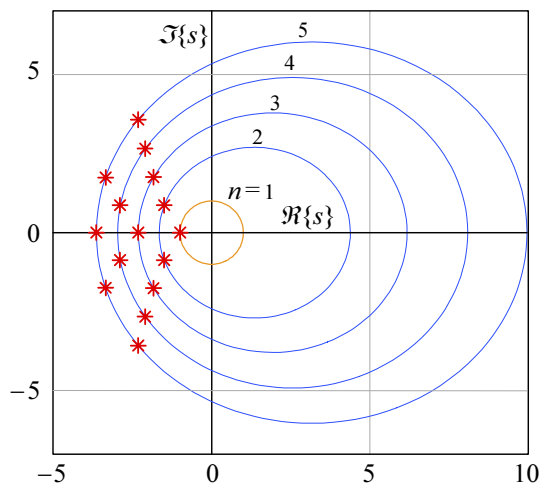
Obrazec za določanje koeficientov  $c_k$  za splošno obliko polinoma stopnje  $n$  je potem:

$$c_k = \frac{(2n - k)!}{2^{(n-k)} k! (n - k)!} \Big|_{k=0, 1, 2, \dots, n-1, n} \quad (81)$$

Iz koeficientov  $c_k$  lahko izračunamo pole po standardnih obrazcih za reševanje polinomov, ki jih najdemo v vsakem matematičnem priročniku; vrednosti polov za  $n = 1 \dots 5$  so podane v [Tabeli 1](#). Poli so na splošno kompleksni,  $s_i = \sigma_i \pm j\omega_i$ . Žal analitične rešitve obstajajo le za  $n \leq 4$ , kot je to dokazal že E. Galois leta 1830. Za  $n \geq 5$  pa moramo uporabiti numerične metode. Pri ojačevalnikih imamo pretežno opravka s sistemi druge ali tretje stopnje, in le izjemoma četrte ali višje. Vendar so danes v obdobju računalnikov tudi numerične metode splošno dostopne in je njihovo reševanje rutinsko opravilo.

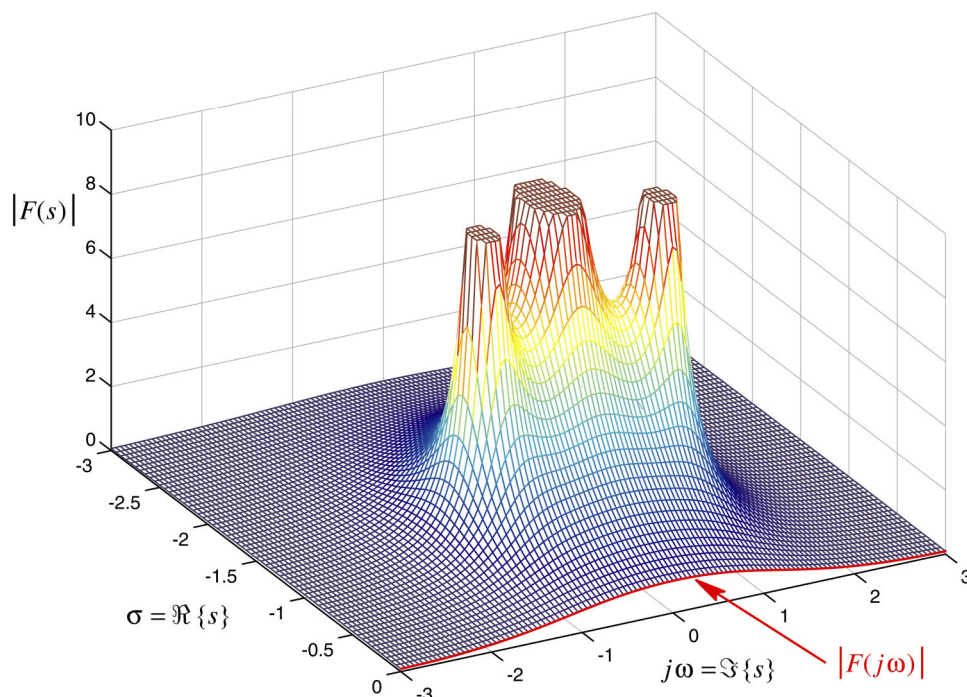
**Tabela 1: Besselovi poli**

Stopnja $n$	$\sigma$ [rad/s]	$\omega$ [rad/s]
1	- 1.0000	0.0000
2	- 1.5000	$\pm 0.8660$
3	- 2.3222 - 1.8389	0.0000 $\pm 1.7544$
4	- 2.8962 - 2.1038	$\pm 0.8672$ $\pm 2.6574$
5	- 3.6467 - 3.3520 - 2.3247	0.0000 $\pm 1.7427$ $\pm 3.7510$



SI.9: Lega Besselovih polov za prvih pet polinomskih stopenj  $n$ .

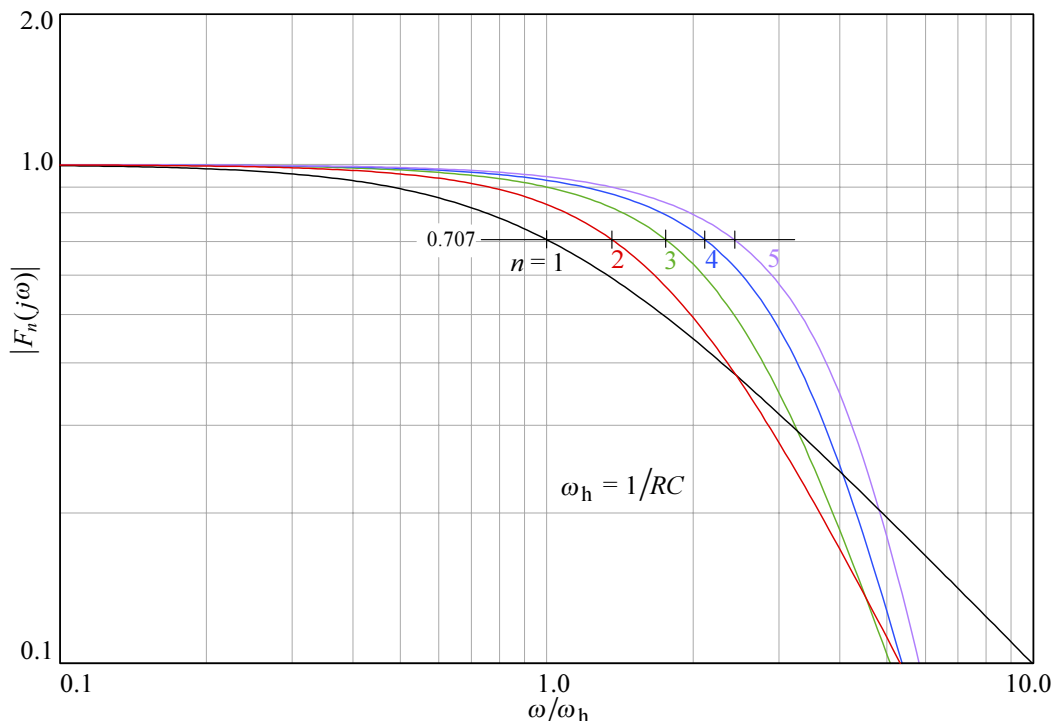
Besselovi poli ležijo na levi strani kompleksne ravnine na družini elips, katerih bližji fokus sovpada z koordinatnim izhodiščem, drugi fokus pa leži na pozitivnem delu realne osi. Lego polov v kompleksni ravnini kaže [SI.9](#). Sistemi s tako izračunanimi poli predstavljajo družino z enotno časovno (ovojnično) zakasnitvijo. Na [SI.10](#) pa skušam prikazati povezavo med lego polov v kompleksni ravnini in obliko prenosne funkcije, zlasti pomembna je oblika nad imaginarno osjo, ki predstavlja frekvenčno odvisnost.



SI.10: Povezava med lego polov v kompleksni ravnini in obliko absolutne vrednosti prenosne funkcije nad kompleksno ravnino, kjer vrednost funkcije nad samimi poli gre v neskončnost. Za prakso je najbolj pomembna zveza med lego polov in obliko funkcije nad samo imaginarno osjo  $j\omega$ , torej  $|F(j\omega)|$  (ponavadi prikazujemo le pozitivni del imaginarne osi v logaritmičnem merilu, tako kot na naslednji sliki).

Za razliko od Butterworthovih polov, kjer je pasovna širina sistema  $n$ -te stopnje enaka  $n$ -temu korenu iz produkta vseh  $n$  polov, in je za vse stopnje enaka, se

pri Besselovih polih pasovna širina povečuje s stopnjo  $n$ . Povečanje pasovne širine  $\omega_H$  sistema stopnje  $n$  v primerjavi s pasovno širino  $\omega_h$  sistema prve stopnje ( $n = 1$ ) izrazimo s faktorjem  $\eta_b = \omega_H/\omega_h$ . [SL.11](#) kaže frekvenčne odzive in mejne frekvence za sisteme od stopnje 1 do 5.



**SL.11:** Magnituda frekvenčnega odziva Besselovih sistemov za prvih pet polinomskih stopenj. Z večanjem stopnje polinoma zgornja mejna frekvenca narašča, ker smo za izračun polov izhajali iz enotne ovojnične zakasnitve.

Vrednosti  $\eta_b$  za  $n = 1 \dots 5$  so navedene v [Tabeli 2](#):

**Tabela 2:** Relativna pasovna širina Besselovih sistemov

$n$	1	2	3	4	5
$\eta_b$	1.00	1.36	1.75	2.12	2.42

Analitičnega izraza za pasovno širino sistema z Besselovimi poli ni! Rezultat dobimo le numerično; mejno frekvenco posamičnega sistema pa denormiramo tako, da vse pripadajoče pole delimo s faktorjem  $\eta_b$ .

Za naš filter tretje stopnje na [SL.7](#) potrebujemo vrednosti polov iz [Tabele 1](#) za  $n = 3$ . Te vrednosti najprej vse delimo s faktorjem  $\eta_b(3)$ , s čemer pole normiramo na mejno frekvenco  $\omega_0 = 1$  rad/s, in rezultate delitev dodelimo polom  $s_{1,2,3}$  iz enačb (54), (55) in (56), oziroma jih uporabimo v substitucijah (57), (58) in (59).

Naprej, zamenjane spremenljivke  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , vnesemo v sistem enačb (67), (68) in (69), ter tako pridobljene spremenljivke  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , uporabimo v enačbi (71). Tako dobimo normirano vrednost  $C_2$ , od tod pa po enačbah (72) in (73) še normirani vrednosti za  $C_1$  in  $C_3$ .

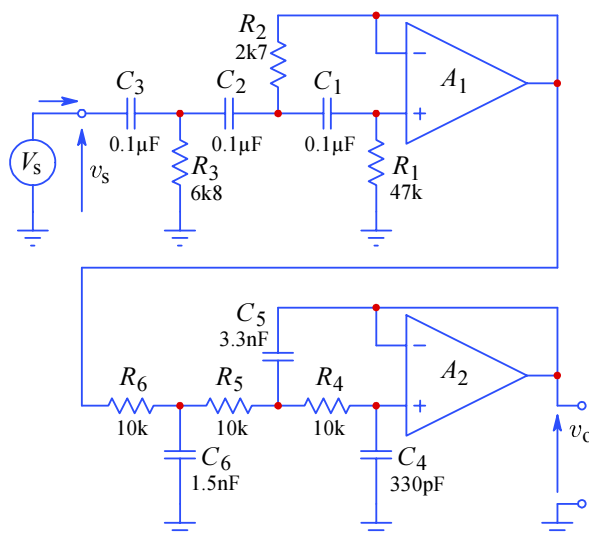
Žal komercialno dobavljivi kondenzatorji ne bodo nikoli imeli točno takih vrednosti kot jih zahtevamo, vendar je mogoče s kombiniranjem standardnih

proizvodnih vrednosti dveh ali treh skupaj dobiti dober približek. V območju kapacitivnosti med 1 nF in 1  $\mu$ F bomo vedno našli uporabne kombinacije vrednosti. Na srečo Besselovi filtri niso občutljivi za tolerančne variacije vrednosti.

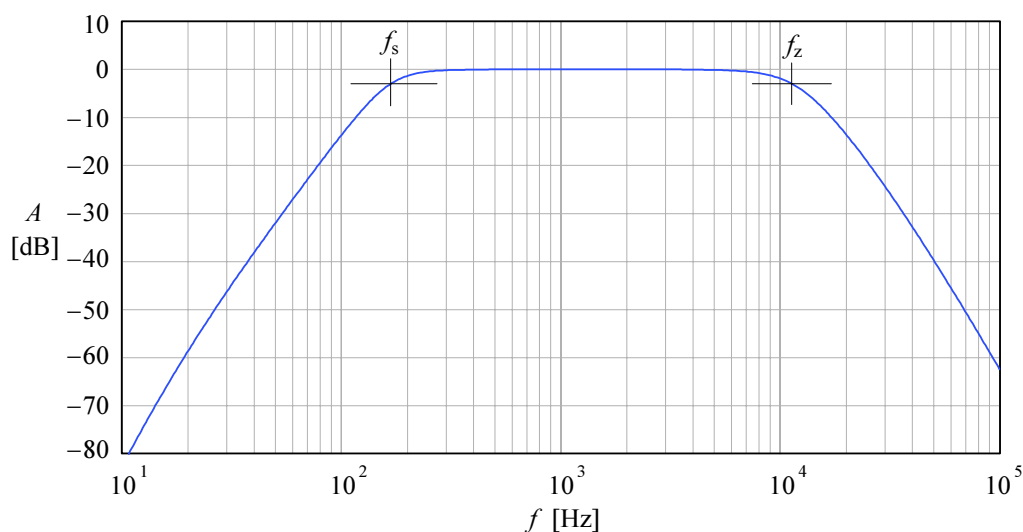
Dejanska zgornja mejna frekvenca  $f_z$  našega filtra mora biti blizu 10 kHz, oziroma  $\omega_z = 2\pi \times 10^4$  rad/s. Ko enkrat izberemo vrednosti kondenzatorjev lahko po relaciji (75) najdemo še vrednost za tri enake upore  $R$ . Standardna lestvica vrednosti za upore je običajno bolj gosta kot za kondenzatorje, pa še nižje tolerance so pri uporih, zato se mejni frekvenci lažje prilagodimo z ustrezno izbiro uporov.

Visoko-prepustni filter s spodnjo mejno frekvenco 100 Hz načeloma lahko izračunamo po enakem postopku kot zgoraj, le da bodo upori in kondenzatorji v tem dualnem vezju med seboj zamenjani. Imeli bomo torej tri enake kondenzatorje v zaporedni veji in tri različne upore v vzporednih vejah vezja.

Primer izračunanih vrednosti so podani na shemi na [SI.12](#). Na [SI.13](#) pa smo narisali frekvenčni odziv obeh filtrov skupaj.



SI.12: Primer izračunanih vrednosti za visoko-prepustni in nizko-prepustni filter.



SI.13: Frekvenčni odziv samih filtrov za zgoraj izračunan primer.