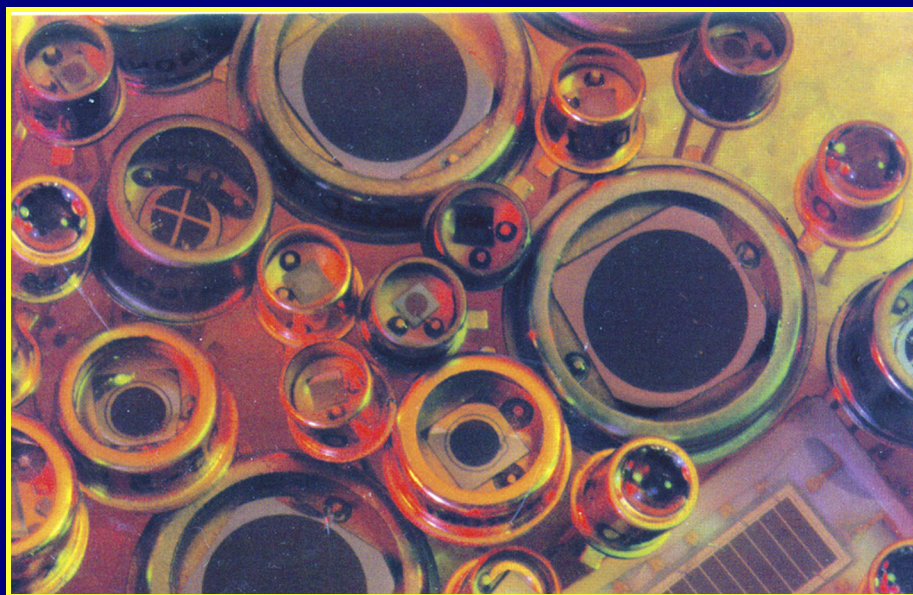


Erik Margan, IJS, F-9

Fotodiodni ojačevalniki



**Optimizacija elektro-optičnih merilnih sistemov
v frekvenčni in časovni domeni**

Seznam pogosto uporabljenih simbolov

Zaradi zgodovinskih in praktičnih razlogov imajo nekateri simboli dva ali več pomenov.

Dogovorjena oblika pisave simbolov

Naziv	Način pisave	Primer
Fizikalne količine	kurziv	<i>A a</i>
Vektorji ali matrike	poudarjen kurziv	<i>A a</i>
Merske enote	pokončno	A a

<i>A</i>	Aktivna optična površina fotodiode; tudi splošno ojačenje ojačevalnika.	<i>G</i>	Prevodnost, $G = 1/R$.
A_0	Faktor enosmernega ojačenja operacijskega ojačevalnika brez povratne zanke.	$G(s)$	Prenosna funkcija sistema v odvisnosti od kompleksne frekvence s ; običajno kot odziv sistema na stopničasto funkcijo v frekvenčnem prostoru, $G(s) = F(s)/s$.
$A(s)$	Odrptožančno jačenje operacijskega ojačevalnika, v odvisnosti od kompleksne frekvence s .	g_m	Inkrementalna prevodnost bipolarnega tranzistora, ali kombinacije le teh.
<i>a</i>	albedo, razmerje med odbito in absorbirano svetlobo na neki površini.	g_{fs}	Inkrementalna prevodnost poljskega tranzistora (FET) ali kombinacije FET.
<i>B</i>	Vektor gostote magnetnega pretoka v Maxwellovih enačbah.	$g(t)$	Časovni odziv sistema, običajno kot odziv na stopnico, $g(t) = g\{h(t)\}$.
B_s	Svetilnost svetlobnega vira (Tab.2).	$H(s)$	Heavisidova stopnica v frekvenčnem prostoru, $H(s) = 1/s$.
<i>C</i>	Kapacitivnost kondenzatorja.	<i>h</i>	Planckova energijska konstanta, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js.
<i>c</i>	Svetlobna hitrost $c = 299\,792\,458$ m/s; $c = \lambda\nu = \lambda W_\gamma/h = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.	\hbar	Diracov zapis Planckove konstante, $\hbar = h/2\pi$.
<i>D</i>	Determinanta, diskriminanta, splošno.	$h(t)$	Heavisidova stopnica v časovnem prostoru, $h(t) = 0 _{t<0} \& 1 _{t\geq 0}$.
<i>D</i>	Vektor gostote električnega pretoka v Maxwellovih enačbah.	<i>I</i>	Enosmerni tok, amplituda fazorja za izmenične tokove.
<i>d</i>	Operator odvoda funkcije, $dF(x)/dx$.	I_s	Svetilnost svetlobnega vira. Tudi tok nasičenja pri polprevodnikih.
d_p	Vdorna globina svetlobe v kristal fotodiode.	I_p	S svetlobo povzročeni fotodiodni tok.
<i>E</i>	Amplituda sinusnega nihanja električne komponente elektromagnetnega vala. Včasih tudi energija (predvsem v Einsteinovi enačbi $E = mc^2$).	I_{sc}	Kratkostični maksimalni fotodiodni tok.
<i>E</i>	Vektor električne komponente polja v Maxwellovih enačbah.	I_d	Fotodiodni temni tok.
e_N	Specifična (v pasovni širini $\Delta f = 1$ Hz) napetostna komponenta šuma.	<i>i</i>	Trenutna vrednost toka.
<i>e</i>	Eulerjevo ('naravno') število, osnova naravnega logaritma; $e = 2.71828\dots$	i_N	Specifična (v pasovni širini $\Delta f = 1$ Hz) tokovna komponenta šuma.
e^-, e^+	Elektron, pozitron ali vrzel.	i_p	Trenutni tok fotodiode.
$F(s)$	Prenosna funkcija sistema v odvisnosti od kompleksne frekvence s .	<i>J</i>	Koeficienti polinomov (splošno).
<i>f</i>	Realna frekvenca.	<i>j</i>	Imaginarna enota, $j = \sqrt{-1}$.
f_T	Prehodna frekvenca, pri kateri je odrptožančno ojačenje sistema enako 1.	<i>K</i>	Koeficienti polinomov (splošno).
f_0	Resonančna frekvenca.	k_B	Boltzmannova konstanta, $k_B = 1.3806504 \times 10^{-23}$ W s K ⁻¹ .
f_1	Frekvenca dominantnega pola sistema.	<i>L</i>	Induktivnost.
f_2	Frekvenca sekundarnega pola sistema.	<i>l</i>	Dolžina loka (krožničnega odseka).
f_h	Zgornja mejna frekvenca sistema, kjer ojačenje pade za faktor $1/\sqrt{2}$.	<i>M</i>	Magnituda, absolutna vrednost prenosne funkcije, $M = F(s) $.
$f(t)$	Časovni odziv sistema, običajno kot impulzni odziv, $f(t) = f\{\delta(t)\}$.	<i>m</i>	Masa (fizikalna). Tudi indeks ničel polinoma prenosne funkcije.
		m_c	EkspONENT napetostne odvisnosti parazitne kapacitivnosti fotodiode.

N	Celo število.	s	Kompleksna frekvenca v Laplaceovem prostoru, $s = \sigma + j\omega$.
n	Indeks loma svetlobe. Tudi stopnja karakterističnega polinoma prenosne funkcije. Tudi splošni indeks polov.	s_1, s_n	Poli ali ničle prenosne funkcije sistema.
P	Moč (električna, ali svetlobna).	T	Absolutna temperatura v kelvinih [K].
p_1, p_n	Poli prenosne funkcije.	t	Časovna spremenljivka.
Q	Faktor kvalitete nihajnega kroga. Indeksirano: oznaka tranzistorja.	t_r	Vzponski čas pri odzivu na stopnico.
q	Celoštevilčni eksponent, ali odvod.	V	Enosmerna napetost; amplituda fazorja za izmenične napetosti.
q_e	Osnovni naboj (naboj elektrona); $q_e = 1.602\,176\,478 \times 10^{-19}$ As.	v	Trenutna napetost.
R	Realna Ohmska upornost, $R = \frac{V}{I}$ [Ω].	v_1, v_n	Napetostno vozlišče.
r	Inkrementalna upornost, $r = dV/dI$. Tudi radij kroga, sfere, ali na splošno oddaljenost od svetlobnega vira.	v_o	Izhodna napetost.
r_0, r_1, r_k	Residuum prenosne funkcije.	W	Energija, delo.
S	Občutljivost; $S = dI_P/dP$ [A/W].	X	Reaktanca, imaginarni del kompleksne impedance.
S_{\max}	Največja spektralna občutljivost.	x	Splošna neznanka.
$S(\lambda)$	Občutljivostni spekter (v odvisnosti od valovne dolžine λ).	Y	Admitanca, kompleksna prevodnost, inverzna impedanca.
α	Tokovni prenosni faktor tranzistorja od emiterja h kolektorju, $\alpha = \frac{I_C}{I_E} = \frac{\beta}{1+\beta}$.	y	Splošna vrednost funkcije. Lahko tudi neznanka.
β	Tokovni prenosni faktor tranzistorja od baze h kolektorju, $\beta = \frac{I_C}{I_B}$.	Z	Impedanca, kompleksna upornost.
γ	Simbol za foton, žarek gama.	z_1, z_m	Ničle prenosne funkcije.
Δx	Simbol za razliko, $x_2 - x_1$.	μ_r	Relativna magnetilna konstanta snovi glede na vacuum.
δx	Simbol za zelo majhno razliko.	ν	Fotonska (nosilna) frekvenca svetlobe, $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{W_\gamma}{h}$.
$\delta(t)$	Diracov enotni impulz, $\delta(t) = \infty _{t=0} \& 0 _{t \neq 0}$.	ξ	Logaritmski dekrement dušenja prenosne funkcije sistema, $\xi = 1/2Q$.
ϵ	Majhna, od nič različna napaka.	π	Ludolfovo število, razmerje med obsegom in premerom kroga, $\pi = 3.14159\dots$; kot polkroga [rad].
ϵ	Dielektričnost (permitivnost).	ρ_s	Gostota moči svetlobnega toka, $\rho_s = \frac{dP}{dA}$.
ϵ_0	Dielektričnost vacuuma: $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8.854 \times 10^{-12}$ [As/Vm].	σ	Stefanova konstanta sevanja. Tudi realna komponenta kompleksne frekvence s , ali pola (ima dimenzijo kotne frekvence [rad/s]).
ϵ_r	Relativna dielektričnost materiala v primerjavi z vacuumom.	τ	Časovna konstanta; $\tau = RC$; $\tau = \frac{L}{R}$.
η	Izkoristek, razmerje moči.	τ_e	Časovna (ovojnična) zakasnitev sistema $\tau_e(\omega) = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$.
θ	Geometrijski kot. Običajno pri polih: $\theta_k = \arctan \frac{\Im\{s_k\}}{\Re\{s_k\}} = \arctan \frac{\omega k}{\sigma_k}$. Tudi vpadni kot svetlobe na neko površino, glede na normalo.	φ	Fazni kot prenosne funkcije $\varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{F(\omega)\}}{\Re\{F(\omega)\}}$.
λ	Valna dolžina svetlobe, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{W_\gamma}$.	ω	Kotna frekvenca, $\omega = 2\pi f$, imaginarni del kompleksne frekvence s , ali pola (ima dimenzijo frekvence [rad/s]).
μ	Magnetilna konstanta, permeabilnost.	Ω	Prostorski kot.
μ_0	Magnetilna konstanta vacuuma, $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \times 10^{-7}$ [Vs/Am]	$\Re\{\}$	Realni del kompleksne količine.
$\Re\{\}$	Realni del kompleksne količine.	$\Im\{\}$	Imaginarni del kompleksne količine.
\sum	Vsota vseh členov v nekem izrazu.	\prod	Zmnožek vseh členov v nekem izrazu.
$\mathcal{L}\{\}$	Laplaceov transformacijski operator, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)$	$\mathcal{L}_i\{\}$	Inverzni Laplaceov transform, $\mathcal{L}_i\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = f(t)$

Pomembno obvestilo

Spoštovani Bralci!

Nekaj nas skromnih Dreves Vam želi izraziti svojo neizmerno hvaležnost, če tega besedila **NE BOSTE NATISNILI** na papir!

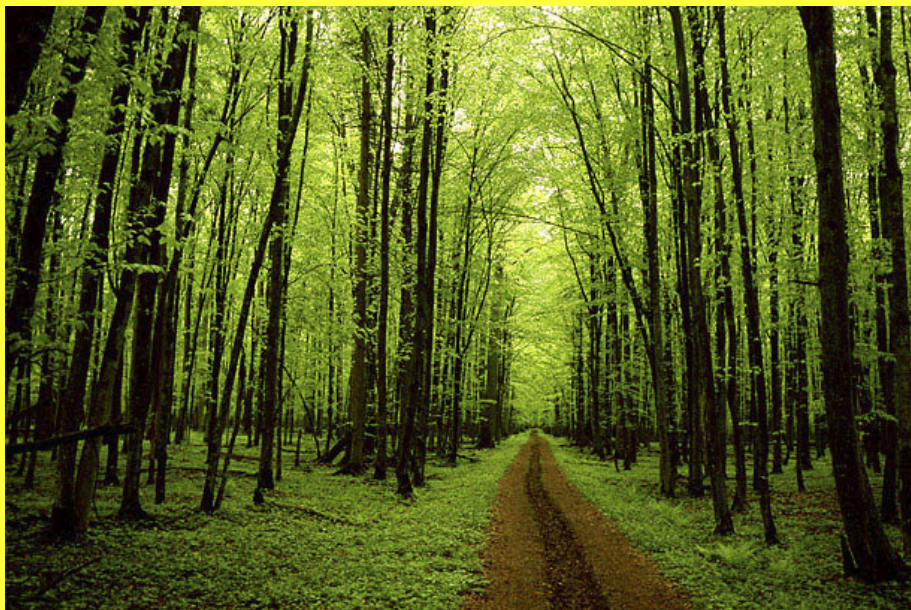
Radi bi Vas opozorili da je porabo in potrato izdelkov iz lesa, med katere spada tudi papir, človeška vrsta pripeljala do neslutnih razsežnosti; nekateri pač dobesedno od drevesa ne vidijo gozda! Čeprav nas je veliko ni se hitro razmnožujemo, je naša rast razmeroma počasna. Posledično se s prekomerno poseko tudi naš življenski prostor nezadržno krči. S tem pa se krči tudi življenski prostor neštetim rastlinskim in živalskim vrstam, s katerimi živimo v simbiozi. Zato ni več daleč dan, ko se bodo posledice takega početja začele negativno odražati na obstoj celotnega življenja na Zemlji.

Če pa je kdo med Vami, ki ga skrbijo emisije CO₂ zaradi električne energije, ki jo porabi Vaš računalnik med vsakodnevnim delovanjem, lahko Vam zagotavljamo da celotna energija, ki jo porabite za izdelavo 1 kg papirja, zadošča za okoli 3000 ur delovanja vašega računalnika! Poleg tega, eno samo povprečno Drevo vsak dan vsrka toliko CO₂, kot ga vaš računalnik s svojim delovanjem posredno spravi v ozračje v treh mesecih!

Zato prosimo, kar brezskrbno berite to besedilo z zaslona!

Vaša hvaležna Drevesa

PS: Če že ne gre drugače, vsaj natisnite besedilo obojestransko!



Seznam poglavij

Seznam pogosto uporabljenih simbolov	2
Pomembno obvestilo	4
Seznam poglavij	5
Seznam tabel	6
Seznam slik	6
Računati ali ne računati? To sploh ni vprašanje	7
1. Fizikalne definicije in relacije v optiki	9
2. Definicije fizioloških optičnih količin v SI	17
3. Polprevodniške fotodiode: zgradba in lastnosti	19
4. Polprevodniške fotodiode v elektroniki	27
5. Kalibracija fotodiodnih ojačevalnikov	31
6. Analiza fotodiodnih ojačevalnikov	33
6.1. Zgradba operacijskega ojačevalnika	33
6.2. Problem dominantnega pola, Millerjev učinek	36
6.3. Frekvenčna odvisnost prenosne funkcije	37
6.4. Ojačevalnik s povratno zanko in idealno fotodiodo	40
6.5. Ojačevalnik z realno fotodiodo	44
6.6. Fazni zasuk	52
6.7. Ovojnična zakasnitev	55
6.8. Impulzni časovni odziv	57
6.9. Časovni odziv na stopničast vhodni signal	61
6.10. Sklepne opombe k osnovnem vezju	65
7. Izboljšave fotodiodnega ojačevalnika	67
7.1. Prenosna funkcija ob kompenzirani povratni zanki	67
7.2. Zagotovitev popolne stabilnosti ojačevalnika	72
7.3. Vpliv ojačevalnikovega dominantnega pola	76
7.4. Problem šuma in šumnega ojačenja	79
7.5. Delne kompenzacije povratne zanke ojačevalnika	85
7.6. Optimizacija znančnega ojačenja dveh ojačevalnikov	87
7.7. Dvojni ojačevalnik s filtrom	8x
7.8. Zgotovitev stabilnosti ob reaktivnem bremenu	9x
8. Ojačevalnik s tokovno povratno zanko	99
8.1. Ojačevalnik CFB kot fotodiodni ijačevalnik	105
9. Optimizacija za večjo občutljivost	115
10. XXXXXXXXXXXX	1XX
Dodatek A: Družine polinomov in različni kriteriji optimizacije odziva sistema	123
A.1. Butterworthova družina	124
A.2. Bessel-Thomsonova družina	128
Dodatek B: Splošne rešitve polinomov 1., 2., 3. in 4. stopnje	132
Viri in povezave	136
Indeks	137

Seznam tabel

Tabela 1: XX

Seznam slik

Sl.1: XX

Računati, ali ne računati? To sploh ni vprašanje!

Vedno je bilo elektronsko vezje, tudi ta najbolj preprosto, mnogo lažje narediti in preskusiti, kot pa zračunati. In danes je še vedno tako, čeprav nam vseprisotni računalniki ponujajo preproste, natančne in hitre programe za simulacijo vezij, z bogato založenimi kjižnicami vseh možnih na trgu obstoječih komponent. Delo s temi programi je skoraj otročja igra, vsekakor izjemno zabavna igra.

Fotodiodne ojačevalnike upravičeno štejemo med bolj preprosta vezja, skoraj trivialno preprosta. Kot igra z *LEGO* kockami: vzameš operacijski ojačevalnik, dodaš par kondenzatorjev na napajalne priključke, upor v povratno zanko, fotodiodo na vhod, vklopiš napajalno napetost in — stvar dela! Naj živi *LEGO*tronika!

Zakaj, za Murphyja, bi potemtakem kdorkoli potreboval karkoli zračunati?

Odgovor na to vprašanje je presenetljivo preprost: ravno zaradi tega, ker je danes vse tako preprosto!

??

Naj pojasnim.

Živimo v takoimenovani 'družbi znanja', vsaj na politično-deklarativni ravni, hkrati pa je prav znanje med najbolj razvrednotenimi vrednotami te družbe.

Na Dalnjem vzhodu je življenje kruto, ljudi je veliko, hrane malo, in konkurenca (boj za golo preživetje) je zelo huda. V takih pogojih je marsikdo pripravljen delati karkoli za pest riža na dan. Če delodajalec hoče imeti fotodiodni ojačevalnik, bo vsak delavec vesel tako preproste naloge, in jo bo opravil tako dobro, da se bo kar bleščalo, naprav`ca bo znala ne le razlikovati svetlobo od teme, znala bo svetlobo izmeriti na 16, ali celo 24 bitov natančno, zaznala bo barvni spekter osvetljenega objekta, z mehkim ženskim glasom kot mati opozarjala na povečano UV sevanje, hkrati z rezultati zabeležila trenutne GPS koordinate, ali celo hkrati predvajala MP3-kodirano glasbo s Svetovnega spleta. Pa še skoraj zastoj bo!

Vpliv Dalnjega vzhoda se že od sredine osemdesetih let prejšnjega stoletja pozna že tudi v ZDA in Evropi, v zadnjem času tudi drugod po svetu. Če danes kdo v Sloveniji želi s svojimi izdelki konkurirati v svetovnem merilu, se bo soočil s trgom, ki je že preplavljen s podobnimi razmeroma dobro delujočimi in skoraj zastoj izdelki. Kakšne možnosti ima?

Prva, najbolj razumna, je opustiti dejavnost in začeti nekaj povsem drugega, po možnosti v sektorju kjer konkurenca ni tako huda.

Druga možnost, bolj 'darwinistična': naj se prilagodi in izkaže pripravljenost delati za pest riža na dva dni.

Tretja možnost, ki meji že skoraj na noro trmoglavljenje je, da izkaže pripravljenost naučiti se kaj več kot najbolj trivijalne 'kuharske recepte', ter sčasoma uspe narediti resnično vrhunski izdelek, izpiliti vse parametre delovanja do skrajnih meja tehnologije, morda malce čez. In za ne previsoko ceno.

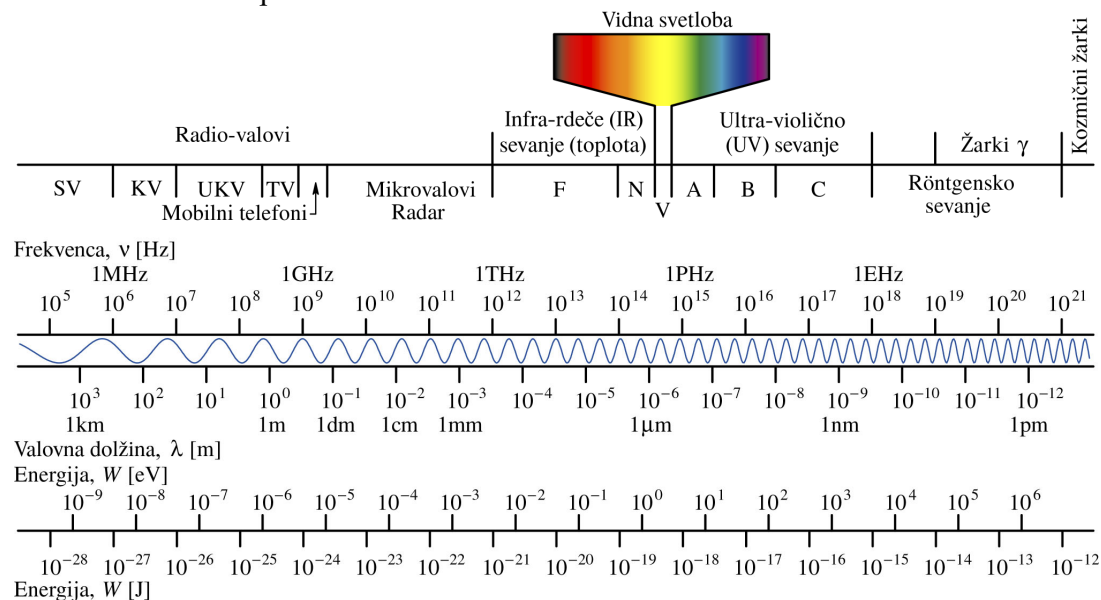
Za to zadnjo možnost je potrebno kar nekaj računanja, ker je treba natančno vedeti kaj je teoretično sploh mogoče, kje leži optimum med nasprotujočimi se zahtevami in prav tako nasprotujočimi se fizikalnimi lastnostmi, tako posameznih komponent kot tudi sistema v celoti. In vseskozi preverjati kako daleč od optimuma je lastni izdelek, tako na tehnični, kot tudi na cenovni ravni.

Torej: le tisti, ki ste noro trmoglavi, berite pogumno naprej!

Ljubljana, 22.06.2009.

1. Fizikalne definicije in relacije v optiki

Vidna svetloba je elektromagnetno valovanje in predstavlja le ozek pas celotnega elektromagnetnega sevalnega spektra. [Sl.1.1](#) ponazarja dogovorno razdelitev frekvenčnih območij elektromagnetnega spektra glede na nekatere lastnosti, značilne učinke in uporabo.



Sl.1.1: Značilna območja elektromagnetnega sevalnega spektra

Začetek kvantitativne fotometrije sovpada z odkritjem Stefanovega zakona sevanja leta 1879 (*Jožef Stefan*, 1835–1893), kjer se prvič pojavlja sorazmerna odvisnost gostote moči sevalnega toka od četrte potence temperature telesa ki seva:

$$\rho_s = \sigma T^4 \quad (1.1)$$

Tukaj je σ Stefanova konstanta, T pa absolutna temperatura v kelvinih [K].

Kelvin (*William Thomson, Lord Kelvin*, 1824–1907) je že leta 1848 zasnoval absolutno temperaturno lestvico, pri čemur za osnovo ni vzel faznih prehodov snovi, temveč jo je izpeljal izključno na zakonih termodinamike. Absolutna ničla je tista temperatura na kateri snov ne more oddati in ne sprejeti sevanja (takrat snov vsebuje le osnovno kvantno-mehansko energijo). Velikost stopinje absolutne lestvice je Kelvin izbral enako kot pri Celzijevi lestvici (*Anders Celsius*, 1701–1744), tako da je izhodišče $0 \text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$ (pri kelvinih po dogovoru ne pišemo znaka za stopinje).

Stefanov učenec Boltzmann (*Ludwig Eduard Boltzmann*, 1844–1906) je leta 1884 teoretično izpeljal Stefanov zakon, ki je od takrat znan kot Stefan–Boltzmannov zakon. Stefanova konstanta proporcionalnosti σ , sprva eksperimentalno določena, je bila kasneje teoretično izpeljana na podlagi drugih osnovnih naravnih konstant:

$$\sigma = \frac{2 \pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5.670400 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (1.2)$$

kjer je k_B Boltzmannova konstanta, $k_B = 1.3806504 \times 10^{-23} \text{ W s K}^{-1}$, h je Planckova konstanta (*Max Planck*, 1858–1947), $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$, in c je svetlobna hitrost.

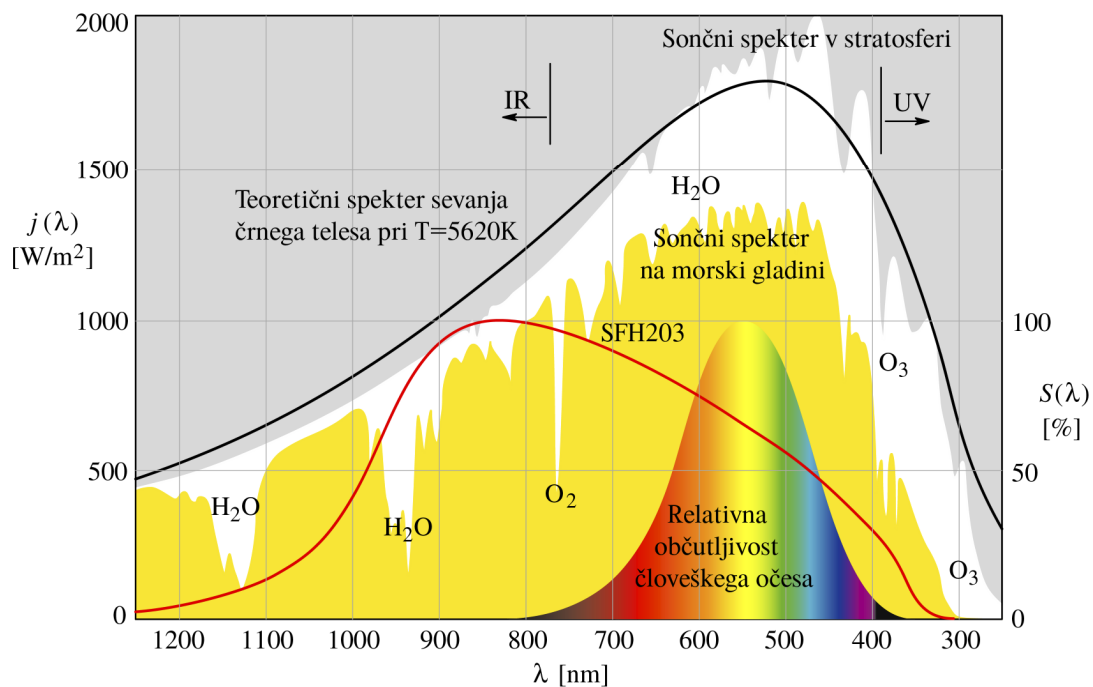
Za svetlobo, tako kot za vsa druga valovanja, je značilna končno velika *propagacijska hitrost*, c , ki je povezana z *valovno dolžino* λ ('lambda'), izraženo v metrih [m], ter *frekvenco valovanja* ν ('nü'), izraženo v hertzih [Hz] (*Heinrich Rudolf Hertz*, 1857–1894), po preprosti relaciji:

$$c = \lambda \nu \quad (1.3)$$

Valovno dolžino merimo med vrhoma dveh sosednih valov, frekvenca nihanja ν pa pomeni število nihajev (valov) v sekundi, [$\text{Hz} = 2\pi \text{ rad/s}$].

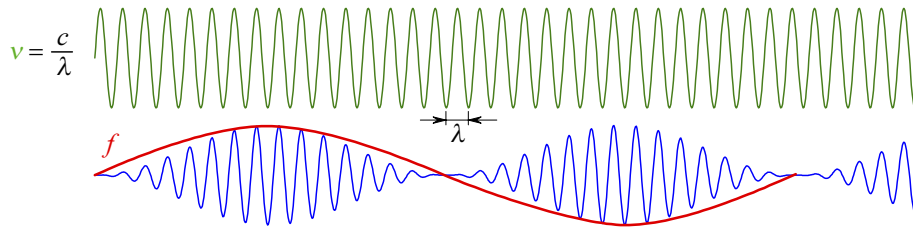
Mednarodni sistem merskih enot (fr., *Le Système international d'unités*, SI) določa vrednost svetlobne hitrosti v prostoru brez prisotnosti snovi (*vacuum*) z absolutno natančnostjo: $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ (kar določata SI dogovora o metru [m] in sekundi [s]). Pogosto uporabljamo približek $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$.

Občutljivostni spekter človeškega očesa, v odvisnosti od valovne dolžine svetlobe, sega od okoli 780 nm (rdeča) do 430 nm (violična); tem mejam ustrezata frekvenci 3.84×10^{14} in $6.97 \times 10^{14} \text{ Hz}$, oziroma energiji 2.544×10^{-19} in $4.615 \times 10^{-19} \text{ J}$, ali v elektron-voltih: 1.588 in 2.881 eV. Občutljivostni maksimum očesa je pri 555 nm ($5.4 \times 10^{-14} \text{ Hz}$, $3.576 \times 10^{-19} \text{ J}$, ali 2.232 eV). [SI.1.2](#) kaže primerjavo gostote sevalne moči sončnega spektra (v stratosferi in skozi zemeljsko ozračje) z normirano občutljivostjo človeškega očesa in tipične silicijeve fotodiode (SFH203).



SI.1.2: Primerjava sončnega spektra (v stratosferi in na morski gladini – vir NASA) s povprečno občutljivostjo človeškega očesa in tipične silicijeve fotodiode (SFH203). Za primerjavo je podan še teoretični spekter sevanja črnega telesa (enačba 4) pri temperaturi 5620 K, označen pa je tudi vpliv molekul nekaterih plinov v atmosferi na absorpcijske vrzeli v sončnem spektru. Maksimum relativne spektralne občutljivosti človeškega očesa je pri 555 nm, fotodiode pa pri 850 nm. Maksimum gostote moči sončnega spektra se spreminja z nadmorsko višino in geografsko širino in je odvisen od vsebnosti vlage v atmosferi, poleg tega pa se spreminja v teku leta zaradi eliptičnosti zemeljske orbite med 1412 W/m^2 v začetku januarja in 1321 W/m^2 v začetku junija, v povprečju 1366 W/m^2 (merjeno na ekvatorju opoldne jasnega dne na morski gladini). Prav tako se spreminja za okoli 0.1% v teku 11-letnega aktivnostnega ciklusa Sonca.

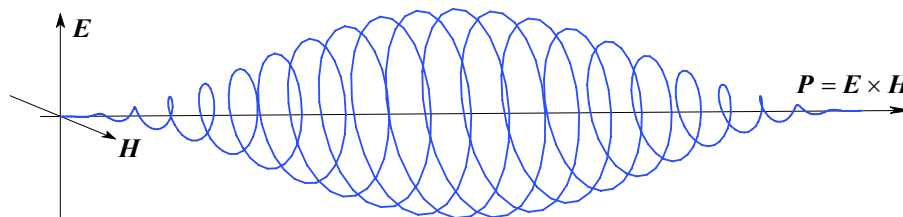
Intenziteta svetlobe se pogosto spreminja s časom, če, na primer, svetlobni vir namenoma periodično moduliramo. Modulacijsko frekvenco ponavadi označujemo s f , da jo razlikujemo od fotonske frekvence ν , ter se izognemo morebitni zmedi. [Sl.1.3](#) ponazarja razliko med enakomernim in moduliranim valovanjem.



Sl.1.3: Enakomerno in amplitudno modulirano valovanje

Energijska kvantiziranost elektromagnetnega valovanja pomeni da kateri koli delec snovi lahko odda (emitira) ali sprejme (absorbira) energijo na določeni frekvenci le v celoštevilčnih večkratnikih osnovnega energijskega obroka, kvanta (lat., *quantum*, količina), ki mu je *Gilbert M. Lewis* leta 1926 nadel ime ‘foton’. Foton ponavadi simbolično označujemo z grško črko γ (‘gama’), izhajajoč iz Rutherfordovega (*Ernest Rutherford*, 1871–1937) poimenovanja izsevanih produktov pri radioaktivnem razpadu atomskih jeder (α -delci so jedra helija, He^{++} , β -delci so elektroni, e^- , γ -žarki pa so fotoni, oziroma elektromagnetno valovanje).

Iz Maxwellove elektromagnetne teorije (*James Clerk Maxwell*, 1831–1879) izhaja da vektorja električne (\mathbf{E}) in magnetne (\mathbf{H}) poljske jakosti nihata kot sinusno-cosinusni par v med seboj pravokotnih smereh. Smer razširjanja valovanja določa Poyntingov vektor (*John Henry Poynting*, 1852–1914) $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, ki je pravokoten na oba (transverzalno valovanje). Foton si tako lahko predstavljamo kot prostorsko omejen valovni paket s karakteristično frekvenco ν ([Sl.1.4](#)), svetlobno valovanje pa kot fazno-vektorsko vsoto zelo velikega števila takih valovnih paketov.



Sl.1.4: Fizikalno dokaj naivna predstava o fotonu: pri elektromagnetnem valovanju nihata vektorja električne (\mathbf{E}) in magnetne (\mathbf{H}) poljske jakosti kot par $E\sin(2\pi\nu t)$, $H\cos(2\pi\nu t)$ med seboj pravokotno, kar opiše spiralni energijski vektor polja (spinsko kvantno število je ± 1). Smer gibanja določa Poyntingov vektor $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, ki je pravokoten na oba (‘transverzalno’ valovanje). Amplituda naj bi ustrezala Gaussovi (*J.C.F. Gauß*, 1777–1855) eksponentni funkciji, e^{-x^2} , kjer je x koherenčna dolžina fotona ($x \gg \lambda$).

Vrednost energijskega kvanta je določena na podlagi leta 1900 odkrite in objavljene Planckove zakonitosti sevanja črnega telesa, katerega sevalna moč W pri določeni temperaturi T v območju valovnih dolžin med λ in $\lambda + d\lambda$ znaša:

$$W(\lambda, T)d\lambda = \frac{2\pi c^2 h \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \quad (1.4)$$

Integral izraza (1.4) čez vse valovne dolžine je enak Stefan–Boltzmannovemu zakonu (1.1). Izraz (1.4) se popolnoma ujema z rezultati meritev le, če je energija sevanja kvantizirana in za posamični foton velja:

$$W_\gamma = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (1.5)$$

kjer je h Planckova energijska konstanta, ν pa je fotonska frekvenca [Hz].

Energijo izražamo v jouleih [J] (*James Prescott Joule*, 1818–1889). Na podlagi Jouleovega izraza za mehansko energijo lahko ugotovimo da je sevalna energija enakovredna mehanski: [J] = [kg m²s⁻²], in električni: [J] = [Ws], kjer je W ‘watt’, enota za električno moč (*James Watt*, 1736–1819).

Energijo včasih označujemo z E , vendar je E tudi oznaka za električno poljsko jakost. Da se izognemo morebitni zmedji, za energijo raje uporabljamo W , po angleški besedi ‘work’, delo.

Frekvenco si fizikalno predstavljamo kot periodično nihanje, ali krožno gibanje, izraženo z velikostjo kota, ki ga gibajoče se telo opiše v časovni enoti. Toda kotna enota ni krog ($2\pi r \Rightarrow 360^\circ$), pač pa ‘radian’ [rad], ki je sorazmeren dolžini loka enaki radiju pripadajočega kroga ($l = r$), torej je $1 \text{ rad} = 360^\circ/2\pi \approx 57.296^\circ$. Posledično moramo tudi frekvenco vzeti kot ‘kotno frekvenco’, ω (‘omega’), $\omega = 2\pi\nu$, v enotah [rad/s]. Zato je v fizikalni literaturi bolj pogosto v uporabi Diracov (*Paul A. M. Dirac*, 1902–1984) zapis ‘reducirane’ Planckove konstante, $\hbar = h/2\pi = 1.0536 \times 10^{-34}$ Js. Energijo fotona potem lahko zapišemo kot:

$$W_\gamma = h\nu = h \frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega \quad (1.6)$$

Iz vsega tega sledi da je celotna sevalna energija nekega monokromatskega svetlobnega vira lahko le celoštevilčni večkratnik energije fotona: $W = N W_\gamma$.

Pri obravnavi pojavov, ko foton ionizira nek atom snovi (torej ustvari par elektron–vrzel) je koristno če energijo podamo v elektron-voltih [eV]. Če elektron pospešimo v električnem polju s potencialno razliko 1 V, pridobi le-ta energijo 1 eV. Volt je enota električne napetosti (*Alessandro Volta*, 1745–1827); naboj elektrona je $q_e = 1.602 \times 10^{-19}$ As; ‘amper’, [A], je enota jakosti električnega toka (*André-Marie Ampère*, 1775–1836). Ker je [J] = [Ws] = [VAs], sledi da, če vrednost energije v [J] delimo z nabojem elektrona, dobimo njeno vrednost v [eV]:

$$W \text{ [eV]} = \frac{W \text{ [J]}}{q_e} \quad (1.7)$$

Prav tako je ugodno če vrednost Planckove reducirane konstante podamo v [eVs]:

$$\hbar \text{ [eVs]} = \frac{\hbar \text{ [Js]}}{q_e} = 6.582 \times 10^{-16} \text{ eVs} \quad (1.8)$$

V Einsteinovi (*Albert Einstein*, 1879–1955) posebni relativnostni teoriji iz leta 1905 je svetlobna hitrost privzeta za konstantno, kar ponazarja njena oznaka c (lat., *constant*). Pozneje (že v splošni relativnostni teoriji leta 1915) je bilo ugotovljeno da se v določenih pogojih (močno gravitacijsko polje, prisotnost snovi) svetlobna hitrost lahko spremeni, a jo kljub temu še vedno označujemo z enakim simbolom.

Matematično upravičenost za tako označevanje najdemo že v Maxwellovi elektrodinamiki. Iz Maxwellovih ‘konstitutivnih’ enačb za vektorja gostote

električnega in magnetnega pretoka, \mathbf{D} in \mathbf{B} , kjer poleg električne in magnetne poljske jakosti \mathbf{E} in \mathbf{H} , nastopata dve osnovni elektromagnetni konstanti, ε_0 in μ_0 :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (1.10)$$

izhaja izraz za propagacijsko hitrost elektromagnetne energije v vacuumu:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \quad (1.11)$$

Tukaj je μ_0 magnetilna konstanta, oziroma 'permeabilnost' vacuuma z natančno vrednostjo $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am (po SI definiciji), ε_0 pa je dielektričnost, oziroma 'permitivnost' vacuuma, z vrednostjo določeno prek SI definicije za svetlobno hitrost, tako da je $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 \approx 8.8542 \times 10^{-12}$ [As/Vm].

V snovi sta vrednosti μ in ε večji kot v vacuumu. Definiramo relativno permeabilnost $\mu_r = \mu/\mu_0$ in relativno dielektričnost $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ materialnega elektromagnetnega medija. Pri izolatorjih je $\mu_r = 1$ in $\varepsilon_r \gg 1$, pri feromagnetnih materialih pa $\mu_r \gg 1$ in $\varepsilon_r \approx 1$, med tem ko paramagnetni in diamagnetni materiali imajo $\mu_r \approx 1$ in $\varepsilon_r \approx 1$. Na splošno je v prozorni snovi svetlobna hitrost manjša:

$$c' = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\mu_r\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}} \quad (1.12)$$

Žal, materialne 'konstante' niso vedno konstantne: pri večini materialov se μ_r ali ε_r , ali kar oba, močno spreminjata s frekvenco, pa s temperaturo tudi. Denimo, zrak ima $\varepsilon_r = 1.00027$ v širokem razponu frekvenc, voda pa 81 pri 1 MHz, a le 1.33 pri 10^{15} Hz, zato se hitrosti radijskih valov in svetlobe v teh medijih precej razlikujeta. Posledično se radijski valovi na vodni gladini odbijejo, svetlobni žarek pa se pri poševnem prehodu na vodni gladini lomi; lomni količnik je podan kot $n = \sqrt{\varepsilon}$. Razmerje sinusov lomnih kotov pa je:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \quad (1.13)$$

kjer je θ_1 vpadni kot, θ_2 pa izstopni kot žarka, oba glede na normalo na mejno ravnino optično različno gostih snovi. Pri lomu ostane frekvenca svetlobe enaka, spremenita pa se propagacijska hitrost in valovna dolžina:

$$\nu_1 = \frac{c_1}{\lambda_1} = \frac{c_2}{\lambda_2} = \nu_2 \quad (1.14)$$

Zato veljajo razmerja:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.15)$$

Prav tako je prozornost optičnih medijev pri različnih frekvencah različna, denimo v vodi je absorpcijski koeficijent za rdečo svetlobo okoli $3 \times$ večji kot za modro (zato je morje videti modro). Steklo je za valovne dolžine manjše od 300 nm (UV) neprozorno (če se sončimo za zaprtim oknom ne bomo porjaveli!). Temno pleksi-steklo je za IR sevanje prozorno. Podobno je tudi pri drugih materialih.

Viru sevanja pravimo da je *izotropen*, če seva v vse smeri enako (na pr., Sonce), sicer pa je *anizotropen* (na pr., žaromet).

Sevanje svetlobnega vira opišemo bodisi s celotnim izsevanim *energijskim tokom* W [J], ali pa z izsevano *močjo svetlobnega toka* P [W]. Seveda je energija enaka časovnemu integralu izsevane moči:

$$W = \int P dt \quad (1.16)$$

Svetilnost (intenziteto) svetlobnega vira izrazimo z delno močjo svetlobnega toka na prostorski kot Ω :

$$I_s = \frac{dP}{d\Omega} \quad (1.17)$$

Svetilnost merimo v wattih na steradian [W/sr]. Prostorski kot $\Omega = 1$ sr opišemo s površino r^2 na površini krogle s polmerom r (Sl.2.1).

S časom se je uveljavila žalostna praksa da kotnih enot [rad] in [sr] ni potrebno pisati, zato pogosto najdemo svetilnost izraženo kar v [W], namesto [W/sr], in podobno pri nekaterih drugih količinah; to pogosto povzroča težave pri razlikovanju med močjo sevanja in svetilnostjo.

Za izotropni vir velja $I_s = P/4\pi$ (ker je 4π sr prostorski kot celotne krogle), svetilnost I_s pa ni odvisna od smeri. Pri anizotropnem viru pa je svetilnost odvisna od smeri in v tem primeru svetilni tok izrazimo z enačbo $P = \int I_s d\Omega$.

Svetlost ploskovnega vira vpeljemo kot delno intenziteto na površinsko enoto:

$$B_s = \frac{dI_s}{dA} \quad (1.18)$$

kjer je dA delček sevalne površine, dI_s pa je pripadajoča intenziteta. Svetlost merimo v wattih na kvadratni meter na steradian [W/m²sr].

Gostota svetlobnega toka je določena z razmerjem moči na površinsko enoto:

$$\rho_s = \frac{dP}{dA} \quad (1.19)$$

izražamo pa jo v W/m². Pri tem pada svetloba pravokotno na ploskev A . Gostota svetlobnega toka točkastega izotropnega vira v razdalji r meri:

$$\rho_s = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (1.20)$$

Iz tega izhaja znana zakonitost da svetilnost vira pada s kvadratom razdalje od vira. Ker je $I_s = dP/d\Omega$, za izotropni vir je sevalni kot celotna kroglja, $\Omega=4\pi$ [sr]:

$$\rho_s = \frac{I_s}{r^2} \quad (1.21)$$

Osvetljenost površine na katero pada svetlobni tok gostote ρ_s pod kotom θ (glede na normalo na površino) izrazimo z enačbo:

$$\rho' = \rho_s \cos\theta \quad (1.22)$$

Tabela 1: Nekatere pomembne fizikalne in materialne konstante

Konstante	Simboli	Vrednosti	Merske enote
Naboj elektrona	q_e	$1.602\,176\,478(40)\times 10^{-19}$	As
Svetlobna hitrost v vakuumu	c	299 792 458	m/s
Magnetilna konstanta vacuuma	μ_0	$4\pi\times 10^{-7}$	Vs/Am
Dielektrična konstanta vacuuma, $1/(\mu_0 c^2)$	ϵ_0	$8.854\,187\,817\dots\times 10^{-12}$	As/Vm
Planckova konstanta	h	$6.626\,068\,96(33)\times 10^{-34}$	Js
Boltzmannova konstanta	k_B	$1.380\,650\,4(28)\times 10^{-23}$	J/K
Termična energija pri 300 K	$k_B T$	0.0259	eV
Energija 1 eV	-	$1.602\,176\,478(40)\times 10^{-19}$	J
Valovna dolžina fotona z energijo 1 eV	λ_{eV}	1240	nm
Energijski potencial v siliciju	$W_{bg}(\text{Si})$	~ 1.14	eV
Relativna dielektričnost silicija	$\epsilon_r(\text{Si})$	~ 12	-
Relativna dielektričnost silicijevega dioksida	$\epsilon_r(\text{SiO}_2)$	~ 4	-

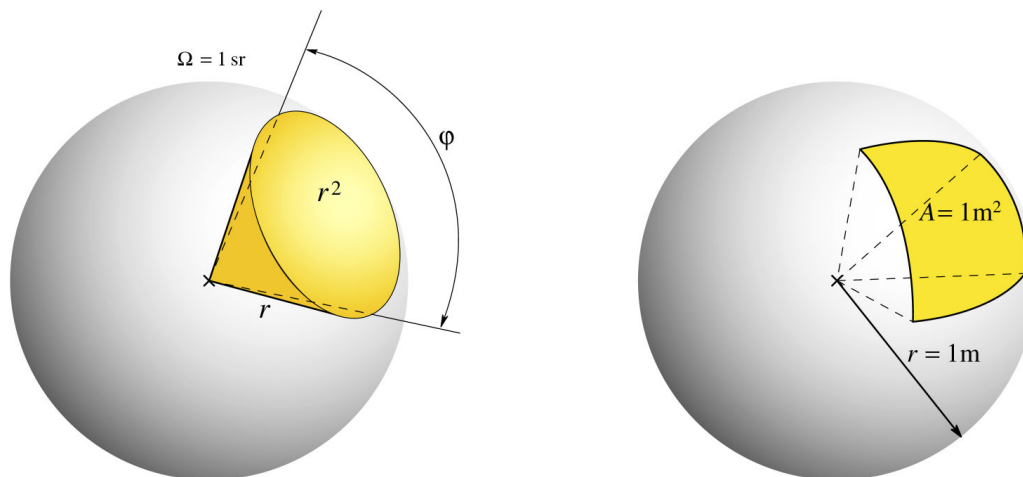
Vrednosti fizikalnih konstant so podane na toliko decimalnih mest natančno, kot je bilo znano leta 2007. Decimalna mesta v oklepaju predstavljajo srednjo vrednost intervala merilne napake.

2. Definicije fizioloških optičnih količin v SI

Razlikujemo dve vrsti merskih enot optičnih količin: fizikalne (objektivne) in fiziološke (pogojene z zgradbo in delovanjem človeškega očesa) ([Tabela 2](#)).

Tabela 2: Primerjava fizikalnih in fizioloških meril

Količina	Simbol	Enota v fizikalnem merilu	Enota v fiziološkem merilu
Moč svetlobnega toka	P	W	lm
Gostota svetlobnega toka	$\rho_s = \frac{dP}{dA}$	W/m ²	lm/m ²
Osvetljenost	$\rho' = \rho_s \cos\theta$	W/m ²	lx = lm/m ²
Svetilnost	$I_s = \frac{dP}{d\Omega}$	W/sr	cd = lm/sr
Svetlost	$B = \frac{dI_s}{dA}$	W/m ² sr	cd/m ²



SI.2.1: Pojasnilo za prostorski kot in osvetlitveno površino k definicijam enot [lm] in [lx].

Osnovna enota za fiziološko intenziteto svetlobe je *candela* [cd]. Ena candela predstavlja svetlobno intenziteto, ki jo v dani smeri seva točkasti monokromatski vir s frekvenco $\nu = 540 \times 10^{12} \text{ Hz}$ (oziroma valovno dolžino $\lambda = 555 \text{ nm}$) s prostorsko gostoto moči v tej smeri $\frac{1}{683} \text{ [W/sr]}$ v fizikalnih enotah.

Definicija candele predstavlja dogovor, dosežen zaradi nekaterih težav pri standardizaciji merilnih pogojev, ki so bili podlaga za staro definicijo *mednarodne sveče* (sevanje platine pri temperaturi faznega prehoda iz tekočine v trdnino, $T_{Pt} = 2045 \text{ K}$), oziroma *Hafnerjeve sveče* (na osnovi temperature plamena).

Definicija candele upošteva fizikalno sevalno moč svetlobnega vira, izraženo z enoto watt [W]; 1 W je moč energijskega toka enega joulea [J] v eni sekundi [s], $[\text{W}] = [\text{J/s}]$. Sevalna energija 1 J ustreza mehanski energiji $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$. Prostorski kot $\Omega = 1 \text{ sr}$ (stereo-radian, steradian) predstavlja konico (stožec) z vrhnim kotom $\varphi = 2\arccos(1 - \Omega/2\pi) = 1.1439 \text{ rad} \approx 65.541^\circ$ ($1 \text{ rad} = 360^\circ/2\pi \approx 57.296^\circ$).

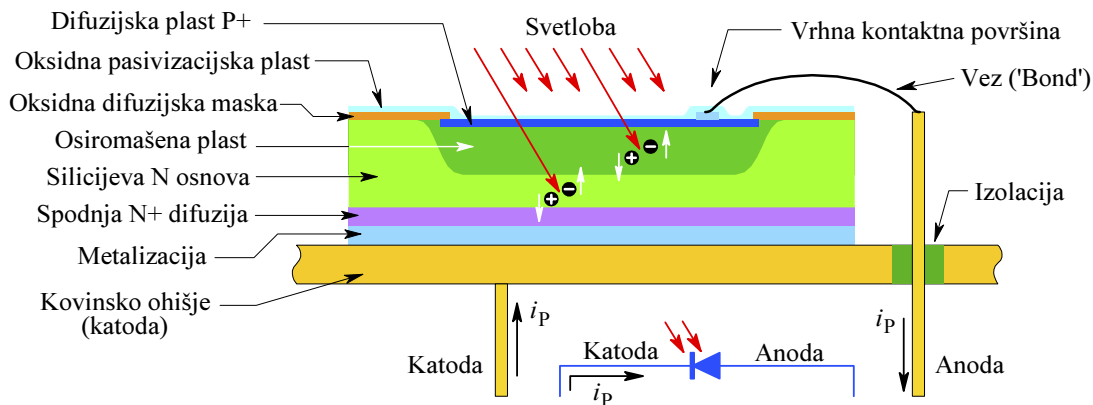
Drugače povedano, 1 sr omejuje površino 1 m^2 na površini krogle s polmerom 1m. Površina celotne krogle oklepa prostorski kot 4π sr.

Izpeljana fiziološka enota za svetilnost, ali moč svetlobnega toka, je *lumen* [lm]. En lumen predstavlja svetlobni tok točkastega monokromatskega vira z intenziteto 1 cd znotraj prostorskega kota 1 sr; [lm] = [cd · sr]. Obratno, vir ima intenziteto 1 cd če osvetli površino s svetlobnim tokom 1 lm/sr.

Izpeljana fiziološka enota za osvetljenost je *lux* [lx]. En lux predstavlja osvetljenost površine 1 m^2 na površini krogle s polmerom 1 m, ki jo osvetljuje v centru krogle nahajajoči se točkasti monokromatski vir, katerega svetilnost je 1 lm; torej je [lx] = [lm/m²]. Če svetloba pada na površino pod kotom θ glede na normalo, bo osvetljenost zmanjšana sorazmerno kosinusu vpadnega kota: $\rho' = \rho_s \cos\theta$.

3. Polprevodniške fotodiode: zgradba in lasnosti

Zgradba fotodiode je podana na [Sl.3.1](#). Poznavanje zgradbe fotodiode in razumevanje procesa foto-ionizacije, zlasti v osiromašeni plasti polprevodnika, je kjučnega pomena za uporabi prilagojeno načrtovanje optičnega merilnega sistema.



Sl.3.1: Zgradba (presek) tipične silicijeve fotodiode

Osiromašena plast (ang., 'depleted region') je področje v katerem je koncentracija prostih nabojev močno zmanjšana (v primerjavi z osnovno plastjo polprevodnika), zato v tem področju svetlobno sevanje ionizira polprevodnik in ustvari pare elektron–vrzel, ki nato potujejo proti elektrodi z nasprotnim potencialom. Debelina osiromašene plasti se spreminja z napetostjo: brez napetosti je ta plast omejena na tenko območje ob P-N spoju, z večanjem zaporne napetosti pa se pogloblja in širi v silicijevo N osnovo. Pri zadosti visoki zaporni napetosti se osiromašena plast poglobi vse do N+ difuzijske plasti. Takrat pravimo da je dioda popolnoma osiromašena. Neosiromašena plast je delno prevodna, zato je praktično celoten padec napetosti prisoten na osiromašeni plasti.

Sevanje, naj si bo to v obliki elektromagnetnega valovanja, ali hitrih visokoenergijskih subatomskih delcev, vpliva na polprevodniški material na več različnih načinov; s stališča fotodiodnih ojačevalnikov nekateri od teh vplivov niso toliko zanimivi, zato se z njimi ne bomo podrobneje ukvarjali (med temi vplivi so, denimo, poškodbe v kristalni strukturi polprevodnika obsevanega z veliko gostoto težkih delcev, kot so nevtroni protoni, ali alfa-delci, pojavi elektromigracije dopantov v polprevodniku, in še nekateri podobni pojavi). Zanima nas predvsem kako se polprevodnik odziva na elektromagnetno sevanje v spektralnem območju od infrardečega sevanja do žarkov γ .

Sevanju izpostavljena polprevodniška snov sprošča elektrone v sorazmerni odvisnosti od valovne dolžine, gostote, ter časa obsevanja. Za posamični energijski kvant W_f obstaja verjetnost η_q (kvantni izkoristek snovi) da bo sprostil en par elektron–vrzel le, če je njegova energija večja od energije prepovedanega pasu W_g . V siliciju je $W_g = 1.1$ eV, kar ustreza fotonu z valovno dolžino $\lambda = 1126$ nm, kot sledi iz enačb (1.5) in (1.7). Verjetnost η_q v siliciju je okoli 80% in predstavlja razmerje med povprečnim številom fotonov, ki tvorijo par elektron–vrzel, in številom vpadnih fotonov. Preostali fotoni bodisi predirajo skozi snov brez interakcije, bodisi

interagirajo s prostimi elektroni ali atomi kristalne strukture snovi, ter povečajo njihovo notranjo energijo (ki se odraža v višji povprečni temperaturi snovi).

Pri višjih energijah v siliciju prevladujejo reakcije neelastičnih trkov z elektroni in elastični trki z atomi kristalne strukture. V prvem primeru elektroni absorbirajo zadostno energijo (1.1 eV) za prehod iz valenčnega pasu v prevodni energijski pas. Vsak tako pospešen elektron pusti za seboj vrzel, a gre za začasen pojav, ki traja do ponovne rekombinacije nabojev; temu času pravimo povprečna življenska doba manjšinskih nosilcev naboja, τ_q , ki v siliciju (brez od zunaj pritisnjene napetosti) znaša okoli 2–3 μ s. Po tem času elektron spet 'pade' v kako drugo vrzel, in vrzel zasede kak drug elektron, ki pride iz prevodnega pasu. Ob tem elektroni oddajo odvečno energijo v obliki novih fotonov, katerih frekvenca (torej tudi energija) je ustrezno nižja od prvotnega fotona, ki je povzročil nastanek para elektron–vrzel.

Če je $W_r > W_g$, lahko pride do sekundarnih ionizirnih učinkov, ko pospešeni elektron pridobi dovolj energije da odrine še kakšnega. Pri $W_r > 15$ eV je že dovolj energije da reakcije v kristalni mreži izvržejo nek silicijev atom iz svoje ravnovesne lege in s tem trajno poškoduje kristal. Prisotnost takih poškodb vpliva na skrajšanje življenske dobe manjšinskih nosilcev naboja na ~ 0.1 μ s, ali manj, v odvisnosti od upornosti silicija in gostote fotonov. Vendar kljub poškodbam kristal lahko še naprej deluje kot detektor, ker življenska doba nosilcev nima večjega pomena, ker ne vpliva na tvorbo parov, zlasti ko je kristal pod zaporno noapetostjo.

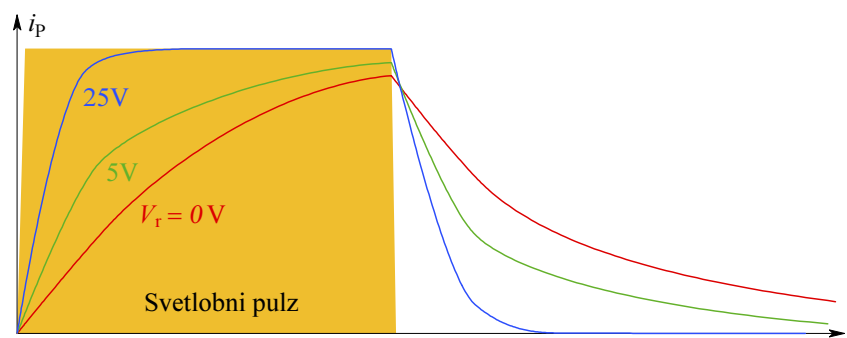
Svetloba, z energijo fotonov med 1.1 eV in 4 eV (torej z valovno dolžino med 1100 in 300 nm), se v siliciju absorbira in večina absorbirane energije se porabi za tvorbo parov elektron–vrzel. Ob neprekinjenem obsevanju se naboj nabira na N, oziroma P plasti, in ustvari električni potencial. Temu pravimo foto-napetostni način delovanja. Če je intenziteta svetlobe zadosti velika da potencial zraste nad vrednostjo potencialne barijere P-N spoja, se začnejo naboji rekombinirati bistveno hitreje, kar povzroči notranji tok v diodi. Ta pojav je razlog za nelinearnost napetosti v odvisnosti od svetlobe v foto-napetostnem načinu delovanja. Če bi fotodiodo priključili na ampermeter, ter tako omogočili rekombinacijo nabojev po zunanjem tokorogu, bi videli da teče foto-tok zmeraj v zaporni smeri diode.

Za fotone z valovno dolžino daljšo od 1100 nm je silicij prozoren in svetloba ne generira naboja, med tem ko fotone z valovno dolžino manjšo od 300 nm absorbira že vrhna, ~ 100 nm debela plast, pa še stekleni pokrov ohišja fotodiode v UV območju ni prozoren.

S svetlobo ustvarjeni naboj se mora prebiti na površje da ga zajame elektroda. Vendar je električno polje kot posledica ustvarjenega naboja majhno, zato elektroni pridobijo razmeroma nizke hitrosti. Zaradi tega narašča tok počasi in odzivni čas na spremembo osvetlitve je dolg. Poleg tega, če elektron potuje dalj časa skozi plast, bo večja verjetnost da se nekje vmes rekombinira (zasede vrzel, ki jo je zapustil drug elektron), kar poslabša linearnost.

Zvišanje zaporne napetosti poglobi osiromašeno plast, ter poveča električno polje, le-to pa grnerirani naboj pospeši do višje hitrosti. Temu pravimo foto-prevodno delovanje. Za hitrejši elektron je verjetnost da se ponovno ujame v kakšno vrzel manjša, zato bo povprečna prosta pot elektronov daljša in prehod osiromašene plasti bo hitrejši. Zato tudi tok hitreje sledi spremembi osvetljenosti.

Dokler je zaporna napetost razmeroma nizka, denimo 5 V, le naboj ustvarjen v osiromašeni plast pride do elektrod hitro, med tem ko naboj ustvarjen v neosiromašeni N osnovi ob nizkem električnem polju v tem delu silicija potrebuje ustrezno več časa da pride v osiromašeno plast, kjer bo bolj pospešen. Zaradi tega ima tokovni odziv dve komponenti, hitrejšo, a z manjšo amplitudo, in počasnejšo, s katero zraste do končne vrednosti odziva. Ob zadosti visoki zaporni napetosti, denimo 25V, je dioda že popolnoma osiromašena, in odziv bo hiter, kot ponazarja [Sl.3.2](#). Povečanje zaporne napetosti nad vrednostjo potrebno za popolno osiromašenje le malenkostno pohitri odziv, vse dokler napetost ne povečamo do vrednosti pri kateri pride do plazovitega preboja ('avalanche'), ko vsak elektron ustvari zaradi svoje velike hitrosti še nove elektrone. Če napetost povečamo še bolj, pride do plazovitega preboja že zaradi jakosti električnega polja samega, tudi brez osvetlitve.



Sl.3.2: Pulzni odziv v odvisnosti od zaporne napetosti. Brez napetosti je odziv počasen, in ima dolg relaksacijski čas po koncu svetlobnega pulza. Pri nizki zaporni napetosti je fotodioda le delno osiromašena in tok narašča hitro v osiromašeni plasti, nato pa počasi v prevodni plasti. Popolnoma osiromašena fotodioda ima hiter odziv tako pri naraščanju, kot pri pojemanju toka.

Probleme natančnosti, linearnosti in hitrosti odziva bomo podrobneje obravnavali ob analizi fotodiodnih ojačevalnikov. Najprej pa si oglejmo definicije pomembnejših fotodiodnih parametrov.

1) Spektralni odziv fotodiode, $S(\lambda)$

Vsaka fotodioda ima svoj karakteristični spektralni odziv. Spektralni odziv je odvisnost jakosti električnega toka fotodiode od valovne dolžine vpadne svetlobe (oziroma ftonske frekvence, c/ν). Relativni spektralni odziv je ponavadi podan normirano na tisto jakost toka, ki pri določeni ftonski valovni dolžini λ_m ima maksimalno vrednost; večinoma je podan v grafični obliki (kot na [Sl.1.2](#)). Absolutni spektralni odziv dobimo če grafične vrednosti pomnožimo z občutljivostjo fotodiode.

2) Občutljivost fotodiode, S_{\max}

Občutljivost fotodiode je razmerje med električnim tokom fotodiode I_P in močjo vpadnega sevanja P , ki ta tok generira, izraženo v [A/W]:

$$S_{\max} = \frac{I_P}{P} \Bigg|_{\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_m} \left\{ \frac{dS(\lambda)}{d\lambda} \right\} = 0} \quad (3.1)$$

Občutljivost definiramo pri taki valovni dolžini λ_m , kjer je $S(\lambda_m)$ največja.

3) Kvantni izkoristek, η_q

Kvantni izkoristek je razmerje med številom s svetlobo ustvarjenih elektronov ali vrzeli in številom vpadnih fotonov, $\eta_q = N_e/N_\gamma$. Ponavadi se izraža pri valovni dolžini λ_m pri kateri je $S(\lambda_m)$ največji, običajno v odstotkih [%]; pri silicijevih fotodiodah v povprečju lahko računamo s $\eta_q \approx 80\%$. Sicer pa kvantni izkoristek narašča z višanjem frekvence svetlobe (oziroma krajšanjem valovne dolžine). Približno velja:

$$\eta_q(\lambda) = \frac{\lambda_{eV} \cdot S(\lambda_m)}{\lambda} \times 100 [\%] \quad (3.2)$$

kjer je $\lambda_{eV} = 1240$ nm, valovna dolžina fotona z energijo 1 eV (v vacuumu). Kvantni izkoristek izkazuje zapleteno temperaturno odvisnost: pri daljših valovnih dolžinah s temperaturo narašča, pri krajših valovnih dolžinah pa se s povečanjem temperature zmanjšuje.

4) Vdorna globina, d_p , refleksija in absorpcija svetlobe

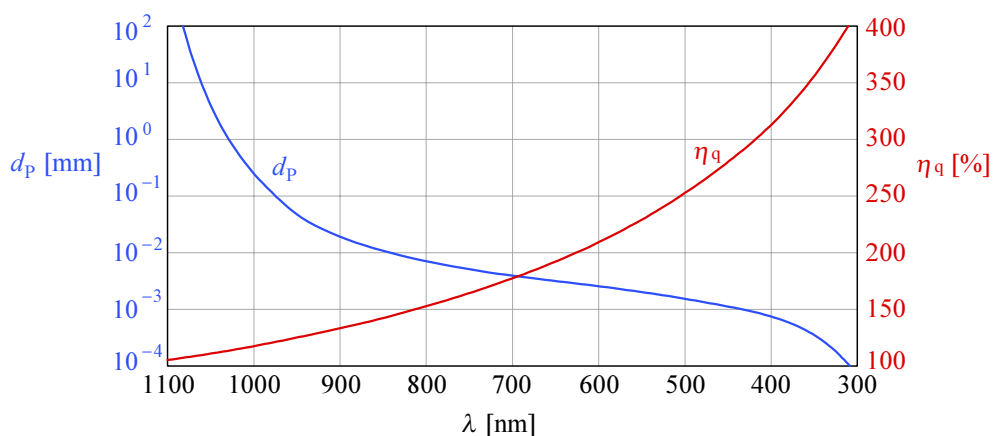
Svetloba, ki pada na površino snovi se delno reflektira, delno pa absorbira v snovi. Reflektirani del svetlobe izrazimo kot:

$$\rho_a(\lambda) = a(\lambda)\rho_0 \quad (3.3)$$

kjer je ρ_0 gostota vpadnega svetlobnega toka, a pa je odbojnost ('albedo'); ta je odvisna od barve površine in njene hrapavosti, ter od valovne dolžine. Večina fotodiod pri navpičnem vpadnem kotu ima neznamenit albedo, z vpadnim kotom pa se ta poveča predvsem zaradi prozornega pokrova ohišja in tenke steklene pasivizacijske plasti na površini polprevodnika. Preostali del svetlobe $[1 - a(\lambda)]\rho_0$ se v snovi absorbira. Pri absorpciji (Beerov zakon, *August Beer*, 1825–1863) gostota svetlobnega toka ρ z globino eksponencijano pojema:

$$\rho(d_p, \lambda) = [1 - a(\lambda)]\rho_0 e^{-\mu(\lambda)d_p} \quad (3.4)$$

kjer je $\mu(\lambda)$ [m^{-1}] od vrste snovi ter njene gostote odvisen absorpcijski koeficijent (oziroma absorpcijski spekter), d_p pa je vdorna globina in $e = 2.71828\dots$ je Eulerjevo 'naravno' število (*Leonhard Euler*, 1707–1783).



SI.3.3: Tipične odvisnosti vdorne globine d_p in kvantnega izkoristka η_q od valovne dolžine. Spektralna občutljivost $S(\lambda)$ je zmnožek funkcijskih odvisnosti $d_p(\lambda)$ in $\eta_q(\lambda)$.

Pri določeni valovni dolžini λ plast snovi z debelino:

$$d_{P(1/e)} = \frac{1}{\mu(\lambda)} \quad (3.5)$$

oslabi vpadni svetlobni tok na vrednost $1/e$. Tako absorpcijo ima 20 cm debela steklena plošča pri valovni dolžini 430 nm. Pri valovnih dolžinah, ki so primerljive z razdaljo med atomi polprevodnika, znaša vdorna globina nekaj valovnih dolžin, pri večjih valovnih dolžinah pa le del valovne dolžine.

5) Kratkostični tok, I_{sc} in odprtozančna napetost, V_{oc}

Kratkostični tok je s svetlobo povzročen električni tok, ki ga fotodioda odda v breme z upornostjo $R_L = 0$. Ta tok je približno sorazmeren površini fotodiode (pri enaki intenziteti svetlobe). Ta podatek včasih imenujemo 'občutljivost za belo svetlobo', merimo ga pa pri osvetlitvi z žarnico z žarno nitko iz wolframa, segreto na enakovredno barvno temperaturo sevanja $T = 2856$ K.

Odprtozančna napetost je napetost, ki jo ustvari fotodioda pri enakih osvetlitvenih pogojih, če je obremenjena z $R_L = \infty$ (v praksi zadošča če ima napetostni merilnik vhodno upornost vsaj $10 \text{ M}\Omega$). Vrednost te napetosti je za posamično fotodiodo konstanta in ni odvisna od njene površine.

6) Temni tok, I_d , efektivna vzporedna upornost, R_{sh} , in šum

Temni tok teče skozi popolnoma zatemnjeno fotodiodo, ob prisotnosti zaporne napetosti V_r . Ta tok je poglavitni vir šuma. Če pa zaporne napetosti ni, ali pa je zelo majhna, je poglavitni vir šuma efektivna vzporedna upornost, ki jo določimo z meritvijo temnega toka pri majhni zaporni napetosti $V_r = 10 \text{ mV}$:

$$R_{sh} = \frac{V_r}{I_d} [\Omega] \quad (3.6)$$

Šum je takrat primerljiv termičnemu šumu navadnega upora enake vrednosti, efektivno napetost šuma pa izračunamo iz termodinamičnih zakonitosti (*Walter H. Schottky*, 1886–1976, *John B. Johnson*, 1887–1970), *Harry Nyquist*, 1889 – 1976) po relaciji:

$$e_N = \sqrt{4k_B T R_{sh} \Delta f} [\text{V}] \quad (3.7)$$

kjer je $k_B = 1.3806505 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ vrednost Boltzmannove konstante (*Ludwig Eduard Boltzmann*, 1844–1906), T je absolutna temperatura v kelvinih [K], Δf pa je frekvenčni pas znotraj katerega želimo šumno napetost ovrednotiti. Pri zapornih napetostih $V_r > 1 \text{ V}$ poleg Johnsonovega (termičnega) šuma (3.7) nastopajo še druge komponente šuma: nizkofrekvenčni '1/f' šum (ang., 'flicker noise'), Schottkyjev ('popcorn' ali 'shot') šum, visokofrekvenčni ('excess') šum. Za tok Schottkyjevega šuma (ki ga včasih imenujejo po značilnem pokanju kot pri pokovkah ali poku šibrovke) velja:

$$i_s = \sqrt{2 q_e I_d \Delta f} [\text{A}] \quad (3.8)$$

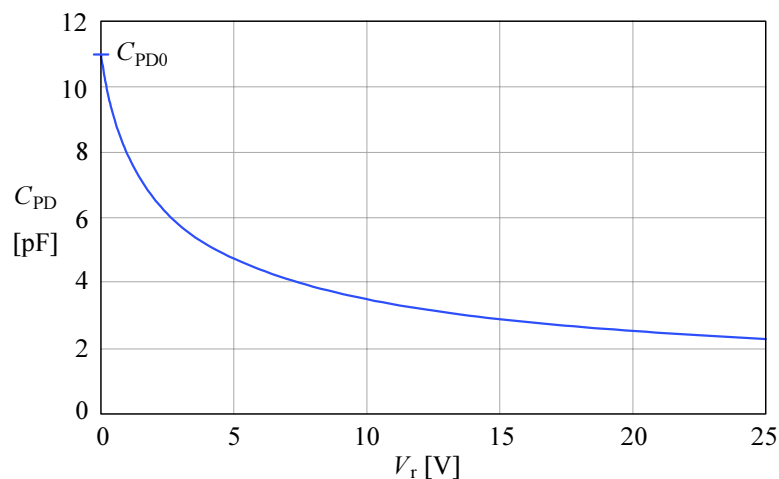
Temni tok, oziroma efektivna vzporedna upornost, ter seveda šum, omejujeta natančnost meritev pri zelo nizkih osvetlitvah.

7) Kapacitivnost P-N spoja, C_j

Vsak P-N spoj s svojimi elektrodami in koncentracijo naboja v polprevodniku oblikuje ploščatemu kondenzatorju podobno geometrijsko strukturo, ki se kaže kot parazitna spojna kapacitivnost C_j ('junction') na priključkih diode. Poleg elektrod, ki tvorijo kapacitivnost v običajnem pomenu, znotraj polprevodnika pri dopiranju nastajajo 'žepi' neenakomerne koncentracije dopantov, znotraj katerih se generirani naboj lahko ujame za nekaj časa in s tem lokalno spremeni lasnosti polprevodnika. Ta efektivna kapacitivnost povzroča več različnih nezaželenih učinkov in je eden pglavitnih parametrov, ki jih je treba upoštevati pri načrtovanju fotodiodnih ojačevalnikov (ogrozi lahko njegovo stabilnost, enakomernost frekvenčnega odziva, poveča šum in zniža zgornjo frekvenčno mejo sistema; te probleme bomo bolj podrobno obravnavali v naslednjem poglavju). Čeprav je razmeroma majhna (od nekaj pF do nekaj 100 pF, odvisno od površine fotodiode), C_j upočasni električni odziv (hitrost naraščanja toka), ker se s svetlobo ustvarjen naboj najprej tam kopiči. Druga nerodna lasnost je da je C_j največja kadar na diodi ni zaporne napetosti, z večanjem le te pa se zmanjšuje po relaciji:

$$C_j(V_r) = \frac{C_{j0}}{\left(1 + \frac{V_r}{V_j}\right)^{m_c}} \text{ [F]} \quad (3.9)$$

Tukaj je C_{j0} vrednost C_j brez zaporne napetosti ($V_r = 0$), V_j je efektivni potencial P-N bariere, ki znaša pri silicijevih fotodiodah ~ 1.12 V, eksponentni koeficient m_c pa je določen z obliko barijere, in znaša od $1/2$ za strme P-N prehode do $1/3$ za bolj položne prehode (pri katerih se koncentracija dopantov spreminja v širšem pasu). Vrednost C_j merimo v faradih, [F] = [As/V] (*Michael Faraday*, 1791–1867).



SI.3.4: Kapacitivnost v odvisnosti od zaporne napetosti

Pri fotodiodah z zelo majhno vrednostjo C_j je treba biti pozoren tudi na razsejane kapacitivnosti kontaktov proti ohišju in med povezavami na tiskanem vezju, ter vhodno kapacitivnost samega ojačevalnika, ki so lahko vse podobnega velikostnega reda (0.5–2 pF).

8) Zgornja mejna frekvenca, f_h

Zgornja mejna frekvenca je tista frekvenca modulacije svetlobne intenzitete pri kateri pade izhodna električna moč na $1/2$ moči, izmerjene pri neki nižji frekvenci, denimo 1 kHz. Ker je moč sorazmerna s kvadratom toka ($P \propto I^2$) je f_h frekvenca pri kateri pade tok na $\sqrt{2}/2$ (-3 dB) vrednosti izmerjene pri nizki frekvenci. Na zgornjo frekvenčno mejo vpliva mobilnost nosilcev naboja, ki je odvisna od efektivne proste poti naboja v polprevodniku in koncentracije dopantov. Vendar ima dominanten vpliv spojna kapacitivnost C_j skupaj z upornostjo bremena R_L :

$$f_h = \frac{1}{2\pi C_j R_L} \text{ [Hz]} \quad (3.10)$$

Meritev opravimo z uporabo hitre laserske diode ($\lambda = 830$ nm), ki jo električno moduliramo s sinusnim valovanjem, ter njeno svetlobo usmerimo na fotodiodo, ki je priključena na standardno breme $R_L = 50 \Omega$.

9) Vzponski čas, t_r

Vzponski čas je parameter, ki je pomemben pri zaznavi impulzne modulacije, ko se intenziteta vpadne svetlobe skokoma spremeni. Vzponski čas je definiran kot časovna razlika, ki je potrebna da se izhodni tok spremeni od 10% do 90% končne vrednosti:

$$t_r = (t_{90\%} - t_{10\%}) \text{ [s]} \quad (3.11)$$

Pogoj pa je da se intenziteta vpadne svetlobe spremeni vsaj $10\times$ hitreje. Meritev opravimo podobno kot za zgornjo mejno frekvenco, z lasersko diodo, ki jo električno moduliramo z daljšimi pravokotnimi pulzi, in s fotodiodo priključeno na upornost bremena $R_L = 50 \Omega$. Ker ima tak sistem le en pol v prenosni funkciji, pričakujemo odziv oblike:

$$i(t) = i(t_k) \left(1 - e^{-\frac{t}{C_j R_L}} \right) \quad (3.12)$$

kjer je t_k dolžina modulačijskih pulzov, $i(t_k)$ pa je končna vrednost izhodnega toka fotodiode, obenem pa mora biti $t_k \geq 5 C_j R_L$. Če v izraz (3.12) vstavimo $i(t_1) = 0.1 i(t_k)$ in $i(t_2) = 0.9 i(t_k)$, matematično zelo preprosto pokažemo da je v tem primeru vzponski čas enak:

$$t_r = 2.2 C_j R_L \quad (3.13)$$

Produkt $\tau = C_j R_L$ imenujemo karakteristična časovna konstanta sistema. Za sisteme z enim samim polom, a tudi za večpolne, če so poli razporejeni kot pri Besselovih (*Friedrich Wilhelm Bessel*, 1784–1846) polinomih, je med vzponskim časom in zgornjo frekvenčno mejo preprosta povezava, ki jo pogosto srečamo v literaturi:

$$t_r \cdot f_h \approx 0.35 \quad (3.14)$$

Pri nekaterih fotodiodah sta vzponski in vpadni čas lahko različna, predvsem zaradi določenih nelinearnih učinkov ko se napetost na fotodiodi spreminja z osvetlitvijo; te učinke večinoma lahko precej zmanjšamo z višanjem zaporne

napetosti in zmanjšanjem upornosti bremena, oziroma z uporabo tokovno–napetostnega pretvornika.

Večinoma pri fotodiodah z veliko površino vpliva na t_r , oziroma f_h , predvsem kapacitivnost fotodiode C_D in zunanja impedanca bremena R_L . Vendar imajo mnogi sodobni ojačevalniki tako visoko lastno zgornjo mejno frekvenco, da je njihova efektivna vhodna impedanca (v tokovno–napetostni vezavi je to impedanca bremena fotodiode) 0.1Ω , ali manj. Ob definicijah za t_r in f_h bi potem utegnili pomisliti, da se v tem primeru t_r zniža (in f_h zviša) sorazmerno zmanjšanju R_L , pa ni tako. Dejansko je vzponski čas foto-toka omejen z mobilnostjo elektronov in vrzeli v osiromašeni plast, ter z efektivno debelino te plasti in zaporno napetostjo.

Drugače pa je pri fotodiodah z majhno površino. Če za primer vzamemo fotodiodo SFH203, katere aktivna površina je $A = 1 \text{ mm}^2$, in kapacitivnost PN-spoja $C_{D0} = 11 \text{ pF}$ (brez zaporne napetosti), ter vzponski čas $t_r = 5 \text{ ns}$, bi ob bremenu $R_L = 50 \Omega$ po definicijah za t_r in f_h napačno pričakovali vrednosti $2.2C_D R_L = 1.2 \text{ ns}$, oziroma $1/2\pi C_D R_L = 289 \text{ MHz}$. V resnici pa dominira $t_r = 5 \text{ ns}$ (posledično $f_h \approx 70 \text{ MHz}$).

Kljub temu je tudi pri fotodiodah z majhno površino zaželjeno, da je obremenjena s kar se da nizko efektivno impedanco, predvsem zaradi linearnosti in stabilnosti sistema. Delno pa je razlog tudi hitrejši odziv sistema, ker vsaka še tako majhna kapacitivnost, če jo moramo polniti in prazniti z omejeno velikostjo toka, upočasni sistem neposredno, pa tudi posredno prek potrebne večje kompenzacijske kapacitivnosti v povratni zanki.

10) Šumu enakovredna moč, P_N

Šumu enakovredna moč (angl., ‘noise equivalent power’, NEP), je tista moč vpadne svetlobe, ki bi povzročila enako izhodno napetost kot je efektivna (‘rms’) amplituda šuma fotodiode. Drugače povedano, je to svetlobna jakost, ki je potrebna da dobimo razmerje $\text{signal}/(\text{signal}+\text{šum}) = 1/2$. P_N se običajno podaja pri valovni dolžini λ_m , pri kateri je spektralni odziv maksimalen. Glede na to da je šum sorazmeren korenu iz širine frekvenčnega pasu, $\sqrt{\Delta f}$, glej enačbo (3.7), izkazujemo P_N v normiranem frekvenčnem pasu 1 Hz:

$$P_N [\text{W}/\sqrt{\text{Hz}}] = \frac{i_N [\text{A}/\sqrt{\text{Hz}}]}{S(\lambda_m) [\text{A}/\text{W}]} \quad (3.15)$$

K celotnemu šumu, ki ga moramo upoštevati, prispeva svoj delež tudi termični šum upornosti bremena, vhodni šum ojačevalnika, ter pasovna širina prenosne funkcije sistema. Celotni šum je enak korenu iz vsote kvadratov posamičnih šumnih komponent, ob predpostavki da procesi generiranja šuma niso med seboj korelirani.

11) Največja dovoljena zaporna napetost, $V_{r,\text{max}}$

Kot smo že pojasnili na začetku, zaporna napetost je pri fotodiodah pogosto zaželjena, ker izboljša hitrost odziva in linearnost. Vendar vsaka polprevodniška dioda nad maksimalno zaporno napetostjo začne močno prevajati tok, ter sproži izredno povečanje toplote v P-N spoju, zaradi katere se ta lahko trajno poškoduje, ali celo uniči. Proizvajalci merijo to napetost tako

da omejijo tok enosmernega izvora na $1\ \mu\text{A}$ in počasi dvigujejo napetost dokler ne dosežejo praga. Nato največjo dovoljeno napetost določijo na nekoliko nižjo vrednost (5–10%). Toda zaradi proizvodnih toleranc ne smemo trajno prekoračiti največje dovoljene zaporne napetosti (razen če tok skozi fotodiodo omejimo z veliko upornostjo; to izkoriščamo v posebnem načinu delovanja, ko kratek svetlobni pulz povzroči plazovit preboj [‘avalanche’]).

Tako kot pri vseh polprevodnikih, tudi pri fotodiodi večina naštetih parametrov kaže močno temperaturno odvisnost, nekateri pa tudi medsebojno soodvisnost, zaradi česar je vsak posamezni tip fotodiode rezultat določenih kompromisov optimizacije enega sklopa parametrov na račun drugih. Zato je tudi izbor posamezne fotodiode pogosto odvisen od vrste meritve, ki jo želimo opraviti. Prav tako je električno povezavo med fotodiodo in elektronskim ojačevalnikom nujno optimizirati glede na zahtevano natančnost, hitrost odziva, ter namen meritve.

Poznamo tudi PIN fotodiode, ki, za razliko od običajnih PN fotodiod, vsebujejo še eno, razmeroma debelo I-plast (‘intrinsic’, osnovno, nedopirano plast) vmes med N^+ in P^+ dopiranimi plastema. Zaradi I-plasti imajo PIN fotodiode nekatere pomembne prednosti, predvsem večjo občutljivost, ki narašča sorazmerno debelini I-plasti, večjo hitrost odziva, manjšo parazitno kapacitivnost, večjo uoprnost v zaporni smeri, večjo prebojno napetost, itd. Poleg tega njihova uporaba ni omejena na nizke temperature, delujejo lahko v širokem območju od -55°C do $+150^\circ\text{C}$, pa še proizvodne tolerance posameznih parametrov so manjše prav zaradi razmeroma debele I-plast.

Silicijeve PIN diode so uporabne ne le kot detektorji svetlobe, pač pa tudi kot detektorji sevanja γ , ter sevanja v obliki hitrih visokoenergijskih delcev (elektroni, protoni, nevtroni, delci α , različni mezoni). V te namene so bili prvič uporabljene že okoli leta 1965. PIN diode detektirajo sevanje in generirajo večino foto-toka med časom, ko se sevalni impulz absorbira predvsem v I-plasti.

Polprevodniške fotodiode so lahko izdelane iz različnih osnovnih materialov, ki jim dodamo ustrezne primesi (dopante) in s tem ustvarimo PN ali PIN spoj. Debelino posameznih plasti in koncentracijo primesi določamo glede na željeni kvantni izkoristek, občutljivost, karakteristično valovno dolžino in spektralno širino. Večinoma je kot osnova uporabljen silicij (Si), ki je element IV skupine periodnega sistema. Kot primesi so pretežno uporabljeni elementi iz III in V skupine, kot so galij (Ga), indij (In), aluminij (Al), fosfor (P) in arsen (As). Lahko pa tudi kombinacija elementov III in V skupine tvori že sama osnovni material, denimo GaAs, GaP, GaInP, GaAlAs, itd. Za UV področje ponavadi uporabljamo silicijev karbid, SiC, ali lutecijev silikat, LuSi.

4. Polprevodniške fotodiode v elektroniki

Ob zajetju fotona (svetlobnega kvanta), katerega energija je večja od 1.1 eV, nastane v fotodiodi par elektron–vrzel, ali pa ne. Razmerje med številom generiranih elektronov in številom vpadnih fotonov imenujemo kvantni izkoristek, η_q , ki je ponavadi 80–90%. Kvantni izkoristek sicer narašča s frekvenco fotonov, oziroma njihovo energijo, toda vdorna globina fotonov se s frekvenco manjša. Fotoni vidne svetlobe imajo energijo v območju 1.4–2.8 eV. En elektron-volt [eV] je energija, ki jo pridobi elektron, če ga pospešimo v polju z napetostno razliko $\Delta V = 1 \text{ V}$; po enačbi (7) ustreza enemu elektron-voltu energija $W_1 = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$, ker je naboj elektrona $q_e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ As}$. Verjetnost da bo foton ustvaril par elektron–vrzel v kristalu polprevodnika je odvisna od interakcijskega preseka na kvantnomehanski ravni, oziroma od vezalne energije elektronov v zunanjih lupinah atomov, ki tvorijo polprevodniško kristalno mrežo. Foton γ nosi energijo W_γ , ki je določena z njegovo frekvenco, po relaciji $W_\gamma = h\nu = hc/\lambda$, kjer je h Planckova konstanta (glej [Tabelo 1](#)), ν pa je frekvenca fotona, ki za vidno svetlobo znaša okoli 10^{15} Hz .

S svetlobo ustvarjeni naboj potrebuje določen čas da prepotuje debelino polprevodnika in prispe na elektrode. S tem časom pa je povezana najvišja odzivna frekvenca električnega toka, f , ki še sledi modulaciji svetlobe (če se intenziteta, oziroma število fotonov, periodično spreminja). Mejna frekvenca f_h , ko efektivni tok pade na polovico nominalne vrednosti, se pri večini silicijevih fotodiod nahaja v območju med $\sim 100 \text{ kHz}$ in $\sim 10 \text{ GHz}$; posebne izvedbe fotodiod sledijo svetlobni modulaciji tudi nad 100 GHz . Da se izognemo zmedi, fotonsko frekvenco označujemo z ν , modulacijsko frekvenco pa s f .

Energija fotonov s frekvenco narašča, toda vdorna globina fotonov v snov se s frekvenco hitro zmanjšuje, zato izkoristek doseže pri neki frekvenci maksimum in z nadaljnjim višanjem frekvence pada. V UV območju zmanjševanju izkoristka dodatno prispeva še stekleno ali plastično ohišje fotodiode. Potek izkoristka je izražen s spektralno funkcijo $S(\lambda)$, ki pri silicijevih fotodiodah ima maksimum v rdečem ($\lambda = 635\text{--}780 \text{ nm}$) ali IR območju ($780\text{--}1200 \text{ nm}$). Spektralna funkcija je ponavadi normirana na vrednost maksimuma, zato je izraz za svetlobno-tokovno pretvorbo podan kot produkt maksimalne občutljivosti, spektralne odvisnosti in vpadne svetlobne moči na aktivno površino:

$$I_p = S(\lambda_{\max}) \cdot S(\lambda) \cdot P_p \quad (4.1)$$

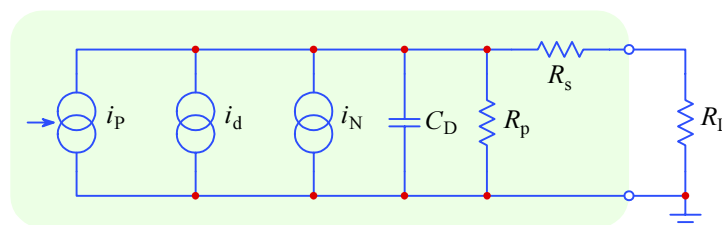
kjer je $S(\lambda)$ brez dimenzij, foto-tokovno občutljivost $S(\lambda_{\max})$ pa večinoma izrazimo v amperih na watt [A/W], svetlobno moč P_p pa v [W]. Včasih pa je $S(\lambda_{\max})$ podana v nanoamperih na lux [nA/lx], takrat pač moramo ta faktor ustrezno preračunati upoštevajoč aktivno površino fotodiode. Kvantni izkoristek η_q je že upoštevan v $S(\lambda_{\max})$.

Poleg kvantnega izkoristka, občutljivosti in valovne dolžine je pri fotodiodah pomembna še vrsta drugih parametrov: napetost med valenčnima energijskima pasovoma, največja dovoljena zaporna napetost, temni tok, tok nasičenja, kapacitivnost, ter foto-aktivna površina. Večina teh parametrov kaže določene soodvisnosti in tudi temperaturne odvisnosti, zaradi česar je nujno izbrati posamezni tip fotodiode, ki najbolj ustreza zahtevani natančnosti in vrsti meritve. Nekatere najbolj pomembne parametre ene tipične fotodiode smo zbrali v [Tabeli 3](#).

Tabela 3: Tipične vrednosti pomembnejših parametrov fotodiode SFH203P

Parametri	Simboli	Vrednosti	Merske enote
Najvišja zaporna napetost	V_{rmax}	50	V
Valovna dolžina največje občutljivosti	λ_{m}	850	nm
Občutljivost ($V_{\text{r}} = 5 \text{ V}$, standardna luč A, $T = 2856 \text{ K}$)	S	9.5	nA/lx
Tokovna občutljivost ($V_{\text{r}} = 5 \text{ V}$, $\lambda = 850 \text{ nm}$, $P_{\text{p}} = 1 \text{ mW/cm}^2$)	I_{s}	6.2	μA
Največja spektralna občutljivost ($V_{\text{r}} = 5 \text{ V}$, $\lambda = 850 \text{ nm}$)	$S(\lambda_{\text{m}})$	0.62	A/W
Spektralno območje (10% S_{max})	λ	400–1100	nm
Kvantni izkoristek	η_{q}	0.89	N_{e}/N_{γ}
Foto-občutljiva površina	A	1	mm^2
Temni tok ($V_{\text{r}} = 20 \text{ V}$)	I_{rd}	1	nA
Vzponski in vpadni čas foto-toka ($R_{\text{L}} = 50 \Omega$, $V_{\text{r}} = 20 \text{ V}$, $\lambda = 850 \text{ nm}$, $I_{\text{p}} = 800 \mu\text{A}$)	$t_{\text{r}}, t_{\text{f}}$	5	ns
Kapaciteta ($V_{\text{r}} = 0 \text{ V}$, $f = 1 \text{ MHz}$, $P_{\text{p}} = 0$)	C_{p}	11	pF
Šumu enakovredna moč ($V_{\text{r}} = 20 \text{ V}$, $\lambda = 850 \text{ nm}$)	P_{N} (NEP)	2.9×10^{-14}	$\frac{\text{W}}{\sqrt{\text{Hz}}}$
Spodnja meja detekcije ($V_{\text{r}} = 20 \text{ V}$, $\lambda = 850 \text{ nm}$)	D	3.5×10^{-12}	$\frac{\text{cm} \sqrt{\text{Hz}}}{\text{W}}$
Vidni kot ($S = S_{\text{max}}/2$)	φ	± 75	$^{\circ}$

Poenostavljen električni model fotodiode kaže [SI.4.1](#). Tokovni generator i_{p} modelira svetlobno–tokovno pretvorbo. Temni tok i_{d} in efektivna vzporedna upornost R_{p} , ter šumni tok i_{N} določajo spodnjo mejo foto-občutljivosti. C_{D} , skupaj z upori R_{p} , R_{S} in R_{L} , določa hitrost odziva. R_{p} in R_{S} določata zgornjo mejo detekcije (zaradi disipacije moči).

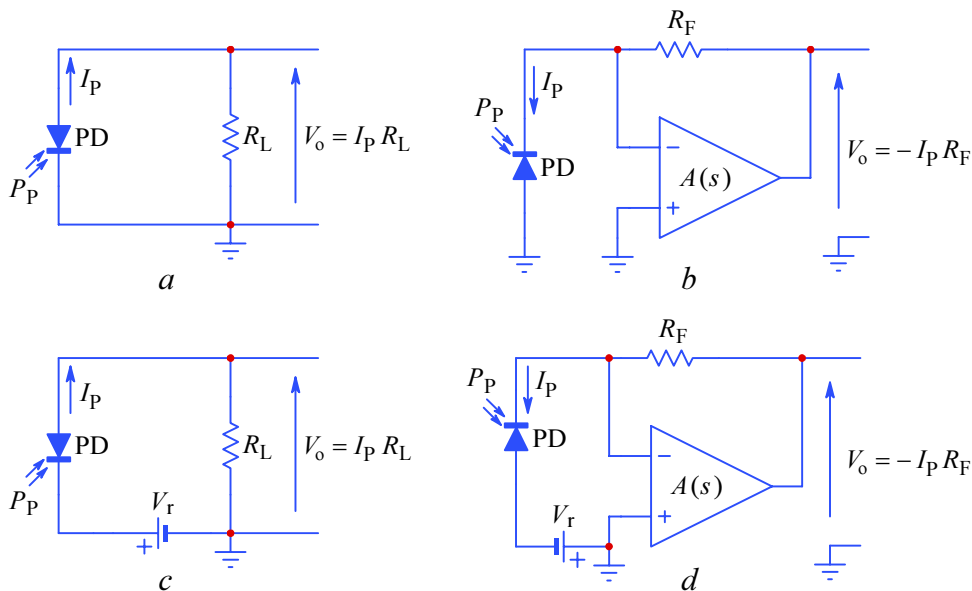


SI.4.1: Električni model fotodiode: i_{p} je od svetlobe odvisen tok, i_{d} je od zaporne napetosti odvisen temni tok, i_{N} je šumni tok, C_{D} je kapacitivnost P-N spoja, R_{p} je vzporedna upornost fotodiode, R_{S} je zaporedna upornost fotodiode, R_{L} pa je upornost zunanjega bremena. Vrednost posameznih parametrov je močno odvisna od napetosti na fotodiodi, od fotonske frekvence svetlobe, ter seveda tudi od temperature.

Razmerje R_P/R_L in izbira zaporne napetosti dopuščata štiri možne načine delovanja, [Sl.4.2](#) in [Sl.4.3](#). Foto-napetostni način *a* ob veliki upornosti bremena in brez zaporne napetosti uporabljamo le za najbolj nezahtevno detekcijo svetlobe.

Načeloma bi lahko fotodiodo uporabili kot samostojni element, [Sl.4.2a](#), ki ob osvetlitvi generira napetost (foto-napetostni način delovanja, z visoko upornostjo bremena), to napetost pa bi lahko neposredno merili z volt-metrom, ali pa ojačili z ustreznim ojačevalnikom. Žal se izkaže da tako zaznana napetost ni linearno odvisna od osvetlitve (odvisnost je približno logaritmčna).

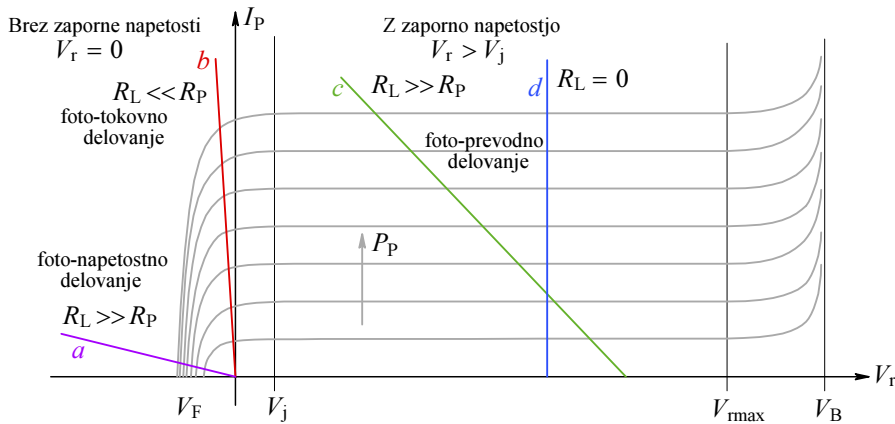
Z uporabo zaporne napetosti ob nizki upornosti bremena, [Sl.4.2c](#), se tem težavam delno izognemo, vendar na račun občutljivosti. Zato se v večini primerov raje odločimo za delovanje v foto-tokovnem načinu, kjer z invertirajočim ojačevalnikom ustvarimo zelo nizko efektivno upornostjo bremena, [Sl.4.2b,d](#). Tok fotodiode pa ojačevalnik pretvori v napetost prek napetostnega padca na uporu povratne zanke R_F .



Sl.4.3: Štirje načini delovanja fotodiode: *a*) foto-napetostno delovanje, brez zaporne napetosti ($V_r = 0$) in z upornostjo bremena mnogo večjo od efektivne vzporedne upornosti fotodiode ($R_L \gg R_p$), pri čemur je napetost na fotodiodi enaka padcu napetosti na bremenu, $V_o = I_p R_L$, in efektivna upornost fotodiode $R_p = dV_o/dI_p$; *b*) foto-tokovno delovanje, brez zaporne napetosti ($V_r = 0$) in z nizko upornostjo bremena ($R_L \ll R_p$), pri čemur je efektivna upornost bremena enaka upornosti povratne zanke ulompleno z ojačenjem odprte zanke ojačevalnika, $R_L = R_F/A(s)$; *c*) foto-prevodnostno delovanje, z zaporno napetostjo večjo od napetosti potencialne barijere P-N spoja ($V_r > V_j$) in z visoko upornostjo bremena ($R_L \gg R_p$); *d*) foto-prevodnostno delovanje, z zaporno napetostjo ($V_r > V_j$) in nizko upornostjo bremena ($R_L = 0$).

[Sl.4.3](#) prikazuje potek toka v odvisnosti od zaporne napetosti V_r na fotodiodi in moči svetlobnega toka P_p , ki pada na aktivno površino fotodiode. V območju ko ni zaporne napetosti se fotodioda polarizira v prevodni smeri z napetostjo V_F , ki je posledica generiranega naboja. Kot je razvidno iz grafa, ne napetost ne tok nista linearni funkciji osvetlitve. Šele ko zaporna napetost preseže potencialno barijero P-N spoja V_j postane tok fotodiode linearno odvisen od osvetlitve in ostaja linearen vse dokler ne doseže zaporna napetost vrednost V_{max} pri kateri je fotodioda že popolnoma osiromašena. Nadaljnje povečanje zaporne napetosti povzroči dodatno

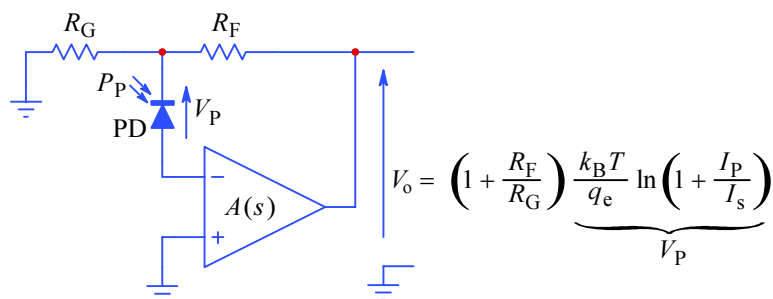
nelinearnost. Pri prebojni napetosti V_B pa se tok elektronov plazovito poveča (napetostno polje pospeši elektrone do tako visokih energij da ti lahko izbijejo na svoji poti skozi kristal nove elektrone in zaradi velike gostote toka pride do poškodbe kristalne strukture). Pri posebnih izvedbah fotodiod (ang., 'avalanche') pa ta učinek lahko izkoristimo za povečanje občutljivosti, a le če je vpadna svetloba v obliki poredko ponavljajočih se ozkih pulzov, maksimalni tok fotodiode pa omejen.



Sl.4.3: Odvisnost foto-toka od zunanje zaporne napetosti V_r in gostote svetlobnega toka ρ . Naklon delovne premice v posameznem načinu delovanja (a , b , c , d , ki ustrezajo vezjem na [Sl.4.2](#)) je obratno sorazmeren upornosti bremena.

Nakloni premic na [Sl.4.3](#) ponazarjajo (efektivne) upornosti bremena fotodiode v posameznih načinih delovanja, v odvisnosti od zaporne napetosti (oznake a , b , c in d ustrezajo delovnim pogojem na [Sl.4.2](#)).

V nekaterih primerih, ko želimo meriti osvetlitev v dinamičnem območju več velikostnih redov, je koristno če uporabimo foto-napetostni način delovanja, kjer izkoriščamo logaritmčno odvisnost fotodiodne napetosti od osvetlitve. Vendar preprosta vezava na [Sl.4.2a](#) ni primerna, ker bi potrebovali neskončno upornost R_L . Zato si pomagamo z vezavo na [Sl.4.4](#), kjer lahko izkoristimo še možnost ojačenja. Žal je tok nasičenja I_s močno odvisen od dopiranja, zato je logaritmčna zakonitost od diode do diode različna. Ta vezava je primerna le za nezahtevne statične meritve.



Sl.4.4: Foto-napetostni ojačevalnik z logaritmčno odvisnostjo napetosti od osvetlitve.

5. Kalibracija fotodiodnih ojačevalnikov

Pogosto želimo poznati razmerje med vpadno svetlobo in izhodno napetostjo fotodiodnega ojačevalnika kar se da natančno, zato da lahko izmerimo svetilnost nekega svetlobnega vira ali osvetljenost neke površine. Včasih pa nas absolutna natančnost niti ne zanima, pač pa želimo le relativno določiti zaznano svetlobo. Denimo, pri optičnih komunikacijah, ali pri daljinskih upravljalcih, želimo določiti zanesljivo mejo detekcije hitre spremembe svetlobe ob določeni konstantni svetlobi moduliranega svetlobnega vira, ter svetlobi okolice.

V obeh primerih moramo najprej določiti območje svetlobne jakosti v katerem naj fotodiodni ojačevalnik deluje. Spodnja meja občutljivosti je ponavadi odvisna od lastnega termičnega šuma fotodiode, ojačevalnika in pripadajoče enakovredne upornosti v povratni zanki ojačevalnika, pomemben pa je tudi spekter šumnega ojačenja, ki je za večino ojačevalniških topologij različen od signalnega ojačenja in nanj najbolj vpliva velikost parazitne kapacitivnosti fotodiode in razsejanih kapacitivnosti vezja. Zgornjo mejo občutljivosti pa lahko določimo sami, seveda upoštevajoč električne zmogljivosti in omejitve fotodiode in ojačevalnika. Tem problemom se bomo podrobneje posvetili v nadaljevanju, pri obravnavi posameznih ojačevalniških topologij.

V primeru da zahtevamo neko razmeroma majhno odstopanje od absolutne natančnosti, nujno potrebujemo nek standardni, dobro definirani in stabilni svetlobni vir, običajno je to 'standardni vir A' (monokromatski vir, $\lambda = 555 \text{ nm}$). Poleg tega moramo natančno določiti tudi optične parametre, kot so oddaljenost, vidni kot, itd. Z uporabo standardnega vira pustvarimo podobne merilne pogoje, kot jih bomo imeli kasneje pri meritvah, ter ob določeni intenziteti svetlobe določimo vrednost upornosti na kateri poteka tokovno-napetostna pretvorba fotodiodnega ojačevalnika. Ponavadi vrednost upornosti izberemo upoštevajoč občutljivost fotodiode na določenem delu optičnega spektra, tako da rezultira v neki celoštevilčni vrednosti izhodne napetosti za neko celoštevilčno vrednost svetlobne moči, denimo $10 \text{ mV}/\mu\text{W}$, ali kako drugače.

Kadar standardnega svetlobnega vira nimamo, si lahko pomagamo tudi s sončno svetlobo, čeprav Sonce ne sveti enakomerno (v svojem 11-letnem aktivnostnem ciklu se intenziteta sončne svetlobe spreminja celo do 2%), poleg tega pa atmosferska vlaga, koncentracija prašnih delcev in višina Sonca nad obzorjem močno vplivata tako na celotno intenziteto kot tudi na posamezne dele spektra. Zaradi tega kalibracijo s sončno svetlobo opravimo najraje opoldne jasnega dne. Sončna svetloba je lahko dober kalibracijski pripomoček tudi kadar potrebujemo zaznavo šibkih svetlobnih sprememb ob močni dnevni svetlobi.

Naredimo preprost zgled.

Kot smo videli že v prvem poglavju, oddaja Sonce v vidnem delu spektra približno belo svetlobo (ta ima enako intenziteto, neodvisno od valovne dolžine), ki pa zaradi večjega sipanja pri krajših valovnih dolžinah in karakteristike človeškega očesa zgleda bolj rumeno kot belo. Prav tako je gostota pretoka svetlobne moči na razdalji ene astronomske enote (1 AU) od Sonca (srednji radij zemeljske orbite, $1.496 \times 10^{11} \text{ m}$) znaša okoli $\rho_s = 1366 \text{ W/m}^2$, toda na naših geografskih širinah zaradi sipanja in absorpcije v ozračju ta vrednost pade na $\rho_{sa} \approx 1000 \text{ W/m}^2$.

Fotodioda SFH203 ([Tabela 3](#)) ima optično aktivno površino $A_o = 1 \text{ mm}^2$, zato je celotna moč na njeni površini manjša za razmerje površin ($1 \text{ mm}^2 : 1 \text{ m}^2 = 10^{-6}$), torej bo $P_p = \rho_{sa} A_o = 0.001 \text{ W}$. Poleg tega ima SFH203 spektralni maksimum občutljivosti v bližini zgornje meje infra-rdečega območja (850 nm), občutljivost pa na obeh straneh spektra pada ([Sl.1.2](#)). Zaradi tega je povprečni spektralni odziv le okoli $S_a = 34\%$ vpadne moči bele svetlobe. Maksimum občutljivosti fotodiode pa je po navedbah proizvajalca $S_m = 0.62 \text{ A/W}$ (pri $\lambda_m = 850 \text{ nm}$).

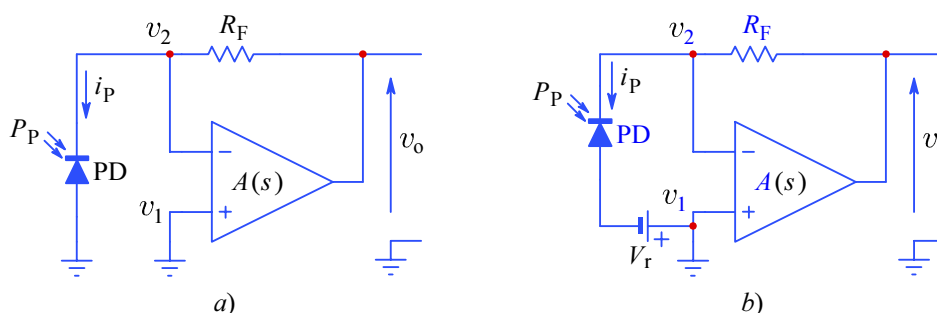
Denimo da bi radi dosegli izhodno napetost $V_o = 10 \text{ V}$, če opoldne jasnega dne obrnemo fotodiodo naravnost proti Soncu, kar glede na zgornje podatke pomeni da želimo občutljivost sistema 10 V/mW . Kakšno vrednost upornosti R_F v povratni zanki ojačevalnika ([Sl.4.2b,d](#)) potrebujemo, če upoštevamo da teče foto-tok le skozi R_F (vhodni tok ojačevalnika zanemarimo)?

$$R_F = \frac{V_o}{P_p S_m S_a} = \frac{10 [\text{V}]}{0.001 [\text{W}] \times 0.62 [\text{A/W}] \times 0.34} \approx 47 \text{ k}\Omega \quad (5.1)$$

Žal pa, kot bo to kmalu razvidno, v povratni zanki ojačevalnika potrebujemo še kaj več kot golo upornost, in tudi izbira samega ojačevalnika zahteva tehten premislek. Razmere v povratni zanki ojačevalnika nikoli niso trivijalne, toda problem je z malo truda povsem obvladljiv.

6. Analiza fotodiodnih ojačevalnikov

Na videz preprosti vezji na [Sl.6.1](#) bosta osnovni za večino fotodiodnih ojačevalnikov, ki jih bomo analizirali. V takem načinu fotodioda obratuje kot (skoraj) idealni tokovni vir, obremenjen z zelo nizko efektivno upornostjo, ki jo določa negativna povratna zanka ojačevalnika, ojačevalnik pa deluje kot trans-impedančni (tokovno-napetostni) pretvornik, s pretvornim faktorjem enakim upornosti povratne zanke, R_F . Razlika med narisanimi primeroma je le v zaporni napetosti, V_r . Ta je nujna, če je za določeno uporabo pomembnejša hitrost odziva; če pa dajemo prednost natančnosti ob zelo nizki osvetlitvi, se reverzni napetosti raje odpovemo, ker ta povzroča temni tok ([Tabela 3](#)) in dodaten šum.



Sl.6.1: Osnovna oblika trans-impedančnega fotodiodnega ojačevalnika; a) brez zaporne napetosti; b) z zaporno napetostjo (V_r).

Za razumevanje delovanja teh vezij (tudi vseh drugih, ki jih bomo obravnavali kasneje), je nujno poglobiti se v samo zgradbo operacijskega ojačevalnika. Zgradba je sicer zapletena, vendar se izkaže da jo je mogoče nadomestiti z razmeroma preprostim modelom, tako funkcionalno, kot tudi matematično. Nakratko bomo obdelali zelo enostaven primer zgradbe ojačevalnika in pokazali kako lahko posamične stopnje obravnavamo kot poenostavljene linearne bloke z elementarnimi matematičnimi funkcijami, ki skupaj tvorijo zelo preprost model.

6.1. Zgradba operacijskega ojačevalnika

Naziv ‘operacijski ojačevalnik’ izvira iz časov analognih računalnikov neposredno po drugi svetovni vojni (ko digitalni računalniki še niso bili tako široko dostopni in je celo sam predsednik korporacije IBM napovedal, da bo svetovno tržišče v prihodnosti potrbvalo k večjemu kakšnih pet digitalnih računalnikov!). Analogne računalnike so uporabljali največ pri balistiki za reševanje diferencialnih enačb, ki opisujejo gibanje izstrelka. V te namene so večje število diferencialnih ojačevalnikov z upori, kondenzatorji, tuljavami, diodami, povezovali med seboj za realizacijo različnih matematičnih operacij (seštevanje, odštevanje, množenje, deljenje, integriranje, diferenciranje, logaritmiranje, itd). Kasneje se je ime obdržalo in uveljavilo tudi za analogna integrirana vezja z enako funkcijo.

Ojačevalnik, ki ga bomo uporabili za ojačenje foto-toka, mora imeti zanemarljivo majhen vhodni tok. Ta pogoj izpolnjujejo ojačevalniki, ki imajo na vhodih tranzistorje s prenosno funkcijo odvisno le od električnega polja (‘field effect transistor’, FET), zato je vhodna impedanca lahko zelo visoka ($> 10^{12} \Omega$).

Diferencijalni ojačevalnik ojačuje razliko vhodnih napetosti z ojačevalnim faktorjem $A(s)$:

$$v_o = (v_1 - v_2) \cdot A(s) \quad (6.1)$$

Faktor ojačenja $A(s)$ se spreminja s kompleksno frekvenco $s = \sigma + j\omega$, kot občajno zapišemo v Laplaceovi teoriji kompleksnih spremenljivk (*Pierre Simon de Laplace*, 1749–1827). Zaradi enostavnosti se bomo pogosto omejili le na imaginarno os kompleksnega prostora in zapisali $s = j\omega = j2\pi f$.

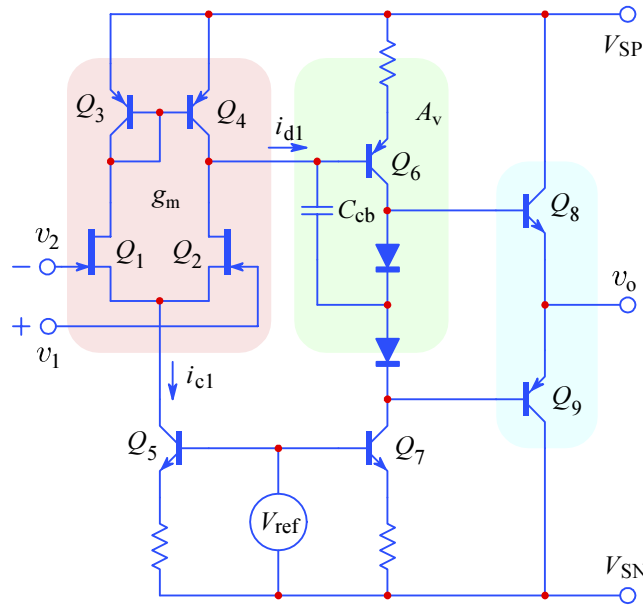
Laplace je vpeljal svoje znamenite transformacije že leta 1779, med tem ko je, neodvisno od njega, Fourier (*Jean Baptiste Joseph Fourier*, 1768–1830) objavil svojo različico 43 let kasneje. Laplaceova transformacija je bolj splošna ker zajema celotno kompleksno ravnino kot domeno pretvorbe, zato omogoča obravnavo tudi časovno neperiodičnih funkcij. Fourier pa obravnava le časovno periodične funkcije, ki jih pretvori v frekvenčno odvisne funkcije z domeno omejeno le vzdolž imaginarne osi, $j\omega$. Sveda takrat še ni bilo elektronskih ojačevalnikov, in tudi beseda ‘elektronika’ še ni obstajala, vedelo se je le za nekatere preproste električne pojave (Volta, Ampere). Laplace je svojo teorijo zasnoval kot čisto matematični problem, med tem ko je Fourier, kot general v Napoleonovi armadi, raziskoval toplotne raztezke topovskih cevi in je na osnovi meritev razširjanja toplote v kovinskih obročih prišel do svoje obravnave problema periodičnih funkcij. Elektronika se je pojavila šele leta 1904 s Flemingovim (*John Ambrose Fleming*, 1849–1945) izumom vacuumskih elektronskih (‘termionskih’) cevi (diod), ki jim je De Forest (*Lee De Forest*, 1873–1961) leta 1906 dodal še tretjo, kontrolno elektrodo (‘mrežico’), s katero je bilo mogoče modulirati tok elektronov iz katode proti anodi (‘audion’). Vpeljavo kompleksnih spremenljivk v obravnavo elektronskih vezij pa dolgujemo Heavisideu (*Oliver Heaviside*, 1850–1925), ki je tudi neodvisno od Laplacea iznašel svoj ‘kompleksni račun’ (med leti 1880–1887) za reševanje diferencijalnih enačb z uporabo vektorskega (‘fazorskega’) prikaza električnih količin in na svoj način reformuliranih Maxwellovih enačb polja, kar je uporabil pri študiju in optimizaciji (induktivni kompenzaciji dominantno kapacitivnih) telegrafskih vodov (‘telegrafske enačbe’). Heavisideov račun so mnogi ortodoksni matematiki imeli za ‘neznanstveno’ manipuliranje s številkami. Šele Campbell (*George A. Campbell*) in Pupin (*Mihajlo Idvorski Pupin*, 1858–1935) sta dokazala, da je njegova metoda pravilna, zlasti pa Bromwich (*Thomas Bromwich*), ki je dokazal povezavo med Heavisideovo metodo operatorjev in Laplaceovo transformacijo (‘Bromwichev integral’) na rigorozni matematični osnovi.

Ojačenje operacijskega ojačevalnika lahko modeliramo na osnovi njegove poenostavljene notranje zgradbe na [Sl.6.2](#) in ekvivalentne blok-sheme na [Sl.6.3](#). Operacijski ojačevalnik je večinoma zgrajen iz treh stopenj: vhodne diferencijalne transkonduktančne stopnje (‘trans-konduktanca’ ali ‘prenosna prevodnost’ je prenosna funkcija z napetostnim vhodom in tokovnim izhodom), ki ji sledita tokovno-napetostna ojačevalna stopnja, ter izhodni močnostni napetostni sledilnik.

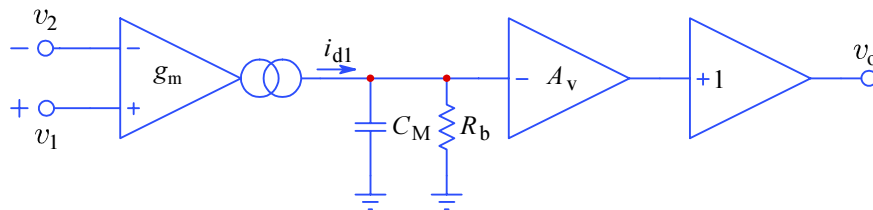
Na osnovi ekvivalentne sheme na [Sl.6.3](#) bomo najprej izpeljali ojačevalno prenosno funkcijo in ugotovili njeno frekvenčno odvisnost, kar bo podlaga za vse ostale analize ojačevalnikov. Ne bomo se spuščali v podrobnosti na ravni analize delovanja tranzistorjev, ker bi nas to odpeljalo predaleč od osnovne teme.

Najprej ugotovimo razmere pri vhodni stopnji. Zaradi uporabe jFET ali MOSFET tranzistorjev je vhodna upornost izredno visoka, med 10^{12} in $10^{15} \Omega$, tako da vhodni tok lahko zanemarimo (razen kadar s fotodiodo zaznavamo zelo šibko svetlobo). Ne moremo pa zanemariti vhodne kapacitivnosti, ki je okoli 1–5 pF, kar je v določenih priemrih primerljivo s kapacitivnostjo nekaterih fotodiod, vendar bomo to podrobneje obravnavali nekoliko kasneje. Vhodna stopnja ojačuje napetostno razliko, $v_1 - v_2$, in jo s svojo prenosno funkcijo, transkonduktanco g_m , pretvori v izhodni tok.

Za razliko od upornosti, ki jo označujemo z R (‘resistance’) in ki jo merimo v ohmih [Ω] (*Georg Simon Ohm*, 1789–1854), prevodnost (‘conductance’), ki je inverzna upornosti, označujemo z $G = 1/R$ (črka C je že rezervirana za kapacitivnost) in jo merimo v siemensih [S] (*Ernst Werner von Siemens*, 1816–1892). Ker je $R = V/I$ (razmerje napetosti in toka), bo $G = I/V$. V literaturi (pretežno ameriški) najdemo včasih enoto [mho], ali celo [\mathcal{U}], kar je sicer funkcionalno, nazorno, in celo simpatično, vendar s stališča SI nedopustno. Kot pri upornosti, kjer inkrementalno, dinamično upornost označujemo z r , tudi inkrementalno prevodnost označujemo z g . Indeks ‘m’ pa označuje medsebojno (‘mutual’) prevodnost med izvorom (‘source’) in ponorom (‘drain’) FETa.



Sl.6.2: Poenostavljena električna shema operacijskega ojačevalnika. Tranzistorja Q_5 in Q_7 skupaj z napetostno referenco V_{ref} skrbita za konstanten tok ojačevalnih podsistemov. Tranzistorja Q_1 in Q_2 izkoriščata učinek polja (FET) za visoko vhodno upornost in tvorita vhodni diferencialni par, ki ojačuje vhodno napetostno razliko $(v_1 - v_2)$, ki jo prek tokovnega zrcala, ki ga tvorita tranzistorja Q_3 in Q_4 , pretvorita v izhodni tok i_{d1} . Ta tok krmili napetostno ojačevalno stopnjo Q_6 , ki v svoji lokalni negativni povratni zanki ima kompenzacijski kondenzator C_{cb} . Napetosti na kolektorju Q_6 sledita izhodna tranzistorja Q_8 in Q_9 , ki imata napetostno ojačenje ≈ 1 in zadosti veliko tokovno ojačenje, da lahko napajata kakršno koli breme, ki ga priključimo na izhod.



Sl.6.3: Funkcionalna blok-shema modela operacijskega ojačevalnika, na katero se sklicujemo pri analizi. Diferencialna vhodna stopnja pretvori vhodno napetostno razliko $(v_1 - v_2)$ s transkonduktanco g_m v izhodni tok i_{d1} . Ta tok povzroči padec napetosti na vhodni impedanci $Z = 1/(j\omega C_M + 1/R_b)$ napetostne ojačevalne stopnje. Signal, napetostno ojačen A_v krat, krmili vhod napetostnega močnostnega sledilnika z napetostnim ojačenjem ≈ 1 (ter velikim tokovnim ojačenjem, $A_i > 100$). Kapacitivnost C_M z efektivno vhodno upornostjo baze R_b tranzistorja Q_6 skupaj določata lego dominantnega pola prenosne funkcije ojačevalnika.

Transkodukančno pretvorbo vhodne napetostne razlike v tok zapišemo kot:

$$i_{d1} = (v_1 - v_2) \cdot g_m \quad (6.2)$$

kjer je i_{d1} diferencialni tok prve ojačevalne stopnje. Tok i_{d1} teče v vzporedno vezavo C_M in R_b , ter povzroča padec napetosti, ki ga ojači druga stopnja. Kolikšna bo ta napetost pa je odvisno od skupne impedanace Z te vzporedne vezave ('impedanca' je kompleksna, frekvenčno odvisna 'upornost'). Impedanca same kapacitivnosti C_M pa je čisto imaginarna količina, ki ji včasih pravimo tudi 'reaktanca', X_C :

$$Z_C = X_C = \frac{1}{j\omega C_M} = \frac{1}{sC_M} \quad (6.3)$$

Zadnji ulomek izraža impedanco v Laplaceovem kompleksnem zapisu, kjer je na splošno $s = \sigma + j\omega$. Skupna impedanca vzporedne vezave C_M in R_b pa je inverzna vrednost vsote njenih inverznih vrednosti:

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_C} + \frac{1}{R_b}} = \frac{1}{sC_M + \frac{1}{R_b}} = R_b \frac{1}{sC_MR_b + 1} \quad (6.4)$$

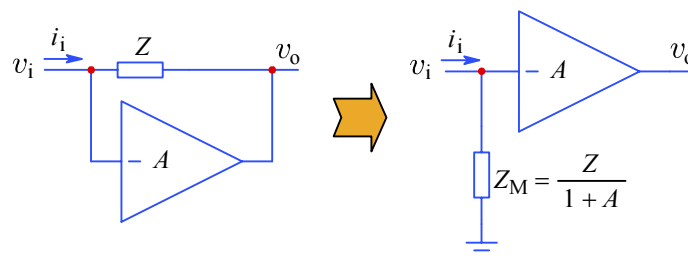
Na koncu izraza smo ločili frekvenčno neneodvisni del, R_b , od frekvenčno odvisnega dela (ulomek).

Padeč napetosti, ki ga bo zaznala in ojačila druga ojačevalna stopnja, bo tako:

$$v_Z = i_{d1} Z = i_{d1} R_b \frac{1}{sC_MR_b + 1} \quad (6.5)$$

6.2. Problem dominantnega pola, Millerjev učinek

Pozornejši bralec je najbrž opazil da smo v shemi ojačevalnika, [Sl.6.2](#), kapacitivnost označili drugače (C_{cb}) kot v modelu na [Sl.6.3](#) (C_M). To smo naredili namenoma, ker želimo opozoriti na zelo pomemben pojav, ki ga srečujemo pri vseh ojačevalnikih. Gre za Millerjev učinek, ki ga je *John M. Miller* opisal v leta 1920 objavljenem članku (*J.M. Miller, Dependence of the input impedance of a three-electrode vacuum tube upon the load in the plate circuit. Scientific Papers of the Bureau of Standards, 15(351):367–385, USA, 1920*).



Sl.6.4: Millerjev učinek: enakovredna vhodna impedanca Z_M je odvisna od impedance Z v povratni zanki ojačevalnika in njegovega ojačenja A .

Na [Sl.6.4](#) je invertirajoči ojačevalnik s faktorjem ojačenja A in impedanco Z v povratni zanki. Vhodni tok i_i teče le skozi impedanco Z , kar pomeni da je:

$$i_i = \frac{v_i - v_o}{Z} \quad (6.6)$$

Ker pa je ojačenje definirano kot razmerje izhodne proti vhodni napetosti:

$$A = - \frac{v_o}{v_i} \quad (6.7)$$

sledi da je vhodni tok:

$$i_i = \frac{v_i + Av_i}{Z} = \frac{v_i}{Z} (1 + A) \quad (6.8)$$

Ta enačba nam poraja misel: **kakšna bi bila efektivna vhodna impedanca vezja proti referenčnemu potencialu (ozemljitev), če ne bi imeli povratne zanke?**

Poglejmo: ob enaki vhodni napetosti in enakem vhodnem toku mora biti:

$$Z_M = \frac{v_i}{i_i} = \frac{Z}{1 + A} \quad (6.9)$$

torej enakovredna Millerjeva impedanca Z_M je za $(1 + A)$ krat manjša od Z .

Kadar je $Z = R$, torej realna ohmska upornost, bo enakovredna vhodna upornost manjša za faktor ojačenja $(1 + A)$. Vendar če namesto Z imamo kapacitivnost $Z_C = 1/sC_{cb}$ velja:

$$Z_M = \frac{Z_C}{1 + A} = \frac{1}{sC_{cb}(1 + A)} = \frac{1}{sC_M} \quad (6.10)$$

Millerjeva nadomestna vhodna kapacitivnost C_M je za faktor $(1 + A)$ **večja** od C_{cb} :

$$C_M = C_{cb}(1 + A) \quad (6.11)$$

to pa zato, ker je impedanca kondenzatorja obratno sorazmerna kapacitivnosti. Ta presenetljivi rezultat si moramo dobro zapomniti, ker igra pomembno vlogo pri frekvenčni odvisnosti prenosne funkcije fotodiodnih ojačevalnikov, pravzaprav vseh ojačevalnikov na sploh.

6.3. Omejena hitrost spreminjanja napetosti

Pojav omejene hitrosti spreminjanja napetosti (ang., 'slew-rate limiting') je neposredna posledica Millerjevega pojava in konstantnega tokovnega vira, ki napaja vhodno diferencijalno stopnjo ojačevalnika (i_{c1} na [Sl.6.2](#)). Kadar vhodno diferencijalno stopnjo ojačevalnika izkrmilimo čez linearnostno mejo, tako da je en tranzistor popolnoma zaprt, drugi pa popolnoma odprt, bo izhodni diferencijalni tok (i_{d1} na [Sl.6.2](#)) lahko kvečjemu enak toku i_{c1} . Posledično se bo napetost na Millerjevi kapacitivnosti spreminjala sorazmerno času z neko konstantno hitrostjo:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{i_{c1}}{C_M} \quad (6.12)$$

Predpostavimo da ojačevalnik krmilimo z napetostjo ali tokom sinusne oblike in take amplitude, da je amplituda izhodnega signala največja možna in oblika nepopačena. Zanima nas pri kateri frekvenci pride do omejevanja hitrosti spreminjanja izhodne napetosti. Ker je hitrost spremembe enaka časovnemu odvodu napetosti, se bo ob sinusni valovni obliki hitrost spreminjala po cosinusni funkciji, zato bo pri sinusnem signalu sprememba najhitrejša ob prehodu skozi srednjo vrednost (za idealen ojačevalnik brez enosmerne napake je srednja vrednost enaka nič). Če ima sinusni signal amplitudo V_a in frekvenco $\omega = 2\pi f$, in je torej trenutna vrednost napetosti $v = V_a \sin \omega t$, bo hitrost ob prehodu skozi ničlo odvisna tako od amplitude signala kot tudi od frekvence:

$$\frac{dv}{dt} = V_a \omega \cos \omega t \quad (6.13)$$

Pri sinusnem signalu s periodo $T = 2\pi/\omega$ nastopi prehod skozi ničlo periodično ob časih $t = T/2 = 0 \pm N\pi/\omega$ (N je celo število) in je takratna trenutna vrednost napetosti enaka nič, ker je $\sin(T/2) = 0$. Takrat pa je hitrost spreminjanja

napetosti maksimalna, ker je $\cos(T/2) = \cos 0 \pm N\pi/\omega = \pm 1$. Potemtakem iz enačbe (y2) sledi, da je največja hitrost spremembe napetosti enaka produktu amplitude in frekvence:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = V_a \omega \quad (6.14)$$

Če je V_{as} največja možna amplituda izhodne napetosti, ki je omejena predvsem z napajalno napetostjo $\pm V_s$ (pri tako zgradbi ojačevalnika kot na [Sl.6.2](#) nastopi ta meja nekako tri diodne napetostne padce, $3 \times 0.68 \approx 2$ V, pod napajalno napetostjo), bo najvišja frekvenca pri kateri še ne pride do valovnega popačenja najnižja. Za manjše amplitude pa bo ta frekvenca seveda ustrezno višja.

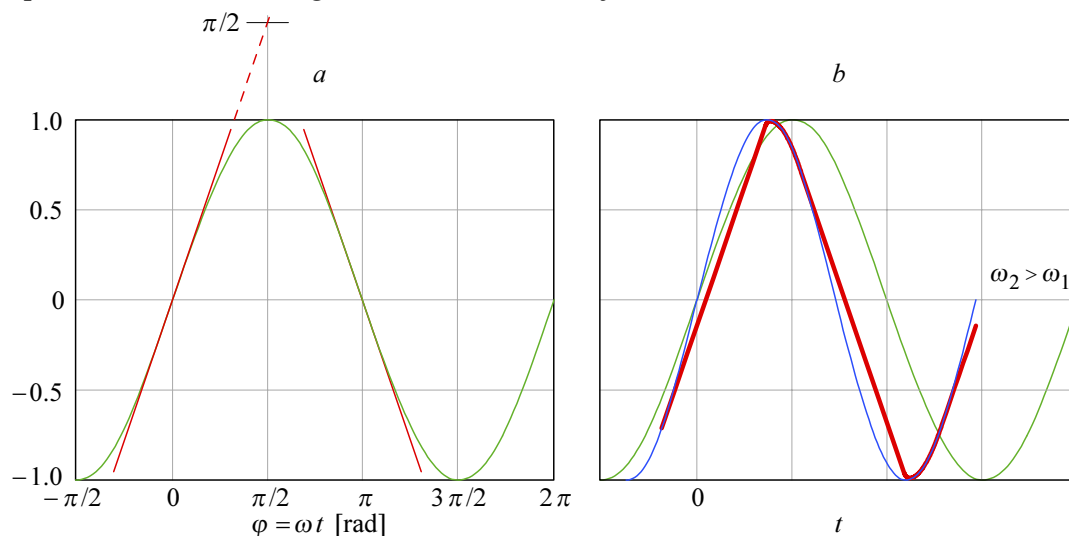
Vzemimo za primer ojačevalnik, ki se napaja z napetostjo $\pm V_s = \pm 15$ V, ter posledično inma največjo možno amplitudo izhodnega signala $V_{as} = 13$ V. Naj ima ta ojačevalnik tok diferencijalne stopnje $i_{c1} = 1$ mA in kapacitivnost med kolektorjem in bazo tranzistorja Q_6 ([Sl.6.2](#)) $C_{cb6} = 1.5$ pF. Denimo da ima tranzistor Q_6 tokovno ojačenje $\beta_6 = i_c/i_b = 150$, ter emittersko upornost $R_{E6} = 68 \Omega$. To pomeni da bo efektivna upornost baze $R_{b6} = \beta_6 R_{E6} = 150 \times 68 = 10200 \Omega$, in bo Millerjeva kapacitivnost po enačbi (6.11): $C_M = C_{cb6}(\beta_6 + 1) = 1.5 \times 10^{-12} \times 151 \approx 226$ pF. Če izenačimo enačbi (y1) in (y3) dobimo:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = V_a \omega = \frac{i_{c1}}{C_M} \quad (6.15)$$

To pomeni, da bo maksimalna še nepopačena izhodna napetost lahko imela najvišjo frekvenco:

$$f_s = \frac{i_{c1}}{2\pi V_{as} C_M} \quad (6.16)$$

Po pravkar izračunanih podatkih bo frekvenca f_s za ojačevalnik iz našega primera znašala: $f_s = 10^{-3}/(2\pi \times 13 \times 226 \times 10^{-12}) \approx 54$ kHz. Za izhodno amplitudo normirano na 1 V pa bo ta frekvenca $13 \times$ večja, okoli 700 kHz. Na [Sl.6.5](#) je narisano sinusno valovanje pri katerem še ni popačenja in pripadajoč največji naklon vala, ter popačena oblika izhodnega vala za nekoliko višjo frekvenco.



Sl.6.5: a) najvišja frekvenca pri kateri še ni popačenja; b) popačenje pri višji frekvenci.

6.4. Frekvenčna odvisnost prenosne funkcije

Pravkar smo spoznali da že razmeroma majhna kapacitivnost C_{cb} ob zadosti velikem napetostnem ojačenju A_v v drugi ojačevalni stopnji močno upočasni celoten ojačevalnik. Sicer se g_m prve stopnje tudi spreminja s frekvenco, in prav tako tokovno ojačenje izhodne stopnje, vendar druga stopnja prevladuje ('dominira'), zato časovna konstanta $C_M R_b$ določa 'dominantni pol' prenosne funkcije ojačevalnika. Zapišimo relacijo za izhodno napetost v_o , upoštevajoč enačbe (43, 42, 40):

$$\begin{aligned} v_o &= \alpha A_v v_Z \\ &= \alpha A_v i_{d1} R_b \frac{1}{s C_M R_b + 1} \\ &= \alpha A_v g_m (v_1 - v_2) R_b \frac{1}{s C_M R_b + 1} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Tukaj je $\alpha = 1/(1 + 1/\beta)$, in β je tokovno ojačenje izhodnih tranzistorjev. Ker je β ponavadi okoli 100 ali več, je jasno da je $\alpha \approx 1$. Če izraz za izhodno napetost (6.17) delimo z vhodno napetostno razliko, dobimo prenosno funkcijo ojačevalnika:

$$A(s) = \frac{v_o}{(v_1 - v_2)} = \alpha A_v g_m R_b \frac{1}{s C_M R_b + 1} \quad (6.18)$$

Frekvenčno neodvisni del ojačenja bomo označili z A_0 ; indeks '0' ponazarja frekvenco nič, A_0 je torej ojačenje enosmerne konstantne napetosti:

$$A_0 = \alpha A_v g_m R_b \quad (6.19)$$

V frekvenčno odvisnem delu ločimo neodvisno spremenljivko, frekvenco s :

$$\frac{1}{s C_M R_b + 1} = \frac{\frac{1}{C_M R_b}}{s + \frac{1}{C_M R_b}} \quad (6.20)$$

Primerjajmo zadnjo relacijo s splošno obliko prenosne funkcije prve stopnje:

$$F_1(s) = \frac{1}{s - s_1} \quad (6.21)$$

Funkcija $F_1(s)$ ima neskončno vrednost pri $s = s_1$, zato s_1 imenujemo 'pol' funkcije. Večpolne prenosne funkcije ponavadi normiramo pri frekvenci nič (DC), da lega polov ne vpliva na izraz za enosmerno ojačenje, pač pa le na frekvenčni potek, tako kot je to pri realnem vezju. Zato vrednost funkcije $F_1(s)$ evalviramo pri $s = 0$:

$$F_1(s) \Big|_{s=0} = F_1(0) = \frac{1}{-s_1} \quad (6.22)$$

Normirano obliko $F_{1N}(s)$ dobimo če delimo $F_1(s)/F_1(0)$:

$$F_{1N}(s) = \frac{F_1(s)}{F_1(0)} = \frac{-s_1}{s - s_1} \quad (6.23)$$

Od slej bomo obravnavali le normirane funkcije, tudi večpolne, ki jih bomo vedno skušali spraviti v tako splošno obliko:

$$F_n(s) = \frac{(-s_1)(-s_2)(-s_3)\cdots(-s_n)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\cdots(s-s_n)} \quad (6.24)$$

zato bomo oznako normiranja 'N' opustili (ohranili jo bomo le za številčne vrednosti normiranih polov), indeks n pa bo pomenil stopnjo polinoma, oziroma število polov.

Če sedaj primerjamo enačbi (6.20) in (6.23) vidimo da je naša ojačevalna funkcija že pravilno normirana, in je vrednost pola s_1 določena:

$$s_1 = -\frac{1}{C_M R_b} \quad (6.25)$$

Tako smo prišli do splošnega izraza za ojačenje (brez povratne zanke) za model operacijskega ojačevalnika, ki ga bomo odslej povsod rabili:

$$A(s) = A_0 \frac{-s_1}{s-s_1} \quad (6.26)$$

Izraz (6.26) predstavlja nekoliko idealiziran model, saj realni ojačevalniki (kot je, denimo, tisti na [Sl.6.1](#)) imajo poleg dominantnega pola s_1 v drugi ojačevalni stopnji vsaj še dva nedominantna pola, enega v vhodni diferencijalni stopnji in drugega v izhodni stopnji. Proizvajalci se trudijo da pri večini ojačevalnikov zagotovijo lego nedominantnih polov precej nad $A_0 s_1$, torej v območju kjer je $|A(s)| < 1$, kjer ojačevalnik več ne ojačuje vhodnega signala. Če tega ne bi naredili, bi ojačevalnik ob sklenjeni povratni zanki lahko postal nestabilen in bi namesto ojačevalnika imeli visokofrekvenčni oscilator. To se lahko zgodi tudi sicer stabilnemu ojačevalniku, če bodisi izhod, bodisi invertirajoči vhod kapacitivno obremenimo, kar poveča fazni kot signala povratne zanke, zato ta signal postane pri neki frekvenci sofazen (pozitiven), namesto da je protifazen (negativen) povsod kjer je ojačenje > 1 .

Pogosto nas zanima prav tista frekvenca f_T , pri kateri je ojačenje $|A(f_T)| = 1$. Izhajamo iz absolutne vrednosti ojačenja, ki je določena kot koren iz produkta prenosne funkcije $A(s)$ s lastno konjugirano kompleksno vrednostjo $A^*(s) = A(s^*)$. Če se omejimo le na imaginarno os, $s = j\omega = j2\pi f$, bo $s^* = -j\omega = -2\pi f$. Če še upoštevamo da je $s_1 = -\omega_1 = -2\pi f_1$, bo $A(f)$:

$$A(f) = A_0 \frac{f_1}{f_1 + jf} \quad (6.27)$$

zato bo magnituda, oziroma absolutna vrednost:

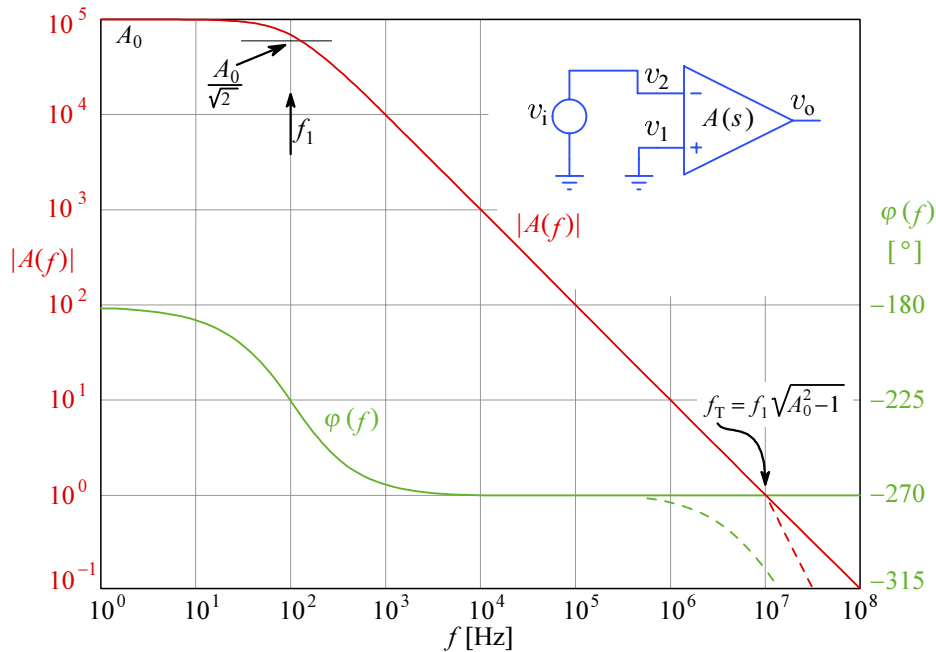
$$|A(f)| = \sqrt{A(f) \cdot A(-f)} = A_0 \sqrt{\frac{f_1}{f_1 + jf} \cdot \frac{f_1}{f_1 - jf}} = A_0 \sqrt{\frac{f_1^2}{f_1^2 + f^2}} \quad (6.28)$$

Če sedaj zadnji izraz enačimo z 1 in razrešimo za f , dobimo:

$$f = f_T = f_1 \sqrt{A_0^2 - 1} \approx f_1 A_0 \quad (6.29)$$

Mejni frekvenci f_T pravimo tudi 'prehodna frekvenca' (ang., 'transition frequency'), ker ojačenje pri tej frekvenci pade na vrednost 1, med tem ko nad f_T

ojačevalnik ne ojačuje več. Definirajmo še kotno frekvenco $\omega_T = 2\pi f_T$, ter tej ustrezno časovno konstanto $\tau_T = 1/\omega_T$. Na [Sl.6.6](#) smo narisali potek magnitude $|A(f)|$ (6.28) v odvisnosti od frekvence, ter lego značilnih frekvenc f_1 in f_T . Zraven smo narisali še pripadajoči fazni zasuk $\varphi(f)$, ki je informacija odločilnega pomena za stabilnost ojačevalnika, kot bomo videli v kratkem.



Sl.6.6: Magnituda in fazni zasuk prenosne funkcije ojačevalnika brez povratne zanke. Prekinjeni črti ponazarjata vpliv sekundarnih polov na magnitudo in fazo.

Fazni zastok je definiran kot *Arcus tangens* razmerja med imaginarnim in realnim delom prenosne funkcije, ki je v tem primeru ojačenje odprte zanke $A(s)$:

$$\varphi(s) = \arctan \frac{\Im\{A(s)\}}{\Re\{A(s)\}} \quad (6.30)$$

Če upoštevamo da sta A_0 in s_1 realna in da je $s = \sigma + j\omega$, sledi:

$$\varphi(s) = \arctan \frac{\Im\left\{\frac{1}{\sigma + j\omega - s_1}\right\}}{\Re\left\{\frac{1}{\sigma + j\omega - s_1}\right\}} = \arctan \frac{\Im\left\{\frac{\sigma - s_1 - j\omega}{(\sigma - s_1)^2 - \omega^2}\right\}}{\Re\left\{\frac{\sigma - s_1 - j\omega}{(\sigma - s_1)^2 - \omega^2}\right\}} = \arctan \frac{-\omega}{\sigma - s_1} \quad (6.31)$$

Omejimo se spet le na imaginarno os, $\sigma = 0$, ter upoštevajmo da je $s_1 = -\omega_1$:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{s_1} = \arctan \frac{\omega}{-\omega_1} \quad (6.32)$$

oziroma s frekvenco v Hz:

$$\varphi(f) = \arctan \frac{f}{-f_1} = -\arctan \frac{f}{f_1} \quad (6.33)$$

Ker je argument funkcije negativen bo tudi fazni kot negativen, kot smo narisali na [Sl.6.6](#). Signal smo, tako kot pri fotodiodnem ojačevalniku, napeljali na invertirajoči vhod, zato je treba faznemu kotu dodati še -180° .

Ko bi ojačevalnik uporabljali brez povratne zanke, bi bilo za stabilnost ojačevalnika vseeno kje ležijo posamezni poli, njihova lega bi bila pomembna le za gladek potek frekvenčnega odziva, oziroma za časovni odziv brez odvečnih prenihajev. Vendar so koristi od sklenjene povratne zanke tako pomembne (za linearnost ojačenja, za stabilnost enosmerne komponente izhodne napetosti, za šum, ter za druge napake ojačevalnika, ki so posledica bodisi proizvodnih toleranc, bodisi dinamičnih lastnosti polprevodnikov), da se v praksi povratni zanki ne želimo odreči. Ob sklenjeni povratni zanki je pomembno, da bo celotni fazni zasuk v zanki največ 315° (gre za znani Nyquistov kriterij stabilnosti). Fazni zasuk 360° predstavlja 'pozitiven' (sofazni) signal v povratni zanki. Takrat že lastni šum ojačevalnika zadošča da izhodni signal divergira v nestabilnost, ponavadi v obliki visokofrekvenčnih oscilacij.

V mislih je treba imeti dejstvo, da je povratna zanka 'negativna' (zato ker želimo napake ojačevalnika v izhodnem signalu 'odšteti') in zato že sama predstavlja fazni zasuk 180° , poleg tega pa vsak pol v $A(s)$ doda še svojih 45° na sami frekvenci pola, ter 90° na visokih frekvencah. Sledi da si na frekvencah, pri katerih je zanko ojačenje večje od 1, lahko privoščimo kvečjemu en sam pol, vsi morebitni drugi poli pa se morajo nahajati na frekvencah kjer je $|A(s)| < 1$.

Tako z ustrežno izbiro lege dominantnega pola zagotovimo stabilnost ob sklenjeni povratni zanki, vendar njegova razmeroma nizka frekvenca ojačevalnik izredno upočasni. Zaradi potrebe po večji hitrosti pri večjih ojačenjih proizvajalci včasih naredijo tudi 'dekompenzirane' ojačevalnike, ki imajo dominantni pol postavljen na nekoliko višjo frekvenco (manjša vrednost C_{cb}). Posledično se ojačenje na visokih frekvencah poveča, zato vsaj en nedominantni pol leži v območju, kjer je ojačenje večje od 1. Taki ojačevalniki so potem specifikirani za minimalno ojačenje $5\times$ ali $10\times$ da še ohranijo zanko stabilnost. Fotodiodni ojačevalniki, ki s topologijo povratne zanke zagotavljajo potrebno tokovno–napetostno pretvorbo, vedno imajo zanko napetostno ojačenje enako 1, zato v te namene dekompenzirani ojačevalniki niso primerni.

Kot je razvidno iz dosedanje obravnave, predstavlja taka notranja zasnova operacijskega ojačevalnika dokaj resno omejitev za doseganje višjih frekvenc. Zato so okoli leta 1985 nastali drugačni ojačevalniki, s tokovno povratno zanko ('current feedback', CFB). Te ojačevalnike bomo obravnavali nekoliko kasneje.

6.5. Ojačevalnik s povratno zanko in idealno fotodiodo

Vrnimo se fotodiodnemu ojačevalniku na [Sl.6.1a](#). Na začetku analize bomo upoštevali fotodiodo kot idealni tokovni vir in zanemarili vse njene 'parazitne' komponente iz [Sl.4.1](#), ter prav tako vpliv zaporne napetosti V_T . Vplive le-teh bomo postopno vključili v obravnavo po osnovni analizi.

Ker je ojačenje odprte zanke A_0 razmeroma veliko (za zelo nizke frekvence, do 100 Hz, znaša običajno okoli 10^5), bo ojačevalnik preko povratne zanke (upor R_F) skušal vzpostaviti ravnovesje in zmanjšati razliko vhodnih napetosti na zelo majhno vrednost, vsaj dokler je izhodna napetost v_o v linearnem območju, oziroma je manjša od napajalne napetosti ojačevalnika. To je lepo razvidno če enačbo (6.1) obrnemo:

$$(v_1 - v_2) = \frac{v_o}{A(s)} \quad (6.34)$$

Ker smo neinvertirajoči vhod ozemljili, je napetost $v_1 = 0$.

Lahko torej zapišemo:

$$v_2 = -\frac{v_o}{A(s)} \quad (6.35)$$

Zato bo ob sklenjeni povratni zanki tudi napetost na invertirajočem vhodu $v_2 \approx 0$. Če je vhodni tok ojačevalnika zanemarljiv, gre ves foto-tok i_P skozi upor R_F v povratni zanki. Izhodna napetost v_o bo tako enaka padcu napetosti na R_F zaradi foto-toka:

$$|v_o| \approx i_P R_F \quad (6.36)$$

Če pa želimo biti natančni, ker ojačenje vseeno ni neskončno veliko, moramo upoštevati da bo napetost v_2 sicer zelo majhna, a različna od nič:

$$v_2 - v_o = i_P R_F \quad (6.37)$$

Tako iz enačb (6.35) in (6.37) lahko ugotovimo:

$$i_P = \frac{(v_2 - v_o)}{R_F} = \frac{-v_o}{R_F} \left(1 + \frac{1}{A(s)} \right) \quad (6.38)$$

Izraz (6.38) razrešimo za izhodno napetost v_o v odvisnosti od foto-toka i_P :

$$v_o = -i_P R_F \frac{1}{1 + \frac{1}{A(s)}} \quad (6.39)$$

Enačba (6.39) predstavlja trans-impedančno prenosno funkcijo sistema. Pri tem predstavlja produkt $i_P R_F$ frekvenčno neodvisni napetostni faktor, med tem ko je ulomek frekvenčno odvisen, pač zaradi $A(s)$, ki se pri realnih ojačevalnikih zmanjšuje sorazmerno s (kompleksno) frekvenco s , tako kot je to določeno z enačbo (6.26).

Naj ima naš izbrani ojačevalnik dominantni realni pol s_1 pri frekvenci $f_1 = 100$ Hz, tako da je $s_1 = -2\pi f_1$, ter enosmerni faktor ojačenja $A_0 = 10^5$, kot smo narisali na [Sl.6.6](#).

Sistemska prenosna funkcijo $F(s)$ običajno normiramo na vhodno količino, zato enačbo (6.39), uporštevajoč tudi (6.26), lahko zapišemo kot:

$$F(s) = \frac{v_o}{i_P R_F} = -\frac{1}{1 + \frac{1}{A_0 \frac{-s_1}{s - s_1}}} \quad (6.40)$$

Zanimivo je primerjati grafa prenosnih funkcij ojačevalnika brez povratne zanke (6.28) in s povratno zanko (6.40), v odvisnosti od frekvence. Ker gre pri (6.40) za kompleksno količino, moramo v ta namen izračunati absolutni vrednosti (magnitudi) obeh izrazov, kar dobimo, če korenimo produkt prenosne funkcije in njene konjugirano-kompleksne vrednosti. Izraz (6.40) najprej nekoliko preuredimo:

$$F(s) = -\frac{A_0 \frac{-s_1}{s - s_1}}{A_0 \frac{-s_1}{s - s_1} + 1} = -\frac{-A_0 s_1}{s - s_1 (A_0 + 1)} \quad (6.41)$$

Koeficijenta pri s_1 moramo narediti enaka, če želimo da relacija ustreza funkciji z enim polom, v kanonični obliki, normirani pri $s = 0$:

$$F(s) = - \frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{-(A_0 + 1)s_1}{s - (A_0 + 1)s_1} \quad (6.42)$$

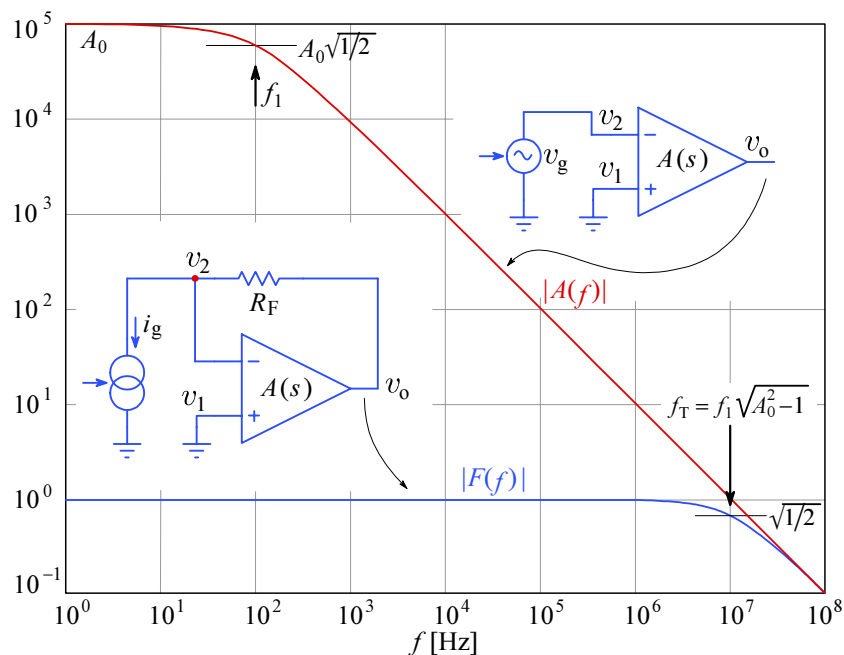
Opazimo da se pol odprtozančne prenosne funkcije s_1 ob sklenjeni povratni zanki zaradi zančnega ojačenja preseli na $s_T = (A_0 + 1)s_1$, torej se bo magnituda prenosne funkcije sistema prelomila pri ustrezno višji frekvenci f_T , kot smo to že izračunali (6.29). Obenem imamo, zaradi končno velikega ojačenja na nizkih frekvencah, tudi statično (frekvenčno neodvisno) napako faktorja ojačenja, ki bo zato malenkost manjši od ena: $A_0/(A_0 + 1)$. Tako bo magnituda prenosne funkcije:

$$|F(f)| = \frac{A_0}{A_0 + 1} \sqrt{\frac{f_T}{f_T + jf} \cdot \frac{f_T}{f_T - jf}} = \frac{A_0}{A_0 + 1} \sqrt{\frac{f_T^2}{f_T^2 + f^2}} \quad (6.43)$$

ali, če upoštevamo (6.29):

$$|F(f)| = \frac{A_0}{A_0 + 1} \sqrt{\frac{(A_0^2 - 1)f_1^2}{(A_0^2 - 1)f_1^2 + f^2}} \quad (6.44)$$

Na [Sl.6.7](#) sta grafa izrazov (6.28) in (6.44) narisana v log-log merilu, kjer pride do izraza mnogo velikostnih redov velika razlika med obema magnitudama, ter prav tako med njunimi mejnimi frekvencami.



Sl.6.7: Primerjava frekvenčne odvisnosti absolutnih vrednosti prenosnih funkcij odprte in zaprte povratne zanke.

Iz izraza (6.43) in grafa $|F(f)|$ na [Sl.6.7](#) je razvidno da ima ojačevalnik na [Sl.6.1a](#) prenosno razmerje $v_o/i_P R_F \approx 1$ za celoten frekvenčni pas, vse do frekvence f_T , pri kateri njegova asimptota seka asimptoto ojačenja z odprto zanko. Pri frekvenci f_T ojačevalnik brez povratne zanke še sledi vhodnemu signalu, ker je $|A(f_T)| = 1$,

med tem ko ojačevalnik s sklenjeno zanko signal zmanjša skladno izrazu (6.43), kjer pri $f = f_T \Rightarrow |F(f_T)| = \sqrt{1/2}$, kar je ≈ 0.707 . Ker se je izhodna napetost zmanjšala, vhodni tok pa je enak, sledi da se napetost v_2 na vhodu poveča, to pa je sorazmerno ojačevalni napaki.

Pogosto je v literaturi količina $\sqrt{1/2}$ označena kot -3 dB. Inženirji Bell Telephone Laboratories so v čast osnivatelju firme in telekomunikacijskemu pionirju Bellu (*Alexander Graham Bell*, 1847–1922) enoto za atenuacijo signala na dolžini 10 milj standardnega telefonskega kabla poimenovali Bell [B]. To je logaritemska enota za $10\times$ razmerje moči, dB (decibel) pa je $10\times$ manjša enota, ki jo računamo kot x [dB] = $10 \log_{10}(P_o/P_i)$, ali, če gre za moč ki se troši na enakih upornostih, x [dB] = $20 \log_{10}(V_o/V_i)$. Po definiciji decibele smemo uporabljati le takrat, kadar se tako vhodna kot izhodna moč porablja na enaki upornosti, kar pri operacijskih ojačevalnikih skoraj nikoli ni res. Zato je v takih primerih bolje za razmerje napetosti pisati dBV.

Zanima nas še efektivna vhodna impedanca ojačevalnika, ki jo fotodioda čuti kot breme, Z_L . Kot smo to že omenili pri Millerjevem učinku, je ta impedanca določena z negativno povratno zanko ojačevalnika. V našem primeru je impedanca v povratni zanki enaka R_F , zato iz (6.9) sledi:

$$Z_L = \frac{R_F}{1 + A(s)} \quad (6.45)$$

Iz te enačbe je razvidno da vhodna impedanca ima pri nizkih frekvencah zelo nizko vrednost, ki pa s frekvenco narašča. Pri f_T je $A(f_T) = j1$, in je absolutna vrednost imenovalca (6.44) enaka $\sqrt{2}$, zato je pri f_T impedanca $Z_L = R_F/\sqrt{2}$. Zato se tudi vhodna napetost v_2 temu primerno poveča. To pa delno poslabša linearnost odziva fotodiode na visokih frekvencah.

Ob sklenjeni povratni zanki bo, kot bomo videli kmalu, pomembno kakšen je fazni zasuk v bližini mejne frekvence. Fazni zasuk samega ojačevalnika lahko izračunamo iz prenosne funkcije (6.42), če kompleksno spremenljivko s zamenjamo z $j\omega$, ter upoštevamo da je realni pol $s_1 = \sigma_1 = -\omega_1$:

$$F(j\omega) = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{(A_0 + 1)\omega_1}{(A_0 + 1)\omega_1 + j\omega} \quad (6.46)$$

V izrazu (6.45) moramo najprej racionalizirati imenovalca, kar dosežemo z množenjem številca in imenovalca s konjugirano kompleksno vrednostjo imenovalca:

$$F(j\omega) = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{(A_0 + 1)\omega_1}{(A_0 + 1)\omega_1 + j\omega} \cdot \frac{(A_0 + 1)\omega_1 - j\omega}{(A_0 + 1)\omega_1 - j\omega} \quad (6.47)$$

in dobimo:

$$F(j\omega) = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{(A_0 + 1)\omega_1}{[(A_0 + 1)\omega_1]^2 - \omega^2} \cdot [(A_0 + 1)\omega_1 - j\omega] \quad (6.48)$$

Frekvenčni potek faznega zasuka je *Arcus tangens* razmerja imaginarnega dela prenosne funkcije proti realnemu delu. Ker v (6.48) imamo imaginarno vrednost le v zadnjem ogletem oklepaju, se pri deljenju imaginarnega dela z realnim delom oba ulomka prenosne funkcije pokrajšata in ostane:

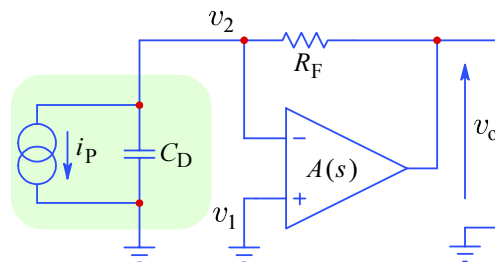
$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{F(j\omega)\}}{\Re\{F(j\omega)\}} = \arctan \frac{-\omega}{(A_0 + 1)\omega_1} = \arctan \frac{-f}{(A_0 + 1)f_1} \quad (6.49)$$

Pri zadnjem izrazu smo pokrajšali še faktor 2π , vsebovan tako pri ω kot pri ω_1 . Iz (6.49) je razvidno da bo pri frekvenci $f = (A_0 + 1)f_1 \approx f_T$ fazni zasuk znašal -0.7854 rad, oziroma -45° . Temu moramo prišteti že obstoječi notranji fazni zasuk samega ojačevalnika, ki pri frekvenci f_T znaša -270° . Skupno je to -315° , nad tem pa negativna povratna zanka spet postane pozitivna (Nyquistov kriterij stabilnosti). Na srečo je pri $f \geq f_T$ ojačenje že manjše od 1. Ojačevalnik je še stabilen, če je pri značajnem ojačenju ≥ 1 fazna margina vsaj 45° .

6.6. Ojačevalnik z realno fotodiodo

Vse dosedanje ugotovitve veljajo le za idealno vezje, kjer fotodiodo lahko obravnavamo kot idealni tokovni vir z neskončno notranjo upornostjo, tako da ni nobenega delilnika toka v povratni zanki ojačevalnika. Realne fotodiode seveda ustrezajo modelu na [Sl.4.1](#). Analizo v novih okoliščinah bomo dopolnili z nekaj teoretične podlage, ki jo bomo kasneje uporabljali tudi v vseh ostalih primerih.

Če fotodiodi, kot idealnemu tokovnemu viru, dodamo še vzporedno parazitno kapacitivnost, C_D , kot na [Sl.6.8](#), dobimo že bolj realne razmere. Velikost te kapacitivnosti določa površina elektrod, debelina P-N spoja, ter efektivna dielektrična konstanta polprevodnika. Tipične vrednosti za silicijeve fotodiode so okoli 10–20 pF/mm², odvisno od dopiranja in debeline fotodiode.



Sl.6.8: Vpliv C_D na frekvenčno odvisnost ojačenja.

Prisotnost kapacitivnosti fotodiode v povratni zanki ojačevalnika ima dva dokaj nezaželjena učinka:

Prvič, že majhna kapacitivnost fotodiode povzroči znatno upočasnitev odziva, ker se generirani naboj najprej kopiči na tej kapacitivnosti in šele nato lahko steče v preostali del vezja. Fotodioda z večjo površino sicer ob enaki svetlobi daje večji tok, in enako izhodno napetost lahko zagotovimo z manjšim R_F , vendar bo kapacitivnost tudi sorazmerno večja.

Drugič, prisotnost kapacitivnosti na invertirajočem vhodu ojačevalnika povzroči zmanjšanje signala v povratni zanki na visokih frekvencah. Zato se v prenosni funkciji sistema pojavi nov pol, ki poveča ojačenje na ozkem frekvenčnem pasu (rezonanca), ter posledično poveča fazni zasuk signala v povratni zanki. Spomnimo da je fazni zasuk ojačevalnika v invertirajoči konfiguraciji -180° in zaradi dominantnega pola še dodatnih -90° na frekvencah višjih od $\sim 10f_1$ ([Sl.6.6](#)). Dodatni fazni zasuk povzroči daljše nihanje pri impulznem odzivu. Še večja kapacitivnost pa lahko privede tudi do nestabilnosti in visokofrekvenčnih oscilacij.

Analizirajmo spremembe v prenosni funkciji sistema zaradi prisotnosti C_D . Izhajamo iz vezave na [Sl.6.8](#), kjer še vedno velja relacija (6.1), $v_o = (v_1 - v_2)A(s)$.

Prav tako za konstanten enosmerni tok velja (6.39), $v_2 - v_0 = i_P R_F$. Vendar za izmenični tok moramo upoštevati od kompleksne frekvence s odvisno impedanco, ki jo predstavlja parazitna kapacitivnost fotodiode C_D . Impedanca fotodiode se, tako kot pri običajnem kondenzatorju, z višanjem frekvence niža:

$$Z_D = \frac{1}{j\omega C_D} = \frac{1}{s C_D} \quad (6.50)$$

Zaradi kapacitivnosti se foto-tok i_P ob spremembi deli na dve komponenti, ena povzroča napetostni padec $i_1 Z_D$, druga pa $i_2 R_F$. Privzemimo da je v senci izhodna napetost $v_0 = 0$, prav tako napetost na C_D , $v_2 = 0$. Naj se foto-tok ob prehodu iz sence na svetlobo v trenutku $t = 0$ skokovito spremeni. Ob spremembi bo i_1 , ko steče skozi C_D , maksimalna: $i_1 = i_P$; tok skozi R_F bo nič: $i_2 = 0$. Med tem ko se kapacitivnost C_D počasi polni, se napetost v_2 malenkostno zviša in del toka začne odtekati v R_F (ne pozabimo da se ojačevalnik na hitre motnje lahko odzove le s svojim ojačenjem odprte zanke, katerega mejna frekvenca je nizka, zato signal povratne vezave popravi napetost v_2 z določeno zakasnitvijo). Zato tok i_1 počasi pada, med tem ko i_2 narašča. Po zadosti dolgem času bo ves foto-tok odtekal skozi R_F , $i_2 = i_P$, med tem ko bo tok skozi C_D enak nič, $i_1 = 0$.

Prenosno funkcijo sistema začnemo računati v vozlišču v_2 , kjer velja:

$$i_P = i_1 + i_2 = \frac{v_2}{Z_D} + \frac{v_2 - v_0}{R_F} \quad (6.51)$$

Upoštevajoč enačbi za ojačejne (6.1) in impedanco kapacitivnosti (6.50), dobimo:

$$i_P = \frac{-v_0 s C_D}{A(s)} + \frac{-v_0}{R_F} \left(1 + \frac{1}{A(s)} \right) \quad (6.52)$$

kar razrešimo za v_0 :

$$v_0 = -i_P R_F \frac{A(s)}{s C_D R_F + A(s) + 1} \quad (6.53)$$

Enačbo (6.53) skušajmo spraviti v kanonično obliko, tako da najprej delimo števec in imenovalc s produktom $C_D R_F$:

$$v_0 = -i_P R_F \frac{A(s) \frac{1}{C_D R_F}}{s + [A(s) + 1] \frac{1}{C_D R_F}} \quad (6.54)$$

Izenačimo še koeficijente pri polu in dobimo trans-impedančno prenosno funkcijo:

$$v_0 = -i_P R_F \cdot \frac{A(s)}{A(s) + 1} \cdot \frac{[A(s) + 1] \frac{1}{C_D R_F}}{s + [A(s) + 1] \frac{1}{C_D R_F}} \quad (6.55)$$

Če izhodno napetost normiramo na vhodni tok (delimo z $i_P R_F$), dobimo $F(s)$:

$$F(s) = \frac{v_0}{i_P R_F} = - \frac{A(s)}{A(s) + 1} \cdot \frac{[A(s) + 1] \frac{1}{C_D R_F}}{s + [A(s) + 1] \frac{1}{C_D R_F}} \quad (6.56)$$

Ta prenosna funkcija ima dva pola. Prvi pol je posledica prenosne funkcije ojačevalnika $A(s)$, (6.26).

Drugi pol je posledica časovne konstante $C_D R_F$:

$$s_2 = -\frac{1}{C_D R_F} \quad (6.57)$$

Sedaj še $A(s)$ zamenjamo z (6.26), in bo izraz (6.56) imel obliko:

$$F(s) = -\frac{A_0 \frac{-s_1}{s-s_1}}{A_0 \frac{-s_1}{s-s_1} + 1} \cdot \frac{-\left[A_0 \frac{-s_1}{s-s_1} + 1\right] s_2}{s - \left[A_0 \frac{-s_1}{s-s_1} + 1\right] s_2} \quad (6.58)$$

Ko se znebimo dvojnih ulomkov dobimo:

$$F(s) = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{-s_1(A_0 + 1)}{s - s_1(A_0 + 1)} \cdot \frac{-s_2[s - s_1(A_0 + 1)]}{s^2 - s(s_1 + s_2) + s_1 s_2(A_0 + 1)} \quad (6.59)$$

Izraz $[s - s_1(A_0 + 1)]$ v imenovalcu drugega ulomka in v števcu tretjega ulomka lahko pokrajšamo, ter dobimo prenosno funkcijo druge stopnje:

$$F(s) = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{s_1 s_2(A_0 + 1)}{s^2 - s(s_1 + s_2) + s_1 s_2(A_0 + 1)} \quad (6.60)$$

Funkcija ima zgornjo mejno frekvenco $\omega_h = \sqrt{s_1 s_2(A_0 + 1)}$, resonančni faktor pa je določen s srednjim členom polinoma v imenovalcu, $(s_1 + s_2)$.

POZOR: čeprav sta s_1 in s_2 pola svojih lastnih funkcij, kompozitna funkcija (6.60) ima le te za koeficijente polinoma. Dejanska pola $F(s)$ ležita drugje, zaradi vpliva povratne zanke. Čeprav sta s_1 in s_2 realna, lahko pola funkcije $F(s)$, imenujmo ju p_1 in p_2 , vdoločenih pogojih tvorita celo konjugirano-kompleksni par. To dejstvo je izredno pomembno za stabilnost sistema.

Zaradi enostavnosti aproksimiramo izraz $A_0/(A_0 + 1) \approx 1$. To drobno napako si lahko privoščimo ker je ojačenje $A_0 = 10^5$; poleg tega je to le statična amplitudna napaka, ki na dinamiko odziva ne vpliva. Naj se torej funkcija $F(s)$ glasi:

$$F(s) = -\frac{(A_0 + 1)s_1 s_2}{s^2 - s(s_1 + s_2) + (A_0 + 1)s_1 s_2} \quad (6.61)$$

Za doseg optimalnega frekvenčnega ali časovnega odziva vezja moramo vrednosti posameznih komponent izračunati iz vrednosti polov, le te pa moramo uskladiti z vnaprej izbranimi optimalnimi poli (glej [Dodatek A](#)). Pri določanju polov si bomo vedno prizadevali karakteristični polinom v imenovalcu preurediti kot produkt njegovih korenov, ki so hkrati poli funkcije $F(s)$. Na splošno je mogoče vsak polinom n -te stopnje pretvoriti iz oblike potenčne vrste v obliko produkta korenov:

$$\sum_{i=0}^n K_i s^i = \prod_{j=1}^n (s - p_j) \quad (6.62)$$

Tukaj so K_i koeficijenti polinoma ob pripadajočih potencah s^i , medtem ko smo s p_j označili pripadajoče korene (pole funkcije). Opazimo da indeks i gre od 0 do

n , indeks j pa od 1 do n , kar pomeni da v našem primeru imamo tri koeficiente in dva pola. Resda je pretvorba iz potenčne vrste v produkt z večanjem stopnje polinoma vedno težja in za $n \geq 5$ algebrske rešitve ni (dokaz je izpeljal že *Évariste Galois*, 1811–1832), numerično pa je problem seveda vedno rešljiv.

Po splošni enačbi (6.62) velja za polinom druge stopnje naslednja enačba:

$$K_2 s^2 + K_1 s + K_0 = (s - p_1)(s - p_2) \quad (6.63)$$

Ob primerjavi z izrazom (6.61) bodo koeficienti v (6.63):

$$\begin{aligned} K_2 &= 1 \\ K_1 &= -(s_1 + s_2) \\ K_0 &= (A_0 + 1)s_1 s_2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

Izraz (6.63) razrešimo po znani splošni rešitvi za kvadratično enačbo ([Dodatek B](#)):

$$p_{1,2} = \frac{-K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - 4K_2 K_0}}{2K_2} \quad (6.65)$$

Vstavimo koeficiente iz (6.64):

$$p_{1,2} = \frac{s_1 + s_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s_1 + s_2)^2 - 4(A_0 + 1)s_1 s_2} \quad (6.66)$$

Lahko izpostavimo skupni faktor:

$$p_{1,2} = \frac{s_1 + s_2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4(A_0 + 1)s_1 s_2}{(s_1 + s_2)^2}} \right] \quad (6.67)$$

Iz algebre vemo, da bosta pola p_1 in p_2 realna in med seboj različna, če je izraz pod korenom, ‘diskriminanta’ $D > 0$; pola bosta realna in med seboj enaka, ko bo $D = 0$ (takemu sistemu pravimo da je ‘kritično dušen’); in končno, pola bosta tvorila konjugirano-kompleksni par kadar bo $D < 0$. V primeru realnih polov bo tisti, ki je bližje koordinatnemu izhodišču (nižja frekvenca) dominanten pol, pasovna širina pa bo razmeroma majhna. Zanimajo nas torej predvsem primeri, ko pola tvorita konjugirano-kompleksni par, ali mejni primer, ko sta pola enaka. Zato iz korena izpostavimo imaginarno enoto:

$$p_{1,2} = \frac{s_1 + s_2}{2} \left[1 \pm j \sqrt{\frac{4(A_0 + 1)s_1 s_2}{(s_1 + s_2)^2} - 1} \right] \quad (6.68)$$

Ojačevalni faktor $(A_0 + 1)$ in ojačevalnikov dominantni pol s_1 sta določena z izbiro ojačevalnika, medtem ko je pri $s_2 = 1/C_D R_F$ kapacitivnost C_D določena z izbiro fotodiode in morebitne zaporne napetosti V_r po relaciji (3.9). Edina prosta komponenta, prek katere v tem primeru lahko vplivamo na lego polov, je upornost povratne zanke R_F , ta pa pripada s_2 . Zato nas bo zanimalo predvsem razmerje, označimo ga x , med lego s_2 in prehodno frekvenco ojačevalnika $s_1(A_0 + 1)$:

$$x = \frac{s_2}{(A_0 + 1)s_1} \quad (6.69)$$

Izraz (6.68) lahko poenostavimo, če upoštevamo da bo v primerih, ki nas zanimajo, s_2 vedno v bližnji okolici prehodne frekvence ojačevalnika, $s_1(A_0 + 1)$. Zato bo veljalo $s_1 \ll s_2$ in lahko zapišemo $s_1 + s_2 \approx s_2$:

$$p_{1,2} \approx \frac{s_2}{2} \left[1 \pm j \sqrt{\frac{4(A_0 + 1)s_1 s_2}{s_2^2} - 1} \right] \quad (6.70)$$

kar, upoštevajoč (6.69), lahko spremenimo v:

$$p_{1,2} \approx \frac{x(A_0 + 1)s_1}{2} \left[1 \pm j \sqrt{\frac{4}{x} - 1} \right] \quad (6.71)$$

Diskriminanta (izraz pod korenem) je torej razmeroma preprosta::

$$-D \approx \frac{4}{x} - 1 \quad (6.72)$$

Če je $D = 0$, bosta pola realna in med seboj enaka ob:

$$x = 4 \quad (6.73)$$

Torej bosta pola p_1 in p_2 med seboj enaka in realna kadar bo s_2 štirikrat večji od $(A_0 + 1)s_1$. To je primer kritično dušenenga sistema. Pola pa bosta konjugirano-kompleksna, če bo $x < 4$.

Zapišimo še realno in imaginarno komponento polov, upoštevajoč $s_1 = -\omega_1$ in $s_2 = -1/C_D R_F$. Tako je realna komponenta polov:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -\frac{1}{2} \left(\omega_1 + \frac{1}{C_D R_F} \right) \approx -\frac{1}{2C_D R_F} \quad (6.74)$$

imaginarni komponenti pa sta:

$$\omega_{1,2} = \mp \frac{1}{2} \left(\omega_1 + \frac{1}{C_D R_F} \right) \sqrt{\frac{4(A_0 + 1)\omega_1 C_D R_F}{(C_D R_F \omega_1)^2 + 2\omega_1 C_D R_F + 1} - 1} \quad (6.75)$$

ali približno:

$$\omega_{1,2} \approx \mp \frac{1}{2C_D R_F} \sqrt{4(A_0 + 1)\omega_1 C_D R_F - 1} \quad (6.76)$$

Sedaj, ko poznamo pole, bi radi ugotovili vpliv lege polov na pasovno širino in frekvenčni odziv, ter posledično na stabilnost ojačevalnika.

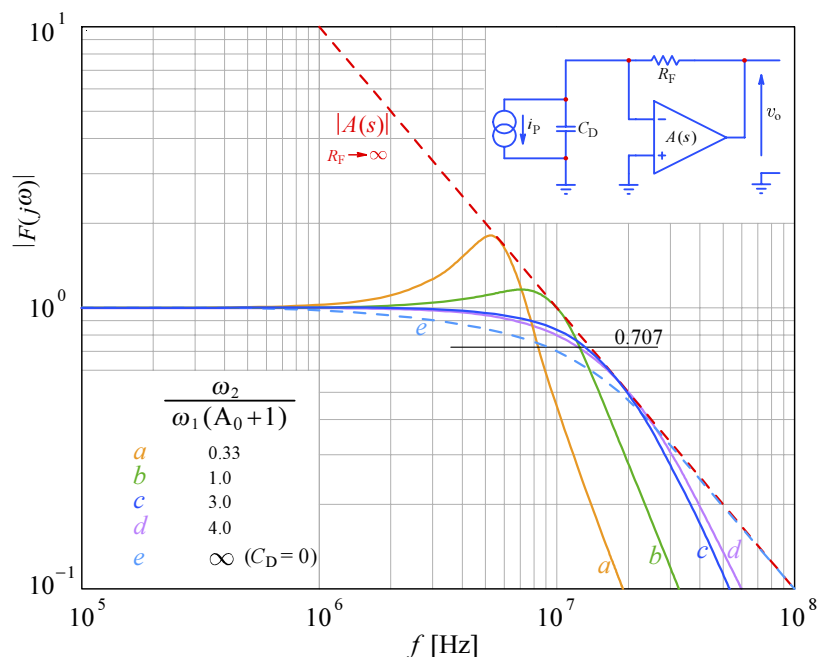
Poglejmo najprej frekvenčni odziv. Izračunajmo magnitudo prenosne funkcije $|F(j\omega)|$, upoštevajoč $s = j\omega$, $s_1 = -\omega_1$, $s_2 = -\omega_2$:

$$|F(j\omega)| = \sqrt{F(j\omega) \cdot F^*(j\omega)} = \sqrt{F(j\omega) \cdot F(-j\omega)} \quad (6.77)$$

Za enačbo (6.61) to pomeni:

$$|F(j\omega)| = \frac{A_0}{A_0 + 1} \sqrt{\frac{[\omega_1\omega_2(A_0 + 1)]^2}{[-\omega^2 + \omega_1\omega_2(A_0 + 1)]^2 + \omega^2(-\omega_1 - \omega_2)^2}} \quad (6.78)$$

Narišimo Bodeov (*Hendrik Wade Bode*, 1905–1982) diagram (magnitudo v odvisnosti od frekvence, ali ‘frekvenčni potek’) ko razmerje $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1)$ zajame vrednosti $[\frac{1}{3}, 1, 3, 4]$. Ker smo že na [Sl.6.7](#) videli da je prehodna frekvenca ojačevalnika $f_T \approx 10^7$ Hz, kar je posledica $s_1(A_0 + 1)$, bomo podrobneje pogledali le tri frekvenčne dekade v okolici in sicer $f = 10^5 \dots 10^8$. Za primerjavo bomo narisali še primer ko je $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1) \rightarrow \infty$, kar je enakovredno primeru $C_D = 0$. Prav tako bomo za primerjavo narisali še ojačenje odprte zanke $|A(s)|$ (kar ustreza $R_F \rightarrow \infty$).



Sl.6.9: Bodeov potek magnitude v odvisnosti od frekvence (‘frekvenčni odziv’). *a*) ob razmerju frekvenc $\omega_2/[\omega_1(A_0 + 1)] = 1/3$, se ojačenje v resonanci skoraj podvoji v primerjavi z ojačenjem na nizkih frekvencah; *b*) ob razmerju 1 je ojačenje še vedno večje od 1 (če je fazni zasuk ob ojačenju >1 večji od 315° bi sistem lahko postal nestabilen); *c*) šele pri razmerju 3 je ojačenje manjše od 1; *d*) ob razmerju 4 je sistem kritično dušen. *e*) razmerje je neskončno, oziroma $C_D = 0$. Za primerjavo, $|A(s)|$ je ojačenje odprte zanke, takrat je razmerje enako nič, oziroma $R_F \rightarrow \infty$. Primer *c* ima največjo pasovno širino (seka raven polovične moči, oziroma amplitudno oznako 0.707, pri frekvenci ~ 12 MHz).

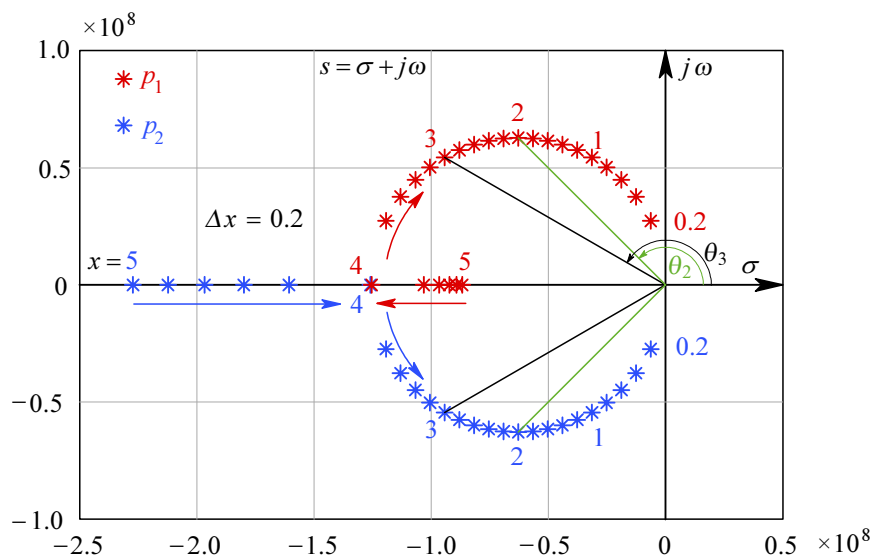
Opazimo, da v primerjavi z enopolnim sistemom (*e*), ki nad 10 MHz pada z -20 dB/10f, imajo dvopolni sistemi (*a, b, c, d*) naklon dvakrat večji, -40 dB/10f. Opazimo tudi, da se vse štiri krivulje dotikajo asimptote ojačenja odprte zanke pri različnih frekvencah, kar je tudi logično: ojačevalnik lahko ojači največ toliko, kolikor mu dovoljuje njegova notranja zgradba in impedance v povratni zanki.

Opazimo še da se ojačenje v resonanci večja, če se vrednost ω_2 zmanjšuje. Ojačenje je večje od 1 že, če sta frekvenci enaki, $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1) = 1$, kot v primeru (*b*). Pri $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1) = 1/3$ (*a*) pa se ojačenje skoraj podvoji. Ojačenje bo manjše od 1 šele v primeru (*c*), kjer je tudi pasovna širina največja, okoli 12 MHz.

Velikost ojačenja v resonanci je sicer pomembna za stabilnost ojačevalnika, vendar ojačenje samo ni odločilnega pomena. Odločilnega pomena je velikost faznega zasuka v povratni zanki pri frekvenci, kjer je ojačenje še vedno večje od 1. Kot smo že omenili, Nyquistov kriterij stabilnosti pravi, da bo ojačevalnik stabilen le, če je fazna margina v povratni zanki vsaj 45° . Ker je povratna zanka negativna (invertira signal), je to -180° zasuka na nizkih frekvencah. Poleg tega dominantni pol s_1 prispeva še -45° na frekvenci $f_1 = -s_1/2\pi$, in -90° na vseh frekvencah vejih od $10 \times f_1$, skupno -270° . Fazni zasuk 360° pomeni pozitivno povratno zanko (in nestabilni sistem). Razlika je $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$; tolikšen je lahko največ fazni zasuk ojačevalnika.

Sledi da $\omega_2 = 1/C_D R_F$ lahko prispeva kvečjemu še $315 - 270 = 45^\circ$ na frekvenci kjer je ojačenje še večje od 1. Za analizo stabilnosti, ter s tem v zvezi določitev največje vrednosti upornosti povratne zanke R_F , nujno moramo poznati odvisnost faznega zasuka od frekvence.

Zakaj ojačevalnik v določenih pogojih izkazuje resonanco in zaniha, v drugih pa ne? Lega polov sistema je tisti ključni podatek, ki ga potrebujemo. [Sl.6.10](#) ponazarja kako se spreminja lega polov v odvisnosti od $x = \omega_2/\omega_1(A_0 + 1)$. Za to sliko smo naredili izračun polov p_1 in p_2 na podlagi relacije (6.72) za vrednosti x v območju od 5 do 0.2 v korakih po -0.2 , ter narisali lego polov v Laplaceovem prostoru, oziroma v kompleksni frekvenčni ravnini, $s = \sigma + j\omega$.



Sl.6.10: Potovanje sistemskih polov p_1 in p_2 v kompleksni ravnini pod vplivom faktorja $x = \omega_2/\omega_1(A_0 + 1)$, ki se spreminja od 5 do 0.2, v korakih po -0.2 . Pola potujeta najprej drug proti drugemu po realni osi σ , dokler ne dosežeta enake lege ($x = 4$). Z nadaljnjim zmanjševanjem x pola tvorita konjugirano-kompleksni par in potujeta po krogu proti izhodišču koordinatnega sistema. Manjša ko je negativna realna komponenta polov, manjše je dušenje sistema in večje nihanje.

Če pogledamo enačbo polov (6.72), vidimo da je diskriminanta D (6.72) ob določenih vrednostih parametra x lahko pozitivna ali negativna. Karakteristično vrednost, ko je diskriminanta enaka nič, smo že določili: $x = 4$. Glede na to točko razlikujemo območje, ko je $\omega_2 > 4\omega_1(A_0 + 1)$ in sta pola p_1 in p_2 realna in med seboj različna; ko je $\omega_2 = 4\omega_1(A_0 + 1)$ sta pola realna in med seboj enaka; v območju kjer je $\omega_2 < 4\omega_1(A_0 + 1)$ tvorita pola konjugirano-kompleksni par.

Spremljajmo lego polov v kompleksni ravnini v odvisnosti od x . Dokler je $x > 4$, ležita pola na realni osi σ in z zmanjševanjem x potujeta drug proti drugemu dokler se ne srečata v isti legi ob $x = 4$. Z nadaljnjim zmanjševanjem x pa začneta tvoriti konjugirano kompleksni par, $p_{1,2} = \sigma_1 \pm j\omega_1$, ter potujeta po krogu, ki se dotika izhodišča kompleksne ravnine $(0, 0)$, vsak po svojem polkrogu proti izhodišču. **Tako potovanje polov ob spremembi faktorja povratne zanke je značilno ne le za ta primer, temveč za vse sisteme ki imajo od frekvence odvisno povratno zanko!**

Kakšen je fizikalni pomen lege polov v kompleksni ravnini? Negativna realna os ponazarja upornost (izgubo energije), pozitivna realna os pa 'negativno upornost', oziroma generator (dodajanje energije). Imaginarna os pa predstavlja reaktivno energijo, pozitivni del asociamo z induktivnostjo, negativni pa s kapacitivnostjo. Bolj oddaljena ko sta pola od izhodišča, večja je pasovna širina sistema (višja zgonja frekvenčna meja), vendar bližje ko sta pola imaginarni osi, večje je nihanje pri odzivu na hitre spremembe signala, zaradi tega ker je upornostno dušenje sistema manjše.

Poglejmo si nekaj karakterističnih točk na [Sl.6.10](#). Zanimiva je mejna točka, ko pola imata istovetno lego, $p_1 = p_2$, $x = 4$. To lego imenujemo 'tokčka kritičnega dušenja', sistem pa bo kritično dušen (ang., 'critically damped system', CDS). Odziv CDS nima prenihaja pri odzivu na stpnico in se le asimptotično približuje končni vrednosti. Vendar je tak odziv prepočasen, ker za doseganje zahtevane natančnosti potrebuje precej časa, zato ga uporabljamo le v nekaterih posebnih primerih.

Druga zanimiva točka je ob $x = 2$, ko sta realna in imaginarna komponenta pola med seboj enaki, $p_{1,2} = (-0.707 \pm j0.707) \times 10^8$ [rad/s]. V tej točki tvorita pola z izhodiščem koordinatnega sistema trikotnik s kotom 90° v izhodiščnem kotu, oziroma, matematično bolj pravilno, izhodiščna vektorja polov tvorita s pozitivno realno osjo kota $\theta_2 \pm 135^\circ$. Tak kot pa je značilnost Butterworthovega para polov (*Stephen Butterworth*, 1885–1958, je leta 1930 prvi objavil članek o filterjskih ojačevalnikih, kjer je izpeljal tak sistem polov [On the Theory of Filter Amplifiers, *Experimental Wireless & Wireless Engineer*, Vol.7, 1930, pp. 536–541]). Za podrobnejšo razlago različnih vrst polov naj si bolj radovedni bralci ogledajo [Dodatek A](#). Kot θ je, po trigonometričnih pravilih, določen kot *Arcus tanges* razmerja med imaginarno in realno komponento pola:

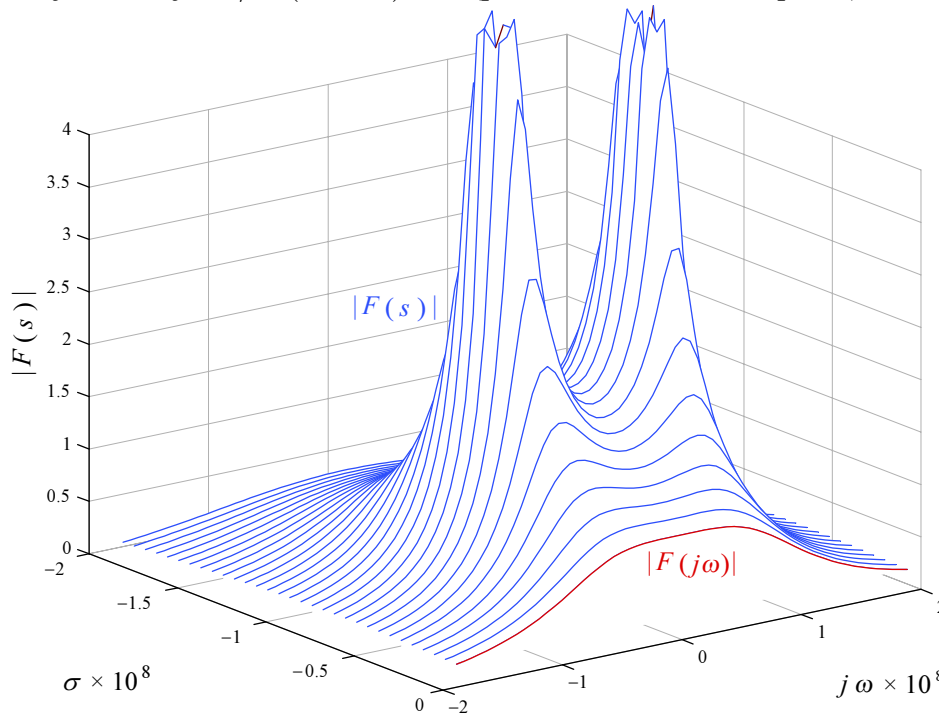
$$\theta_i = \arctan \frac{\Im\{s_i\}}{\Re\{s_i\}} = \arctan \frac{\omega_i}{\sigma_i} \quad (6.79)$$

Butterworthovi polinomi n -te stopnje imajo vseh $(n - 1)$ odvodov v izhodišču ($s = 0$) enake nič, kar zagotavlja maksimalno ravno frekvenčno karakteristiko (ang., 'maximally flat amplitude', MFA) skoraj do same zgornje mejne frekvence. MFA sistemi so najbolj uporabni za ojačevanje sinusnih signalov (elektronski VF voltmetri), ker ima sistem enako ojačenje za vse posamične frekvence (skoraj do zgornje mejne frekvence). Vendar MFA sistemi niso primerni za ojačevanje impulzov, ker v časovni domeni na hitre spremembe preveč zanihajo.

Tretja, za prakso najbolj zanimiva točka v grafu na [Sl.6.10](#) je pri $x = 3$. Tam imata pola vrednosti $p_{1,2} = (-0.9425 \pm j0.5441) \times 10^8$ [rad/s]. Izhodiščna vektorja polov tvorita med seboj kot 60° v izhodišču, oziroma $\theta_3 \pm 150^\circ$ s pozitivno realno osjo. To pa je značilnost Besselovih polov. Fazni zasuk Besselovih polinomov pojema linearno s frekvenco (v linearnem frekvenčnem merilu; linearnost se ohrani do blizu

frekvenčne meje, kjer preide v konstanto; Besselovi polinomi višjega reda ohranijo fazno linearost tudi nad zgornjo frekvenčno mejo sistema).

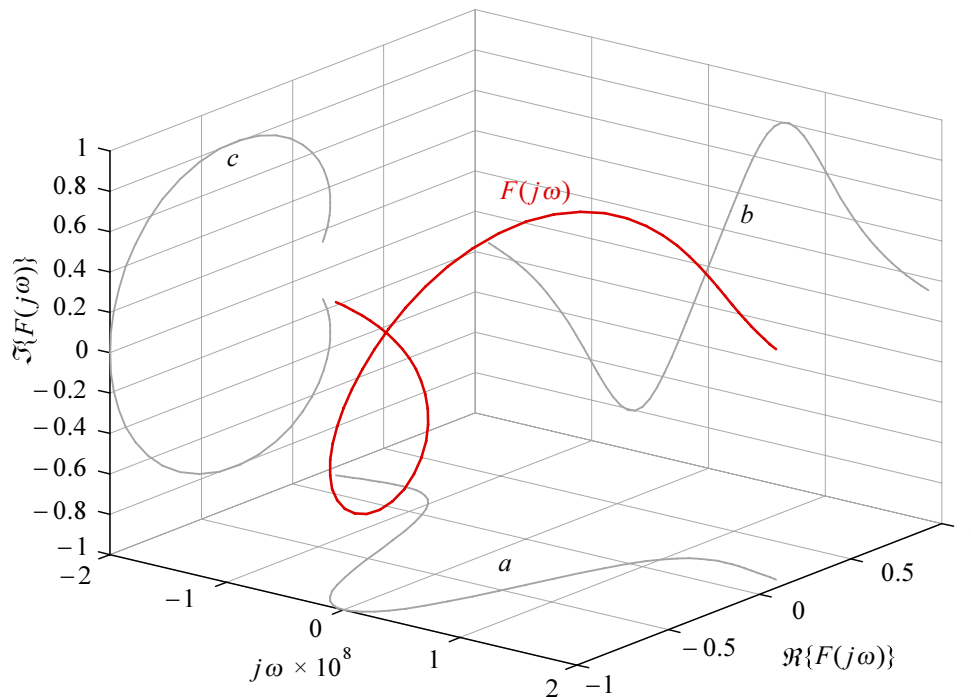
Ponazorimo še povezavo med lego polov in frekvenčnim potekom. V ta namen narišimo magnitudo prenosne funkcije $|F(s)|$, a ne le nad imaginarno frekvenčno osjo, pač pa nad celotno kompleksno ravnino. [Sl.6.11](#) prikazuje rezultat za primer ko je razmerje $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1) = 2$ (primer Butterworthovih polov).



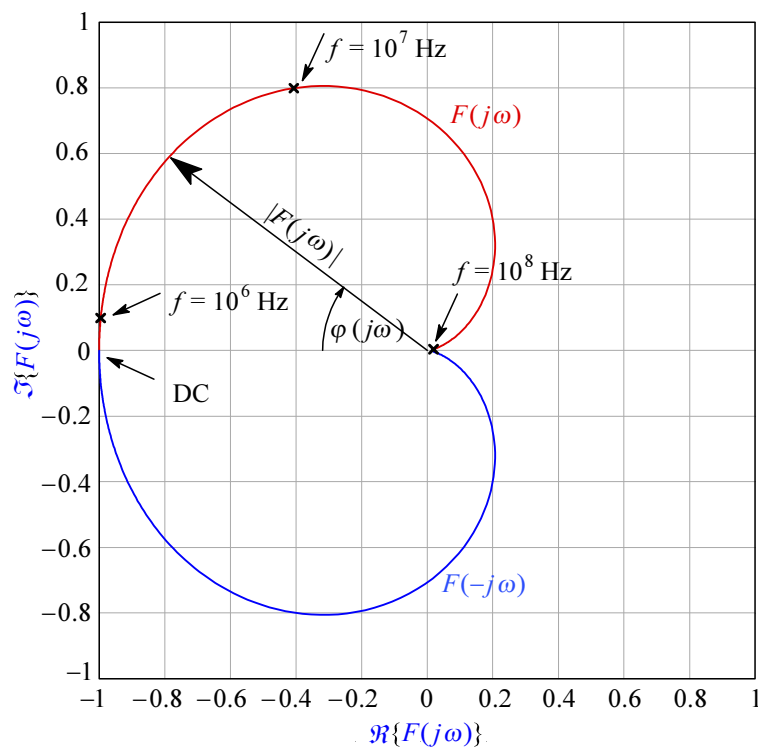
Sl.6.11: Magnituda dvopolne prenosne funkcije v Laplaceovem prostoru. Domena funkcije je kompleksna ravnina $s = \sigma + j\omega$, pola $p_{1,2}$ ležita na koordinatah $\sigma = -0.707 \times 10^8$ [rad/s], $\omega = \pm 0.707 \times 10^8$ [rad/s] (Butterworthova lega polov). Namesto običajnega mrežega prikaza površine, smo narisali potek funkcije za zvezno spreminjajoči se imaginarni del domene $j\omega$; njen realni del σ pa smo spreminjali parametrično (v korakih po 0.1×10^8), ter na ta način poudarili spremembo oblike frekvenčnega poteka in zvišanje odziva v resonanci, če se realni del vrednosti polov (dušenje sistema) postopno zmanjšuje proti nič. Če z ojačevalnikom kopolenziramo Ohmske izgube v vezju, dušenja ni in $\sigma = 0$; takrat ležita pola na imaginarni osi in je odziv v resonanci neskončen, sistem pa se obnaša kot oscilator. Ponavadi $|F(j\omega)|$ rišemo le nad pozitivnim delom imaginarne osi, $j\omega \geq 0$, z magnitudo in frekvenco v logaritmičnem merilu; na tej sliki pa je merilo linearno. Toda vsaka v časovnem prostoru realna funkcija ima v frekvenčnem prostoru konjugirano-kompleksno sliko, simetrično na realno os.

6.7. Fazni zasuk

Poudarili smo že da je fazni potek v okolici mejne frekvence odločilnega pomena za stabilnost sistema. Fazni zasuk izvira iz razmerja reaktivnih in disipativnih impedanc v vezju in predstavlja sukanje prenosne funkcije v odvisnosti od frekvence u kompleksnem prostoru. [Sl.6.12](#) prikazuje to sukanje za prvo krivuljo na [Sl.6.11](#), torej za $F(0 \pm j\omega)$. Dejansko se vse krivulje na [Sl.6.11](#) prostorsko sučejo, toda žal kaj takega težko narišemo, ker v dveh dimenzijah lahko narišemo kvečjemu projekcijo 3D diagrama, za risbo kompleksne funkcije kompleksne spremenljivke pa bi potrebovali 4D prostor, ali vsaj njegovo 3D projekcijo.



Sl.6.12: Prenosna funkcija $F(j\omega)$ v kompleksnem prostoru je prostorska krivulja. Zaradi lažje predstave sukanja prenosne funkcije smo narisali še vse tri 'sence': senci a in b predstavljata realen in imaginarni del frekvenčne odvisnosti. Senca c pa predstavlja Nyquistov fazni diagram, ki smo ga podrobneje in za širše frekvenčno območje narisali na [Sl.6.13](#).



Sl.6.13: Nyquistov fazni diagram. Velikost (absolutna vrednost) faznega vektorja je $|F(j\omega)| = \sqrt{[\Re\{F(j\omega)\}]^2 + [\Im\{F(j\omega)\}]^2}$, fazni kot pa je $\varphi(j\omega) = \arctan \frac{\Im\{F(j\omega)\}}{\Re\{F(j\omega)\}}$. Ker ojačevalnik invertira, je prenosna funkcija negativna, fazni vektor pa sevrti v smeri urnega kazalca (sicer bi se vrtil v nasprotni smeri in slika bi bila zrcalna okrog navpične osi).

Oglejmo si potek faznega zasuca naše dvopolne funkcije za enake primere kot pri frekvenčnem odzivu. Tako za enopolne funkcije (6.49), kot tudi za dvopolne (6.61) in večpolne funkcije velja, da je fazni zasuk *Arcus tangens* ulomka imaginarnega in realnega dela prenosne funkcije:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{F(j\omega)\}}{\Re\{F(j\omega)\}} \quad (6.80)$$

Olajšajmo si delo in racionalizirajmo prenosno funkcijo $F(j\omega)$ tako, da bo imaginarna enota le v števcu ulomka; to dosežemo tako, da tako števec kot imenovalac množimo z konjugirano-kompleksno vrednostjo imenovalca in imenovalac preide v svojo absolutno vrednost. Prenosna funkcija (6.60) z racionaliziranim imenovalcem je:

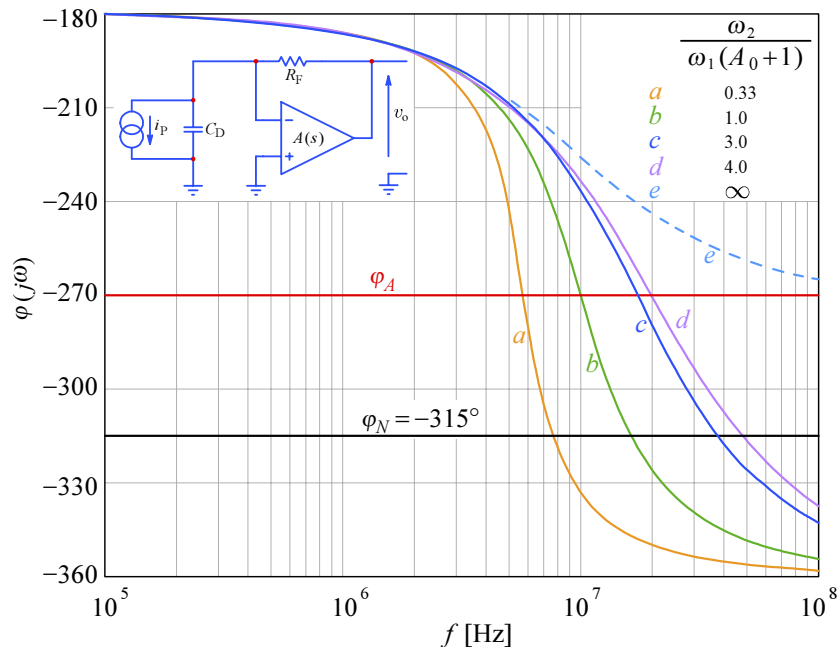
$$F(j\omega) = \frac{\omega_1\omega_2(A_0 + 1) [-\omega^2 + \omega_1\omega_2(A_0 + 1) + j\omega(-\omega_1 - \omega_2)]}{[-\omega^2 + \omega_1\omega_2(A_0 + 1)]^2 + \omega^2(-\omega_1 - \omega_2)^2} \quad (6.81)$$

V izrazu (6.81) se imaginarna enota nahaja le v oglatem oklepaju v števcu ulomka, zato se bodo pri deljenju v izrazu (6.80) vsi ostali izrazi pokrajšali; ostane le:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega(-\omega_1 - \omega_2)}{-\omega^2 + \omega_1\omega_2(A_0 + 1)} \quad (6.82)$$

Enako velja če namesto ω pišemo kar f , ker se faktor 2π povsod pokrajša. Seveda moramo rezultatom prišteti še fazni zamik zaradi priklopa vhodnega signala na invertirajoči vhod ojačevalnika, kar znaša $-\pi$ [rad], oziroma -180° .

[Sl.6.14](#) kaže grafe izraza (6.82) ob enakih pogojih kot pri [Sl.6.9](#). Nyquistova meja stabilnosti je označena s $\varphi_N = -315^\circ$.



Sl.6.14: Bodeov fazni diagram v odvisnosti od frekvence za sistem na [Sl.6.8](#). Nyquistova stabilnostna meja je pri $\varphi_N = -315^\circ$. Fazni zasuk ojačevalnika (e), ko je $C_D = 0$, limitira proti $\varphi_A = -270^\circ$ [od tega 180° prispeva invertirajoči vhod ojačevalnika, preostalih 90° pa prispeva pol prenosne funkcije $-\omega_1(A_0 + 1)$]. Fazni zasuk a prečka 315° pri ~ 7.6 MHz, kjer je ojačenje ≈ 1 ([Sl.21, a](#)); tak sistem je torej na sami meji stabilnosti.

Če ima ojačevalnik s povratno zanko ojačenje več kot 1 pri frekvenci, kjer fazni potek prečka Nyquistovo mejo, bo ta ojačevalnik nestabilen. Fazni potek (*a*) prečka Nyquistovo mejo pri ~ 7.6 MHz, ojačenje na [Sl.6.9](#) pa je pri tej frekvenci ≈ 1 ; ta sistem je torej na sami meji stabilnosti. Za mejni primer *a* iz razmerja frekvenc $\omega_2/\omega_1(A_0 + 1) = 1/3$ lahko ugotovimo mejno vrednost R_F ob kateri je ojačevalnik s kapacitivnostjo C_D še stabilen (privzemimo da uporabljamo fotodiodo SFH203 brez zaporne napetosti, zato je $C_D = 11$ pF, [Tabela 3](#)). Ostale vrednosti so: $A_0 = 10^5$, $f_1 = 10^2$, $s_1 = -2\pi f_1$. Iz (6.56) pa imamo $s_2 = -1/C_D R_F = -\omega_2$. Ob tem bo:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1(A_0 + 1)} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^2(10^5 + 1) C_D R_F} = \frac{1}{3} \quad (6.83)$$

Zadnja dva ulomka nam dajeta odgovor:

$$R_F = \frac{3}{2\pi \cdot 10^2(10^5 + 1) [s^{-1}] \cdot 11 \cdot 10^{-12} [As/V]} = 4.34 \text{ k}\Omega \quad (6.84)$$

Upornost od $4.3 \text{ k}\Omega$ sicer še zagotavlja stabilnost sistema (ob ostalih danih pogojih), vendar je za detekcijo nizkih osvetlitev razmeroma majhna. A če želimo imeti odziv na stopnico z minimalnim prenehajem, bi morali R_F zmanjšati na $\sim 1.5 \text{ k}\Omega$, kot je to v primeru *c*. Bolj natančno bomo mejni primer za časovni odziv z minimalnim prenehajem in najkrajšim vzponskim časom pri odzivu na stopnico ugotovili z analizo ovojnici časovne zakasnitve sistema.

6.8. Ovojnična zakasnitev

Analizo zgornjega primera dopolnimo še z ovojnici (grupno) časovno zakasnitvijo (ang., ‘envelope delay’ ali ‘group delay’), v odvisnosti od frekvence. Ovojnična je namišljena krivulja, ki se stikoma prireja vrhovom signalov vseh prenesenih frekvenc, in je podobna (ne pa enaka!) odzivu sistema na stopnico. Če naj sistem ohrani kar se da verno obliko impulza ali stopničastega napetostnega prehoda, mora prenesti vse pomembne frekvence v prepustnem pasu z enako zakasnitvijo. Sistem, ki v delu prepustnega pasu ima povečano zakasnitev, ob vsaki ostri spremembi signala zaniha, zato bo naslednji pulz superponiran nihanju, ki so ga povzročili predhodni pulzi. Na splošno je frekvenca vhodnih pulzov različna od lastne frekvence nihanja sistema, zato je v takem sistemu detekcija impulznih signalov močno odvisna od frekvence ponavljanja pulzov, kar seveda ni zaželeno.

Pogosto bo pasovna širina sistema nižja od najvišjih frekvenc, vsebovanih v hitrih prehodnih pojavih. Idealno strm prehod vsebuje (po Fourieru) neskončno visoke frekvence, neskončna pasovna širina pa pomeni neskončno veliko energije. Odveč je pripomniti da noben realni sistem ne more imeti na voljo neskončno količino energije, zato bodo izhodni pulzi vedno imeli manj strme prehode.

Izkaže se da sistemi z maksimalno ravno časovno zakasnitvijo (‘maximally flat envelope delay’, MFED) imajo lego polov določeno na podlagi polinomov, katerih koeficijente je mogoče izračunati s pomočjo Besselovih funkcij. Vezja s takimi lastnostimi (takrat so to bile le pasivne *RLC* mreže) je leta 1952 prvi izračunal *W.E. Thomson* (*Networks with Maximally Flat Delay*, *Wireless Engineer*, Vol. 29, 1952, pp. 253–263). Njima v čast pole takih vezij imenujemo Bessel-Thomsonovi poli, ali krajše Besselovi poli.

Zanima nas sprememba ovojnične zakasnitve sistema s frekvenco vhodnega signala. Ovojnično zakasnitev izračunamo kot odvod fazne zakasnitve po frekvenci:

$$\tau_e = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (6.85)$$

Ker je frekvenca inverzna času, ima fazni odvod po frekvenci dimenzijo časa. Če želimo da je odvod faznega zasuka za vse frekvence enak (vsaj do zgornje mejne frekvence sistema), mora biti sama fazna zakasnitev $\varphi(\omega)$ linearna funkcija frekvence. Takim sistemom pravimo da so 'fazno linearni'. Na [Sl.6.14](#) uporabljamo logaritmično merilo za frekvence, zato tam linearne odvisnosti za sistem c ni opaziti. Bralcu za vajo priporočamo, da si nariše to sliko v linearnem merilu.

Fazni zasuk smo za naše preprosto vezje na [Sl.6.8](#) že izračunali (6.82). Tej funkciji pa izračunamo odvod razmeroma preprosto po takoimenovanem 'verižnem pravilu': če ulomek $\omega(-\omega_1 - \omega_2)/[-\omega^2 + \omega_1\omega_2(A_0 + 1)]$ v relaciji (6.82) označimo z x , bo odvod funkcije $\arctan(x) = 1/(1+x^2)$; to množimo z odvodom števca, ki je preprosto $(-\omega_1 - \omega_2)$; nato množimo z odvodom imenovalca $1/y$, kar je $-1/y^2$; naposled pa vse množimo še z odvodom izraza v imenovalcu, kar je -2ω .

Žal pa funkcije niso vedno tako preproste, zlasti če ima vezje več kot dva pola. Zato se bomo raje poslužili drobnega trika. Namreč, fazna funkcija je preprosta vsota faznih prispevkov vsakega pola posebej. Če ima funkcija n polov in če so realne in imaginarne komponente vsakega pola $s_k = \sigma_k \pm j\omega_k$, lahko fazno funkcijo $\varphi(\omega)$ zapišemo kot vsoto posameznih prispevkov:

$$\varphi(\omega) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\omega) = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{\omega \mp \omega_k}{\sigma_k} \quad (6.86)$$

Posledično bo tudi fazni odvod po frekvenci vsota posameznih prispevkov:

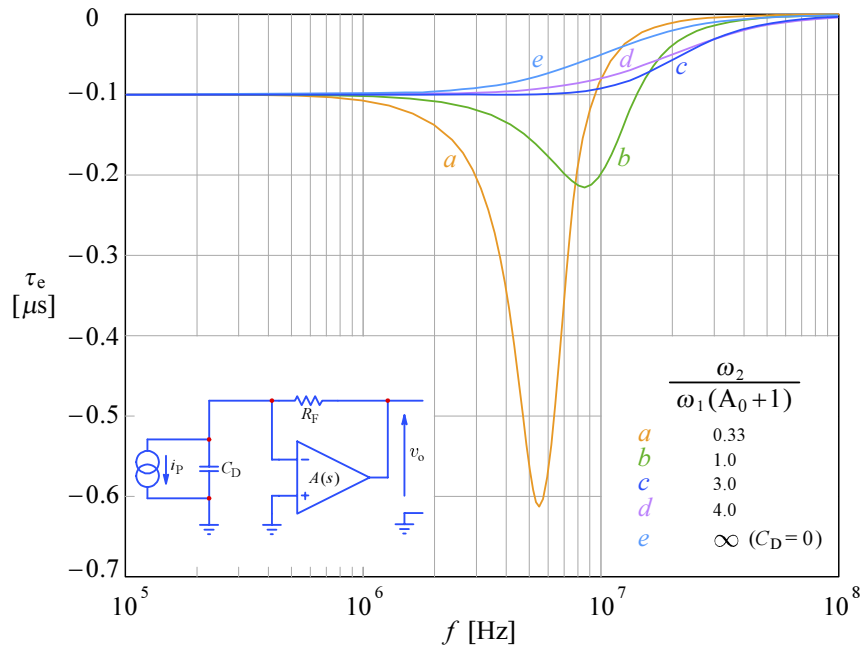
$$\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} = \sum_{k=1}^n \frac{d\varphi_k(\omega)}{d\omega} = \sum_{k=1}^n \frac{d}{d\omega} \left(\arctan \frac{\omega \mp \omega_k}{\sigma_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + (\omega \mp \omega_k)^2} \quad (6.87)$$

Še bolj preprosto pa je numerično računanje: če smo že izračunali točke za graf faznega poteka, potem odvod izračunamo preprosto kot razliko vsakih dveh sosednjih točk, ki jo delimo z razliko pripadajočih frekvenc, $(\varphi_{i+1} - \varphi_i)/(\omega_{i+1} - \omega_i)$. Vseeno, podajmo relacijo za ovojnično časovno zakasnitev s pomočjo polov. Ker želimo narisati graf faznega odvoda glede na frekvenco izraženo v Hz, lahko zamenjamo: $f = \omega/2\pi$, $f_1 = \omega_1/2\pi$, prav tako pa ne smemo pozabiti na $f_2 = \omega_2/2\pi = C_D R_F/2\pi$. Lahko torej zapišemo:

$$\begin{aligned} \tau_e = & \frac{-\frac{2\pi}{2C_D R_F}}{\left(\frac{2\pi}{2C_D R_F}\right)^2 + \left[f + \frac{2\pi}{2C_D R_F} \sqrt{4f_1(A_0 + 1)C_D R_F - 1}\right]^2} \\ & + \frac{-\frac{2\pi}{2C_D R_F}}{\left(\frac{2\pi}{2C_D R_F}\right)^2 + \left[f - \frac{2\pi}{2C_D R_F} \sqrt{4f_1(A_0 + 1)C_D R_F - 1}\right]^2} \end{aligned} \quad (6.88)$$

Opazimo da sta predznaka obeh členov negativna, kar pomeni zakasnitev v času in je posledica dejstva da ležijo poli v levem delu kompleksne ravnine (realni del $\sigma < 0$). Če bi sistem imel kakšno ničlo v prenosni funkciji, bi njen prispevek bil

pozitiven (pomenil bi časovno prehitevanje). Ker smo τ_e definirali kot ‘zakasnitev’, bi morda kdo raje predznak zanemaril in risal pozitivne vrednosti za vplive polov in negativne za vplive ničel. Vendar je bolje če ostanemo pri predznaku kot v (6.88), ker le ta odseva tudi smer vrtenja faze (Sl.6.14). Na Sl.6.15 so ovojnične zakasnitve za enake primere kot pri faznem diagramu in prenosni funkciji.



Sl.6.15: Ovojnična zakasnitev v odvisnosti od frekvence za enake primere kot na Sl.6.9 in Sl.6.14. Primer (c) predstavlja natanko tisti primer maksimalno ravne ovojnične zakasnitve skoraj do same mejne frekvence sistema. Primera (a) in (b) imata preveliko zakasnitev ob resonanci, zato v časovnem odzivu močno zanihata.

6.9. Impulzni časovni odziv

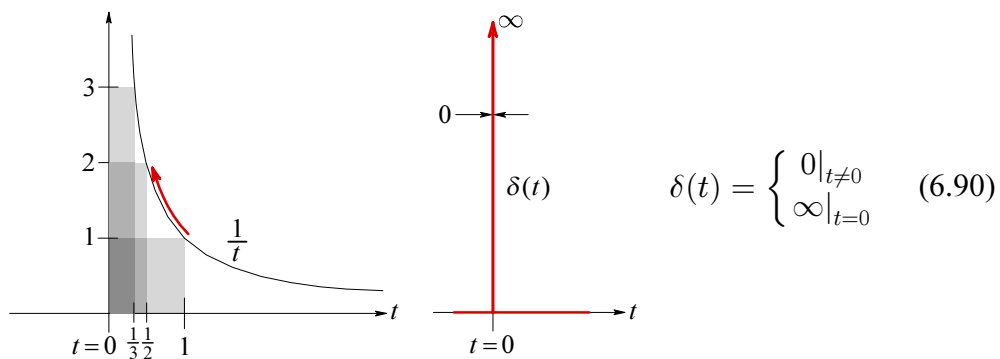
Odziv sistema v časovni domeni karakterizirata predvsem impulzni odziv in odziv na enotno stopnico. Računanje prehodnih pojavov v časovni domeni na osnovi poznane prenosne funkcije v frekvenčni domeni je dejansko problem Laplaceove inverzne transformacije, oziroma teorije residuov (lat., *residuum*, ostanek). Ne bomo se spuščali v podrobnosti Cauchyjevih (*Augustin Louis Cauchy*, 1789–1857) potenčnih vrst in krivuljnih integralov (bolj radovedni bralci lahko najdejo vse podrobnosti v prvem poglavju knjige *Wideband Amplifiers*, [Vir.xx]). Zaenkrat nam zadostuje, če residue definiramo kot ‘ostanke’ prenosne funkcije, ko ji odvezamo enega od polov. Vsota vseh residuov pa je iskani časovni odziv sistema. Več o tem v kratkem; najprej pogledjmo odnose med vhodnimi in izhodnimi signali v časovni domeni, ter definicijo časovnih funkcij za katere bomo računali časovne odzive.

Kot bomo videli kmalu, je prenosna funkcija $F(s)$ enaka Laplaceovemu transformu časovnega odziva sistema $f(t)$, ki pa je odziv na Diracov impulz $\delta(t)$. Relacija med vhodnim signalom $x(t)$, odzivom sistema $f(t)$ in izhodnim signalom $y(t)$ je podana s ‘konvolucijskim integralom’:

$$y(t) = \int_0^{t_1} x(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau \quad (6.89)$$

Ime izhaja iz latinskega izraza *convolvere*, kar pomeni ‘prepogniti’. Funkcijo $f(t)$ smo prepognili tako, da smo vzeli njen potek v intervalu od 0 do τ , ter jo preslikali (časovno obrnili) okoli vertikalne osi, kar se odraža v predznaku časovne spremenljivke, $-t$. Ko potem pustimo da čas teče od 0 do t_1 , funkcija $f(\tau - t)$ po času drsi v smeri časovnega vektorja in se vedno bolj prekriva z vhodnim signalom $x(t)$. Infinitesimalna vsota (integral) zmnožkov prekrivajočih se površin je potem izhodni signal $y(t)$. Izraz (6.89) konvergira proti dejanski končni vrednosti signala le pod pogojem, da je $f(t > \tau) \approx 0$, zato je potrebno izbrati zadosti velik τ .

Impulzni odziv sistema, $f(t)$, je po definiciji odziv na idealni, neskončno ozek in neskončno visok impulz, znan tudi kot Diracova, ali ‘delta’ funkcija, $\delta(t)$. Kot kaže [Sl.6.16](#), je Diracova funkcija definirana kot limita impulza z enotno površino, $A\Delta t = 1$, če gre $\Delta t \rightarrow 0$, zaradi česar gre $A \rightarrow \infty$.



Sl.6.16: Diracova (‘delta’) funkcija kot limita impulza z enotno površino

Konvolucija (6.89) lahko hitro postane izredno zapleten postopek, ker sta tudi $x(t)$ in $f(t)$ večinoma dokaj zapeleteni funkciji, in je integral njunega produkta analitično rešljiv le za razmeroma preproste primere (numerična rešitev pa seveda vedno obstaja).

Vseeno smo izraz (6.89) navedli zaradi dveh zelo pomembnih lastnosti:

Prvič, vrednost izhodnega signala v času t_n ni odvisna le od vrednostih $x(t_n)$ in $f(\tau - t_n)$, pač pa je, zaradi integracije, ki poteka od časa $t = 0$, njena vrednost odvisna tudi od vseh predhodnih vrednosti $x(0) \cdots x(t_{n-1})$ in $f(0) \cdots f(\tau - t_{n-1})$. To pomeni, da je izhodni signal katerega koli sistema odvisen ne le od trenutne vrednosti vhodnega signala, temveč tudi **od celotne zgodovine odziva na vhodni signal!** Če se vhodni signal hipoma spremeni, bo sprememba izhodnega signala vedno le postopna, nikakor ne trenutna.

Druga lastnost pa je povezana s tem zadnjim stavkom: če je $x(t) = \delta(t)$, se bo funkcija $f(\tau - t)$ preslikala v $y(t) = f(t)$, torej sama vase. Spomnimo še enkrat da je $\delta(t)$ neskončno ozek in neskončno visok pulz, vendar z efektivno površino enako 1, množenje z enoto pa vrednosti ne spremeni.

Zato lahko zapišemo pomembno relacijo:

$$f\{\delta(t)\} \equiv f(t) \quad (6.91)$$

To spoznanje pa nam pride prav pri analizi v frekvenčnem prostoru in prehodu iz časovnega v frekvenčni prostor in spet nazaj.

V frekvenčni prostor vstopamo prek Laplaceove transformacije:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.92)$$

Laplaceov fazni operator e^{-st} skrbi za ustavitev rotacije fazorja na frekvenci s za vse čase t (stroj, ki mu želimo izmeriti premer enega od vrtečih se koles, je pametno najprej ustaviti!). Ostali fazorji na drugih frekvencah se še naprej vrtijo in je njihov integral po dolgem času enak nič, medtem ko fazor na frekvenci s konvergira proti svoji končni vrednosti.

V frekvenčnem prostoru preide konvolucijski integral (6.89) v preprosto množenje, zaradi česar so operacije v frekvenčnem prostoru razmeroma preproste algebraične operacije. Če je $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ in $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, sledi:

$$Y(s) = X(s) \cdot F(s) \quad (6.93)$$

Če še upoštevamo da je za $x(t) = \delta(t)$ odziv sistema $y(t) = f\{\delta(t)\}$, sledi ob upoštevanju relacije (6.91), da je Laplaceov transform Diracove funkcije enak 1:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (6.94)$$

Ker pri inverzni Laplaceovi transformaciji (iz frekvenčnega v časovni prostor) mora veljati enako, sledi da impulzni odziv sistema v časovnem prostoru lahko izračunamo, če le poznamo frekvenčno odvisnost, preprosto z inverzno Laplaceovo transformacijo prenosne funkcije:

$$f\{\delta(t)\} = f(t) = \mathcal{L}_i\{F(s)\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (6.95)$$

Pri tem je c po volji izbrana pozitivna konstanta za katero inverzni transform obstaja.

Omenili smo že da inverzno Laplaceovo transformacijo računamo prek teorije residuov. Le te definiramo kot ostanke prenosne funkcije, ko odštejemo vpliv enega od polov. Za prenosno funkcijo smo že pokazali (91) da jo lahko zapišemo bodisi v obliki polinomske vsote, bodisi kot produkt izrazov, ki vsebujejo po en sam pol. V splošnem ima prenosna funkcija lahko n polov p_i ($i = 1..n$) in m ničel z_k ($k = 1..m$), pri čemur je vedno $n > m$. Zapisali smo p_i in z_k namesto običajnih s_1, s_2, \dots, s_n da lažje razlikujemo pole od ničel prenosne funkcije:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{\prod_{i=1}^n (-p_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{k=1}^m (-z_k)} \\ &= \frac{(-p_1)(-p_2)\cdots(-p_n)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(-z_1)(-z_2)\cdots(-z_m)} \end{aligned} \quad (6.96)$$

Splošni izraz za residuum r_i enostavnega pola p_i se glasi:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \{ (s - p_i) F(s) e^{p_i t} \} \quad (6.97)$$

Kot kaže definicija (6.97), je residuum r_i rezultat limitnega procesa ko gre kompleksna frekvenca s proti polu p_i , če smo prenosno funkcijo pomnožili s $(s - p_i)$ in s tem izločili vpliv pola p_i , ter množili z Laplaceovim faznim operatorjem $e^{p_i t}$, ki skrbi za ustrezno rotacijo (ali, če je predznak v eksponentu negativen, za ustaveitev rotacije) fazorjev posameznih spektralnih komponent.

Izkaže se da je limitni proces nujen le, kadar računamo analitično. Za numerično računanje zadostuje, če v izrazu (6.97) najprej pokrajšamo $(s - p_i)$ z enakim izrazom v $F(s)$, nakar preprosto vstavimo $s = p_i$, kar računalniški algoritem zelo poenostavi.

Vendar je treba opozoriti da postopek (6.97) velja le za preproste pole. Kadar ima funkcija q -krat ponavljajoči se enak pol, poteka postopek drugače:

$$r_i = \lim_{s \rightarrow p_i} \left\{ \frac{1}{(q-1)!} \left[\frac{d^{(q-1)}}{ds^{(q-1)}} (s - p_i)^q G(s) \right] e^{p_i t} \right\} \quad (6.98)$$

pri čemur je $G(s) = F(s)/(s - p_i)^q$, kjer je $F(s)$ del funkcije s preprostimi poli, med tem ko pol p_i nastopa q -krat. Zato je treba funkcijo $(s - p_i)^q G(s)$ najprej odvajati $(q - 1)$ -krat po s , ter šele nato poiskati limito. Algoritem, ki bi to naredil za splošni primer, bi bil dokaj zapleten. Na srečo se izkaže da skoraj nikoli **ne želimo imeti več polov z isto lego, ker take funkcije niso optimalne v nobenem smislu**. Žal je v praksi najbolj enostavno realizirati prav sisteme s ponavljajočimi se vrednostmi komponent in temu se mnogi elektroniki iz lenobe, ali iz neznanja radi zatečejo!

Vsota vseh residuov (6.97) je impulzni odziv sistema v časovni domeni:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n r_i \quad (6.99)$$

Residui, tako kot poli, nastopajo vedno bodisi kot realni, bodisi v konjugirano-kompleksnih parih, zato je vsota vseh residuov vedno realna časovna funkcija (imagine vrednosti konjugirano kompleksnih parov se pri seštevanju izničijo).

Poiščimo sedaj residue naše dvopolne prenosne funkcije (6.62), ki jo bomo zapisali v produktni obliki s poli, ki smo jih tudi že izračunali (6.77):

$$F(s) = - \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (6.100)$$

Residuum za pol p_1 se glasi:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \left[- \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right] e^{p_1 t} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_1} \left(- \frac{p_1 p_2}{s - p_2} \right) e^{p_1 t} = - \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \end{aligned} \quad (6.101)$$

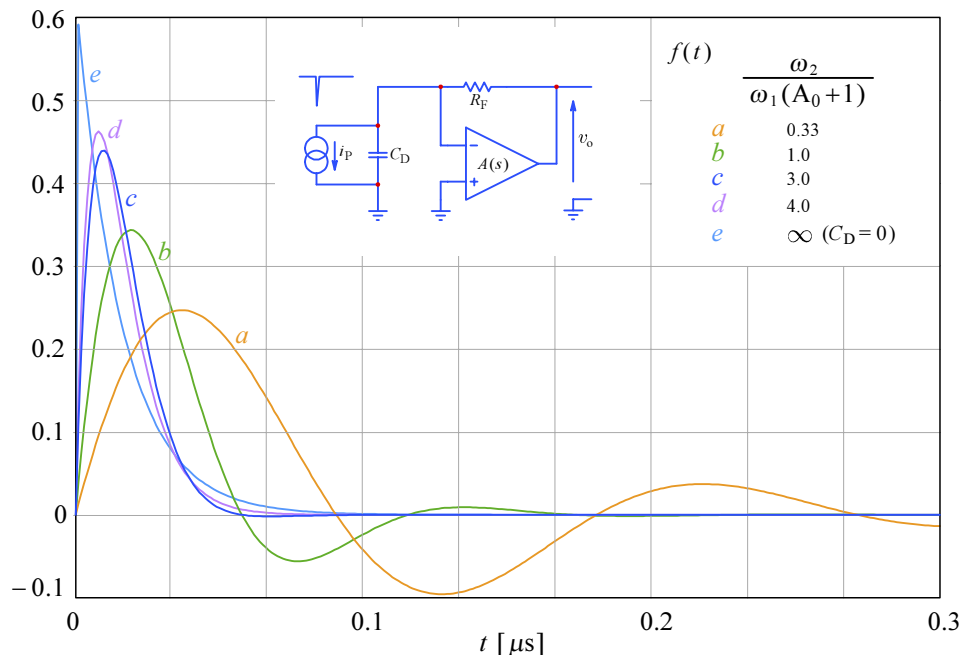
Enako naredimo še za $s \rightarrow p_2$ in dobimo residuum $r_2(t)$:

$$\begin{aligned}
 r_2(t) &= \lim_{s \rightarrow p_2} (s - p_2) \left[- \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right] e^{p_2 t} \\
 &= \lim_{s \rightarrow p_2} \left(- \frac{p_1 p_2}{s - p_1} \right) e^{p_2 t} = - \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t}
 \end{aligned} \tag{6.102}$$

Tako bo časovni odziv sistema vsota vseh residuov:

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 r_k(t) = - \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1 p_2}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \tag{6.103}$$

Narišimo impulzne odzive po relaciji (6.103) za enake pogoje kot smo jih imeli za frekvenčni odziv, fazni zasuk, ter ovojnično zakasnitev.



SI.6.17: Impulzni odziv sistema ob enakih pogojih kot pri frekvenčnem odzivu, [SI.6.9](#).

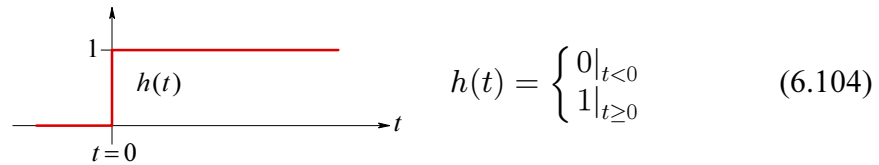
Pri praktičnem preskušanju impulznega odziva seveda ne moremo imeti idealne Diracove funkcije. Na srečo zadostuje, če je višina impulza taka, da ostane znotraj linearnega območja vhoda sistema, širina impulza pa mora biti zadosti kratka, ne daljša od $1/5$ najkrajše časovne konstante sistema. Časovni integral takega impulza je potem 'enota', glede na katero preračunamo amplitudo izhodnodnega signala.

6.10. Časovni odziv na stopničast vhodni signal

Za praktično preskušanje vezij je najpomembnejši odziv na stopničasto spremembo napetosti ali toka. Frekvenčni potek magnitude je večinoma mnogo lažje izračunati kot izmeriti, za meritev potrebujemo precizni oscilator z v širokem obsegu zvezno nastavljivo frekvenco in amplitudo, povrhu pa še vektorski analizador (instrument, ki lahko deli fazorja izhodnega signala z vhodnim, ter izpiše magnitudo in fazni kot). Pri časovnem odzivu na stopnico je ravno obratno, za meritev potrebujemo le bistabilni oscilator in navaden osciloskop. Seveda za precizno meritev morata biti tudi oscilator in osciloskop primerne kvalitete, a če nam zadostuje

natančnost 1%, je te instrumente je razmeroma enostavno narediti, zato jih izdelujejo v večjih količinah in njihova cena ni pretirano visoka, za razliko od instrumentov za frekvenčno analizo primerljive natančnosti.

Enotna stopnica, ali Heavisideova funkcija, se skokovito spremeni ob času $t = 0$ in ima po definiciji vrednost 0 za čase $t < 0$, ter vrednost 1 za čase $t \geq 0$:



SI.6.18: Definicija Heavisideove enotne stopnice

Če želimo dobiti odziv $g(t)$ na Heavisideovo stopnico $h(t)$, imamo na voljo dve poti: prva je časovni integral impulznega odziva, oziroma funkcije $f(t)$:

$$g(t) = \int_{t=0}^{t_m} f(t) dt \quad (6.105)$$

pri čemur mora biti zgornja meja integracije t_m taka, kot je bil časovni interval v eksponentijalnem členu $e^{p_k t}$ pri residuih. Zaželeno je da je t_m vsaj petkrat večji od najdaljše časovne konstante sistema, zato da vsa nihanja pri impulznem odzivu izzvenijo do zadosti majhne vrednosti (za dosego vrednosti nič bi moral biti časovni interval neskončno dolg). S tem dosežemo da bo končna vrednost integrala zadosti blizu dejanski končni vrednosti, ki jo sistem doseže čez čas. Čeprav je numerična integracija razmeroma preprosta operacija (vsak naslednji člen niza je vsota vseh prejšnjih), je analitična rešitev integrala (6.105) pogosto izredno zapletena, če ne že kar nemogoča.

Na srečo nam je na voljo še druga pot, in sicer prek Laplaceove transformacije. Najprej je treba, po relaciji (6.93), množiti prenosno funkcijo sistema, $F(s)$, z vhodnim signalom $X(s) = H(s)$, kar je Laplaceova transformacija Heavisidove stopnice:

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} \quad (6.106)$$

S tem ko pomnožimo našo prenosno funkcijo $F(s)$ z operatorjem $1/s$ dobimo še en dodaten pol, označimo ga z p_0 , pri $s = 0$, zato bomo imeli še en dodatni residuum, r_0 , katerega vrednost bo vedno 1 (vsaj pri normiranih prenosnih funkcijah brez ničel, le s poli, torej takih sistemov, pri katerih spodnja frekvenčna meja sega do frekvence nič). Zaradi tega se analitično iskanje residuov sicer nekoliko zaplete, a je naloga še vedno neprimerno lažja kot pri časovnem integralu (6.105).

Sedaj imamo določena vsa potrebna matematična orodja in lahko poiščemo časovni odziv na stopnico za naš ojačevalnik na [SI.6.8](#), ali (matematično) Laplaceovo inverzno transformacijo prenosne funkcije $F(s)$ iz relacije (6.61) [ki je enakovredna funkciji iz relacije (6.69) ob $n = 2$ in $m = 0$], pomnožene z $1/s$.

Zaradi enostavnosti spet vzemimo da je ojačenje A_0 zadosti visoko da lahko aproksimiramo izraz $A_0/(A_0 + 1) \approx 1$. Tako se nova funkcija $G(s)$, ko $F(s)$ pomnožimo z $1/s$, glasi:

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{(A_0 + 1)s_1 s_2}{s^2 - s(s_1 + s_2) + (A_0 + 1)s_1 s_2} \quad (6.107)$$

Pole $p_{1,2}$ funkcije $F(s)$ smo že izračunali (6.69):

$$G(s) = -\frac{1}{s} \cdot \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (6.108)$$

Zaradi $1/s$ ima ta funkcija dodatni pol $p_0 = 0$ (torej pri $s = 0$). Poiščimo residue za $G(s)$ po splošni relaciji (6.97). Če začnemo pri r_0 (za $s \rightarrow p_0$):

$$\begin{aligned} r_0(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} (s - 0) \left(-\frac{1}{s} \cdot \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right) e^{0t} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right) = -\frac{p_1 p_2}{(-p_1)(-p_2)} = -1 \end{aligned} \quad (6.109)$$

ker je $e^0 = 1$. Že smo zapisali da je residuum pri $s_0 = 0$ vedno enak 1, a naš ojačevalnik invertira signal zato je predznak negativen. Nadaljujmo pri $s \rightarrow p_1$:

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s - p_1) \left(-\frac{1}{s} \cdot \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right) e^{p_1 t} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_1} \left(-\frac{p_1 p_2}{s(s - p_2)} \right) e^{p_1 t} = -\frac{p_1 p_2}{p_1(p_1 - p_2)} e^{p_1 t} \\ &= -\frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} \end{aligned} \quad (6.110)$$

Enako naredimo še za $s \rightarrow p_2$:

$$\begin{aligned} r_2(t) &= \lim_{s \rightarrow p_2} (s - p_2) \left(-\frac{1}{s} \cdot \frac{p_1 p_2}{(s - p_1)(s - p_2)} \right) e^{p_2 t} \\ &= \lim_{s \rightarrow p_2} \left(-\frac{p_1 p_2}{s(s - p_1)} \right) e^{p_2 t} = -\frac{p_1 p_2}{p_2(p_2 - p_1)} e^{p_2 t} \\ &= -\frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \end{aligned} \quad (6.111)$$

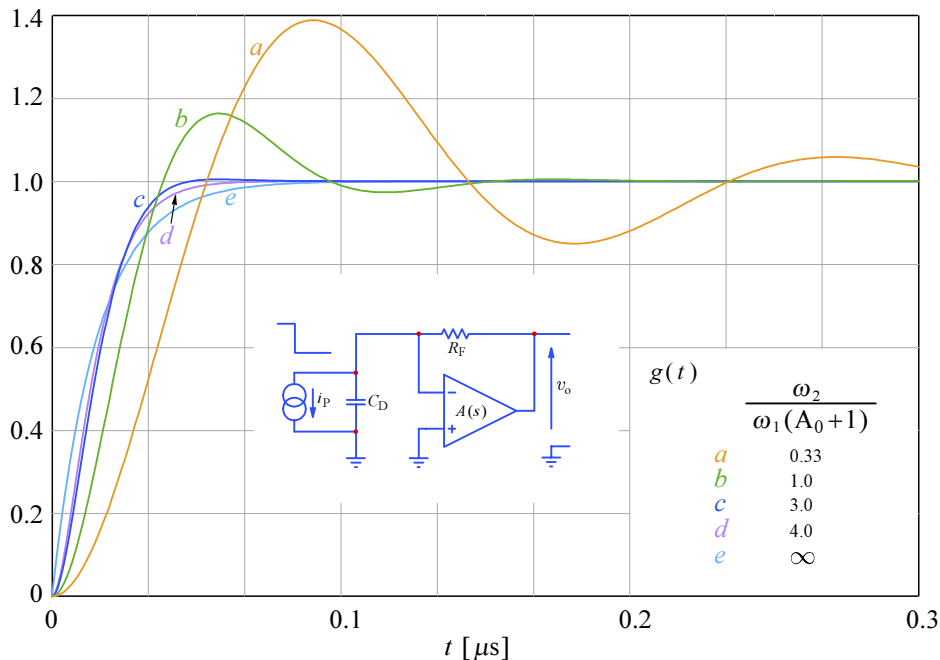
Tako bo časovni odziv sistema vsota vseh residuov:

$$g(t) = \sum_{k=0}^2 r_k(t) = -1 - \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} - \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \quad (6.112)$$

Kadar pola p_1 in p_2 tvorita konjugirano kompleksni par, je mogoče vsoto eksponentijalnih izrazov transformirati v sinusno-kosinusni par funkcij (po Eulerjevih enačbah), vendar tega ne bomo naredili, ker je izraz (6.112) bolj splošen.

Vstavimo vrednosti polov $p_{1,2}$ po relacijah (6.74) in (6.75), ter upoštevajmo enake vrednosti komponent in parametrov vezja kot prej, tudi $x = [0.3, 1, 3, 4]$. Časovno območje t naj bo tako, kot za impulzni odziv, v intervalu $0 \dots 3 \times 10^{-7}$ [s].

Izračunane odzive na stopnico kaže [Sl.6.19](#). Glede na predznak funkcije $g(t)$ (6.112) bi seveda pričakovali negativen odziv (zrcalno sliko okoli časovne osi). Vendar spomnimo da smo fotodiodo priključili tako, da foto-tok teče navzven iz vhoda ojačevalnika ($i_P < 0$), zato je izhodna napetost pozitivna. Opozorimo ponovno na daljše nihanje pri odzivih a in b , ter na odziv c (Besselova lega polov), katerega prenihaj je le $\sim 0.4\%$ nad končno vrednostjo, prav tako pa ima najkrajši vzponski čas (časovna razlika med točkama, kjer signal doseže 90% in 10% končne vrednosti).



Sl.6.19: Odziv ojačevalnika na stopnico za enake pogoje kot pri frekvenčnem odzivu ([Sl.6.9](#)). Za primerjavo je, poleg omenjenih vrednosti parametra $x = \omega_2/\omega_1(A_0 + 1)$, narisana še odziv e , ko je fotodiodna kapacitivnost $C_D = 0$. Primer a je, kot smo že ugotovili, na meji stabilnosti in močno zaniha. Primer b sicer zaniha manj, a za sledenje hitri sekvenci impulzov le ni primeren. Dejansko nam najbolj ustreza primer c , ki najhitreje doseže končno vrednost na bolj kot 1‰ natančno (že v ~ 66 ns), ter ima prenihaj manjši od 0.5%.

Ker pa smo normirali odziv na produkt $i_P R_F$, spreminjali pa le R_F , smo dejansko morali vsakič prilagoditi še velikost vhodnega toka, da smo dosegli enako končno vrednost odziva. Temu bi se lahko izognili, če bi namesto R_F spreminjali C_D , toda ta je za določeno fotodiodo tudi določena, spreminjamo jo lahko le v manjši meri s pomočjo zaporne napetosti (3.9). Iz grafa na [Sl.3.4](#) je razvidno, da je pri zaporni napetosti 25 V kapacitivnost $C_D \sim 4\times$ manjša (3 pF) kot brez zaporne napetosti (11 pF). To pomeni da bi namesto 4.3 k Ω (6.84) v primeru a lahko imeli $R_F \approx 16$ k Ω , oziroma $R_F \approx 6$ k Ω v primeru c .

Vendar je, poleg kapacitivnosti fotodiode, C_D , potrebno upoštevati tudi ostale razsejane kapacitivnosti. Denimo, že sam ojačevalnik ima okoli 1–2 pF na vhodu, pa še okoli 0.5–1 pF prinesejo povezave na tiskanem vezju, kar je treba prišteti kapacitivnosti fotodiode. Zato je zmanjševanje kapacitivnosti C_D učinkovito le do določene meje.

Za nadaljnje zvišanje pasovne širine in zagotavljanje stabilnosti sistema so potrebne nekoliko drugačne rešitve; te bomo obravnavali v naslednjem poglavju.

Opozoriti je treba še na eno podrobnost: fotodiode s kovinskim ohišjem imajo praviloma katodo v stiku z ohišjem, [Sl.3.1](#), kar pomeni da bi v naši vezavi ohišje bilo vezano na vhod ojačevalnika in prispevalo svojo kapacitivnost proti okolici (na primer, kovinskemu ohišju celotnega sistema) k vhodni kapacitivnosti. Temu se je treba izogibati, ne le zaradi povečane kapacitivnosti, pač pa tudi zaradi možnosti da visokofrekvenčni signali drugih naprav prek večje parazitne kapacitivnosti najdejo pot do občutljivega vhoda ojačevalnika in povzročijo motnje. V takem primeru lahko priključke fotodiode raje obrnemo, in uporabimo pozitivno zaporno napetost; s tem bo seveda izhodna napetost negativna funkcija osvetljenosti. Druga možnost je v uporabi fotodiode s plastičnim ohišjem.

6.11. Sklepne opombe k osnovnemu vezju

S tem končujemo obravnavo osnovnega vezja fotodiodnega ojačevalnika, ob kateri smo spoznali osnovne lastnosti samega ojačevalnika, ter osnove analize vezij in nekatera pomembna matematična orodja za izračun odziva sistema v frekvenčnem in časovnem prostoru.

Spoznali smo tudi kako lega polov vpliva na delovanje sistema. Ob tem smo pokazali eno zelo pomembno splošno lastnost aktivnih električnih vezij, to je da **sistem s sklenjeno povratno zanko ima drugačne pole, kot jih imajo njegovi posamezni sestavni deli (ojačevalnik, RC členi).**

Če smo operacijskemu ojačevalniku s polom s_1 (zaradi katerega je njegovo odprtozračno ojačenje imelo zgornjo mejno frekvenco $f_1 = -s_1/2\pi = 100$ Hz) dodali le upornost R_F v povratno zanko, se je sistemski pol prestavil na $s_1(1 + A_0)$, ki mu ustreza frekvenca $f_T = -s_1(1 + A_0)/2\pi$, torej za faktor odprtozračnega ojačenja $A_0 = 10^5$ višje, na 10 MHz ([Sl.6.7](#)).

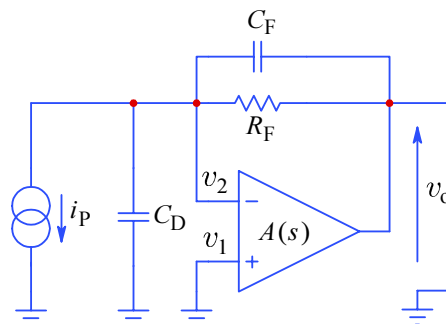
Še bolj dramatične spremembe nam je pokazala [Sl.6.10](#), tam sta dva sicer povsem realna pola, $s_1(1 + A_0)$ in $1/C_D R_F$, naenkrat po vplivom povratne zanke prešla v konjugirano-kompleksni par, $p_{1,2}$.

V nadaljevanju bomo obravnavali različna večpolna vezja, tudi taka z dvema ojačevalnikoma, zato se bo treba navaditi strogo ločevati med sistemskimi poli in poli, določenimi s sestavnimi deli vezja. Da se izognemo morebitni zmedi, **bomo odslej pole, ki so določeni s sestavnimi deli vezja, vedno označevali s črko s in ustreznim številčnim indeksom, med tem ko bomo sistemske pole označevali s črko p in prav tako s številčnim indeksom, morebitne ničle pa s črko z , tako kot v (6.96).**

7. Izboljšave fotodiodnega ojačevalnika

Videli smo da kapacitivnost fotodiode C_D , četudi razmeroma majhna, neugodno vpliva na odziv ojačevalnika. Večina fotodiod ima optično površino večjo od tiste s katero smo računali, njihove kapacitivnosti gredo celo v nanofarade. Kapacitivnosti večje od ~ 50 pF v svoji povratni zanki večina ojačevalnikov ne prenese, ker takoj zanihajo (znano Murphyjevo pravilo, prikrojeno elektroniki, se glasi: "Ojačevalniki oscilirajo, oscilatorji nočejo!"). Pojav oscilacij pri ojačevalnikih želimo preprečiti, zato moramo povratno zanko ojačevalnika nekoliko spremeniti.

Za visoko občutljivost mora biti v povratni zanki ojačevalnika ustrezno velik upor R_F . Če temu uporju vzporedno dodamo majhno kapacitivnost C_F z vrednostjo le nekaj pF, kot na [Sl.7.1](#), nastane v povratni zanki kapacitivni delilnik C_F/C_D , kar na visokih frekvencah omili fazni zasuk signala v povratni zanki, ter izboljša stabilnost.



Sl.7.1: Kompenzacija parazitne kapacitivnosti fotodiode v primeru zahteve po visoki občutljivosti (visoki vrednosti R_F). C_F in C_D tvorita kapacitivni delilnik; ojačenje na visokih frekvencah je še vedno veliko, vendar je fazni zasuk manjši.

Vendar tak fazni popravek zadostuje le za manjše vrednosti C_D , morda do ~ 100 pF, odvisno tudi od lege sekundarnih polov ojačevalnika. Večje vrednosti C_D zahtevajo spet drugačne načine kompenzacije, ki jih bomo obdelali kasneje.

7.1. Prenosna funkcija ob kompenzirani povratni zanki

Izpeljimo prenosno funkcijo vezja na [Sl.7.1](#). Kapacitivnosti C_F in C_D tvorita kapacitivni delilnik, kar pripomore k manjšemu faznemu zasuku na visokih frekvencah. Tako kot v prejšnjem primeru, se vhodni tok i_P v vozlišču v_2 razveji, a tokrat na tri komponente: prva je spet tista ki gre skozi C_D , drugi dve gresta skozi imedanco v povratni zanki, ki je sedaj v obliki vzporedne vezave upornosti R_F in kompenzacijske kapacitivnosti C_F . Toda, kot bomo videli v kratkem, na pasovno širino vpliva vsota obeh kapacitivnosti, zato bo pasovna širina vedno manjša kot pri nekompenziranem ojačevalniku.

Vsota tokov v vozlišču v_2 je:

$$i_P = \frac{v_2}{sC_D} + \frac{v_2 - v_o}{\frac{1}{R_F} + sC_F} \quad (7.1)$$

Izraz (141) najprej uredimo in se znebimo večkratnih ulomkov:

$$i_P = v_2 s C_D + \frac{v_2 - v_0}{R_F} (1 + s C_F R_F) \quad (7.2)$$

nato pa združimo koeficiente pri v_2 :

$$i_P = v_2 \left(s C_D + \frac{1 + s C_F R_F}{R_F} \right) - \frac{v_0}{R_F} (1 + s C_F R_F) \quad (7.3)$$

Pomnožimo še vse z R_F , da dobimo napetostno normirano relacijo:

$$i_P R_F = v_2 (s C_D R_F + s C_F R_F + 1) - v_0 (1 + s C_F R_F) \quad (7.4)$$

Ojačenje odprte zanke ojačevalnika (6.26) določa vhodno napetost $v_2 = -v_0/A(s)$, tako kot smo že videli v začetni obravnavi (64). Če v_2 zamenjamo v (144):

$$i_P R_F = \frac{-v_0}{A(s)} (s C_D R_F + s C_F R_F + 1) - v_0 (1 + s C_F R_F) \quad (7.5)$$

Torej se prenosna funkcija glasi:

$$F(s) = \frac{v_0}{i_P R_F} = \frac{-1}{\frac{1}{A(s)} (s C_D R_F + s C_F R_F + 1) + (1 + s C_F R_F)} \quad (7.6)$$

Vstavimo še izraz za $A(s)$ (6.26), nato uredimo po potencah s , tako da je koeficient pri najvišji potenci s enak 1:

$$F(s) = - \frac{A_0}{(1 + A_0)} \cdot \frac{K_0}{s^2 + s K_1 + K_0} \quad (7.7)$$

Preostala koeficienta K_1 in K_0 sta potem taka:

$$K_1 = \frac{1}{R_F(C_D + C_F)} + \frac{(-s_1)C_D}{(C_D + C_F)} + \frac{(A_0 + 1)(-s_1)C_F}{(C_D + C_F)} \quad (7.8)$$

$$K_0 = \frac{(-s_1)(1 + A_0)}{R_F(C_D + C_F)} \quad (7.9)$$

Prevedimo karakteristični polinom prenosne funkcije, torej imenovalc v izrazu (147), iz potenčne vrste v obliko produkta polov. Tako kot v prejšnjem primeru, pole lahko najdemo s primerjavo koeficientov v imenovalcu (147) s splošno obliko karakterističnega polinoma:

$$s^2 - s(p_1 + p_2) + p_1 p_2 = (s - p_1)(s - p_2) \quad (7.10)$$

Primerjava nam da enačbi:

$$-(p_1 + p_2) = K_1 \quad (7.11)$$

$$p_1 p_2 = K_0 \quad (7.12)$$

Ta sistem enačb razrešimo tako da iz (152) izrazimo s_1 :

$$p_1 = \frac{K_0}{p_2} \quad (7.13)$$

nato pa s tem zamenjamo p_1 v (151):

$$- \left(\frac{K_0}{p_2} + p_2 \right) = K_1 \quad (7.14)$$

in dobimo kvadratično enačbo za p_2 :

$$p_2^2 + p_2 K_1 + K_0 = 0 \quad (7.15)$$

ki jo razrešimo s standardnim obrazcem za polinom druge stopnje ([Dodatek B](#)):

$$p_2 = - \frac{K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - 4K_0}}{2} \quad (7.16)$$

kar zapišemo tako, da izpostavimo skupni faktor in imaginarno enoto izpod korena:

$$p_2 = \frac{K_1}{2} \left(-1 \pm j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1} \right) \quad (7.17)$$

S tem se vrnemo v (153) in dobimo še p_1 :

$$p_1 = \frac{2K_0}{K_1} \left(-1 \pm j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1} \right)^{-1} \quad (7.18)$$

Navidez sta pola povsem različna. Toda naj ima p_1 negativen predznak pred korenem:

$$p_1 = \frac{2K_0}{K_1} \cdot \frac{1}{-1 - j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1}} \quad (7.19)$$

Množimo števec in imenovalac s komplementarno vrednostjo imenovalca in tako racionaliziramo imenovalac:

$$p_1 = \frac{2K_0}{K_1} \cdot \frac{-1 + j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1}}{1 + \left(\frac{4K_0}{K_1^2} - 1 \right)} \quad (7.20)$$

Po krajšanju faktorjev dobimo:

$$p_1 = \frac{K_1}{2} \left(-1 + j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1} \right) \quad (7.21)$$

zato bo $p_2 = p_1^*$, kjer smo z zvezdico nakazali konjugirano kompleksno vrednost:

$$p_2 = \frac{K_1}{2} \left(-1 - j \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1} \right) \quad (7.22)$$

Imamo torej spet komplementarni par polov, ki v določenih pogojih (ob določenem razmerju RC konstant sistema) preideta v konjugirano kompleksni par.

V praksi ponavadi najprej izberemo fotodiodo, in sicer na osnovi zahtevane svetlobne občutljivosti S . Iz občutljivosti S in željene izhodne napetosti v_o ob nominalni osvetlitvi P_D določimo R_F . Fotodioda pa prispeva še nezaželjeno parazitno kapacitivnost C_D , ki utegne destabilizirati ojačevalnik. Ojačevalnik izberemo predvsem na podlagi zahtevane pasovne širine, visoke vhodne impedance in majhnega lastnega šuma. Nato pa iščemo tako vrednost kompenzacijske kapacitivnosti C_F v povratni zanki, ob kateri bo ojačevalnik ne le stabilen, pač pa bo imel odziv na stopnico z minimalnim prenehajem. Tak odziv dobimo le s Besselovo lego polov ([Dodatek A](#)). Vrednosti za dvopolni Besselov sistem, izpeljane iz pogoja za normirano ovojnično zakasnitev $\tau_e \omega_h = 1$, so:

$$s_{a,b} = -\frac{3}{2} \pm j \frac{\sqrt{3}}{2} = -1.5 \pm j 0.866 \text{ [rad/s]} \quad (7.23)$$

Delimo z realno komponento da dobimo vrednosti normirane na pasovno širino:

$$s_{a,b} = \frac{3}{2} \left(-1 \pm j \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = B(-1 \pm j 0.5774) \quad (7.24)$$

kjer je $B = 3/2$ faktor, ki je sorazmeren (ne pa enak!) pasovni širini sistema. V našem primeru za pole $p_{1,2}$ je $B = K_1/2$. Sledi da mora biti izraz pod korenem v relacijah (161) in (162) enak $j 0.5774$:

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{\frac{4K_0}{K_1^2} - 1} \quad (7.25)$$

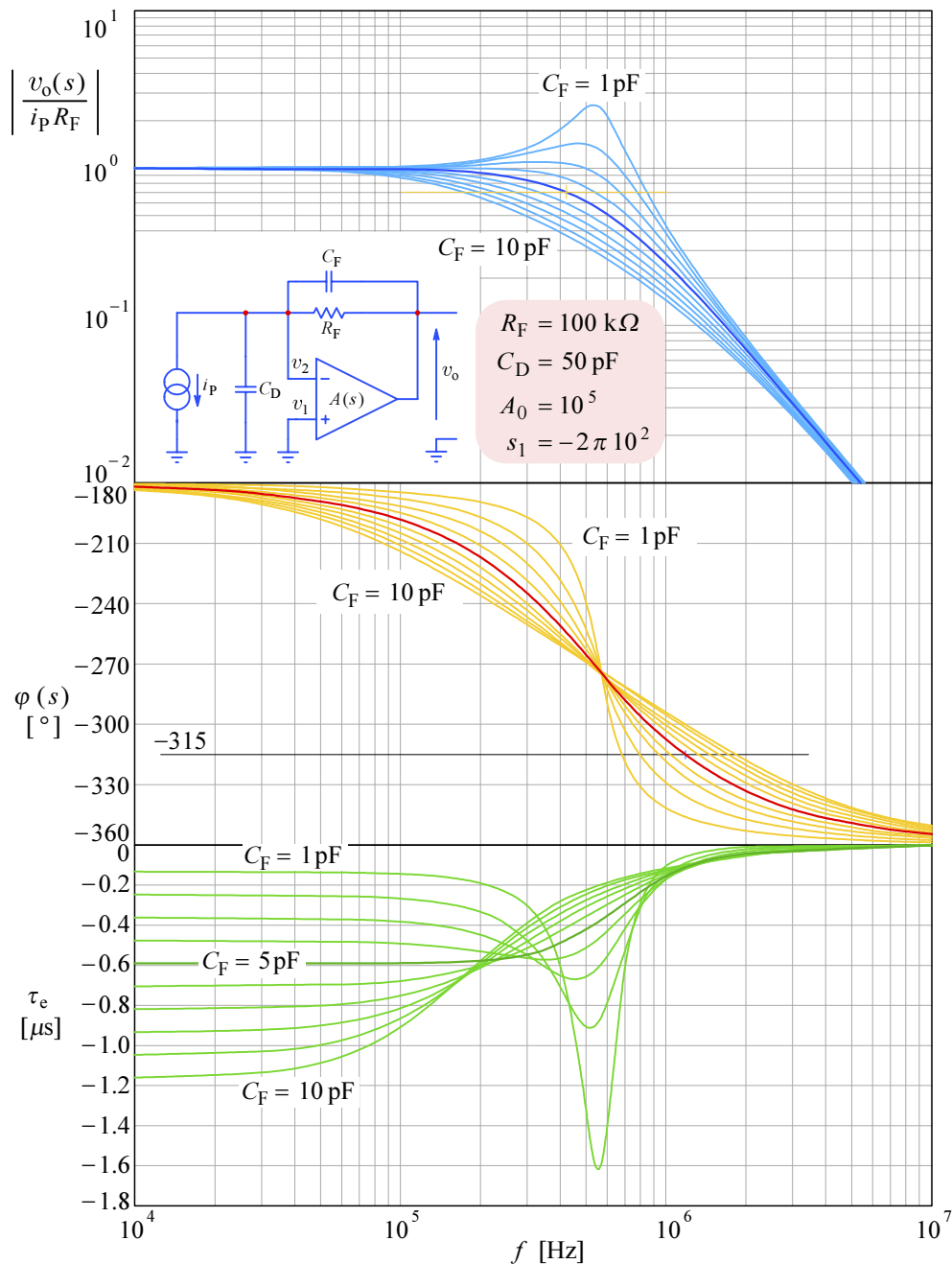
Izraz (164) bi lahko kvadrirali in vnesli izraza za K_1 in K_0 , ter razrešili za C_F , vendar je to čisto algebraični problem, povrhu dokaj zamuden (tudi če K_1 poenostavimo do skrajnosti in upoštevamo le zadnji sumand), in ne prinese nobenih novih vpogledov.

Vendar ni smiselno določiti C_F z veliko natančnostjo, saj razsejane kapacitivnosti vezja in tolerance komponent povzročajo razmeroma veliko napako. Zadostuje če za konkreten primer vnesemo numerične podatke v (164), ali kar v prenosno funkcijo (147) in s spreminjanjem parametra C_F poiščemo željeni odziv. Z uporabo računalniških programov kot sta Mathematica (Wolfram Research), Matlab (The Mathworks), ali drugi, je opravilo otročje lahko, saj imajo ti programi vsa matematična in grafična orodja, ki jih potrebujemo, že vgrajena. Lahko uporabimo tudi kakšnega izmed namenskih programov za simulacijo vezij (SPICE, ali podobni). Še največ časa nam bo vzelo vnašanje podatkov, oziroma risanje sheme in definiranje ojačevalnika (če le tega ni v programski knjižnici). Edino na kar moramo biti pozorni je da $F(s)$ izračunamo pri $s = j2\pi f$, med tem ko bomo grafe frekvenčne odvisnosti risali v odvisnosti od f .

Tak postopek smo uporabili za [Sl.7.2](#), ki kaže magnitudo, fazni zasuk in ovojnično zakasnitev v odvisnosti od frekvence f in kapacitivnosti C_F , ki jo parametrično spreminjamo od 1 do 10 pF v korakih po 1 pF.

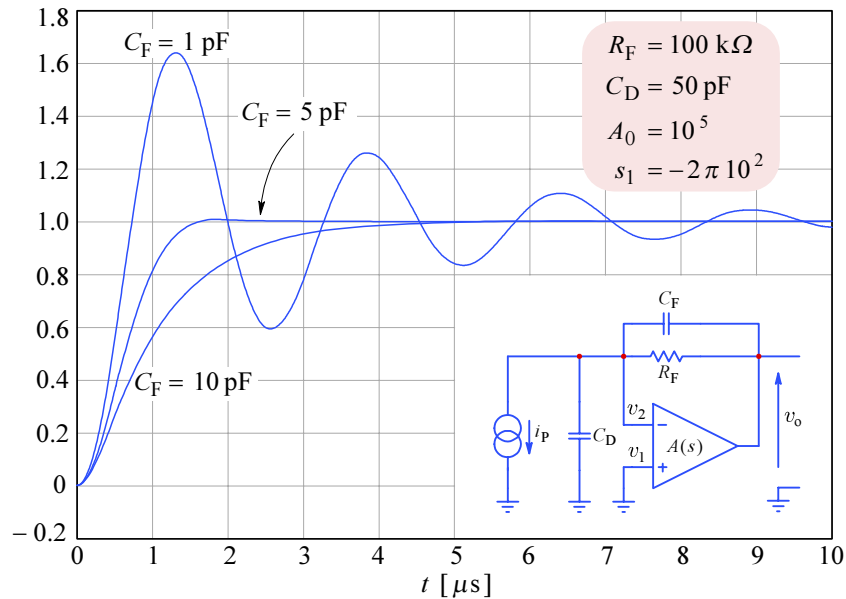
Iz grafov magnitude in faznega zasuoka težko razločimo katera vrednost C_F ustreza Besselovemu paru polov. Zato si pomagamo še s potekom ovojnične zakasnitve $\tau_e = d\varphi(\omega)/d\omega$, ki seveda mora biti maksimalno ravna.

Iz [Sl.7.2](#) je razvidno da maksimalno ravno ovojnično zakasnitev dosežemo pri vrednosti kapacitivnosti $C_F \approx 5 \text{ pF}$ (ob določenih vrednostih ostalih parametrov).



Sl.7.2: Magnituda $|F(s)|$, fazni zasok $\varphi(s)$, ter ovojnična zakasnitev $\tau_e = d\varphi(\omega)/d\omega$ v odvisnosti od frekvence in kapacitivnosti C_F , ki se spreminja od 1 do 10 pF v korakih po 1 pF, ob podanih vrednostih ostalih parametrov vezja. Če je $C_F = 5 \text{ pF}$, bo ovojnična zakasnitev maksimalno ravna, kar je lastnost Besselovega sistema.

Da je vrednost $C_F = 5 \text{ pF}$ ustrežna preverimo še z odzivom na stopnico. V ta namen spet potrebujemo izračun residuov iz polov, ki poteka enako kot v prejšnjem primeru in tudi rezultat je podoben, le da so vrednosti polov tokrat drugačne, zato tega ne bomo ponavljali. To nalogo prepustimo bralcu za vajo. [Sl.7.3](#) kaže rezultate, odzive smo izračunali le za oba skrajna primera C_F , 1 in 10 pF, ter za optimalni primer 5 pF, za katero dobimo maksimalno hiter odziv z minimalnim prenihajem.



SI.7.3: Odziv na stopnico pri enakih pogojih kot na SI.7.2.

Rezultat za 1 pF nekoliko preseneča; namreč, amplituda nihanja se zmanjšuje razmeroma hitro. Ogromna večina realnih ojačevalnikov bi z tako majhno vrednostjo kompenzacijske kapacitivnosti zagotovo zanihala z naraščajočo amplitudo in zaoscilirala. Da se to v našem modelu vseeno ne zgodi je posledica premalo realnega modela našega modela ojačevalnika. Kot smo že omenili, realni ojačevalniki imajo, poleg dominantnega pola s_1 še vsaj en nedominantni pol, ki leži nad mejo $s_1(A_0 + 1)$. Ker je nad to frekvenco ojačenje odprte zanke že manjše od 1, prisotnost tega pola ob čisto uporovnem delilniku v povratni zanki ne vpliva dosti. Vendar v primerih kot je naš, nedominantni pol vnese dodatni fazni zasuk, ki fazo povleče pod Nyquistovo mejo stabilnosti ($\varphi = -315^\circ$). Če se to zgodi pri frekvencah, kjer je ojačenje še vedno večje od ena, bo ojačevalnik zaosciliral.

Če bi želeli postaviti nekoliko bolj realen model ojačevalnika, bi morali prenosno funkcijo odprte zanke opisati z vsaj dvema poloma:

$$A(s) = A_0 \frac{s_1 s_2}{s^2 - s(s_1 + s_2) + s_1 s_2} \quad (7.26)$$

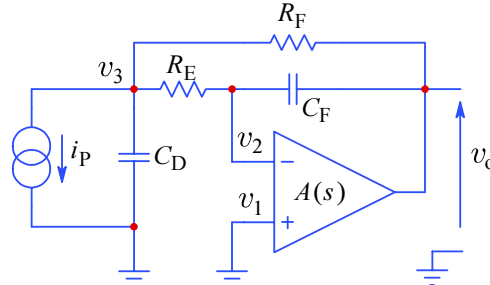
ob pogoju $s_2 \geq 2 s_1(A_0 + 1)$; a s tem bi že tako zapleteno analizo dodatno otežkočili. Vpliv sekundarnih polih bomo podrobneje obravnavali nekoliko kasneje.

7.2. Zagotovitev popolne stabilnosti ojačevalnika

Če želimo vezju zagotoviti popolno stabilnost v vseh pogojih, je treba povratno zanko oblikovati tako da vedno obstaja neka minimalna upornost, ki prepreči prevelik fazni zasuk ali preveliko izgubo signala povratne zanke na visokih frekvencah. To najlažje dosežemo, kot je narisano na SI.7.4, z dodatno upornostjo R_E proti vходу ojačevalnika, kar omogoča razvejitev povratne zanke na ločeno nizko-frekvenčno in visoko-frekvenčno vejo.

Pasivne komponente tega vezja določijo dva pola, ojačevalnik pa prispeva še tretjega. Toda upornost R_E potrebujemo predvsem takrat, ko je kapacitivnost C_D

relativno velika, zato je frekvenca $1/C_D R_F$ razmeroma nizka, kar pomeni da bo tudi pasovna širina sistema precej manjša od prehodne frekvence ojačevalnika, f_T . To nam omogoča da vpliv dominantnega pola ojačevalnika zanemarimo, ter ojačevalnik obravnavamo kot idealnega. Analizirajmo najprej primer z idealnim ojačevalnikom, nato pa še primer, ko vpliva frekvenčne omejitve ojačevalnika ni mogoče zanemariti.



SI.7.4: Če ima fotodioda veliko površino in zato veliko kapacitivnost C_D , za zagotovitev stabilnosti sistema potrebujemo še upornost R_E , ki razcepi povratno zanko na visoko-frekvenčno vejo prek C_F in nizko-frekvenčno vejo prek R_F .

Pri idealnem ojačevalniku lahko privzamemo da vhodne napetostne razlike ni:

$$v_2 = v_1 = 0 \quad (7.27)$$

Zato so tokovi v vozlišču v_3 :

$$i_P = \frac{v_3}{\frac{1}{sC_D}} + \frac{v_3}{R_E} + \frac{v_3 - v_o}{R_F} \quad (7.28)$$

V invertirajoči vhod ojačevalnika teče zanemarljivo majhen tok, zato bo v vozlišču v_2 :

$$\frac{v_3}{R_E} = \frac{-v_o}{sC_F} \quad (7.29)$$

kjer smo upoštevali (166), oziroma $v_2 = 0$. Iz (168) lahko izrazimo v_3 :

$$v_3 = -v_o s C_F R_E \quad (7.30)$$

To vstavimo v (167):

$$i_P R_F = -v_o \left[s C_F R_E \left(s C_D R_F + \frac{R_F}{R_E} + 1 \right) + 1 \right] \quad (7.31)$$

Tako dobimo prenosno funkcijo sistema:

$$F(s) = \frac{v_o}{i_P R_F} = - \frac{1}{s C_F R_E \left(s C_D R_F + \frac{R_F}{R_E} + 1 \right) + 1} \quad (7.32)$$

ki jo uredimo po padajočih potencah s , kot smo že vajeni:

$$F(s) = - \frac{1}{s^2 + s \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) + \frac{1}{C_F R_E C_D R_F}} \quad (7.33)$$

Gre za funkcijo druge stopnje, ki jo primerjamo s splošno obliko:

$$F(s) = \frac{(-p_1)(-p_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{p_1 p_2}{s^2 - s(p_1 + p_2) + p_1 p_2} \quad (7.34)$$

Vidimo, da sta koeficijenta polinoma v imenovalcu:

$$-(p_1 + p_2) = \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \quad (7.35)$$

$$p_1 p_2 = \frac{1}{C_F R_E C_D R_F} \quad (7.36)$$

Iz (174) in (175) lahko izračunamo p_1 in p_2 . Naivno bi lahko sklepali da mora veljati: $p_1 = 1/C_D R_F$ in $p_2 = 1/C_F R_E$, toda to drži le v posebnih primerih. Splošni izraz dobimo, če, denimo, iz (175) izrazimo p_1 :

$$p_1 = \frac{1}{p_2 C_F R_E C_D R_F} \quad (7.37)$$

kar vstavimo v (174):

$$-\left(\frac{1}{p_2 C_F R_E C_D R_F} + p_2 \right) = \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \quad (7.38)$$

in razrešimo po p_2 :

$$p_2^2 + p_2 \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) + \frac{1}{C_F R_E C_D R_F} = 0 \quad (7.39)$$

To je kvadratična enačba, katere korena ([Dodatek B](#)) sta pola prenosne funkcije:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{C_D}{C_F} \cdot \frac{R_F R_E}{(R_F + R_E)^2}} \right] \quad (7.40)$$

Na osnovi relacije (176) bi sicer sklepali da morata biti pola povsem različna, toda izkaže se da dejansko tvorita par, kot v (161) in (162), in tudi izračun poteka enako kot tam. Dokaz prepuščamo bralcu za vajo.

Pola p_1 in p_2 bosta tvorila konjugirano-kompleksni par le, če bo izraz pod korenem negativen, zato lahko izločimo imaginarno enoto:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \left[1 \pm j \sqrt{4 \frac{C_D}{C_F} \cdot \frac{R_F R_E}{(R_F + R_E)^2} - 1} \right] \quad (7.41)$$

Tako kot prej, dobimo mejni, kritično dušeni primer, kadar je diskriminanta enaka nič. Tak primer nastopi kadar je produkt $(C_D/C_F) R_F R_E / (R_F + R_E)^2 = 1/4$. Poseben primer kritično dušenega sistema dobimo pri $C_D = C_F$ in $R_E = R_F$.

Če pa želimo imeti sistem z najhitrejšim odzivom ob minimalnem prenihaju, potrebujemo Besselova pola. Numerične vrednosti Besselovih polov, izpeljane iz normirane ovojnčne zakasnitve $\tau_e \omega_h = 1$, so navedene v [Tabeli A2](#) v [Dodatku A](#).

Za sistem druge stopnje sta normirani vrednosti:

$$s_{a,b} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ [rad/s]} \quad (7.42)$$

Razmerje imaginarne in realne vrednosti pa je:

$$\frac{\Im\{s_a\}}{\Re\{s_a\}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (7.43)$$

Enako razmerje morata imeti tudi pola $p_{1,2}$:

$$\frac{\Im\{p_1\}}{\Re\{p_1\}} = \sqrt{4\frac{C_D}{C_F} \cdot \frac{R_F R_E}{(R_F + R_E)^2} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (7.44)$$

Tukaj smo upoštevali da se skupni faktor pred oglatim oklepajem v (180) pri deljenju pokrajša, torej lahko delimo le imaginarno in realno vrednost znotraj ogletega oklepaja, kjer je realni del enak 1. Če sedaj izraz (183) kvadriramo:

$$4\frac{C_D}{C_F} \cdot \frac{R_F R_E}{(R_F + R_E)^2} - 1 = \frac{3}{9} \quad (7.45)$$

in razrešimo za R_E , dobimo enačbo druge stopnje:

$$0 = R_E^2 - R_E R_F \left(3\frac{C_D}{C_F} - 2\right) + R_F^2 \quad (7.46)$$

katere rešitve ustrezajo Besselovim polom.

$$R_E = \frac{1}{2} R_F \left[\left(3\frac{C_D}{C_F} - 2\right) \pm \sqrt{\left(3\frac{C_D}{C_F} - 2\right)^2 - 4} \right] \quad (7.47)$$

Ker iščemo le realne rešitve (realna upornost pač ne more biti kompleksna količina), mora biti izraz pod korenem enak nič:

$$\left(3\frac{C_D}{C_F} - 2\right)^2 - 4 = 0 \quad (7.48)$$

oziroma je razmerje kapacitivnosti:

$$\frac{C_D}{C_F} = \frac{4}{3} \quad (7.49)$$

Zato pa bosta upornosti med seboj enaki:

$$R_E = R_F \quad (7.50)$$

Seveda bi lahko izbrali katero koli kombinacijo R_F , R_E in C_F , ki bi ob dani vrednosti C_D ustrezala izrazu (186). Vendar ponavadi želimo bodisi maksimizirati pasovno širino (kar pogojuje da mora biti $C_F < C_D$), bodisi želimo imeti v prepustnem pasu vnaprej določeno tokovno občutljivost, $R_F = v_o/i_p$, zaradi česar je izbira R_E in C_F vedno omejena.

Po relaciji (180) gresta pola $p_{1,2}$ (z njima tudi pasovna širina) v neskončnost, če sta bodisi $R_E = 0$, bodisi $C_F = 0$. Seveda sistem ne more imeti neskončne pasovne širine, pač pa smo brez R_E spet pri prejšnjem primeru (SI.7.1). Poleg tega, brez R_E mora biti C_F precej večji za enako stabilnost sistema, kar spet zniža pasovno širino.

Kmalu bomo videli da R_E ugodno vpliva, ne le na stabilnost sistema, temveč tudi na 'šumno ojačenje' sistema (angl., 'noise gain').

7.3. Vpliv ojačevalnikovega dominantnega pola

Vpliv ojačevalnikovega dominantnega pola postane pomemben ko bi radi imeli zgornjo mejno frekvenco sistema tako visoko, kot to še dopušča stabilnost sistema. Za analizo, upoštevajoč razmere na SI.7.4, potrebujemo nekoliko spremenjene enačbe (166) do (168), ker je $v_2 \neq 0$. Za v_2 torej velja enačba (64):

$$v_2 = -v_0 \frac{1}{A(s)} \quad (7.51)$$

Enačba za vozlišče v_3 se sedaj glasi:

$$i_P = \frac{v_3}{\frac{1}{sC_D}} + \frac{v_3 - v_2}{R_E} + \frac{v_3 - v_0}{R_F} \quad (7.52)$$

in za vozlišče v_2 :

$$\frac{v_3 - v_2}{R_E} = \frac{v_2 - v_0}{\frac{1}{sC_F}} \quad (7.53)$$

Podobno kot prej, po daljšem algebrskem premetavanju, pridemo do izraza za prenosno funkcijo sistema. Tu smo zaenkrat ohranili prispevek ojačevalnika v simbolični obliki, $A(s)$:

$$\frac{v_0}{i_P R_F} = \frac{-\frac{A(s)}{A(s)+1} \cdot \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}}{s^2 + s \left[\frac{1}{C_F R_E} \cdot \frac{1}{A(s)+1} + \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \right] + \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}} \quad (7.54)$$

Dejansko bo treba $A(s)$ izpisati eksplicitno, kot v (6.26), in urediti izraz v skladu s splošno enačbo tretje stopnje. Vendar tudi oblika (192) dovolj nazorno pokaže kje se najbolj pozna vpliv omejenih zmožnosti ojačevalnika: poleg ojačevalne napake $A(s)/[A(s)+1]$ v števcu, ki pomembno vpliva šele na prehodni frekvenci ojačevalnika in višje, je očiten vpliv še v koeficijentu linearnega člena, K_1 , v oglatem oklepaju (192), ki določa dušilne lastnosti sistema. Tukaj ojačevalnikova odprtozančna prenosna funkcija $A(s)$ neposredno množi in s tem povečuje ravno tisto časovno konstanto, $C_F R_E$, s pomočjo katere želimo frekvenčni odziv sistema v bližini zgornje mejne frekvence stabilizirati (povečanje časovne konstante je seveda enakovredno zniževanju frekvence). V teoriji filtrov to imenujemo 'Q-enhancement', povečanje efektivnega Q-faktora in zmanjšanje dušenja sistema.

Poglejmo najprej izraz za ojačevalno napako. Ločimo jo na statični del, ki je posledica končno velikega ojačenja, $A_0/(A_0+1)$, ter frekvenčno odvisni del, ki je identično enak frekvenčni odvisnosti samega ojačevalnika pri ojačenju 1 (6.42):

$$\frac{A(s)}{A(s) + 1} = \frac{A_0 \frac{(-s_1)}{s-s_1}}{A_0 \frac{(-s_1)}{s-s_1} + 1} = \frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{-s_1(A_0 + 1)}{s - s_1(A_0 + 1)} \quad (7.55)$$

Ta del ima pol določen s prehodno frekvenco ojačevalnika, $2\pi f_T = -s_1(A_0 + 1)$.

Sedaj se lahko vrnemo k prenosni funkciji (192):

$$\frac{v_o}{i_P R_F} = \frac{-\frac{A_0}{A_0+1} \cdot \frac{-s_1(A_0+1)}{s-s_1(A_0+1)} \cdot \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}}{s^2 + s \left[\frac{1}{C_F R_E} \cdot \frac{s-s_1}{s-s_1(A_0+1)} + \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \right] + \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}} \quad (7.56)$$

Po še daljšem algebrskem premetavanju pridemo do enačbe tretje stopnje:

$$\frac{v_o}{i_P R_F} = -\frac{A_0}{A_0 + 1} \cdot \frac{K_0}{s^3 + s^2 K_2 + s K_1 + K_0} \quad (7.57)$$

kjer so posamezni koeficienti karakterističnega polinoma:

$$\begin{aligned} K_2 &= (-s_1)(1 + A_0) + \frac{1}{C_F R_E} + \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) \\ K_1 &= (-s_1) \frac{1}{C_F R_E} + (-s_1)(1 + A_0) \frac{1}{C_D R_F} \left(\frac{R_F}{R_E} + 1 \right) + \frac{1}{C_F R_E C_D R_F} \\ K_0 &= (-s_1)(1 + A_0) \frac{1}{C_D R_F C_F R_E} \end{aligned} \quad (7.58)$$

Izraze (195) in (196) primerjajmo s splošno obliko enačbe tretje stopnje:

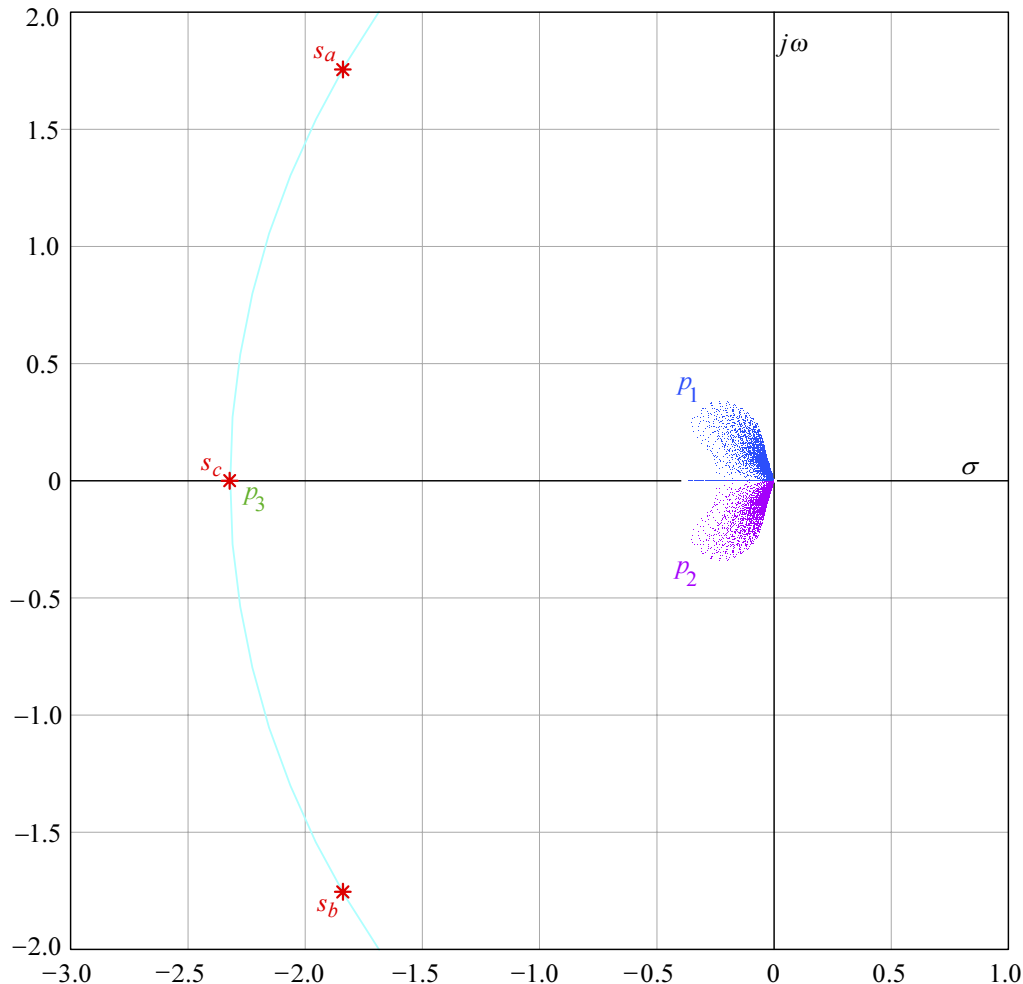
$$\begin{aligned} F_3(s) &= \frac{(-p_1)(-p_2)(-p_3)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \\ &= \frac{-p_1 p_2 p_3}{s^3 + s^2(-p_1 - p_2 - p_3) + s(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) + (-p_1 p_2 p_3)} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Z enačenjem koeficientov pri enakih potencah kompleksne frekvence s lahko postavimo sistem treh enačb za izračun treh polov:

$$\begin{aligned} K_2 &= -p_1 - p_2 - p_3 \\ K_1 &= p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 \\ K_0 &= -p_1 p_2 p_3 \end{aligned} \quad (7.60)$$

Sistem enačb (198) razrešimo po standardnih obrazcih za polinom tretje stopnje (glej [Dodatek B](#)). A čeprav so nam standardni obrazci v veliko pomoč ko je treba izraziti pole $p_{1,2,3}$ s pomočjo koeficientov $K_{2,1,0}$, še vedno imamo ogromno dela da pole izrazimo z elementi vezja, kot je določeno v sistemu enačb (196). Težava ni toliko v zapletenosti postopka, temveč v rezultatih, ki s svojo zapletenostjo ne omogočajo vpogleda v vpliv posameznih komponent na vrednosti polov. Zato se

bomo tudi v tem primeru raje zatekli k numeričnim izračunom, seveda ob izdatni pomoči računalnika. [Sl.7.5](#) kaže rezultat izračuna, kjer smo privzeli kapacitivnost fotodiode $C_D = 11$ pF in upornost povratne zanke $R_F = 10$ k Ω , spreminjali pa smo odprtozračno mejno frekvenco ojačevalnika f_1 v območju od 10 Hz do 10 kHz, kompenzacijsko kapacitivnost C_F od 1 do 11 pF, ter upornost R_E od 1 do 10 k Ω . Vrednosti polov $p_{1,2,3}$ smo normirali na vrednost realnega pola s_c Besselovega sistema z ovojnično zakasnitvijo $\tau_e = 1$. Vsega skupaj smo izračunali 4000 leg polov.



Sl.7.5: Primerjava lege polov Besselovega sistema ($s_{a,b,c}$) s poli sistema na [Sl.7.4](#), ob različnih vrednostih nekaterih komponent in mejnih frekvenc ojačevalnika. Ob konstantni vrednosti kapacitivnosti fotodiode $C_D = 11$ pF in upornosti povratne zanke $R_F = 10$ k Ω smo spreminjali odprtozračno mejno frekvenco ojačevalnika f_1 od 10 Hz do 10 kHz, kompenzacijsko kapacitivnost C_F od 1 do 11 pF, ter R_E od 1 do 10 k Ω . Vrednosti polov so normirane na realni pol Besselovega sistema, tako da je realni pol $p_3 = s_c$. Pola $p_{1,2}$ pa sta realna kadar je vrednost f_1 nizka, z njenim naraščanjem pola potujeta drug proti drugemu po realni osi do točke ko sta enaka, nakar se prelevita v konjugirano-kompleksni par, katerega imaginarna vrednost najprej narašča sorazmerno f_1 , potem pa spet pada. Zato se pola $p_{1,2}$ nikoli ne približata poloma $s_{a,b}$, oziroma drugače povedano, realni pol sistema p_3 je vedno predaleč. Sklep: s takim sistemom ne moremo doseči tripolnega Besselovega optimuma, lahko dosežemo le dvopolni optimum, ob dodatnem nedominantnem polu.

Na osnovi [Sl.7.5](#) lahko rečemo da sistema na [Sl.7.4](#) ni možno optimizirati za Besselov tripolni odziv, pač pa le za dvopolni, kot v poglavju 7.2. Kljub temu je uporaba R_E zaželjena, ker močno zniža šumno ojačenje, kot bo kmalu razvidno.

7.4. Problem šuma in šumnega ojačenja

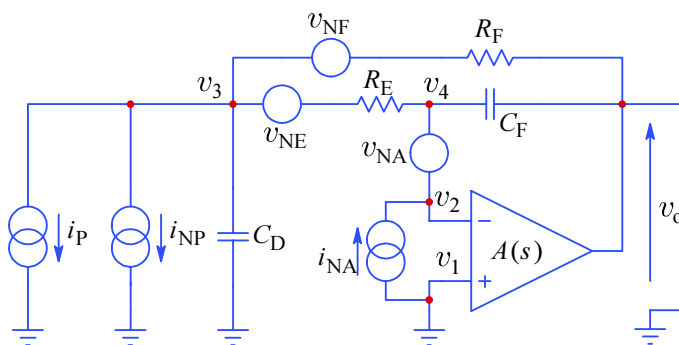
Vsak material na temperaturi večji od absolutne ničle izkazuje termoelektrični šum, ki je posledica kvantno-mehanskih naključnih nihanj, tako prostih nosilcev naboja (elektronov, oziroma vrzeli), kot tudi nihanj posameznih atomov okoli svojih ravnovesnih položajev v strukturi materiala. Poleg termičnega šuma pa pri polprevodnikih opazimo še nekatere druge šumne pojave, predvsem zaradi 'puščanja' p-n spojev v zaporni smeri (ang., 'leakage current'; noben p-n spoj ni idealni izolator). Šum omejuje ločljivost sistema za majhne signale.

Šum sistema je treba analizirati posebej za prispevek fotodiodnega šuma in posebej za ostale prispevke, kot so lastni šum ojačevalnika in termični šum uporov.

Ker fotodiodnega šuma ni mogoče ločiti od svetlobo sproženega toka, bo ta šum procesiran enako kot foto-signal, s prenosno funkcijo sistema (matematično je ta proces konvolucijski integral šuma z impulznim odzivom ojačevalnika v časovni domeni, oziroma množenje šumnega spektra s kompleksno prenosno funkcijo v frekvenčni domeni).

Podobno je s termičnim šumom uporov, tega tudi ni mogoče ločiti od željenega signala, ker je ojačenje ojačevalnika definirano z upornostjo v povratni zanki in efektivno množi vhodni signal. Sicer tudi kondenzatorji in tuljave izkazujejo nekaj termičnega šuma, toda ta je v primerjavi z šumom uporov zanemarljiv.

V nasprotju s tem je lastni šum ojačevalnika izpostavljen 'šumnemu ojačenju', ki je v osnovi različno od signalnega ojačenja, ker se vir šuma nahaja znotraj povratne zanke sistema. Zanka pa je frekvenčno odvisna zaradi prisotnosti kapacitivnosti, katerih razmerje vpliva na spekter šumnega ojačenja. Dejansko je šumno ojačenje enako znančnemu ojačenju negativne povratne zanke. Zančno ojačenje pa, poleg na šum, vpliva tudi na stabilnost sistema, tako z magnitudo kot tudi s faznim zasukom. Zato je analiza šumnega ojačenja nepogrešljiva pri analizi stabilnosti sistema. [Sl.7.6](#) kaže modeliranje šumnih virov vezja, na katere se sklicujemo pri naslednji analizi.



Sl.7.6: Modeliranje generatorjev šuma pri analizi šumnega ojačenja. Vhod ojačevalnika generira tako tokovni šum i_N kot tudi napetostni šum v_{NA} , med tem ko upornosti R_F in R_E generirata napetostni šum v_{NF} in v_{NE} . Fotodioda prispeva tokovno komponento šuma i_{NP} . Kot vedno je notranja upornost napetostnih generatorjev enaka nič, tokovnih pa neskončna.

Vhod ojačevalnika generira tokovni šum i_N in napetostni šum v_{NA} , med tem ko upornosti R_F in R_E generirata termični šum z enakovredno napetostjo v_{NF} in v_{NE} . Šum je ponavadi podan s specifično spektralno gostoto toka ali napetosti, ponavadi znotraj pasovne širine 1 Hz pri središčni frekvenci 1 kHz, zato celotno efektivno

napetost ali tok dobimo z množenjem s pasovno širino vezja. Poglejmo velikosti posameznih komponent šuma. Za upornost R velja:

$$v_N(R) = \sqrt{4 k_B T R \Delta f} \quad (7.61)$$

Tukaj je k_B Boltzmannova konstanta, T je absolutna temperatura, R je upornost in $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$ predstavlja frekvenčni pas sistema. Pri fotodiodnih ojačevalnikih pogosto ojačujemo vse od enosmernega toka ($f_{\min} = 0$) naprej, zato je pasovna širina Δf kar enaka zgornji mejni frekvenci f_h .

Pri upornostih gre pretežno za 'beli' šum, kjer, po analogiji z belo svetlobo, nastopajo vse frekvence z enako amplitudo (to drži pri uporih s kovinsko-oksido plastjo; pri ogljeno-plastnih uporih je termični šum na nizkih frekvencah 4–5 krat večji!). Ker pa je v vsaki naslednji oktavi dvakrat več frekvenc kot v prejšnji, spekter šuma narašča s frekvenco za +3 dB na oktavo ($2f$), oziroma +10 dB na dekada ($10f$).

V našem primeru imamo $R_F > R_E$, zato bo šum upornosti R_F poglavitni vir termičnega šuma, sicer pa je razmerje šumnih napetosti sorazmerno $\sqrt{R_F/R_E}$.

Za vrednosti $R_F = 100 \text{ k}\Omega$ in $f_h = 1 \text{ MHz}$ imamo:

$$\begin{aligned} v_{NF} &= \sqrt{4 k_B T R_F f_h} \\ &= \sqrt{4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} [\text{VAs/K}] \cdot 300 \text{ K} \cdot 10^5 [\text{V/A}] \cdot 10^6 [\text{s}^{-1}]} \\ &= 40.7 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (7.62)$$

Če nam bo na koncu ustrezalo razmerje $R_E = R_F/10$, bo $v_{NE} = v_{NF}/\sqrt{10}$, torej trikrat manjši, tako da lahko zaokrožimo šum obeh uporov na povprečno $54 \mu\text{V}$.

Poglejmo kako je s šumom operacijskega ojačevalnika. Pri ojačevalnikih, ki imajo na vhodu jFETe, je zaradi zelo visoke vhodne impedance tokovna komponenta šuma zelo majhna (v primerjavi z ojačevalniki, ki imajo na vhodu bipolarni tranzistorje). Že pri 'navadnih' ojačevalnikih, kot je, denimo, LF356, je gostota tokovnega šuma tipično $i_n = 0.01 \text{ pA}/\sqrt{\text{Hz}}$. Če tako tokovno gostoto pomnožimo s korenem iz pričakovane pasovne širine sistema in nato s celotno upornostjo, skozi katero ta šumni tok teče ($R_F + R_E \approx R_F$), dobimo enakovredno šumno napetost:

$$\begin{aligned} v_{Ni} &\approx R_F i_n \sqrt{f_h} = 10^5 \left[\frac{\text{V}}{\text{A}} \right] \cdot 10^{-14} \left[\frac{\text{A}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \cdot 10^3 \left[\sqrt{\text{Hz}} \right] \\ &= 1 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (7.63)$$

Za isti ojačevalnik proizvajalec podaja vrednost napetostne gostote šuma $e_n = 12 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, zato bo šumna napetost v celotnem frekvenčnem pasu:

$$\begin{aligned} v_{NA} &= e_n \sqrt{f_h} = 12 \cdot 10^{-9} \left[\frac{\text{V}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \cdot 10^3 \left[\sqrt{\text{Hz}} \right] \\ &= 12 \mu\text{V} \end{aligned} \quad (7.64)$$

Podatek za šumno gostoto ojačevalnika je sicer podan za pasovno širino 1 Hz v okolici frekvence 1 kHz. Vendar poleg komponente belega šuma nastopata pri ojačevalnikih še '1/f' šum na območju pod 100 Hz, ter dodatni visokofrekvenčni šum nad 100 kHz.

Prvi tip šuma, kot že pove ime '1/f', narašča sorazmerno pojemanju frekvence. Teoretično bi pri $f = 0$ (DC) bil neskončno velik, a je v resnici omejen s hitrostjo in povprečno prosto potjo elektronov na poti skozi P-N spoj med kanalom in vrati jFETa, zato pod 0.1 Hz spet pada.

Drugi, visokofrekvenčni šum, pa narašča s frekvenco +6 dB na oktavo, oziroma +20 dB/10f, a je navzgor omejen s pasovno širino sistema. To pomembno prispeva k celotnemu šumu; ta bo tako v širokem pasu skoraj dvakrat večji od vrednosti v (202), približno 20 μ V.

Posebni nizkošumni ojačevalniki z bipolarnimi tranzistorji imajo napetostno komponento šuma tudi desetkrat manjšo, vendar je njihov tokovni šum razmeroma velik, kar se ob večjih upornostih v povratni zanki precej pozna. Seveda obstajajo tudi nizkošumni ojačevalniki s jFETi, tak je, denimo OPA656, ki ima napetostno gostoto šuma $e_n = 7 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, in visokofrekvenčno komponento šuma, ki začne naraščati šele nad 10 MHz. Nekateri diskretni jFETi, kot je denimo tip 2N5911, pa imajo celo $e_n = 1.2 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$.

Upoštevati je treba še šumni tok fotodiode, i_{NP} . Vrednost šumenga toka dobimo če zmnožimo največjo foto-tokovno občutljivost $S(\lambda_{\max})$ s šumu enakovredno optično močjo P_N (iz [Tabele 3](#)) in pasovno širino sistema:

$$\begin{aligned} i_{NP} &= S(\lambda_{\max}) \cdot P_N \cdot \sqrt{f_h} & (7.65) \\ &= 0.62 \left[\frac{\text{A}}{\text{W}} \right] \cdot 2.9 \times 10^{-14} \left[\frac{\text{W}}{\sqrt{\text{Hz}}} \right] \cdot \sqrt{10^6} \left[\sqrt{\text{Hz}} \right] \approx 1.8 \times 10^{-11} \text{ [A]} \end{aligned}$$

Ta šumni tok, pomnožen z upornostjo povratne zanke R_F , da izhodno napetost:

$$v_{NP} = i_{NP} R_F = 1.8 \times 10^{-11} \text{ [A]} \cdot 10^5 \text{ [\Omega]} = 1.8 \times 10^{-6} \text{ [V]} = 1.8 \text{ }\mu\text{V} \quad (7.66)$$

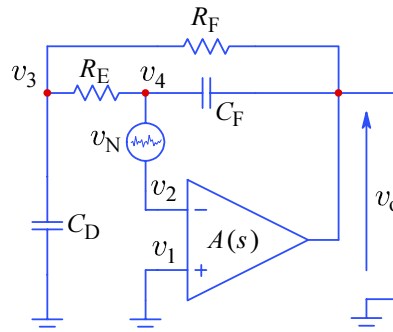
Celoten enakovredni vhodni šum sistema pa dobimo če korenimo vsoto kvadratov posameznih komponent šuma (zato, ker je šum naključna količina in posamične komponente niso med seboj fazno korelirane, sicer bi jih preprosto sešteli):

$$v_N = \sqrt{\sum_{k=1}^n (v_{Nk})^2} = \sqrt{v_{NA}^2 + v_{Ni}^2 + v_{NF}^2 + v_{NP}^2} \approx 45 \text{ }\mu\text{V}_{\text{rms}} \quad (7.67)$$

Akronim 'rms' pomeni 'root-mean-square', oziroma 'koren srednjega kvadrata', ali preprosto efektivna vrednost šumne napetosti.

Relacija (184) se dejansko nanaša na enakovredni vhodni šum, toda pri izračunu velikosti šuma na izhodu ojačevalnika moramo upoštevati, kot smo že povedali na začetku, da je lastni šum ojačevalnika podvržen šumnemu ojačenju, ki se razlikuje od signalnega ojačenja (vsaj v delu frekvenčnega spektra).

Analizo šumnega ojačenja bomo naredili na osnovi [SI.7.7](#), kjer je ves šum ojačevalnika modeliran z virom v_N . Vrednosti RC členov, ki oblikujejo frekvenčni odziv, bomo izbrali tako, da so posamične prelomne frekvence zadosti narazen, da lahko ponazorimo vpliv posameznih komponent na šumno ojačenje.



SI.7.7: Enakovredni šumni generator ojačevalnika pri analizi šumnega ojačenja.

Analizo šumnega ojačenja najlažje izpeljemo, če si predstavljamo enakovreden generator šuma v_N , ki nadomesti šum ojačevalnika, ter izračunamo zračno ojačenje sistema. Za model ojačevalnika privzemimo da veljajo relacije (6.26) in (64). Napetost v vozlišču v_4 pa je preprosto vsota vhodne napetosti v_2 in šuma v_N :

$$v_4 = v_2 + v_N = \frac{-v_o}{A(s)} + v_N \quad (7.68)$$

Poleg tega za vozlišče v_4 velja enakost tokov:

$$\frac{v_o - v_4}{1} = \frac{v_4 - v_3}{sC_F} \quad (7.69)$$

V vozlišče v_3 se stekajo tri tokovne komponente:

$$\frac{v_o - v_3}{R_F} + \frac{v_4 - v_3}{R_E} = \frac{v_3}{\frac{1}{sC_D}} \quad (7.70)$$

Iz (207) lahko izrazimo v_3 :

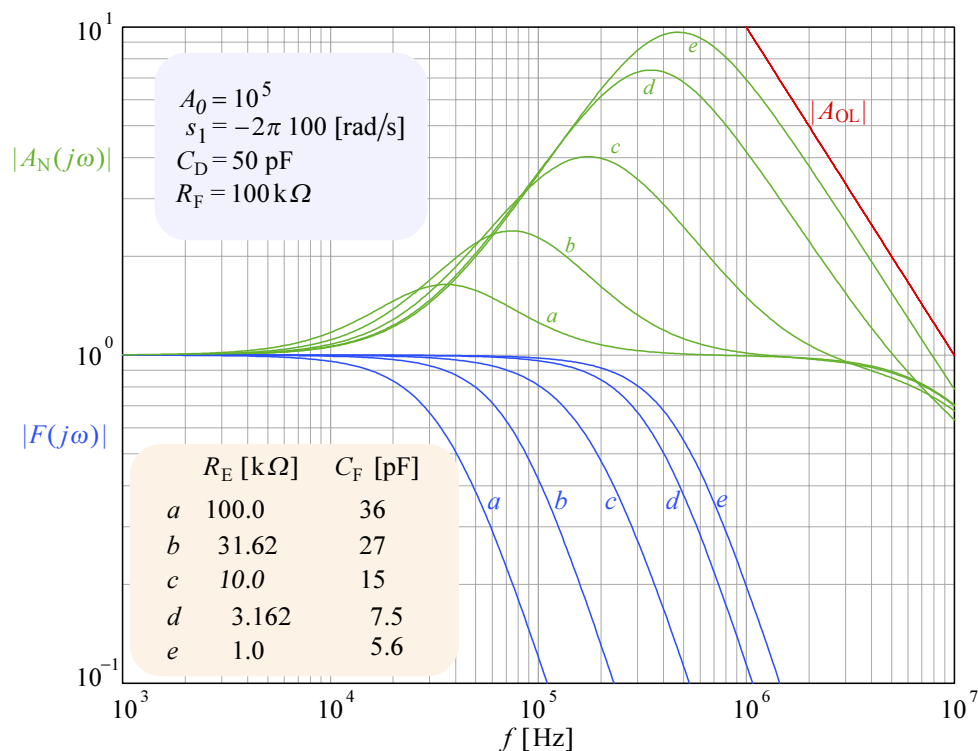
$$v_3 = v_4(1 + sC_F R_E) - v_o sC_F R_E \quad (7.71)$$

kar vstavimo v (208) in, po daljšem preurejanju, dobimo šumno ojačenje:

$$\frac{v_o}{v_N} = \frac{A(s)}{A(s) + 1} \cdot \frac{s^2 + s \left[\frac{1}{C_F R_E} + \frac{1}{C_D R_F} \left(1 + \frac{R_F}{R_E} \right) \right] + \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}}{s^2 + s \left[\frac{1}{C_D R_F} \left(1 + \frac{R_F}{R_E} \right) + \frac{1}{C_F R_E} \cdot \frac{1}{A(s) + 1} \right] + \frac{1}{C_D R_F C_F R_E}} \quad (7.72)$$

Primerjajmo šumno ojačenje (210) s signalnim ojačenjem (195). Signalno ojačenje je nizkoprepustna funkcija tretje stopnje, ker je v imenovalcu najvišja potenca kompleksne frekvence s enaka 3, v števcu pa je enak člen kot zadnji člen karakterističnega polinoma (pri s^0). Šumno ojačenje pa ima tako v števcu kot v imenovalcu polinom druge stopnje, dodatna, tretja stopnja je skrita v $A(s)$. Funkcije,

ki imajo v števcu in imenovalcu enako stopnjo polinoma, so po definiciji 'vseprepusne' (ang., 'all-pass'). Vendar funkcija (210) nima enake vrednosti na vseh frekvencah, odstopanja se pojavijo zaradi razlike v srednjih členih polinomov na srednjih frekvencah, pa še na zelo visokih, kjer prevlada inverzni faktor odprtozančnega ojačenja $1/[A(s) + 1]$ v srednjem členu imenovalca. Za bolj nazorno primerjavo potrobujemo magnitude (absolutne vrednosti) obeh funkcij. Magnitudo dobimo iz kompleksne prenosne funkcije, tako kot v (6.77), s korenem iz produkta funkcije z njeno lastno konjugirano kompleksno vrednostjo. Na [Sl.7.8](#) smo narisali različne potoke magnitude šumnega ojačenja $|A_N(j\omega)|$ in signalnega ojačenja $|F(j\omega)|$, če se R_E zmanjšuje od $100\text{ k}\Omega$ do $1\text{ k}\Omega$, vsakič za faktor $\sqrt{10}$, hkrati pa se temu prilagaja kapacitivnost povratne zanke C_F za Besselov odziv. Pri tem smo privzeli kapacitivnost fotodiode $C_D = 50\text{ pF}$ in upornost povratne zanke $R_F = 100\text{ k}\Omega$.



Sl.7.8: Potek magnitude šumnega ojačenja $|A_N(j\omega)|$ in signalnega ojačenja $|F(j\omega)|$, če R_E zmanjšujemo od $100\text{ k}\Omega$ do $1\text{ k}\Omega$, temu pa priredimo C_F za ustrezen Besselov odziv. Šum se nad 10 kHz ojači celo do $10\times$ (20 dBV). Na frekvencah nad $\sim 3\text{ MHz}$ opazimo zmanjšanje šumnega ojačenja zaradi vpliva odprtozančnega ojačevalnika, A_{OL} .

Očitno dobimo najmanjše šumno ojačenje kadar je $R_E = R_F$. Žal pa je takrat vhodna impedanca (ki bremeni fotodiodo) precej velika, $Z_{in} = R_F R_E / (R_F + R_E)$, zato del povratnega toka gre v fotodiodno kapacitivnost C_D in ojačevalnik pri odzivu na stopnico močno zaniha, če ustrezno ne povečamo kapacitivnost povratne zanke C_F . S tem žal močno znižamo tudi pasovno širino sistema. Torej bo izbira R_E in C_F kompromis med šumnim ojačenjem in pasovno širino. Dober kompromis dosežemo že v primeru *c*, z $R_E = R_F/10$ in $C_F \approx C_D/3$. Takrat je vrh šumnega ojačenja $2.5\times$ manjši, spekter pa za celo frekvenčno dekada ožji, kar pomeni da bo učinkoviti šum sistema v območju 10 kHz - 10 MHz okoli $25\times$ manjši kot ob največji pasovni širini.

Pravzaprav bi morali v izrazu za šumno ojačenje (210) faktor $A(s)$ zapisati eksplicitno, ter preurediti (210) v funkcijo tretje stopnje. Vendar smo videli že v

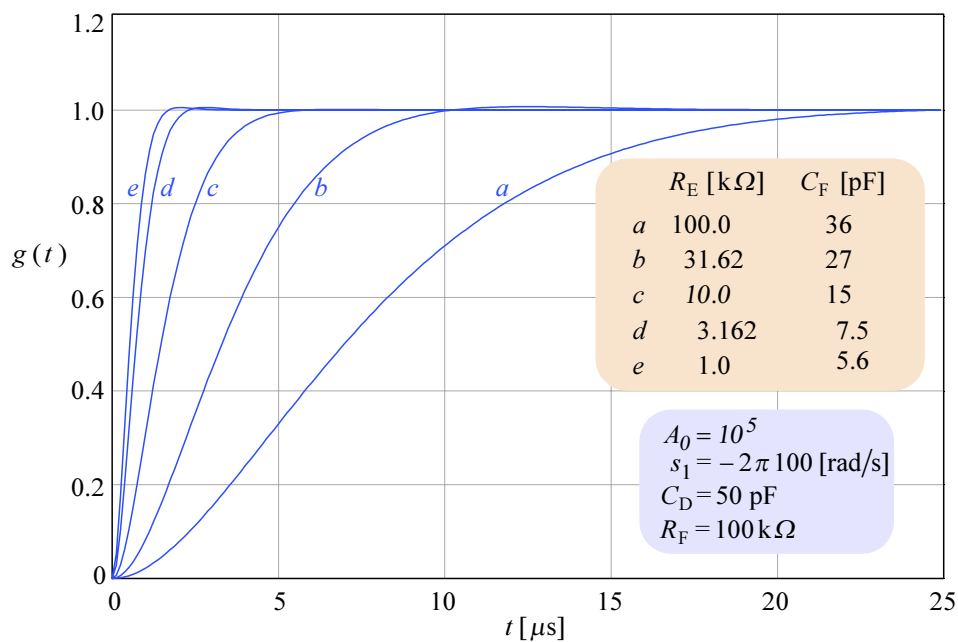
poglavju 7.3 da vpliv ojačevalnika lahko zanemarimo, če je pasovna širina sistema vsaj $5\times$ nižja od prehodne frekvence ojačevalnika f_T (10 MHz v našem primeru). To potrjuje tudi potek šumnega ojačenja na [Sl.7.8](#), ki pade pod vrednost 1 šele pri 2 MHz.

Namreč, na visokih frekvencah, ko je $s \gg A_0 s_1$, bo $A(s) \ll 1$, zato je $1/[1 + A(s)] \approx 1$. Takrat sta števec in imenovalec relacije (210) enaka in je njun ulomek enak 1, zato na visokih frekvencah preostane le vpliv izraza $A(s)/[1 + A(s)] \approx A(s)$ in šumno ojačenje pada enako kot odprtozančno ojačenje. Nasprotno, pri nizkih frekvencah, ko je $s \ll A_0 s_1$, imamo $A(s) \gg 1$ in bo zato $A(s)/[1 + A(s)] \approx 1$, med tem ko bo $1/[1 + A(s)] \approx 0$, zato člen $1/C_F R_E$ v srednjem členu imenovalca lahko zanemarimo.

Tako pridemo do poenostavljenega izraza za šumno ojačenje, ki ga lahko uporabimo kadar je zgornja mejna frekvenca f_h manjša od ~ 500 kHz:

$$\frac{v_o}{v_N} = \frac{s^2 + s \frac{1}{C_D R_F} \left[\frac{C_D R_F}{C_F R_E} + \left(1 + \frac{R_F}{R_E} \right) \right] + \frac{1}{C_F R_E C_D R_F}}{s^2 + s \frac{1}{C_D R_F} \left(1 + \frac{R_F}{R_E} \right) + \frac{1}{C_F R_E C_D R_F}} \quad (7.73)$$

Na [Sl.7.9](#) je narisano odziv na stopnico za enake pogoje kot na [Sl.7.8](#).

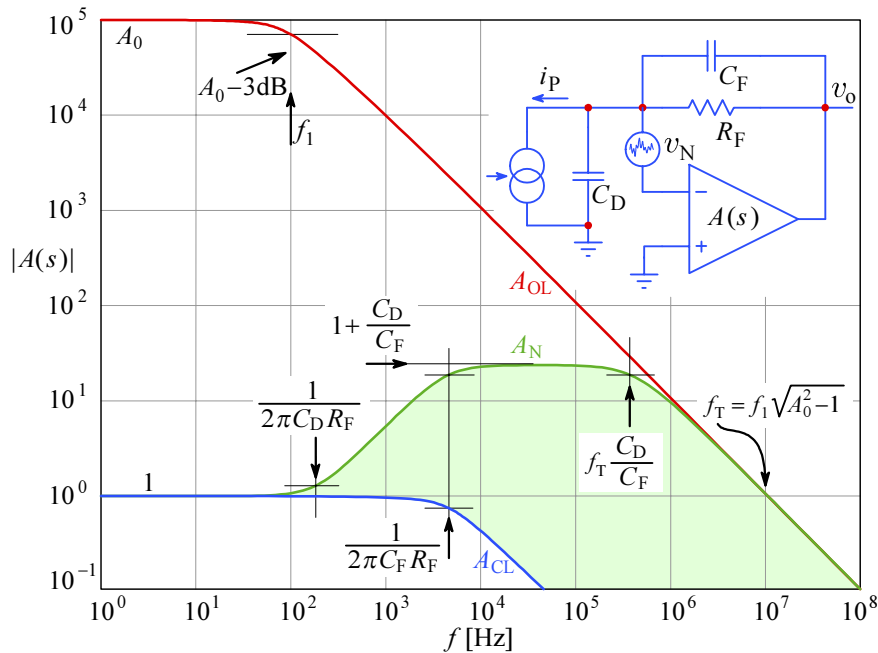


Sl.7.9: Odziv na stopnico za sistem na [Sl.7.4](#), če znižujemo upornost R_E od 100 k Ω do 1 k Ω za faktor $\sqrt{10}$, obenem pa C_F prilagajamo za Besselov odziv.

Analitični izraz za odziv na stopnico dobimo, če na podlagi polov $p_{1,2,3}$, ki jih dobimo numerično iz (198), izračunamo residue prenosne funkcije, pomnožene z transformacijo Heavisidove stopnice, $1/s$ (zaradi katerega bomo imeli še dodatni pol pri $p_0 = 0$). Odziv na stopnico se glasi:

$$g(t) = 1 - \frac{p_2 p_3}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)} e^{p_1 t} - \frac{p_1 p_3}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)} e^{p_2 t} - \frac{p_1 p_2}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)} e^{p_3 t} \quad (7.74)$$

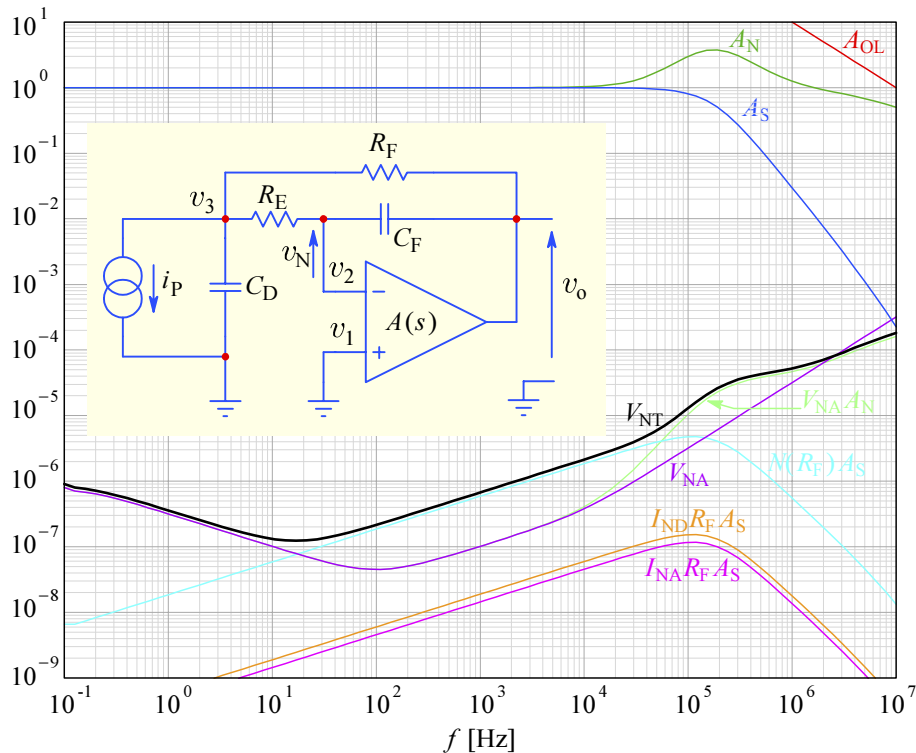
Da bi lažje razumeli vpliv posameznih komponent na šumno ojačenje in njegov frekvenčni spekter, si oglejmo [Sl.7.10](#), kjer so podani (poenostavljeni) izrazi za prelomne točke grafa šumnega ojačenja (A_N) v primerjavi s prenosno funkcijo ojačevalnika z zaprto (A_{CL}) in odprto (A_{OL}) povratno zanko. Vrednosti komponent ($C_D = 130$ pF, $C_F = 10$ pF, $R_F = 10$ M Ω , $R_E = 0$) smo namenoma izbrali tako, da so posamične prelomne frekvence zadosti narazen in zato brez večjega medsebojnega vpliva, tako da je mogoče vsako prelomno točko pripisati določenemu paru RC .



Sl.7.10: Primerjava prelomnih frekvenc v magnitudi šumnega ojačenja A_N z magnitudo prenosne funkcije sistema z zančnim ojačenjem A_{CL} (za $R_E = 0$) in odprtozančnega ojačenja A_{OL} . Z $R_E > 0$ bi znižali prelomno frekvenco (zgornjo mejo) šumnega ojačenja $f_T C_D / C_F$ in hkrati pasovno širino sistema na $1 / 2\pi \sqrt{C_D R_F C_F R_E}$, namesto $1 / 2\pi C_F R_F$. Sam vrh šumnega ojačenja pa je sorazmeren razmerju kapacitivnosti: $A_N = 1 + C_D / C_F$.

Kot vidimo na [Sl.7.10](#), začne šumno ojačenje naraščati pri ničli v enačbi (211), ki približno ustreza frekvenci $1 / 2\pi C_D R_F$. To naraščanje ustavi pol, ki približno ustreza frekvenci $1 / 2\pi C_F R_F$. Maksimum šumnega ojačenja je določen z razmerjem kapacitivnosti: $1 + (C_D / C_F)$. Nazadnje prevlada prenosna funkcija odprte zanke ojačevalnika, kar se zgodi pri frekvenci približno $(C_D / C_F) f_T$, kjer je f_T prehodna frekvenca, pri kateri je ojačenje odprte zanke enako ena. Iz vsega tega je jasno zakaj si prizadevamo imeti kapacitivnost fotodiode kar se da majhno.

Vrnimo se še za trenutek celotni šumni napetosti sistema, (205), kjer še nismo upoštevali prispevka ojačevalnikovega vhodnega šuma povečanega za faktor šumnega ojačenja. Prav tako pa iz številčnega izračuna efektivne vrednosti šuma ni mogoče razbrati katera komponenta šuma prevladuje v posamičnem delu spektra. Za bolj celovito sliko je potrebno primerjati spektre šuma vsake posamične komponente, ter celotnega šuma. To smo prikazali na [Sl.7.11](#), in sicer za enake vrednosti komponent vezja kot v primeru *c* na [Sl.7.8](#) in [Sl.7.9](#). Zraven šumnih spektrov smo narisali še odprtozančno ojačenje A_{OL} , signalno ojačenje A_S , ki vpliva na vse komponente šuma, razen napetostnega šuma ojačevalnika V_{NA} ; le tega je treba množiti s šumnim ojačenjem A_N .



SL.7.11: Spektri šuma posamičnih komponent in celotnega vezja. Vrednosti komponent so take kot na [SL.7.8](#) in [SL.7.9](#) za primer *c*. $I_{NA} R_F A_S$ je vhodni tokovni šum ojačevalnika, pomnožen z upornostjo povratne zanke R_F in faktorjem signalnega ojačenja A_S ; $I_{ND} R_F A_S$ je fotodiodni tokovni šum, prav tako množen z R_F in A_S ; $N(R_F) A_S$ je termični šum upornosti povratne zanke R_F , množen s signalnim ojačenjem A_S ; vse te tri šume komponente naraščajo s frekvenco 10 dB na dekada do zgornje mejne frekvence signalnega ojačenja; V_{NA} je vhodni napetostni šum ojačevalnika, ki pod 100 Hz izkazuje močno $1/f$ odvisnost, prav tako pa povečan visokofrekvenčni šum nad 10 kHz; V_{NA} je treba množiti s šumnim ojačenjem A_N , ki nad 2 MHz pada zaradi vpliva odprtozančnega ojačenja ojačevalnika A_{OL} . Celotni enakovredni napetostni šum V_{NT} je koren iz vsote kvadratov vseh posamičnih šumov.

Vidimo da na srednjih frekvencah, med 100 Hz in 100 kHz prevladuje šum upornosti R_F (165). Pod 100 Hz prevladuje ojačevalnikova napetostna $1/f$ komponenta, med tem ko nad 100 kHz prevladuje ojačevalnikov visokofrekvenčni šum, ki ga dodatno poveča še šumno ojačenje sistema. Fotodiodni tokovni šum in ojačevalnikov vhodni tokovni šum sta v tem primeru zanemarljiva.

Zanimivo je poiskati najbolj zaželjeno vrednost upora R_F , pri kateri bo razmerje signal/šum najbolj ugodno.

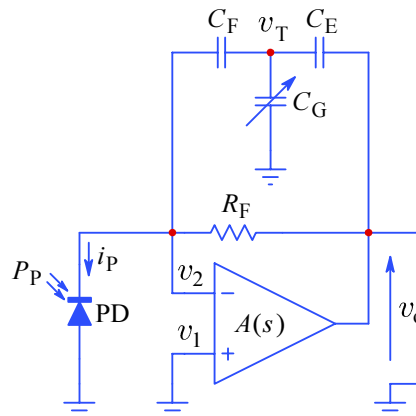
Iz prenosne funkcije sistema (148) je razvidno, da je, ob določeni vrednosti foto-toka i_P , izhodna napetost v_o sorazmerna z R_F , med tem ko je iz termičnega šuma upora (165) razvidno da v_{NF} narašča s $\sqrt{R_F}$. To pomeni da z večanjem upornosti R_F narašča signal za $\sqrt{R_F}$ hitreje kot šum. Torej je s stališča maksimiziranja razmerja signal/šum najbolj ugodno, če je upornost R_F kar se da velika! To pa je v nasprotju s tem kar bi intuitivno pričakovali. Dodatna pridobitev je še v tem da povečanje R_F zahteva tudi ustrezno povečanje R_E in C_F , kar znižuje zgornjo mejno frekvenco sistema, ter znižamo šumno ojačenje, s tem pa tudi šum na visokih frekvencah.

Sklepamo torej, da je optimalna vrednost R_F kompromis med izbrano pasovno širino sistema in temu ustreznim razmerjem signal/šum.

7.5. Delne kompenzacije povratne zanke ojačevalnika

Pravkar smo ugotovili, da je za doseganje višjega razmerja signal/šum nujno izbrati čim večjo vrednost R_F . To hkrati pomeni, da je za doseganje višje frekvenčne meje potrebno izbrati fotodiodo majhne površine in dodatno zmanjšati C_D z uporabo zaporne napetosti. Manjša površina fotodiode bo ugodno vplivala na znižanje šuma generiranega v polprevodniku, prav tako pa manjša vrednost kapacitivnosti zniža šumno ojačenje. Žal uporaba zaporne napetosti fotodiodni šum nekoliko poveča, ker se pod 10 Hz pojavi še '1/f' komponenta, ki je sorazmerna z V_r .

V primerih ko je C_D le nekaj pF, zna biti izbira vrednosti C_F precej težavna, ker je zahtevana vrednost manj kot 1 pF, zato bodo razsejane kapacitivnosti vezja, četudi je njihova skupna vrednost le del pF, vnesle veliko napako. Temu se izognemo tako, da namesto ene same kapacitivnosti v povratni zanki uporabimo 'T-atenuator', kot na [Sl.7.12](#). S takim vezjem je mogoče z razmeroma velikimi vrednostmi kapacitivnosti doseči zahtevano majhno efektivno kapacitivnost, vendar je zaradi razsejanih kapacitivnosti in večjih toleranc tako vezje potrebno ročno uglašiti. To dosežemo z nastavljivo kapacitivnostjo v ozemljeni veji T-atenuatorja. Ozemljena nastavljiva elektroda prepreči, da bi kapacitivnost kovinskega izvijača, s katerim to kapacitivnost nastavljamo, med postopkom vplivala na razmerje.



Sl.7.12: Uporaba T-atenuatorja za lažje uglaševanje vezja, ki zahteva zelo nizko efektivno vrednost kompenzacijske kapacitivnosti v povratni zanki.

Enakovredno kapacitivnost T-atenuatorja lahko izračunamo če najprej izrazimo napetost sredi T-atenuatorja v_T kot funkcijo izhodne napetosti v_o , ob predpostavki da je ojačevalnik idealen ($v_2 = v_1 = 0$). Vsota tokov v vozlišču v_T bo:

$$(v_o - v_T)sC_E = v_TsC_G + v_TsC_F \quad (7.75)$$

Iz te relacije izrazimo v_T :

$$v_T = v_o \frac{sC_E}{sC_E + sC_F + sC_G} \quad (7.76)$$

Enakovredno impedanco T-atenuatorja, gledano iz vozlišča v_o proti v_2 dobimo če izhodno napetost delimo s tokom povratne zanke, ki teče v vozlišče v_2 :

$$Z_F = \frac{v_o}{i_F} = \frac{v_o}{v_TsC_F} = \frac{1}{sC_F} \cdot \frac{sC_E + sC_F + sC_G}{sC_E} \quad (7.77)$$

Sledi da je enakovredna kapacitivnost v povratni zanki enaka:

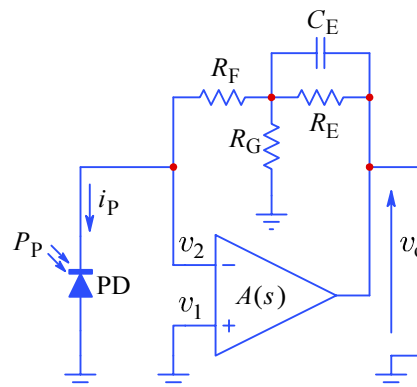
$$\hat{C}_F = C_F \frac{C_E}{C_F + C_E + C_G} \quad (7.78)$$

Toda, zaradi simetrične zgradbe kapacitivnega delilnika, bo tudi na vhodu ojačevalnika prisotna povečana enakovredna kapacitivnost vzporedno s fotodiodno kapacitivnostjo C_D , ki bo vplivala na prenosno funkcijo bolj kot C_D sama in katere velikost bo zaradi Millerjevega učinka (6.11) sorazmerno velika:

$$C_{in} = C_F \frac{C_E}{C_F + C_E + C_G} [1 + A(s)] \quad (7.79)$$

Zaradi te razmeroma velike enakovredne vhodne kapacitivnosti bo tudi šumno ojačenje mnogo večje in začelo bo naraščati že na razmeroma nizkih frekvencah. Zato se takemu načinu kompenzacije raje izogibajmo.

Včasih si želimo da bi tudi upornost povratne zanke realizirali z majhnimi vrednostmi, namesto ene same velike upornosti, kot na [Sl.7.13](#). Prednost take oblike povratne zanke je nižji šum, kljub temu da so upornosti manjše, ker na visokih frekvencah kapacitivno premostimo atenuator in preostane le dejanska vrednost R_F , zato je šumno ojačenje nižje. Na srednjih frekvencah pa je šumno ojačenje še vedno razmeroma veliko.



Sl.7.13: Uporovni T-atenuator v povratni zanki. Slaba stran take rešitve je razmeroma velika enosmerna napetostna napaka na izhodu, ker se vhodna enosmerna napetostna napaka ojačevalnika množi z enosmernim ojačenjem.

Enakovredno upornost tega T-atenuatorja lahko izračunamo na enak način kot prej kapacitivnost:

$$\hat{R}_F = R_E + R_F \left(1 + \frac{R_E}{R_G} \right) \quad (7.80)$$

Vendar ima taka vezava eno resno pomanjkljivost. Namreč, enosmerna vhodna napaka ojačevalnika (angl., 'DC offset voltage'), ki je posledica razlike v karakteristikah vhodnih tranzistorjev, bo tudi ojačena za enak faktor kot je povečanje efektivne upornosti. Izhodna enosmerna napetost bo zaradi te napake tudi večja:

$$V_{o\epsilon} = (V_1 - V_2) \left(1 + \frac{R_E}{R_G} \right) \quad (7.81)$$

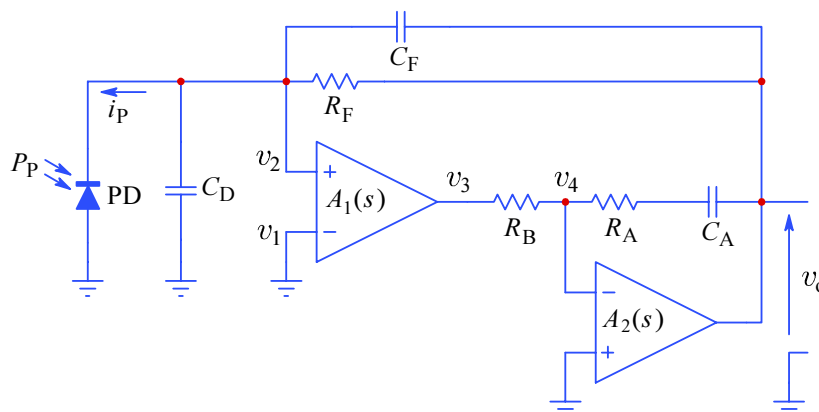
V odvisnosti od polaritete napetostne razlike $V_1 - V_2$ bo ta napaka bodisi prišteta, bodisi odšteta od napake, ki jo prispeva temni tok fotodiode.

Druga resna pomanjkljivost take kompenzacije je potek frekvenčnega odziva, ki ima ojačenje kot (213) le do razmeroma nizke mejne frekvence, ki približno ustreza časovni konstanti $C_E R_E$, nato pada do ojačenja 1, kjer prevlada ničla v prenosni funkciji, ki približno ustreza časovni konstanti $C_E R_G$. Ojačenje nato ostaja enako 1 do zgornje mejne frekvence celotnega sistema, na katero vpliva vsota kapacitivnosti $C_E + C_D$, skupaj z odprtozračnim ojačenjem ojačevalnika $A(s)$. Tak frekvenčni potek seveda ni nekaj kar bi si zelo želeli.

Skratka, atenuatorske vezave v povratni zanki prinesejo več pomanjkljivosti kot resničnih koristi, zato jih tukaj ne bomo podrobneje obravnavali.

7.6 Optimizacija zančnega ojačenja dveh ojačevalnikov

Še ena različica optimizacije povratne zanke je mogoča z uporabo dodatnega operacijskega ojačevalnika. Pravzaprav se v tem primeru spremeni odprtozračno ojačenje, ter posledično tudi šumno ojačenje. Primer takega vezja je narisano na [Sl.7.14](#). Ojačevalnika sta vezana zaporedno, povratna zanka pa je sklenjena čez oba. V takem primeru invertira le drugi ojačevalnik, čeprav deluje neinvertirajoči vhod prvega ojačevalnika dejansko kot invertirajoči vhod celotnega sistema. Prav tako je treba opozoriti na lokalno povratno zanko drugega ojačevalnika s komponentami C_A , R_A in R_B , kar je ključnega pomena za uglasitev z zahtevami sistema.



Sl.7.14: Sistem z dvema ojačevalnikoma s posebej prirejenim ojačenjem drugega ojačevalnika, s katerim dosežemo ustrežnejše zančno ojačenje in zmanjšanje šumnega ojačenja. Pomembna pogoja sta $R_A < R_B$, ter $1/sC_A R_A \ll \omega_{11} A_{01}$.

Na [Sl.7.15](#) je narisana primerjava odzivov v frekvenčnem prostoru med sistemom z enim samim ojačevalnikom in sistemom z dvema ojačevalnikoma, kjer ima drugi ojačevalnik posebej prirejen frekvenčni odziv.

Najprej opazimo da kapacitivna sklopitev C_A v lokalni povratni zanki drugega ojačevalnika močno poveča faktor ojačenja na nizkih frekvencah, toda ojačenje nad dominantnim polom $s_1 = -2\pi f_1$ pada dvakrat hitreje kot sicer, torej $-40 \text{ dB}/10f$.

Če bi se to vpadanje nadaljevalo enako hitro do 10^5 Hz in naprej, bi fazni zasuk obeh ojačevalnikov znašal že 360° , zato bi sistem ob sklenjeni povratni zanki postal nestabilen. To prepreči ničla, ki jo določata C_A in R_A . Poleg tega, kadar je

produkt $C_A R_A$ večji ali enak $C_F R_F$, bo šumno ojačenje takega sistema mnogo manjše od tistega, ki bi ga imel sistem brez ojačevalnika A_2 .

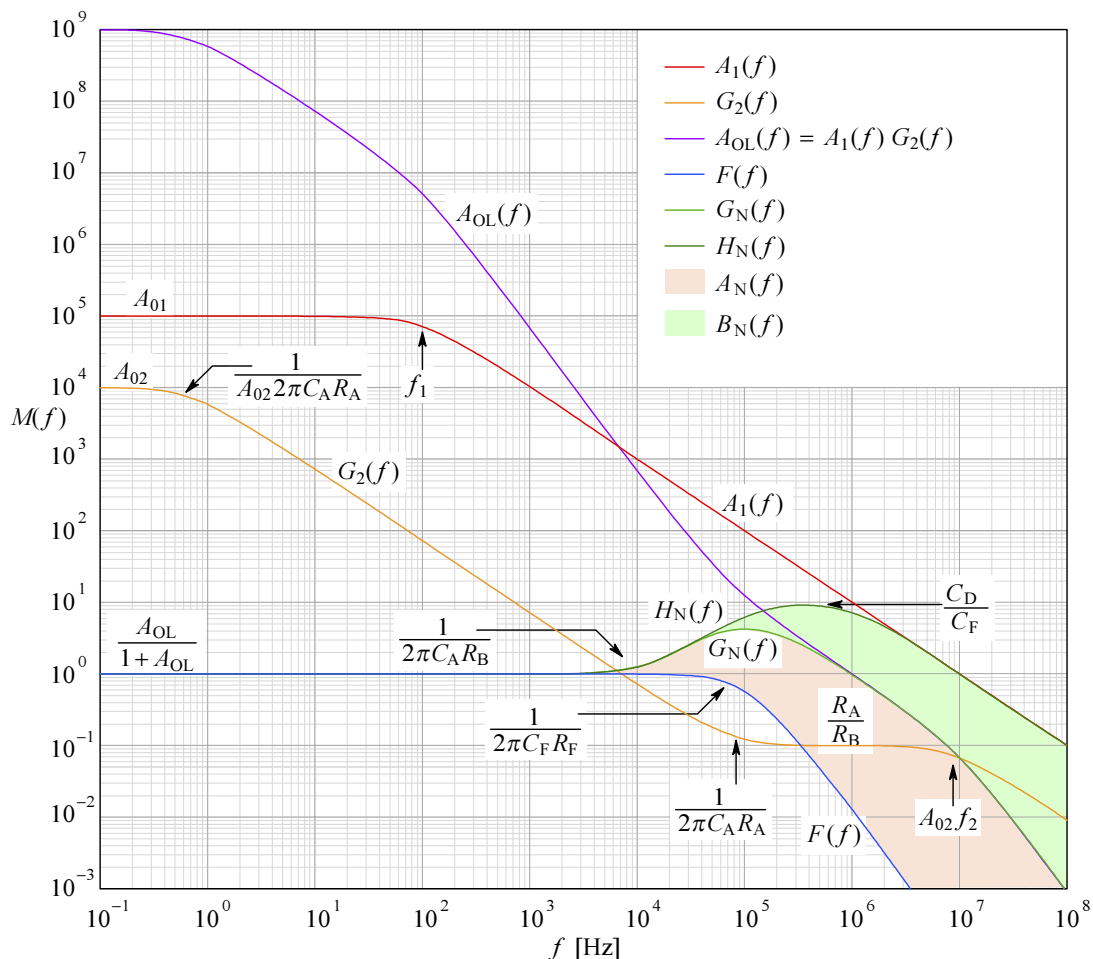
Naj bo ojačenje odprte zanke prvega ojačevalnika definirano kot:

$$A_1(s) = A_{01} \frac{(-s_{11})}{(s - s_{11})} = A_{01} \frac{\omega_{11}}{(s + \omega_{11})} \quad (7.82)$$

in drugega ojačevalnika kot:

$$A_2(s) = A_{02} \frac{(-s_{12})}{(s - s_{12})} = A_{02} \frac{\omega_{12}}{(s + \omega_{12})} \quad (7.83)$$

Tako kot prej, privzemimo $A_{01} = 10^5$ in $\omega_{11} = 2\pi f_1$, s $f_1 = 10^2$ Hz, med tem ko naj ima drugi ojačevalnik $A_{02} = 10^4$ in $\omega_{12} = 2\pi f_2$, s $f_2 = 10^3$ Hz. Vzemimo da ima fotodioda kapacitivnost $C_D = 11$ pF, povratno zanko pa sklenimo z upornostjo $R_F = 1$ M Ω , vzporedno s kapacitivnostjo $C_F = 1$ pF.



SI.7.15: Odziv sistema z dvema ojačevalnikoma in primerjava s sistemom z enim samim ojačevalnikom. A_1 je magnituda frekvenčnega odziva odprte zanke prvega ojačevalnika; G_2 je magnituda frekvenčnega odziva drugega ojačevalnika ob sklenjeni povratni zanki; A_{OL} je skupno ojačenje odprte zanke; $F(f)$ je prenosna funkcija sistema ob sklenjeni zanki, normirana na $i_P R_F$; H_N je šumno ojačenje sistema z le enim ojačevalnikom, G_N pa je šumno ojačenje sistema z dvema ojačevalnikoma. Ob ustrezni uglastivi povratne zanke drugega ojačevalnika, z $R_A < R_B$ in $C_A R_A \geq C_F R_F$, dosežemo pomembno zmanjšanje šumnega ojačenja, $B_N(f)$.

Vendar je ojačenje drugega ojačevalnika omejeno še z lokalno povratno zanko, določeno z uporoma $R_A = 1 \text{ k}\Omega$ in $R_B = 10 \text{ k}\Omega$ ter kapacitivnost $C_A = 2.2 \text{ nF}$:

$$(v_3 - v_4) \frac{1}{R_B} = (v_4 - v_o) \frac{1}{R_A + \frac{1}{sC_A}} \quad (7.84)$$

Ker pa je:

$$v_4 = -v_o \frac{1}{A_2(s)} \quad (7.85)$$

sledi (G_2 na [SL.7.15](#)):

$$\frac{v_o}{v_3} = - \frac{1}{\frac{1}{A_2(s)} \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{C_A R_A}} \right) + \frac{R_B}{R_A} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{C_A R_A}}} \quad (7.86)$$

oziroma, urejeno po potencah s :

$$\frac{v_o}{v_3} = - \frac{A_{02} \omega_{21} (s + \omega_A) k}{s^2 + s \{ \omega_{21} [1 + A_{02} (1 - k)] + k \omega_A \} + k \omega_A \omega_{21}} \quad (7.87)$$

kjer je faktor k :

$$k = \frac{R_A}{R_A + R_B} \quad (7.88)$$

in frekvenca ω_A :

$$\omega_A = \frac{1}{C_A R_A} \quad (7.89)$$

Skupno ojačenje odprte zanke je torej:

$$A_{OL} = \frac{v_o}{v_2} = A_1(s) \frac{v_o}{v_3} \quad (7.90)$$

ali, podrobneje:

$$A_{OL} = A_{01} \frac{\omega_{11}}{(s + \omega_{11})} \cdot \frac{-A_{02} \omega_{21} (s + \omega_A) k}{s^2 + s \{ \omega_{21} [1 + A_{02} (1 - k)] + k \omega_A \} + k \omega_A \omega_{21}} \quad (7.91)$$

oziroma, urejeno po potencah s :

$$A_{OL} = -A_{01} A_{02} \frac{k \omega_{11} \omega_{12} (s + \omega_A)}{s^3 + s^2 K_2 + s K_1 + K_0} \quad (7.92)$$

Odprtozančno ojačenje je torej enačba tretje stopnje, z eno ničlo in tri pole. Zaradi posebnih zahtev po zmanjšanju šumnega ojačenja in zagotavljanju stabilnosti sistema ob sklenjeni povratni zanki bodo vsi trije poli v tem primeru realni, prav tako tudi ničla.

Koeficijenti polinoma v imenovalcu v tem primeru so:

$$\begin{aligned} K_2 &= \omega_{11} + \omega_{21}[1 + A_{02}(1 - k)] + k\omega_A \\ K_1 &= \omega_{11}\omega_{21}[1 + A_{02}(1 - k)] + k\omega_A(\omega_{11} + \omega_{21}) \\ K_0 &= k\omega_A\omega_{21}\omega_{11} \end{aligned} \quad (7.93)$$

Prenosno funkcijo dobimo iz izraza za vhodni tok:

$$i_P = v_2 s C_D + (v_2 - v_o) \left(\frac{1}{R_F} + s C_F \right) \quad (7.94)$$

Množimo z R_F in združimo koeficijente:

$$i_P R_F = v_2 (s R_F (C_D + C_F) + 1) - v_o (1 + s C_F R_F) \quad (7.95)$$

nato pa s pomočjo (221) zamenjamo v_2 :

$$i_P R_F = \frac{v_o}{A_{OL}} (s R_F (C_D + C_F) + 1) - v_o (1 + s C_F R_F) \quad (7.96)$$

Sedaj lahko že izrazimo prenosno funkcijo (F na [Sl.7.15](#)):

$$\frac{v_o}{i_P R_F} = \frac{A_{OL}}{s R_F (C_D + C_F) + 1 - A_{OL} (1 + s C_F R_F)} \quad (7.97)$$

ki jo preuredimo v:

$$\frac{v_o}{i_P R_F} = \frac{A_{OL}}{(1 - A_{OL})} \cdot \frac{\frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{(1 - A_{OL})}{\left(\frac{C_D}{C_F} + 1 - A_{OL}\right)}}{s + \frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{(1 - A_{OL})}{\left(\frac{C_D}{C_F} + 1 - A_{OL}\right)}} \quad (7.98)$$

V izrazu za prenosno funkcijo sistema (230) bi lahko še A_{OL} zamenjali z ustreznim izrazom (223), vendar si bomo ta trud prihranili, ker A_{OL} nastopa v kvocientih, ki so vsi približno enaki 1. Tako, čeprav ima prenosna funkcija dejansko štiri pole in eno ničlo, je po obliki podobna sistemu **prve** stopnje, zaradi A_{OL} v območju $10^5 - 10^7$ Hz, ter $C_F R_F$ v povratni zanki.

Šumno ojačenje sistema dobimo če napetosti na vhodu v_2 prištejemo enakovredno šumno napetost vseh izvirov šuma v_N :

$$(v_N + v_2) s C_D = [v_o - (v_N + v_2)] \left(\frac{1}{R_F} + s C_F \right) \quad (7.99)$$

Ponovno v_2 nadomestimo s pomočjo (222):

$$\left(v_N + \frac{v_o}{A_{OL}} \right) s C_D = \left(v_o - v_N - \frac{v_o}{A_{OL}} \right) \left(\frac{1}{R_F} + s C_F \right) \quad (7.100)$$

Delimo s C_F in združimo faktorje pri v_N in v_o :

$$v_o \left[s \frac{C_D}{C_F} + (1 - A_{OL}) \left(\frac{1}{C_F R_F} + s \right) \right] = -v_N A_{OL} \left[s \frac{C_D}{C_F} + \left(\frac{1}{C_F R_F} + s \right) \right] \quad (7.101)$$

Šumno ojačenje (G_N na [Sl.7.15](#)) je torej:

$$\frac{v_o}{v_N} = - \frac{A_{OL} \left[s \left(\frac{C_D}{C_F} + 1 \right) + \frac{1}{C_F R_F} \right]}{s \left[\frac{C_D}{C_F} + (1 - A_{OL}) \right] + \frac{(1 - A_{OL})}{C_F R_F}} \quad (7.102)$$

oziroma preurejeno:

$$\frac{v_o}{v_N} = - \frac{A_{OL}}{(1 - A_{OL})} \cdot \frac{\frac{(1 - A_{OL})}{\frac{C_D}{C_F} + (1 - A_{OL})} \left[s \left(\frac{C_D}{C_F} + 1 \right) + \frac{1}{C_F R_F} \right]}{s + \frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{(1 - A_{OL})}{\frac{C_D}{C_F} + (1 - A_{OL})}} \quad (7.103)$$

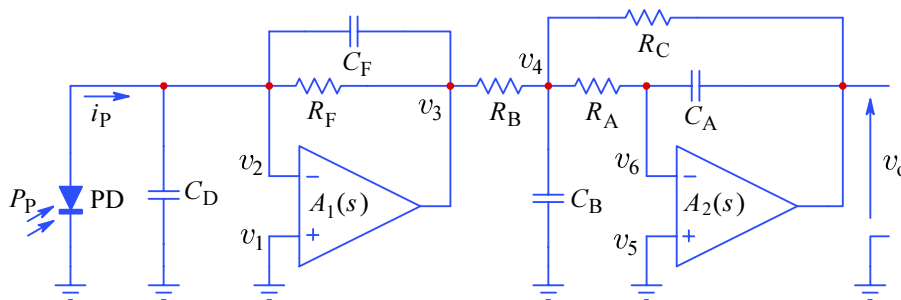
Zaradi enakih razlogov kot pri prenosni funkciji sistema, ima šumno ojačenje magnitudo frekvenčnega odziva podobno sistemu z enim polom in eno ničlo, čeprav je dejansko relacija bolj zapletena.

Primerjajmo še zmanjšanje šumnega ojačenja z uporabo dveh ojačevalnikov glede na sistem z enim samim ojačevalnikom. Izračun le tega je enak (235), kjer namesto A_{OL} vnesemo $A_1(s)$ po enačbi (214). Tako dobimo potek H_N na [Sl.7.15](#). Z uporabo dveh ojačevalnikov smo, torej, vrh šumnega ojačenja, ki je sicer približno C_D/C_F , znižali za $2\times$ (primerjajmo H_N in G_N na [Sl.7.15](#)). Poleg tega pa smo pasovno širino šumnega spektra $\sim 10\times$ zožili. Če upoštevamo da beli šum narašča $+3 \text{ dB}/2f$ in je, torej, v najvišji spektralni dekadi $3\times$ toliko energije šuma, kot v vseh nižjih dekadah skupaj, je celotno znižanje približno $8\times$, ali okoli -18 dB .

Ob tem pa smo ohranili razmeroma visoko zgornjo mejno frekvenco (80 kHz) in zelo visoko občutljivost (transimpedanca sistema: $R_F = 1 \text{ M}\Omega$, ali $1 \text{ V}/\mu\text{A}$).

7.7 Ojačevalnik z aktivnim filtrom

Kadar sta najpomembnejši zahtevi hkrati velika hitrost in nizek šum, velja razmisliti o dvojnem ojačevalniku z aktivnim filtrom. Ta konfiguracija, kot je na [Sl.7.16](#) omogoča posebej optimizacijo stopnje za tokovno–napetostno pretvorbo, ter posebej prilagojeno filtriranje šuma in dodatno ojačenje signala.



Sl.7.16: Dvojni ojačevalnik s filtrom.

Denimo, da bi nam v sistemu z enim samim ojačevalnikom, ob fotodiodi s kapacitivnostjo $C_D = 15 \text{ pF}$, za doseganje zahtevane občutljivosti najbolj ustrezala upornost $R_F = 1 \text{ M}\Omega$. Ob tako veliki vrednosti R_F sistema ne moremo uglasiti kot Besselov sistem druge stopnje, ker sta oba systemska pola realna in daleč narazen. Zadovoljivo kompenzacijo dosežemo s $C_F = 1 \text{ pF}$, zaradi česar znaša zgornja mejna frekvenca le $f_h \approx 160 \text{ kHz}$. Prenosno funkcijo tega sistema (236) smo že izpeljali (147-149), zato izpeljave ne bomo ponavljali:

$$\frac{v_3}{i_P R_F} = - \frac{A_0}{(1 + A_0)} \cdot \frac{K_1}{s^2 + sK_2 + K_1} \quad (7.104)$$

Pri tej funkciji sta koeficijenta:

$$K_2 = (-s_1) \left(1 + A_0 \frac{C_F}{(C_D + C_F)} \right) + \frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{C_F}{(C_D + C_F)} \quad (7.105)$$

$$K_1 = (-s_1)(1 + A_0) \frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{C_F}{(C_D + C_F)} \quad (7.106)$$

Pola sistema z enim samim ojačevalnikom dobimo če razrešimo karakteristični polinom v imenovalcu (236). Ker gre za sistem druge stopnje, je rešitev preprosta:

$$p_{1,2} = \frac{-K_2 \pm \sqrt{K_2^2 - 4K_1}}{2} = \frac{-K_2}{2} \left[1 \mp j \sqrt{4 \frac{K_1}{K_2^2} - 1} \right] \quad (7.107)$$

Izkaže se da sta za izbrane vrednosti oba pola realna in precej narazen, ker je $1/C_F R_F \ll (-s_1)A_0$. Zato bo pol bližje koordinatnemu izhodišču dominanten.

Šumno ojačenje sistema z enim samim ojačevalnikom, če ojačevalnikovo vhodno šumno napetost v_N prištejemo k v_6 , je izraženo z:

$$\frac{v_o}{v_N} = \frac{A_0}{(1 + A_0)} \cdot \frac{(-s_1)(1 + A_0) \left[s + \frac{1}{C_F R_F} \cdot \frac{C_F}{(C_F + C_D)} \right]}{s^2 + sK_2 + K_1} \quad (7.108)$$

Kaj lahko dosežemo z dvema ojačevalnikoma? V tem primeru lahko pasovno širino povečamo z ustreznim zmanjšanjem upornosti v povratni zanki prvega ojačevalnika, R_F , denimo $\div 10$, na vrednost $R_F = 100 \text{ k}\Omega$, čeprav s tem tudi zvišamo razmerje signal/šum. Dodatno ojačenje za faktor $R_C/R_B = 10$ za doseganje zahtevane občutljivosti priskrbi drugi ojačevalnik, ki ga lahko oblikujemo kot filter druge stopnje. Ta filter pomembno zniža šum na visokih frekvencah. Najboljši rezultat pa dosežemo, če dominantni realni pol v prenosni funkciji prvega ojačevalnika skupaj s konjugirano-kompleksnim parom polov drugega ojačevalnika tvorijo Besselov filter tretje stopnje. To načrtovalsko strategijo bomo podrobneje pojasnili na naslednjem primeru.

Ob zmanjšani vrednosti R_F in enaki kompenzacijski kapacitivnosti $C_F = 1 \text{ pF}$ bo zgornja mejna frekvenca $10\times$ višja, med tem ko bo šum sistema le $3\times$ višji. Vendar v tem primeru začne šum naraščati šele pri $10\times$ višji frekvenci, pa še prenosna funkcija filtra močno zniža visokofrekvenčni šum. Zgornja mejna frekvenca prvega ojačevalnika bo sedaj $f_h \approx 1.8 \text{ MHz}$. Ker želimo celotni sistem uglasiti kot Besselov

filter tretje stopnje, je z f_h določen realni pol sistema. Temu bo potrebno prilagoditi drugo ojačevalno stopnjo, katere konjugirano-kompleksni par polov se mora ujemati z lego Besselovih polov. Seveda bo prva stopnja imela, tako kot prej, še en nedominantni pol, vendar bo ta zadosti daleč in njegovega vpliva na prenosno funkcijo ne bo treba upoštevati.

Besselovi poli za sistem tretje stopnje, kot so podani v tabeli v [Dodatku A](#), so izpeljani na osnovi zahteve po enotni ovojnici zakasnitvi, vendar tukaj potrebujemo drugačno normiranje in sicer glede na realni del konjugirano-kompleksnega para:

$$\begin{aligned}(s_{a,b})_N &= -1 \pm j0.9540 \text{ [rad/s]} \\ (s_c)_N &= -1.2628 \text{ [rad/s]}\end{aligned}\quad (7.109)$$

Izraze in prave vrednosti polov bomo izpeljali iz prenosne funkcije filtra, oziroma druge ojačevalne stopnje. Pri analizi filtra ni treba upoštevati omejitev, ki jih vnaša ojačevalnik, zato lahko privzamemo da je $v_6 = 0$.

Tako se tokovna enačba v vozlišču v_6 glasi:

$$\begin{aligned}(v_4 - v_6) \frac{1}{R_A} &= (v_6 - v_0) s C_A \\ \Rightarrow v_4 &= -v_0 s C_A R_A\end{aligned}\quad (7.110)$$

Za vozlišče v_4 se tokovna enačba glasi:

$$\begin{aligned}(v_3 - v_4) \frac{1}{R_B} &= v_4 s C_B + (v_4 - v_6) \frac{1}{R_A} + (v_4 - v_0) \frac{1}{R_C} \\ \Rightarrow v_3 &= v_4 \left[1 + s C_B R_B + \frac{R_B}{R_A} + \frac{R_B}{R_C} \right] - v_0 \frac{R_B}{R_C}\end{aligned}\quad (7.111)$$

Izraz za v_4 (242) vstavimo v (243) in razrešimo za razmerje v_0/v_3 , ter dobimo prenosno funkcijo filtra:

$$\frac{v_0}{v_3} = -\frac{R_C}{R_B} \cdot \frac{\frac{1}{C_A R_A C_B R_B} \cdot \frac{R_B}{R_C}}{s^2 + s \frac{1}{C_B R_B} \left(1 + \frac{R_B}{R_A} + \frac{R_B}{R_C} \right) + \frac{1}{C_A R_A C_B R_B} \cdot \frac{R_B}{R_C}}\quad (7.112)$$

Ugodno je če izberemo $R_A = R_B$.

Pola prenosne funkcije izračunamo na enak način kot prej in dobimo:

$$p_{3,4} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{C_B R_B} \left(2 + \frac{R_B}{R_C} \right) \left[1 \pm j \sqrt{\frac{C_B}{C_A} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_C}{R_B} + \frac{R_B}{4R_C}} - 1} \right]\quad (7.113)$$

Polna smo namenoma izrazili v tej obliki, zato da v oglatem oklepaju dobimo normirano realno komponento, tako kot pri (241), poleg tega pa imamo ločena razmerja istovrstnih komponent: R_C/R_B predstavlja nizkofrekvenčno ojačenje filtra, med tem ko C_B/C_A omogoča izbiro imaginarne komponente polov neodvisno od realne komponente. Besselovo lego polov dobimo

Normirani pol $(s_c)_N$ (241) moramo primerjati z manjšim (dominantnim) realnim polom prve stopnje p_1 , ki ustreza zgornji mejni frekvenci $-2\pi f_h$. Njuno razmerje določa faktor pasovne širine sistema B , ki je obenem faktor proporcionalnosti med normiranimi in pravimi vrednostmi polov:

$$B = \frac{-2\pi f_h}{(s_c)_N} = \frac{2\pi \cdot 1.8 \times 10^6}{1.2628} \approx 2\pi \cdot 1.4 \cdot 10^6 \quad (7.114)$$

Zato bo prava realna vrednost konjugirano-kompleksnega para polov enaka:

$$\Re\{p_{3,4}\} = B \cdot \Re\{(s_{a,b})_N\} = -2\pi \cdot 1.4 \cdot 10^6 \text{ [rad/s]} \quad (7.115)$$

Realna vrednost polov je odvisna od časovne konstante $1/C_B R_B$ in ojačenja R_C/R_B . Eni izmed teh komponent določimo neko poljubno vrednost, vendar naj bo takšna da imajo z njo povezane komponente vrednosti, ki jih je lahko implementirati, oziroma take, ki jih ojačevalnik lahko krmili (impedance naj ne bi bile prenizke). Denimo da smo izbrali:

$$R_C = 39 \text{ k}\Omega \quad (7.116)$$

Zato bosta upora:

$$R_A = R_B = \frac{R_C}{10} = 3.9 \text{ k}\Omega \quad (7.117)$$

in kapacitivnost C_B bo:

$$C_B = \frac{1}{R_B \cdot 2 \cdot B \cdot \frac{1}{2 + \frac{R_C}{R_B}}} = \frac{1}{3900 \cdot 2 \cdot 2\pi \cdot 1.4 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2.1}} \approx 30 \text{ pF} \quad (7.118)$$

Kapacitivnost C_A pa določimo iz imaginarnih vrednosti polov:

$$\frac{\Im\{p_{3,4}\}}{\Re\{p_{3,4}\}} = \sqrt{\frac{C_B}{C_A} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_C}{R_B} + \frac{R_B}{4R_C}} - 1} = \Im\{(s_{a,b})_N\} = 0.9540 \quad (7.119)$$

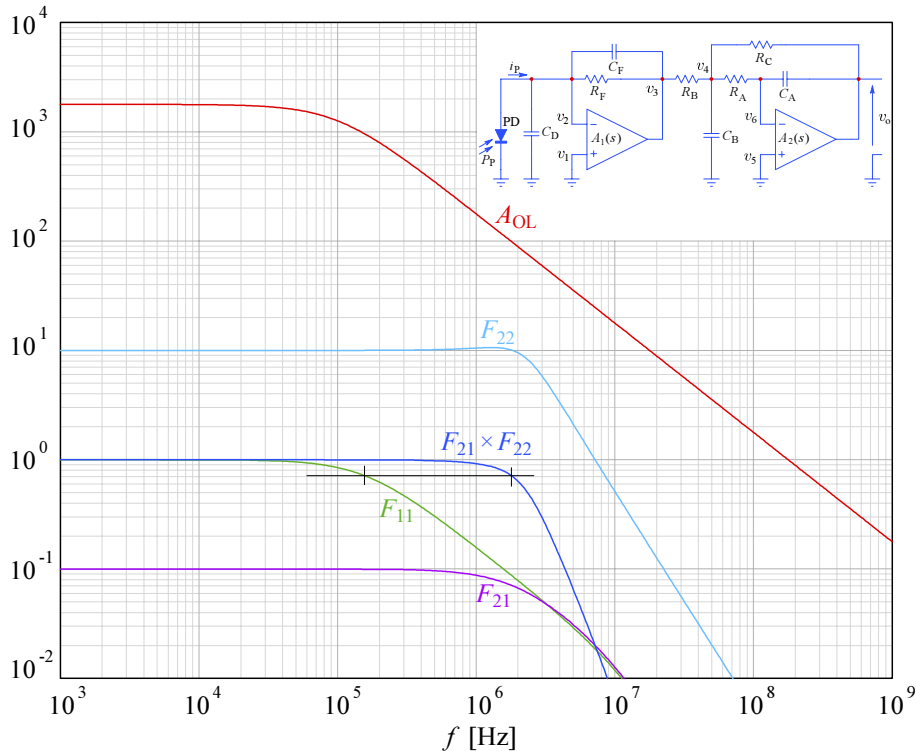
Od tod sledi:

$$C_A = \frac{C_B}{1 + (0.9540)^2} \cdot \frac{1}{1 + 10 + 1/(4 \cdot 10)} \approx 1.4 \text{ pF} \quad (7.120)$$

Celotna prenosna funkcija sistema z dvema ojačevalnikoma je zmnožek prenosne funkcije $v_3/i_P R_F$ (236), toda ob $R_F = 100 \text{ k}\Omega$ in $C_F = 1 \text{ pF}$, s prenosno funkcijo filtra v_o/v_3 (244), kjer smo vstavili pravkar izračunane vrednosti komponent:

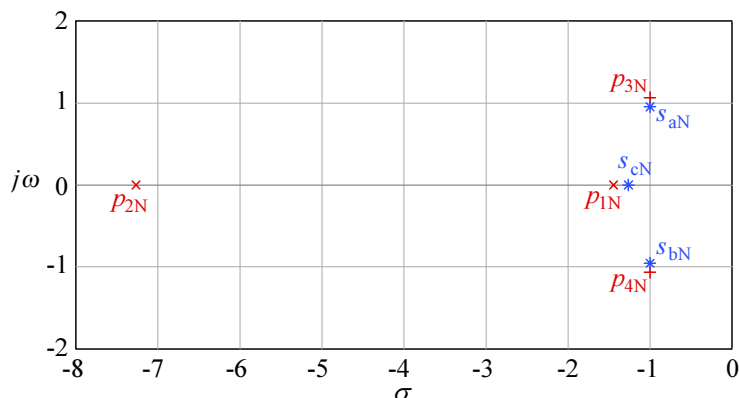
$$\frac{v_o}{i_P R_F} = \frac{v_3}{i_P R_F} \cdot \frac{v_o}{v_3} \quad (7.121)$$

Na [Sl.7.17](#) smo narisali prenosno funkcijo F_{11} (236) sistema z enim samim ojačevalnikom, za primerjavo z izboljšanim sistemom (253), katerega parametre smo pravkar določili. Absolutno vrednost prenosne funkcije prve stopnje smo označili z F_{21} , filtra pa z F_{22} , njun zmnožek pa z $F_{21} \times F_{22}$. Za primerjavo je še podano odprtozračno ojačenje samega operacijskega ojačevalnika A_{OL} .



Sl.7.17: Primerjava sistema z enim ojačevalnikom F_{11} in izboljšanega sistema z dvema ojačevalnikoma s filtrom, $F_{21} \times F_{22}$. Sistem z enim samim ojačevalnikom ima zgornjo mejno frekvenco le ~ 160 kHz, izboljšani sistem pa $10 \times$ višjo, ~ 1.8 MHz. Za primerjavo je narisano še odprtozračno ojačenje samega operacijskega ojačevalnika, A_{OL} .

Lega polov na [Sl.7.18](#) kaže da smo vrednosti komponent dokaj dobro ujeli v primerjavi s idealnim Besselovim sistemom tretje stopnje. Odstopanja so znotraj 5%, kar je v mejah tolerance pasivnih komponent vezja.

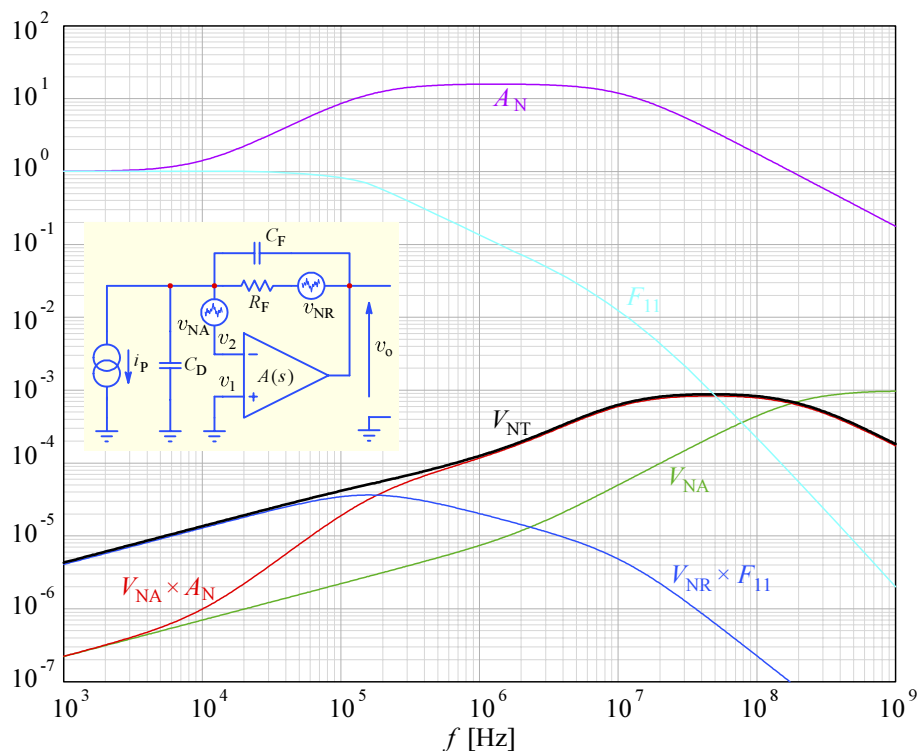


Sl.7.18: Primerjava lege polov idealnega Besselovega sistema tretje stopnje (s_{aN} , s_{bN} , s_{cN}) in polov fotodiodnega ojačevalnika (p_{1N} , p_{2N}) s filtrom (p_{3N} , p_{4N}). Pole smo normirali na realni del konjugirano-kompleksnega para. Pol p_{2N} leži precej daleč in vpliva šele na zelo visokih frekvencah. Poli p_{1N} , p_{3N} in p_{4N} tvorijo sistem podoben Besselovemu (če bi realni del $p_{3,4}$ povečali za okoli 5% bi dobili popolno ujemanje); odstopanje je v mejah tolerance komponent.

Za idealno ujemanje bi potrebovali za okoli 5% večje dušenje filtra, oziroma manjše razmerje kondenzatorjev C_B/C_A . Lahko bi za C_A vzeli standardno vrednost 1.5 pF, vendar v praksi moramo upoštevati še razsejane kapacitivnosti vzporedno s C_A in C_B , pa še vhodno kapacitivnost operacijskega ojačevalnika, ki znaša 2-3 pF in skupaj s C_A tvori kapacitivni delilnik v povratni zanki. Zato je zelo verjetno da bo v dejanskem vezju potrebno C_A prej zmanjšati na okoli 1-1.2 pF, kot pa povečati.

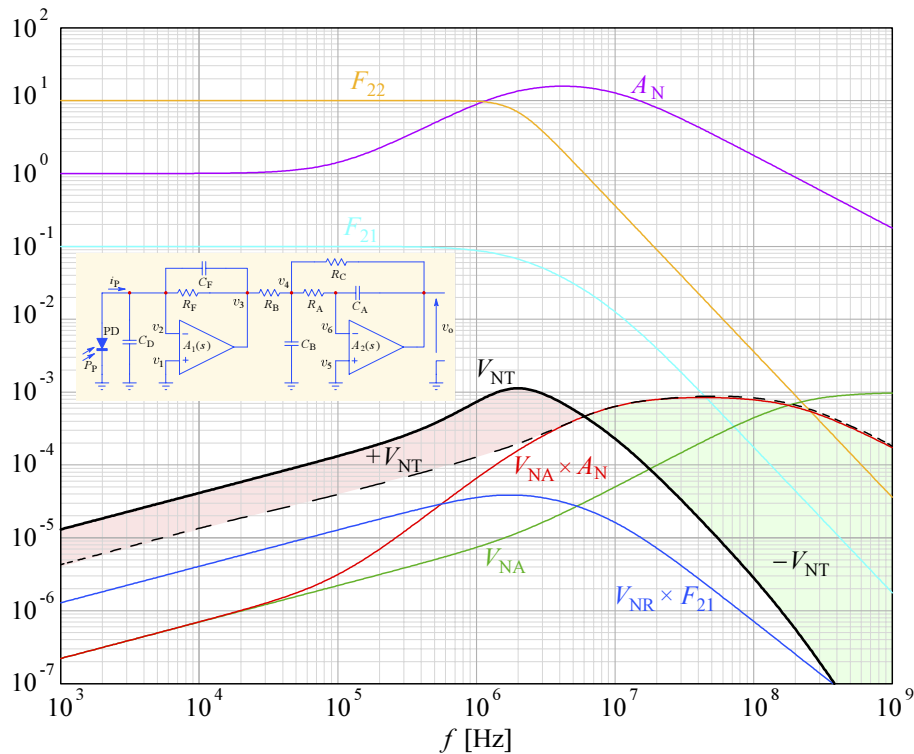
Žal je na trgu težko dobiti kondenzatorje z toleranco manjšo od 10%. Raje izkoristimo moč operacijskega ojačevalnika OPA656, ki lahko krmili bereme $100\ \Omega$. Upornosti filtra torej zmanjšamo in za enak faktor povečamo kapacitivnosti, na pr., $R_A = R_B = 390\ \Omega$ in $R_C = 3.9\ \text{k}\Omega$, ter $C_B = 300\ \text{pF}$ in $C_A = 15\ \text{pF}$. Tako precej zmanjšamo vpliv razsejanih kapacitivnosti. Fino uglasitev pa poiščemo s spremembo upornosti okoli nominalnih vrednosti, predvsem R_A , ker ta ne vpliva na ojačenje.

Primerjajmo še šumno ojačenje in šumni spekter, ter celotni šum sistema pred in po izboljšavi s dodatnim ojačevalnikom. Na [Sl.7.19](#) so narisane pmembnejše šumne komponente sistema z enim samim ojačevalnikom. Fotodiodni šum in ojačevalnikov vhodni tokovi šum smo zanemarili. Termični šum V_{NR} upornosti povratne zanke $R_F = 1\ \text{M}\Omega$ je pomnožen z frekvenčnim odzivom sistema F_{11} . Vhodni napetostni šum ojačevalnika V_{NA} množi šumno ojačenje A_N ; velikost šumnega ojačenja je določena z razmerjem kapacitivnosti fotodiode s kapacitivnostjo v povratni zanki ($16\times$) in je najbolj izraženo v območju med 100 kHz in 10 MHz. Celotni šum sistema V_{NT} je koren iz vsote kvadratov obeh komponent.



Sl.7.19: Šumne komponente sistema z enim samim ojačevalnikom. Napetost V_{NR} termičnega šuma upornosti R_F množi prenosna funkcija sistema F_{11} . Vhodno napetostno komponento šuma operacijskega ojačevalnika V_{NA} množi šumno ojačenje A_N . Celoten šumni spekter V_{NT} je koren vsote kvadratov oveh komponent. Kljub temu da je mejna frekvenca prenosne funkcije razmeroma nizka, v celotnem šumu prevladuje $V_{NA} \times A_N$, največ šuma je v območju 10-200 MHz.

Šumno ojačenje izboljšanega sistema dobimo tako da v izraz (240) vstavimo vrednosti za prvo stopnjo, $R_F = 100 \text{ k}\Omega$ in $C_F = 1 \text{ pF}$. Kot je narisano na [SI.7.20](#), termični šumni spekter V_{NR} upornosti R_F je sicer manjši, a narašča do $10\times$ višje mejne frekvence prve stopnje. Napetostni šumni spekter vhodnega ojačevalnika je enak kot prej, a množi ga šumno ojačenje A_N , ki sedaj začne naraščati na $10\times$ nižji frekvenci. Celotni šum prve stopnje je koren vsote kvadratov obeh komponent, ki pa ga množi prenosna funkcija filtra F_{22} . Ta ojači nizkofrekvenčni šum $10\times$, toda poreže visokofrekvenčni šum z $-40 \text{ dB}/10f$ nad 2 MHz . Zaradi tega ima celotni šum vrh pri 2 MHz , nakar pa strmo pada.



SI.7.20: Šumne komponente izboljšanega sistema s filtrom. Napetost V_{NR} termičnega šuma upornosti R_F , ki je sedaj $\sim 3\times$ manjši, množi prenosna funkcija sistema F_{21} , ki pa ima višjo mejno frekvenco. Vhodno napetostno komponento šuma operacijskega ojačevalnika V_{NA} , ki je enaka kot prej, množi šumno ojačenje A_N , ki sedaj začne naraščati pri $10\times$ višji frekvenci. Celoten šumni spekter V_{NT} je koren vsote kvadratov oveh komponent, vendar tokrat pomnožen s prenosno funkcijo filtra F_{22} . Vrh šumnega spektra je sicer približno enak kot prej, toda nastopa na 2 MHz , nato pa strmo pada zaradi F_{22} . Sicer je celotni šum na nizkih frekvencah večji ($+V_{NT}$), vendar je efektivni šum bistveno manjši kot prej, zaradi nižjih šumnih frekvenc in ožjega spektra ($-V_{NT}$).

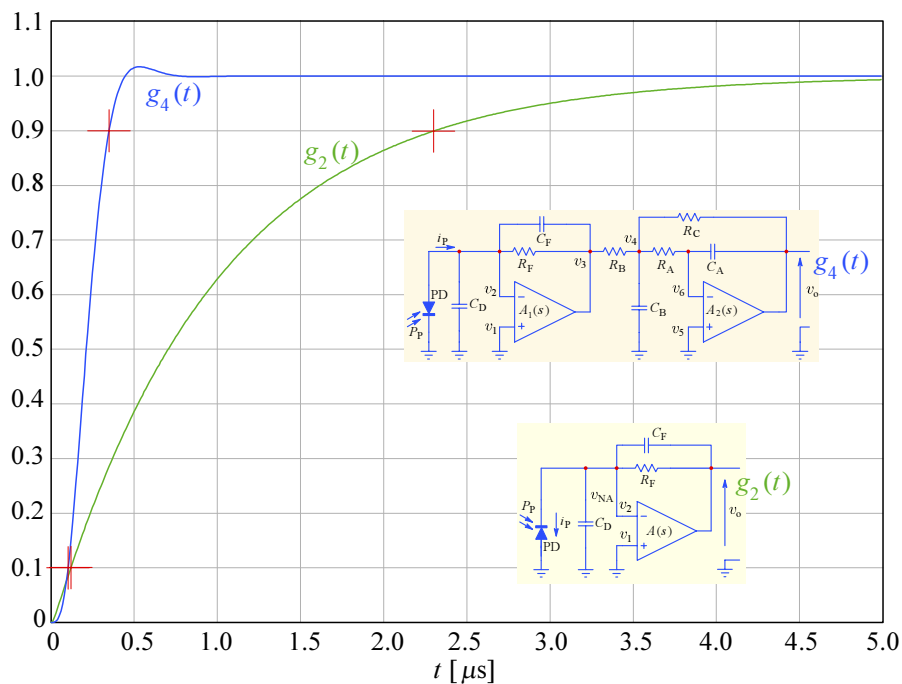
Primerjajmo še odziv na stopnico obeh sistemov. Prenosne funkcije v časovnem prostoru izračunamo po splošnem obrazcu za residue (6.97), s tem da smo prenosne funkcije v frekvenčnem prostoru množili še z Laplaceovim transformom za Heavisideovo stopnico, $1/s$. Torej je $G(s) = (1/s) \cdot F(s)$, zaradi česar imamo v obeh funkcijah še en pol v izhodišču. Sistem z enim samim ojačevalcem ima dva realna pola, p_1 in p_2 , od katerih je en dominanten (leži bližje koordinatnemu izhodišču), zato je odziv $g_2(t)$ podoben sistemu z enim polom:

$$g_2(t) = 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} e^{p_2 t} \quad (7.122)$$

Sistem z dvema ojačevalnikoma ima dejansko pet polov. Vendar smo pri izračunu odziva filtra pri drugem ojačevalniku zaradi razmeroma nizke mejne frekvence filtra lahko zanemarili dominantni pol samega ojačevalnika, pomnožen z odprtozračnim ojačenjem, $(-s_1)(1 + A_0)$, ker ta leži blizu 1.1×10^9 [rad/s] in upoštevali le pola, določena s pasivnimi komponentami filtra. Zato imamo v funkciji le 4 pole, čeprav se izkaže da je tudi pri prvi ojačevalni stopnji vpliv ojačevalnika možno zanemariti in je odziv sistema podoben sistemu s tremi poli. Izraz za časovni odziv sistema z dvema ojačevalnikoma bo tako:

$$g_4(t) = 1 + \frac{p_2 p_3 p_4}{(p_1 - p_2)(p_1 - p_3)(p_1 - p_4)} e^{p_1 t} + \frac{p_1 p_3 p_4}{(p_2 - p_1)(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)} e^{p_2 t} + \frac{p_1 p_2 p_4}{(p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_1 - p_4)} e^{p_3 t} + \frac{p_1 p_2 p_3}{(p_4 - p_1)(p_4 - p_2)(p_4 - p_3)} e^{p_4 t} \quad (7.123)$$

Pripomnimo še da se pola p_1 in p_2 v sistemu z enim samim ojačevalnikom razlikujeta od polov p_1 in p_2 v sistemu z dvema ojačevalnikoma. Na [SI.7.21](#) sta narisana pripadajoča odziva na stopnico.

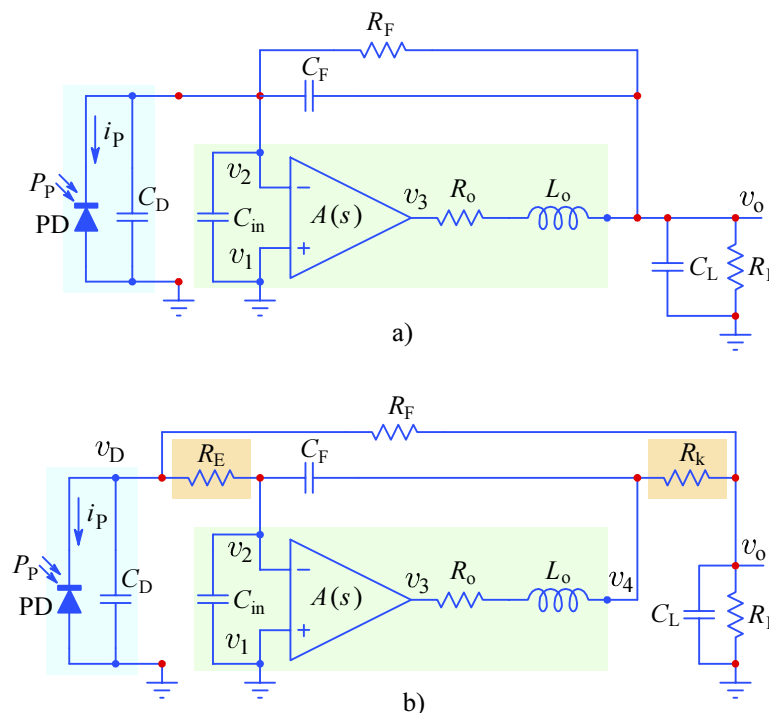


SI.7.21: Primerjava odzivov na stopnico. Pri sistemu z enim samim ojačevalnikom $g_2(t)$ je en pol dominanten, zato je odziv podoben odzivu sistema z enim samim polom. Sistem z dvema ojačevalnikoma $g_4(t)$ se odziva kot sistem s tremi poli in ima $\sim 10\times$ krajši vzponski čas (časovna razlika med doseženih 10% in 90% končne vrednosti), zaradi $\sim 10\times$ višje zgornje mejne frekvence kompozitnega sistema. Prenihaj je sicer bolj izrazit ($\sim 2\%$) kot bi lahko bil v primeru idealnega Besselovega 3-polnega sistema ($\sim 0.4\%$), vendar ga je mogoče s majhno korekcijo upornosti R_A ustrezno uglasiti, in obenem kompenzirati morebitne moteče vplive razsejanih kapacitivnosti dejanskega vezja.

7.7 Vpliv končne izhodne impedanca ojačevalnika

V praksi, poleg vpliva končne pasovne širine in končnega ojačenja operacijskih ojačevalnikov, proizvodnih tolerančnih vrednosti pasivnih komponent, ter razsejanih kapacitivnosti vezja, pogosto nastopijo še druge težave. Glede odziva sistema so le te večinoma povezane z končno izhodno impedanco ojačevalnika Z_o in parazitno kapacitivnostjo bremena C_L (na primer, kadar dolg koaksialni kabel povezuje fotodiodni ojačevalnik na merilni sistem). Kapacitivnosti bremena je treba prišteti še zaporedno vezavo kapacitivnosti v povratni zanki in vhodne kapacitivnosti ojačevalnika ter kapacitivnosti fotodiode, $1/[(1/C_F) + 1/(C_{in} + C_D)]$.

Izhodna impedanca ojačevalnika je posledica impedanca emitterske sledilne stopnje na izhodu ojačevalnika (Q_8, Q_9 , [Sl.6.2](#)). Realni del impedanca znaša, odvisno od tipa ojačevalnika, med $5\ \Omega$ in $70\ \Omega$ za nizke frekvence, vendar nad $\sim 10\ \text{kHz}$ narašča, ker tranzistorjem faktor tokovnega ojačenja β s frekvenco pojema, kar se preslika kot dodatna, zaporedno vezana induktivnost. [Sl.7.22](#) kaže enakovredno vezavo za tak primer in ustrezen rešitev z ločevanjem bremena in povratne zenke na nizkofrekvenčno in visokofrekvenčno vejo.



Sl.7.22: Izhodna impedanca ojačevalnika $Z_o = R_o + sL_o$ skupaj z impedanco bremena $Z_L = 1/[sC_L + (1/R_L)]$ in impedanco kapacitivnega delilnika v povratni zanki $Z_F = 1/sC_F + 1/[1/s(C_{in} + C_D)]$ lahko povzroči dodatni fazni zasuk v povratni zanki in ojačevalnik postane nestabilen. To odpravimo z dodajanjem upornosti R_k ($10\text{--}100\ \Omega$) proti bremenu in upornosti R_E ($100\ \Omega\text{--}R_F$), ki ločuje C_D od C_{in} in C_F , ter ločevanjem visoko-frekvenčne veje od nizko-frekvenčne veje povratne zanke tako, da R_F na nizkih frekvencah neposredno zaznava napetost na fotiodiodi in na bremenu.

Iz te kratke analize je razvidno da kompenzacija le s kapacitivnostjo v povratni zanki, kljub navidezni enostavnosti, večinoma ne zadošča; v kritičnih primerih je za ohranjanje stabilnosti potrebna zelo velika vrednost C_F , kar močno upočasni odziv sistema. Ustrezno kompenzirani sistemi so hirejši, pa še nižji šum imajo.

Primerjajmo na hitro frekvenčni, fazni in ovojnični zakasnitveni funkciji za oba primera. Impedance posameznih skupin pasivnih komponent na [Sl.7.22a](#) so:

$$Z_L = \frac{1}{\frac{1}{R_L} + sC_L} \quad (7.124)$$

$$Z_F = \frac{1}{\frac{1}{R_F} + sC_L} \quad (7.125)$$

$$Z_o = R_o + sL_o \quad (7.126)$$

$$Z_D = \frac{1}{s(C_D + C_{in})} \quad (7.127)$$

Za ojačevalnik naj velja ojačenje:

$$A(s) = A_0 \frac{-s_1}{s - s_1} \quad (7.128)$$

in relacija med vhodno in izhodno napetostjo (ob $v_1 = 0$):

$$v_3 = -v_2 A(s) \quad (7.129)$$

Vsota tokov v vozlišču v_2 (invertirajoči vhod ojačevalnika) je:

$$i_P = \frac{v_2}{Z_D} + \frac{v_2 - v_o}{Z_F} \quad (7.130)$$

in vsota tokov v vozlišču v_o (izhod ojačevalnika) je:

$$\frac{v_2 - v_o}{Z_F} = \frac{v_o}{Z_L} + \frac{v_o - v_3}{Z_o} \quad (7.131)$$

Normirana prenosna funkcija sistema je potem:

$$\frac{v_o}{i_P R_F} = -\frac{1}{R_F} \cdot \frac{Z_L Z_D Z_o - Z_L Z_D Z_F A(s)}{Z_o Z_F + Z_F Z_L + Z_o Z_D + Z_o Z_L + Z_L Z_D [1 + A(s)]} \quad (7.132)$$

Zadnji člen v imenovalcu ima tri frekvenčno odvisne člene, torej imamo opravka s funkcijo tretje stopnje. Ker nas za stabilnost sistema zanima le potek faze in ovojnične zakasnitve, analitične rešitve ne bomo iskali, temveč bomo izhajajoč iz prenosne funkcije izrisali odzive z računalnikom.

Imejmo enake vrednosti komponent kot za primer na [Sl.7.2](#):

$$C_D = 50 \text{ pF}$$

$$R_F = 100 \text{ k}\Omega$$

$$C_F = 5 \text{ pF}$$

Naj ima izbrani operacijski ojačevalnik odprtozančno ojačenje:

$$A_0 = 10^5$$

ter dominantni pol:

$$s_1 = -2\pi 10^2 \text{ rad/s}$$

in izhodno upornost:

$$R_o = 35 \Omega$$

ki pa začne naraščati nad $f_b = 10 \text{ kHz}$ (zaradi vpadanja tokovnega ojačenja izhodnih tranzistorjev na visokih frekvencah), kar je enakovredno zaporedni induktivnosti:

$$L_o = \frac{R_o}{2\pi f_b} \approx 560 \mu\text{H}.$$

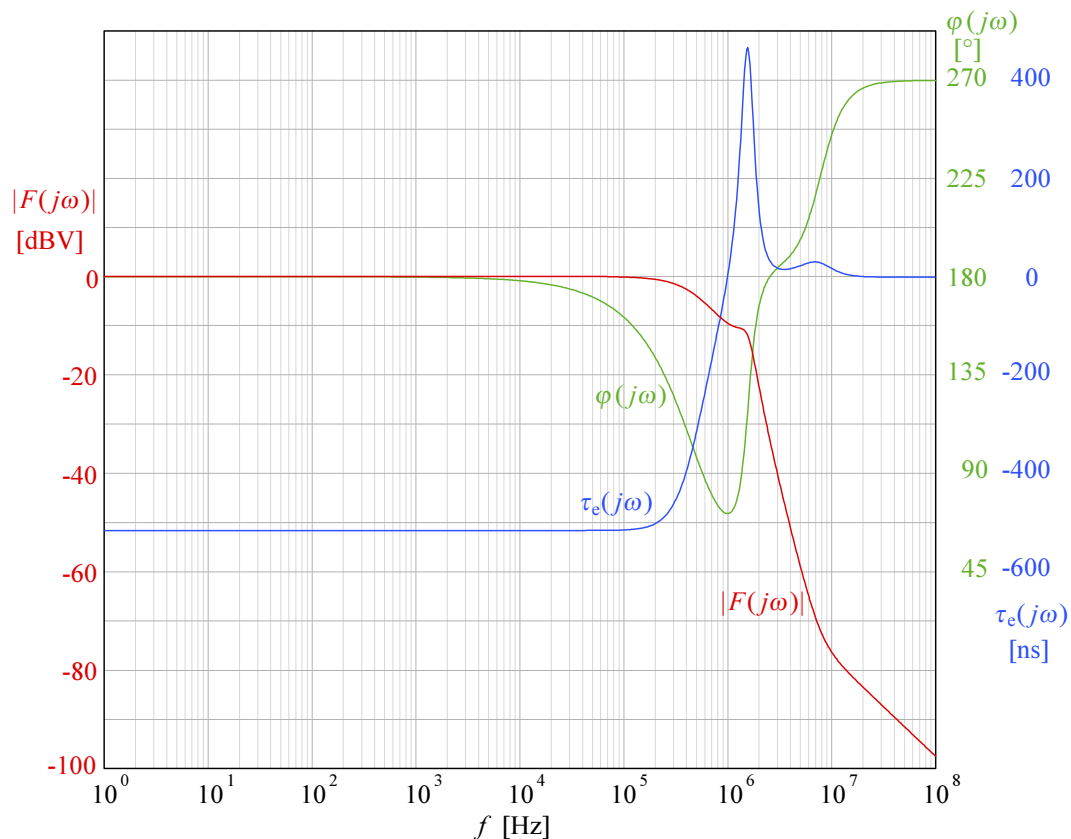
Izhod ojačevalnika priklopimo na merilni sistem z vhodno upornostjo:

$$R_L = 10 \text{ k}\Omega$$

Če smo to naredili z 1 m dolgim koaksijalnim kablom RG-58, katerega kapacitivnost znaša 100 pF/m, bo enakovredna kapacitivnost bremena:

$$C_L = 100 \text{ pF}$$

Na [SI.7.23](#) so narisani frekvenčni in fazni potek, ter ovojnična zakasnitev nekompenziranega sistema.



SI.7.23: Magnituda $|F(j\omega)|$, fazni kot $\varphi(j\omega)$, ter ovojnična zakasnitev $\tau_e(j\omega)$ sistema s končno majhno, toda reaktivno izhodno impedanco. Čeprav je signalno ojačenje v resonanci manjše od 1 (dejansko 0.316, oziroma -10 dB), bo navzgor obrnjen fazni prehod in posledično časovno prehitevanje v frekvenčnem območju 1–2 MHz povzročilo nestabilnost sistema in oscilacije na resonančni frekvenci.

Na osnovi faznega poteka in časovnega prehitevanja nad 1 MHz sklepamo da bo sistem zaradi reaktivne izhodne impedance in prav tako reaktivnega bremena nestabilen in bo osciliral na resonančni frekvenci $\sim 1.5 \text{ MHz}$. Hitrejši in močnejši operacijski ojačevalniki imajo sicer nižjo izhodno impedanco in izhodne tranzistorje,

ki jim tokovno ojačenje začne vpadati pri višjih frekvencah, zato lažje krmilijo večje kapacitivnosti, vendar pogosto le zaoscilirajo pri višji frekvenci. Sistem je mogoče stabilizirati s povečanjem C_F , toda s tem veliko izgubimo na pasovni širini in hitrosti odziva. Nekateri ojačevalniki lahko krmilijo nizkoohmsko breme in v tem primeru bi lahko koaksialni kabel zaključili s njegovo karakteristično impedanco $50\ \Omega$ zaporedno na izhodu ojačevalnika in vzporedno na koncu kabla, ter se tako znebili nadležne kapacitivnosti kabla, toda obenem bi izgubili faktor 2 (6 dB) v signalnem ojačenju.

Vedno je bolje če sistem načrtno zavarujemo pred oscilacijami, tako kot na [Sl.7.22b](#). Za analizo tega vezja izhajamo iz naslednjih enačb:

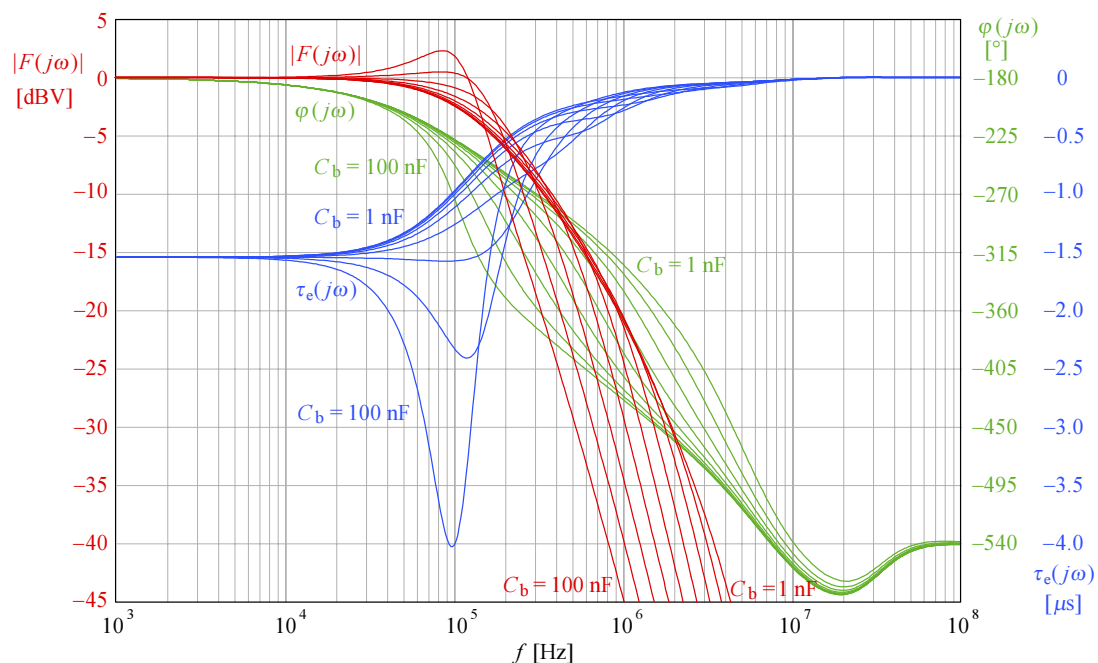
$$i_P = v_D s C_D + \frac{v_D - v_2}{R_E} + \frac{v_D - v_o}{R_F} \quad (7.133)$$

$$\frac{v_D - v_2}{R_E} = v_2 s C_{in} + (v_2 - v_4) s C_F \quad (7.134)$$

$$(v_2 - v_4) s C_F = \frac{v_4 - v_o}{R_k} + \frac{v_4 - v_3}{Z_o} \quad (7.135)$$

$$\frac{v_D - v_o}{R_F} + \frac{v_4 - v_o}{R_k} = \frac{v_o}{Z_L} \quad (7.136)$$

Če ta sistem enačb razrešimo za $v_o/i_P R_F$, dobimo v imenovalcu enačbo četrte stopnje z 239 členi. To zapleteno enačbo nima smisla reševati, ker je lega polov določena z velikim številom parametrov, zato je izredno težko razločiti vplive posamezne komponente na stabilnost sistema. Analizo raje prepustimo kakemu računalniškemu programu za simulacijo vezij. [Sl.7.24](#) kaže magnitudo, fazni zasuk in časovno zakasnitev v odvisnosti od frekvence, če kapacitivnost bremena C_b spreminjamo od 1 do 100 nF v korakih $\times 10^{1/4}$. Sistem je brezpogojno stabilen.



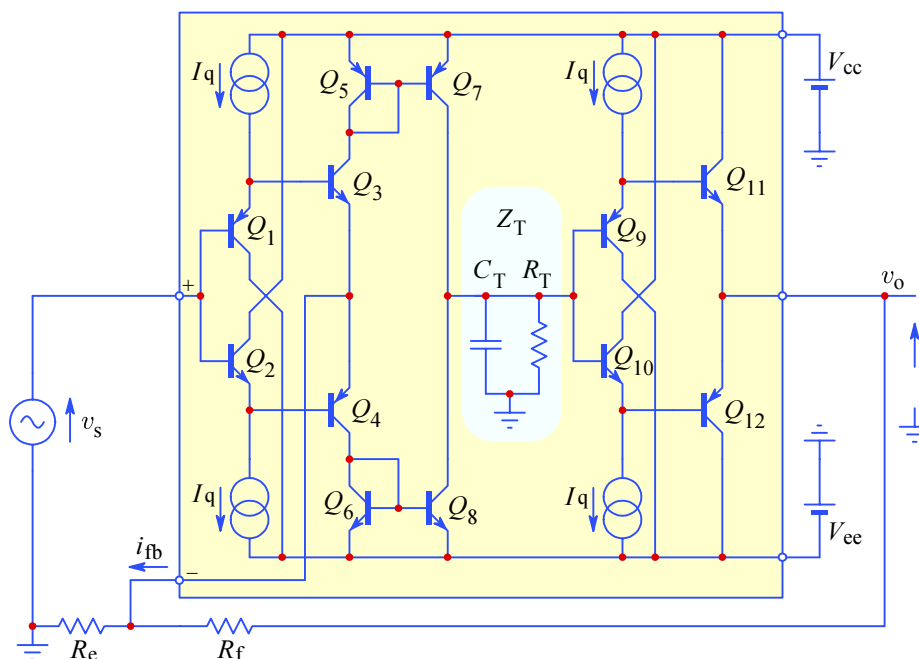
Sl.7.24: Potek magnitude, faznega zasuka in časovne zakasnitve kompenziranega sistema v odvisnosti od frekvence, če kapacitivnost bremena C_b spreminjamo od 1 do 100 nF.

8. Ojačevalnik s tokovno povratno zanko

Klasični operacijski ojačevalniki, ki smo jih obravnavali doslej, imajo dve pomembni pomanjkljivosti. Prvo smo spoznali ob obravnavi Millerjevega pojava (6.11) in kompenzacije zančnega ojačenja s pomočjo dominantnega pola v prenosni funkciji odprte zanke. Poleg tehnoloških omejitev proizvodnje tranzistorjev PNP tipa (počasni 'lateralni' PNP tranzistor) skupaj s tranzistorji NPN tipa na isti rezini silicija, je, zgodovinsko gledano, prav Millerjev pojav tisti, ki je vsiljeval ojačevalniško konfiguracijo kot na [Sl.6.2](#), kjer tranzistor Q_6 povzroča poglobitno omejitev pasovne širine ojačevalnika.

Druga poglobitna pomanjkljivost klasične konfiguracije je posledica večstopenjskega napetostnega ojačenja, kjer del napetostnega ojačenja prispeva vhodna diferencijalna stopnja, del pa Millerjeva stopnja; tokovno ojačenje prispeva le izhodna stopnja, zgrajena kot 'napetostni sledilnik' z ojačenjem malenkostno manjšem od ena. Zaradi dvostopenjskega napetostnega ojačenja leži pol, ki pripada vhodni diferencijalni stopnji, razmeroma blizu polu, ki pripada drugi stopnji, kar ima za posledico da je fazni zasuk na višjih frekvencah že 360° ob hkratnem ojačenju večjem od ena. Tak ojačevalnik bi zanihal takoj ko sklenemo povratno zanko. Zato je nujno dominantni pol srednje stopnje znižati mnogo bolj kot bi si to želeli.

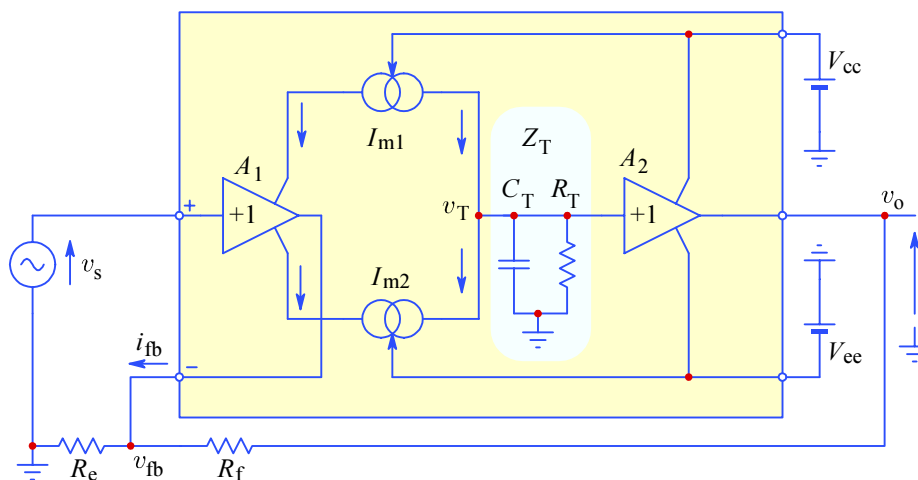
[Sl.8.1](#) kaže poenostavljen prikaz ojačevalnika s tokovno povratno zanko, ki zaradi svoje notranje zgradbe omogoča bistveno povečanje pasovne širine sistema.



Sl.8.1: Poenostavljen prikaz notranje zgradbe ojačevalnika s tokovno povratno zanko. Tokovni generatorji I_q polarizirajo tranzistorje v ustrezno delovno območje. Tranzistorji Q_{1-4} delujejo kot vhodni napetostni sledilnik, katerega nizkoimpedančni izhod (emiterja $Q_{3,4}$) služi kot invertirajoči tokovni vhod povratne zanke i_{fb} . Razlika tokov v kolektorjih $Q_{3,4}$ je sorazmerna toku povratne zanke i_{fb} in ta krmili tokovni zrcali $Q_{5,7}$ in $Q_{6,8}$. Razlika njunih izhodnih tokov ustvari napetostni padec na notranjem bremenu $Z_T = 1/(sC_T + 1/R_T)$. Tej napetosti sledi izhodni napetostni sledilnik Q_{9-12} , ki krmili uporovni delilnik v povratni zanki, ter hkrati še izhodno breme ojačevalnika.

Med letoma 1983–1985 je prišlo na tehnološkem področju do nekaj pomembnih prebojev, ki so omogočili izdelavo komplementarnih tranzistorjev z domala enakimi karakteristikami na isti rezini silicija. Tako je naenkrat postalo mogoče razmišljati o alternativah klasični konfiguraciji operacijskega ojačevalnika. Od vseh možnih konfiguracij, ki uporabljajo popolnoma komplementarno simetrično zgradbo ojačevalnika, se je najbolje izkazala konfiguracija s tokovno povratno zanko (angl., ‘current feedback topology’, CFB). Včasih v literaturi najdemo tudi izraz ‘transimpedančni ojačevalnik’, oziroma ‘TIA’, ali ‘trans-Z’, zaradi posebne notranje zgradbe takih ojačevalnikov, kot bomo to v kratkem spoznali; vendar je transimpedanca bolj splošno ime za način delovanja ojačevalnika v tokovno-napetostnem načinu, kar smo videli že v doslej obravnavanih primerih, zato bomo raje ustrajali pri izrazu CFB.

Topologija CFB odpravi obe pomanjkljivosti klasičnih ojačevalnikov s tem, da ima le eno ojačevalno stopnjo, kar prestavi težave s sekundarnimi poli na mnogo višje frekvence, poleg tega pa ta ojačevalna stopnja ima izredno nizko vhodno imedanco, kar skoraj popolnoma odpravi Millerjev pojav. Nenazadnje, ta ojačevalna stopnja ni tokovno omejena z generatorjem konstantnega toka, pač pa tokovna povratna zanka prispeva ravno toliko toka, kot je za doseganje razlike med vhodno in izhodno napetostjo potrebno. Pri klasičnih ojačevalnikih Millerjev pojav, skupaj s ostro omejenim prvostopenjskim tokom, ki je na voljo za polnjenje Millerjeve kapacitivnosti, povzroči upočasnitev in popačenje za velike signale, znano kot ‘slew-rate limiting’. Ker je pri CFB topologiji tok, ki polni kompenzacijsko kapacitivnost sorazmeren napaki povratne zanke, se kompenzacijska kapacitivnost vedno polni z potrebno vrednostjo toka, sorazmerno velikosti vhodnega signala. To popolnoma odpravi problem upočasnitve odziva za velike signale. [Sl.8.2](#) predstavlja blokovni model ojačevalnika s tokovno povratno zanko.



Sl.8.2: Blokovni model ojačevalnika na [Sl.8.1](#). A_1 je vhodni napetostni sledilnik, katerega izhod predstavlja invertirajoči nizkoimpedančni tokovni vhod povratne zanke. Tokovna zrcala zaznajo tokovno razliko v napajanju A_1 , ki je posledica toka povratne zanke i_{fb} , ter jo preslikajo v enako tokovno azliko v točki v_T . Ta tokovna razlika, ki je dejansko enaka i_{fb} , ustvari napetostni padec na transimpedanci $Z_T = 1/(sC_T + 1/R_T)$. Izhodni napetostni sledilnik A_2 to napetost preslika na izhod, obenem pa priskrbi tok uporabnemu delilniku v povratni zanki, ter morebitnemu izhodnemu bremenu.

Poglejmo podrobneje delovanje modela na [Sl.8.2](#). Vhodni napetostni sledilnik A_1 (z napetostnim ojačenjem $\approx +1$, sledi signalnemu viru v_s in enaka napetost se pojavi na izhodu A_1). Ta povzroči tok i_{fb} , ki teče v upor R_e . Zaradi i_{fb} se v napajanju sledilnika A_1 pojavi tokovna razlika enaka i_{fb} , ki prek tokovni zrcal I_{m1} in I_{m2} ustvari enako tokovno razliko na notranji impedanci Z_T in sorazmeren napetostni padec v_T .

Impedanco Z_T je mogoče modelirati kot vzporedno vezavo kapacitivnosti C_T in upornosti R_T . Kapacitivnost C_T je dejansko sestavljena iz parazitnih kapacitivnosti izhodnih tranzistorjev obeh tokovnih zrcal, ter vhodnih parazitnih kapacitivnosti tranzistorjev v sledilniku A_2 . Upornost R_T predstavlja realni del vhodne impedance sledilnika A_2 . Sledilnik A_2 je po zgradbi sicer podoben A_1 , vendar mora biti močnejši, da lahko krmili morebitno nizkoimpedančno breme na izhodu (pri zelo visokih frekvenca običajno delamo s standardizirano impedanco 50Ω ali 75Ω , zato da parazitne kapacitivnosti vzporedno z bremenom ne znižajo pasovne širine sistema).

S tem, kar smo do sedaj povedali, še nismo razkrili vseh prednosti ojačevalnikov s tokovno povratno zanko. Več nam bo razkrila naslednja analiza njihovega delovanja. Tako kot pri klasičnem operacijskem ojačevalniku, tudi tu velja da sta, ob zadostnem signalu povratne zanke, invertirajoči in neinvertirajoči vhod na približno enaki napetosti:

$$v_{fb} \approx v_s \quad (8.1)$$

Prav tako velja razmerje med izhodno napetostjo in napetostjo na invertirajočem vhodu, kar je določeno z razmerjem uporov v povratni zanki:

$$\frac{v_o - v_{fb}}{R_f} = \frac{v_{fb}}{R_e} \quad (8.2)$$

Od tod sledi enačba (nizkofrekvenčnega) ojačenja, ki je identična tisti pri klasičnem operacijskem ojačevalniku:

$$\frac{v_o}{v_s} = \left(1 + \frac{R_f}{R_e} \right) \quad (8.3)$$

Razlika pa se pokaže ko upoštevamo razmere znotraj ojačevalnika v točki v_T :

$$v_o = v_T = i_{fb} Z_T = i_{fb} \frac{1}{sC_T + \frac{1}{R_T}} \quad (8.4)$$

skupaj s tokovi in napetostmi v povratni zanki, kar določa povratni tok i_{fb} :

$$i_{fb} = \frac{v_{fb}}{R_e} + \frac{v_{fb} - v_o}{R_f} \quad (8.5)$$

oziroma, če upoštevamo (8.1):

$$i_{fb} = v_s \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f} \right) - \frac{v_o}{R_f} \quad (8.6)$$

S tako določenim povratnim tokom i_{fb} se vrnemo v (8.4):

$$v_o = \left[v_s \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f} \right) - \frac{v_o}{R_f} \right] \frac{1}{sC_T + \frac{1}{R_T}} \quad (8.7)$$

Ločimo koeficijente po napetostih:

$$v_o \left(sC_T + \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_f} \right) = v_s \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_f} \right) \quad (8.8)$$

Izraz (8.8) razrešimo za prenosno funkcijo v_o/v_s :

$$\frac{v_o}{v_s} = \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right) \frac{1}{1 + \frac{R_f}{R_T}} \cdot \frac{\frac{1}{C_T R_f} \left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right)}{s + \frac{1}{C_T R_f} \left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right)} \quad (8.9)$$

Tukaj je $A_{CL} = (1 + R_f/R_e)$ frekvenčno neodvisno ojačenje sklenjene zanke, kot pri (8.3). Naslednji člen, $A_e = 1/(1 + R_f/R_T)$ predstavlja frekvenčno neodvisno napako zaradi končno velikega realnega dela transimpedance, R_T (če je $R_T \gg R_f$ je ta člen $A_e \approx 1$), analogno napaki zaradi končno velikega enosmernega ojačenja pri klasičnem ojačevalniku. Zadnji ulomek pa je normirana frekvenčna odvisnost, kot smo je bili vajeni tudi pri klasičnem ojačevalniku, s polom $s_1 \approx -1/C_T R_f$, vendar z eno pomembno razliko: v njej, poleg kapacitivnega dela transimpedance C_T , nastopa le še upornost povratne zanke R_f , med tem ko R_e nastopa le v frekvenčno neodvisnem delu ojačenja.

Zaradi te lastnosti ponuja prenosna funkcija ojačevalnika s tokovno povratno zanko zelo uporabno možnost: izbiro pasovne širine sistema neodvisno od ojačenja. Enkrat ko izberemo R_f in s tem določimo pol prenosne funkcije, oziroma zgornjo mejno frekvenco $\omega_h \approx 1/C_T R_f$, ojačenje sistema lahko nastavimo po želji z ustrezno izbiro R_e .

Pri večini CFB ojačevalnikov je $R_T > 100 \text{ k}\Omega$ in $C_T < 1 \text{ pF}$, zato bo ob upornosti $R_f = 1 \text{ k}\Omega$ napaka ojačenja manjša kot 1%, in pasovna širina ojačevalnika vsaj 150 MHz.

Vendar imajo tudi CFB ojačevalniki svoje fizične omejitve. Najprej seveda glede največjega možnega toka v povratni zanki, potem še pri izhodni impedanci obeh napetostnih sledilnikov, ki je sicer večinoma $r_o < 5 \Omega$, a to že zadostuje da nekoliko pokvari prenosno funkcijo in zaradi tega se mejna frekvenca le spreminja z ojačenjem. Ne sicer sorazmerno, kot pri klasičnih ojačevalnikih, kjer ob $10\times$ večjem ojačenju f_h tudi pade za $10\times$, vendar opazno, zlasti pri večjih ojačenjih, kot to pokaže naslednja analiza. Zaradi prisotnosti r_o na izhodu sledilnika A_1 bo napetost na invertirajočem tokovnem vhodu nižja od signala na veinvertirajočem vhodu, in sicer za padec napetosti $i_{fb} r_o$. Enačba (8.1) tako postane:

$$v_{fb} = v_s - i_{fb} r_o \quad (8.10)$$

Vsota tokov v vozlišču v_{fb} bo tako:

$$\frac{v_{fb}}{R_e} = \frac{v_s - v_{fb}}{r_o} + \frac{v_o - v_{fb}}{R_f} \quad (8.11)$$

kjer drugi člen na desni strani enačbe predstavlja tok i_{fb} izračunan na podlagi (8.6). Z upoštevanjem transimpedančne relacije:

$$i_{fb} = \frac{v_s - v_{fb}}{r_o} = \frac{v_o}{Z_T} \quad (8.12)$$

ki jo razrešimo za v_{fb} :

$$v_{fb} = v_s - v_o \frac{r_o}{Z_T} \quad (8.13)$$

postane enačba (8.8):

$$v_s \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right) = v_o \left[1 + \frac{r_o}{Z_T} \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right) + \frac{r_o}{Z_T} \frac{R_f}{r_o}\right] \quad (8.14)$$

in je zato prenosna funkcija nekoliko drugačna od (8.9):

$$\frac{v_o}{v_s} = \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right) \frac{1}{1 + \frac{r_o}{Z_T} \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right) + \frac{R_f}{Z_T}} \quad (8.15)$$

Razčlenimo še Z_T :

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right)}{\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) \left(1 + \frac{r_o}{R_T}\right)} \cdot \frac{\frac{1}{C_T R_f} \cdot \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) \left(1 + \frac{r_o}{R_T}\right)}{1 + \frac{r_o}{R_f} \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right)}}{s + \frac{1}{C_T R_f} \cdot \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) \left(1 + \frac{r_o}{R_T}\right)}{1 + \frac{r_o}{R_f} \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right)}} \quad (8.16)$$

Faktor nizkofrekvenčnega ojačenja A_{LF} je zelo podoben prejšnjemu:

$$A_{LF} = \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right)}{\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) \left(1 + \frac{r_o}{R_T}\right)} \quad (8.17)$$

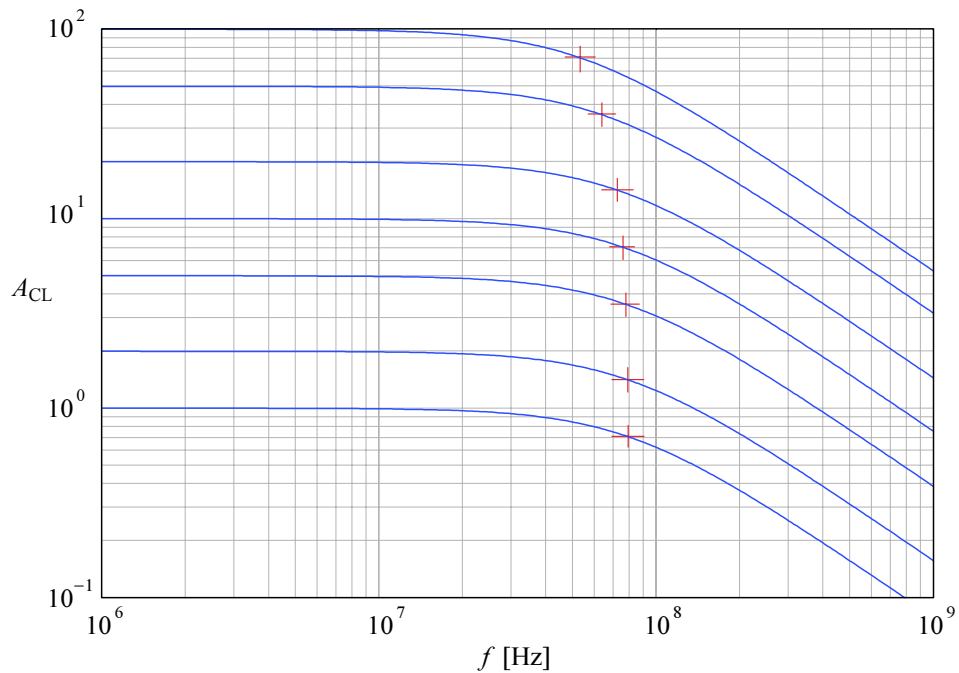
ker velja $r_o \ll R_f \ll R_T$ in je vrednost imenovalca ≈ 1 . Isti faktor nastopa tudi v števcu pola:

$$s_1 = - \frac{1}{C_T R_f} \cdot \frac{\left(1 + \frac{R_f}{R_T}\right) \left(1 + \frac{r_o}{R_T}\right)}{1 + \frac{r_o}{R_f} \left(1 + \frac{R_f}{R_e}\right)} \quad (8.18)$$

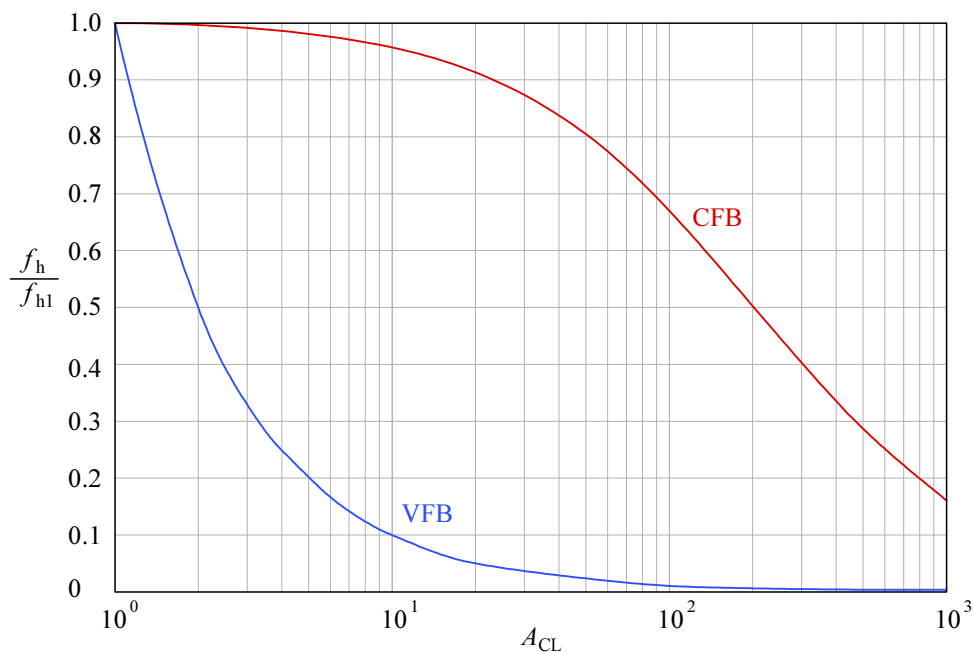
vendar pa v imenovalcu, poleg časovne konstante $C_T R_f$, nastopa še faktor ojačenja $(1 + R_f/R_e)$, pomnožen z razmerjem r_o/R_f . To pomeni da bo s povečanjem ojačenja časovna konstanta tudi efektivno povečana, oziroma zgornja mejna frekvenca, $f_h = -s_1/2\pi$, bo znižana. Torej, večja ko je izhodna upornost r_o , bolj se pozna padec zgornje mejne frekvence za večje faktorje ojačenja.

Na [Sl.8.3](#) smo narisali magnitude prenosne funkcije (8.16) ob sklenjeni zanki za ojačenja od 1 do 100, ob vrednostih $r_o = 5 \Omega$, $R_T = 330 \text{ k}\Omega$, $C_T = 2 \text{ pF}$, $R_f = 1 \text{ k}\Omega$.

[Sl.8.4](#) pa kaže primerjavo vpadanja mejne frekvence f_h v odvisnosti od ojačenja sklenjene zanke za območje $1 \leq A_{CL} \leq 10^3$, normirano na mejno frekvenco f_{h1} pri ojačenju sklenjene zanke $A_{CL} = 1$ (oziroma $R_e = \infty$), za ojačevalnike s tokovno (CFB) in napetostno (VFB) povratno zanko.



SI.8.3: Magnituda prenosne funkcije ojačevalnika s tokovno povratno zanko za različne vrednosti ojačenja sklenjene zanke A_{CL} v območju od 1 do 100. Zgornja mejna frekvenca f_h (označena s '+') se pri večjih ojačenjih zniža, zaradi od nič različne vrednosti izhodne upornosti r_o prvega napetostnega sledilnika A_1 . Izračun je narejen na osnovi enačbe (284) ob vrednostih $r_o = 5 \Omega$, $R_T = 330 \text{ k}\Omega$, $C_T = 2 \text{ pF}$, $R_f = 1 \text{ k}\Omega$.



SI.8.4: Primerjava padanja zgornje mejne frekvence f_h (normirane na zgornjo mejno frekvenco f_{h1} pri ojačenju sklenjene zanke $A_{CL} = 1$) v odvisnosti od naraščanja ojačenja sklenjene zanke A_{CL} , za ojačevalnike s tokovno (CFB) in napetostno (VFB) povratno zanko.

Znižanje zgornje mejne frekvence za večja ojačenja sklenjene zanke je pri ojačevalnikih s tokovno povratno zanko sicer opazno, pri ojačenju $A_{CL} = 200$ pade na približno $0.5 f_h$ (pri razmerju $r_o/R_f = 1/200$), a to je še vedno mnogo boljše kot pri klasičnih ojačevalnikih, katerih zgornja mejna frekvenca je kar obratno sorazmerna faktorju ojačenja, torej pade na $0.5 f_h$ že pri ojačenju $A_{CL} = 2$.

Poleg tega ojačevalniku s tokovno povratno zanko lahko vedno znižamo vrednost R_f in ustrezno preračunamo vrednost R_e , ter tako tudi pri večjem ojačenju še vedno dosežemo enako pasovno širino, kot pri ojačenju 1. Le paziti je treba, da R_f ne znižamo pod mejno vrednost, pri kateri pol $-1/C_T R_f$ še dominira nad sekundarnimi poli ojačevalnika. Ko to mejo enkrat presežemo, bo ojačevalnik osciliral na zelo visoki frekvenci (nekaj GHz!) in se pregreval.

Danes je (predvsem zahvaljujoč napredku v tehnologiji polprevodnikov tipa SiGe, ali SiGeC) sicer mogoče narediti ojačevalnike s klasično topologijo, ki imajo zgornjo mejno frekvenco $f_T \approx 3.8$ GHz (AD8099), kar je primerljivo ojačevalnikom s tokovno povratno zanko. Kljub temu so ojačevalniki s tokovno povratno zanko še vedno v znatni prednosti ko gre za večje faktorje ojačenja ($> 3\times$) in velike signale (primerljive z napajalno napetostjo), zaradi mnogo višje meje pri kateri prihaja do pojava 'slew-rate limiting' (ta pogosto znaša 5 000 V/ μ s in več).

8.1. Ojačevalnik CFB kot fotodiodni ojačevalnik

Ojačevalniki s tokovno povratno zanko (CFB) imajo nizko vhodno impedanco invertirajočega tokovnega vhoda, ter temu primerno veliko napetostno in tokovno enosmerno napako (offset) in razmeroma velik šum, tako da njihovo uporabo za precizne optične meritve večinoma odsvetujemo. Vendar so primeri, ko nas preciznost pri nizki svetlobni intenziteti ne zanima, pomembna je le hitrost odziva. Takrat pa je CFB ojačevalnik razmisleka vredna alternativa.

Težave nastopijo le, če je kapacitivnost fotodiode zelo velika, ker so CFB ojačevalniki zelo občutljivi za kapacitivnosti na invertirajočem vhodu, še mnogo bolj kot klasični ojačevalniki. To je razvidno že iz same relacije za pol (8.18). Za razliko od klasičnih ojačevalnikov, že majhna kapacitivnost vzporedna upornosti R_f izniči vpliv R_f na pasovno širino in prestavi pol mnogo višje (teoretično neskončno visoko, praktično pa odvisno od r_o), kjer ta ni več dominanten; zato nedominantni poli prispevajo svoj fazni zasuk povratni zaki, ki iz negativne postane pozitivna in pahne ojačevalnik v območje nestabilnosti. Podobno učinkuje tudi kapacitivnost na invertirajočem vhodu proti zemlji, kar je tipično za fotodiode.

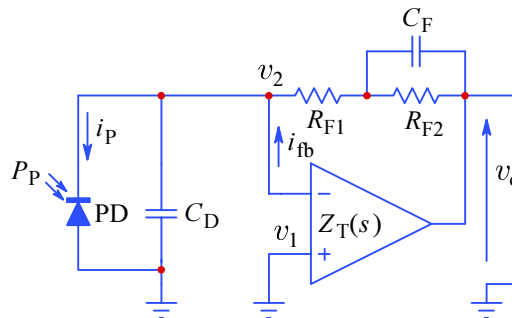
Na srečo se zahteve po doseganju visokoh frekvenc skladajo z zahtevo po majhni kapacitivnosti fotodiode. Takrat smo prisiljeni uporabiti fotodiodo z majno površino, povrhu pa dokaj visoko zaporno napetost, ki zniža kapacitivnost fotodiode na le nekaj pF. Če je R_f razmeroma velik, denimo nekaj k Ω , teh nekaj pF na invertirajočem vhodu ne predstavlja velikega bremena napetostnem sledilniku A_1 , ki s svojo nizko izhodno impedanco večinoma lahko krmili tako kapacitivnost.

Včasih pa je treba za doseganje izjemno visoke mejne frekvence izbrati za R_f vrednost le okoli 500–1000 Ω . Takrat je treba ojačevalniku pomagati z eno izmed zvižaj, ki smo jih že obravnavali, a jih je za ta primer treba nekoliko prilagoditi.

Prva možnost je dodana kapacitivnost C_f vzporedno z R_f , kot na [S1.7.1](#), vendar pri ojačevalnikih s tokovno povratno zanko vrednost C_f ne sme biti večja od 1–2 pF, odvisno od tokovnih zmogljivosti prvega napetostnega sledilnika, A_1 . Žal je uporaba kapacitivnosti manjših od 1 pF dokaj nezanesljiva, ker so razsejane kapacitivnosti na tiskanem vezju približno istega velikostnega reda in prispevajo veliko napako.

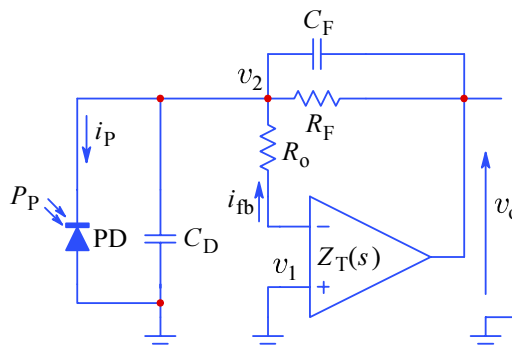
Delno si lahko pomagamo s kapacitivnim T-atenuatorjem, enako kot na [Sl.7.12](#). Čeprav so kapacitivnosti, ki tvorijo T-atenuator, lahko velike, si ne smemo privoščiti učinkovite kapacitivnosti večje od nekaj pF, gledano tako iz smeri izhodne napetosti v_o , kot tudi iz smeri invertirajočega tokovnega vhoda i_{fb} .

Druga možnost je le delna kapacitivna premostitev upornosti R_f , kot je prikazano na [Sl.8.5](#). Ker je upornost R_f razdeljena na R_{f1} in R_{f2} in je C_f vzporeda le z R_{f2} , ojačevalnik pri visokih frekvencah vedno zazna R_{f1} v povratni zanki. Če je vrednost R_{f1} zadosti majhna, leži pol, ki ga vnaša kapacitivnost fotodiode, precej višje, kot če kapacitivnosti C_f ne bi bilo. Poleg tega C_f delno kompenzira fazni zasuk v povratni zanki in s tem prispeva k stabilnosti ojačevalnika.



Sl.8.5: Stabilizacija fotodiodnega ojačevalnika s tokovno povratno zanko s pomočjo delne kapacitivne premostitve upornosti povratne zanke R_f .

Tretja možnost je umetno povečanje zaporedne upornosti invertirajočega tokovnega vhoda, R_o , kot na [Sl.8.6](#). Ta možnost je še najbolj preprosta in najbolj zanesljiva, čeprav delno zniža pasovno širino sistema.



Sl.8.6: Stabilizacija fotodiodnega ojačevalnika s tokovno povratno zanko s pomočjo dodatne zaporedne upornosti R_o invertirajočega tokovnega vhoda.

To zadnjo možnost ([Sl.8.6](#)) se splača analizirati bolj podrobno. Tako kot prej pri klasičnem operacijskem ojačevalniku, imamo tudi pri ojačevalniku s tokovno povratno zanko prenosno funkcijo odprte zanke, ki vpliva na obnašanje sistema s sklenjeno povratno zanko, le da tukaj prenosna funkcija ni brezdimenzijsko razmerje izhodne in vhodne napetosti, pač pa je v obliki transimpedance Z_T , oziroma razmerje izhodne napetosti z vhodnim tokom:

$$v_o = -i_{fb} Z_T \quad (8.19)$$

Upoštevajoč notranjo upornost r_o prvega napetostnega sledilnika A_1 zaporedno z R_o , bo napetost v vozlišču v_2 :

$$v_2 = v_1 + i_{fb}(r_o + R_o) \quad (8.20)$$

kjer je seveda po vezavi na [Sl.8.6](#) $v_1 = 0$. Vsota tokov v vozlišču v_2 pa je:

$$i_p = v_2 s C_D + i_{fb} + (v_2 - v_o) \left(s C_f + \frac{1}{R_f} \right) \quad (8.21)$$

Če v izrazu (289) zamenjamo v_2 z (288) in i_{fb} izrazimo iz (287) dobimo:

$$i_p = -v_o \left[\frac{(r_o + R_o) s C_D + 1}{Z_T} + \left(1 + \frac{r_o + R_o}{Z_T} \right) \left(s C_f + \frac{1}{R_f} \right) \right] \quad (8.22)$$

Transimpedanca celotnega sistema je tako:

$$\frac{v_o}{i_p} = - \frac{Z_T R_f}{(r_o + R_o) s C_D R_f + R_f + (Z_T + r_o + R_o) (s C_f R_f + 1)} \quad (8.23)$$

Izrazimo še Z_T z R_T in C_T , kot v enačbi (269), zaradi česar bo transimpedančna enačba funkcija drugega reda. Normirajmo transimpedanco na vhodno količino $i_p R_f$, da dobimo brezdimenzijski izraz prenosne funkcije, ter ločimo frekvenčno neodvisni del, frekvenčno odvisnega pa uredimo po potencah kompleksne frekvence s :

$$\frac{v_o}{i_p R_f} = - G_{DC} \frac{K_0}{s^2 + s K_1 + K_0} \quad (8.24)$$

Vemo da bo nizkofrekvenčno ojačenje $G_{DC} \approx 1$, če je $R_T \gg R_f + R_o + r_o$:

$$G_{DC} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_f}{(r_o + R_o)} + \frac{R_T}{(r_o + R_o)} \right)} \cdot \frac{R_T}{(r_o + R_o)} \quad (8.25)$$

Koeficijenta karakterističnega polinoma pa sta:

$$K_1 = \frac{1}{R_f (C_D + C_f)} \left[\frac{(C_D + C_f) R_f}{C_T R_T} + \frac{C_f R_f}{C_T (r_o + R_o)} + \frac{R_f}{(r_o + R_o)} + 1 \right] \quad (8.26)$$

$$K_0 = \frac{1}{C_T R_T R_f (C_D + C_f)} \left(1 + \frac{R_f}{r_o + R_o} + \frac{R_T}{r_o + R_o} \right) \quad (8.27)$$

Zgornja mejna frekvenca sistema bo tako:

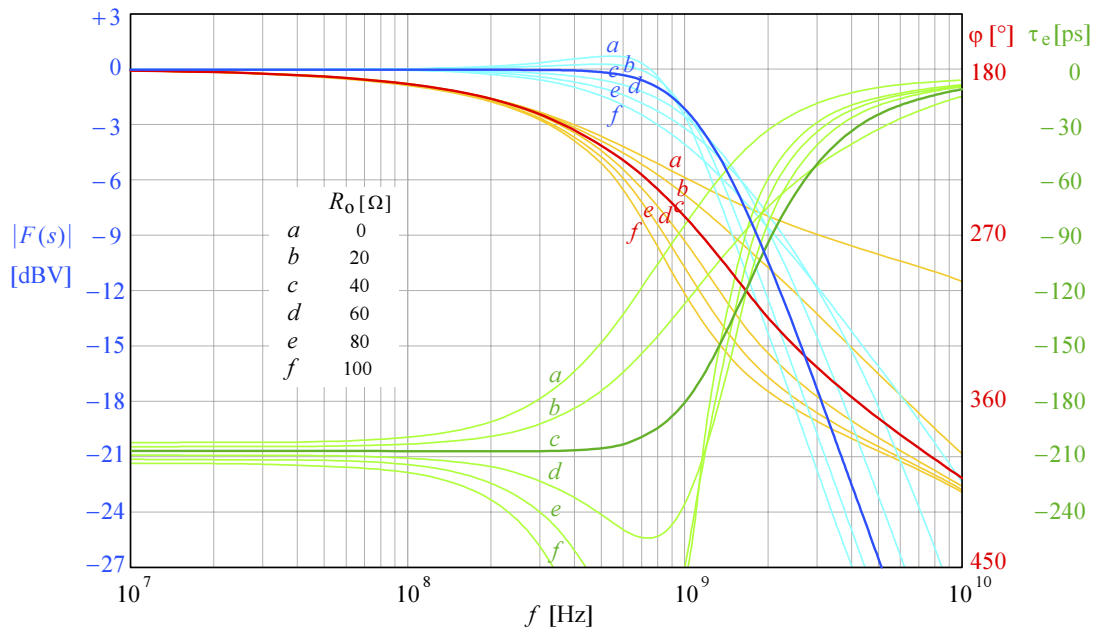
$$f_h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{K_0} \quad (8.28)$$

Zgornji izrazi so dokaj zapleteni in je analitično iskanje lege polov v odvisnosti od vrednosti R_o , ter optimizacija sistema za maksimalno ravno ovojnično zakasnitev dokaj zamudno opravilo, zato raje poiščimo numerično rešitev.

Denimo da ima izbrani ojačevalnik, naj bo to tip THS2301 podjetja Texas Instruments, $R_T = 330 \text{ k}\Omega$ in $C_T = 0.1 \text{ pF}$, ter $r_o = 1 \Omega$, izbrana fotodioda (SFH203) naj ima $C_D = 3 \text{ pF}$ (ob zaporni napetosti -25 V), želimo pa realizirati sistemsko transimpedanco $R_f = 1 \text{ k}\Omega$ in $C_f = 0.1 \text{ pF}$. Da bo simulacija bolj realna, predpostavimo da leži sekundarni pol nekje okoli 10 GHz . Ponavadi je to pol

močnostne izhodne stopnje, ker izhodni tranzistorji morajo imeti razmeroma veliko površino, torej tudi večjo parazitno kapacitivnost, denimo $C_{CB} \approx 1.5$ pF, kar skupaj z upornostjo baze $R_B \approx 10 \Omega$ določa tretji pol, $s_3 = -1/C_{CB}R_B$, torej na frekvenci $f_3 = 1/2\pi C_{CB}R_B$. Potem enačbo (276) preprosto množimo s $[-s_3/(s - s_3)]$.

Pri teh pogojih spreminjajmo upornost R_o od 0 do 100Ω , v korakih po 20Ω . [Sl.8.7](#) prikazuje rezultat za absolutno vrednost prenosne funkcije $|F(s)|$, fazni zamik $\varphi(s) = \arctan\{\Im[F(s)]/\Re[F(s)]\}$, ter ovojnično zakasnitev sistema $\tau_e = d\varphi(s)/ds$. Seveda smo s reducirali na pozitivni del imaginarne osi $j2\pi f$. Vidimo da primer c ($R_o = 40 \Omega$) ustreza zahtevi po maksimalno ravni ovojnični zakasnitvi ($\tau_e \approx 207$ ps). Takrat je tudi zgornja mejna frekvenca sistema (pri -3 dBV) najvišja ($f_h \approx 1.1$ GHz).



Sl.8.7: Magnituda $|F(s)|$, fazni zasuk $\varphi(s)$ in ovojnična zakasnitev $\tau_e(s)$ fotodiodnega ojačevalnika s tokovno povratno zanko iz [Sl.8.6](#), pri različnih vrednostih upornosti R_o . Vrednosti ostalih komponent so: $R_T = 330$ k Ω , $C_T = 0.1$ pF, $C_D = 3$ pF, $R_f = 1$ k Ω , $C_f = 0.1$ pF. Ovojnična zakasnitev je maksimalno ravna v primeru (c) pri $R_o \approx 40 \Omega$, takrat ima sistem najvišjo zgornjo mejno frekvenco $f_h \approx 1.1$ GHz. Pri vrednosti $R_o = 0$ (a) leži prelomna frekvenca drugega pola nad 10 GHz, zato je odziv podoben odzivu sistema prve stopnje. Fazni graf (a) bi se zato moral končati pri 270° , vendar nad ~ 3 GHz pride do izraza vpliv tretjega pola. Realni ojačevalnik pa bi kazal tudi vpliv razsejanih kapacitivnosti vezja, in pri povezavah daljših od 5 mm še parazitnih induktivnosti, zato bi bil nekoliko počasnejši in imel več rezonanc nad 1 GHz, ki bi se pri odzivu na stopnico odrazile kot slabo dušene visokofrekvenčne oscilacije.

Za izračun časovnega odziva na stopnico moramo poiskati pole v enačbi (292). Kot v vseh sistemih drugega reda, tvorita pola konjugirano-kompleksni par pri tistih vrednostih R_o za katere izraz pod korenem manjši od nič, sicer sta oba pola realna:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-K_1 \pm \sqrt{K_1^2 - 4K_0} \right) \quad (8.29)$$

Za tretji pol pa smo že predpostavili da ga poznamo:

$$p_3 = -\frac{1}{C_{CB}R_B} \quad (8.30)$$

Vpliv tega pola bi lahko modelirali, če bi enačbo (292) množili z izrazom $(-p_3)/(s - p_3)$. Vendar tretji pol leži na precej visoki frekvenci, kjer je frekvenčni odziv oslavljen za več kot 20 dB, zato pri izračunu odziva na stopnico ne bomo naredili velike napake če p_3 zanemarimo.

Izraza za K_1 (294) in K_0 (295) poenostavimo. Zato jih zapišimo drugače, ter upoštevajmo da je $C_f \approx C_T$, $C_D \gg C_f$, $R_T \gg R_f \gg R_o$, r_o pa prištejmo k R_o :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{C_T R_T} + \frac{1}{C_D R_o} + \frac{1}{C_D R_o} + \frac{1}{C_D R_f} \\ &\approx \frac{1}{C_D} \left[\frac{2}{R_o} + \frac{1}{R_f} \right] \approx \frac{2}{C_D R_o} \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} K_0 &= \frac{1}{C_T R_T R_f (C_D + C_f)} + \frac{1}{C_T R_T (C_D + C_f) R_o} + \frac{1}{C_T R_f (C_D + C_f) R_o} \\ &\approx \frac{1}{C_T R_f (C_D + C_f) R_o} \approx \frac{1}{C_T R_f C_D R_o} \end{aligned} \quad (8.32)$$

S temi približki se vrnimo v (297):

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{C_D R_o} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{C_D R_o}\right)^2 - 4 \frac{1}{C_T R_f C_D R_o}} \right] \\ &= -\frac{1}{C_D R_o} \left[1 \mp j \sqrt{\frac{C_D R_o}{C_T R_f} - 1} \right] \end{aligned} \quad (8.33)$$

Vidimo da sta pola odvisna predvsem od produkta $C_D R_o$, njuna imaginarna vrednost proti realni pa od razmerja pod korenem, $C_D R_o / C_T R_f$. Te relacije so sedaj dovolj preproste da lahko poiščemo residue prenosne funkcije, ki se glasi:

$$F(s) = -G_{DC} \frac{(-p_1)(-p_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (8.34)$$

Frekvenčno neodvisno napako v ojačenju bomo zanemarili in vzeli $G_{DC} \approx 1$. Odziv na stopnico pa zahteva še množenje s transformirano stopnico, $1/s$:

$$G(s) = \frac{1}{s} F(s) = -\frac{(-p_1)(-p_2)}{s(s - p_1)(s - p_2)} \quad (8.35)$$

Ker imamo sedaj tri pole, bomo imeli tudi tri residue.

Opozorimo še enkrat, da bodo predznaki residuov negativni, ker ojačevalnik invertira signal, toda fotodiodo smo obrnili tako, da to kompenziramo, zato bo izhodna napetost sorazmerna vpadni svetlobi in temu ustrezno bomo izrisali tudi graf časovnega odziva na stopnico.

Prvi residuum, ko gre $s \rightarrow 0$, je:

$$\begin{aligned}
 r_0(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{-(-p_1)(-p_2)}{s(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{-(-p_1)(-p_2)}{(s-p_1)(s-p_2)} e^{0t} \\
 &= - \frac{(-p_1)(-p_2)}{(-p_1)(-p_2)} = -1
 \end{aligned} \tag{8.36}$$

Naslednji residuum, ko gre $s \rightarrow p_1$, je:

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= \lim_{s \rightarrow p_1} (s-p_1) \frac{-(-p_1)(-p_2)}{s(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} = \lim_{s \rightarrow p_1} \frac{-(-p_1)(-p_2)}{s(s-p_2)} e^{st} \\
 &= - \frac{p_1 p_2}{p_1(p_1-p_2)} e^{p_1 t} = - \frac{p_2}{p_1-p_2} e^{p_1 t}
 \end{aligned} \tag{8.37}$$

Naj bosta pola $p_1 = \sigma + j\omega$ in $p_2 = \sigma - j\omega$. Sledi:

$$\begin{aligned}
 r_1(t) &= - \frac{\sigma - j\omega}{\sigma + j\omega - \sigma + j\omega} e^{(\sigma + j\omega)t} = - \frac{\sigma - j\omega}{j2\omega} e^{(\sigma + j\omega)t} \\
 &= - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{j\omega} - 1 \right) e^{\sigma t} e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{8.38}$$

In še zadnji residuum, ko gre $s \rightarrow p_2$:

$$\begin{aligned}
 r_2(t) &= \lim_{s \rightarrow p_2} (s-p_2) \frac{-(-p_1)(-p_2)}{s(s-p_1)(s-p_2)} e^{st} = \lim_{s \rightarrow p_2} \frac{-(-p_1)(-p_2)}{s(s-p_1)} e^{st} \\
 &= - \frac{p_1 p_2}{p_2(p_2-p_1)} e^{p_2 t} = - \frac{p_1}{p_2-p_1} e^{p_2 t}
 \end{aligned} \tag{8.39}$$

Ponovno nadomestimo $p_1 = \sigma + j\omega$ in $p_2 = \sigma - j\omega$. Sledi:

$$\begin{aligned}
 r_2(t) &= - \frac{\sigma + j\omega}{\sigma - j\omega - \sigma - j\omega} e^{(\sigma - j\omega)t} = - \frac{\sigma + j\omega}{-j2\omega} e^{(\sigma - j\omega)t} \\
 &= - \frac{1}{2} \left(- \frac{\sigma}{j\omega} - 1 \right) e^{\sigma t} e^{-j\omega t}
 \end{aligned} \tag{8.40}$$

Časovna funkcija $g(t)$ bo vsota vseh residuov funkcije $G(s)$:

$$g(t) = \sum_{k=0}^2 r_k(t) = -1 - \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\sigma}{j\omega} \right) e^{\sigma t} e^{j\omega t} - \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{\sigma}{j\omega} \right) e^{\sigma t} e^{-j\omega t} \tag{8.41}$$

Načeloma bi lahko sedaj namesto σ in ω vpisali komponente polov iz (301), vendar pokažimo še, da bo časovna funkcija vedno realna, pa če so poli in pripadajoči residui realni, ali tvorijo konjugirano-kompleksne pare.

Najprej eksponenta z imaginarno enoto prevedemo po Eulerjevih obrazcih v trigonometrični funkciji:

$$\begin{aligned} e^{jz} &= \cos z + j \sin z \\ e^{-jz} &= \cos z - j \sin z \end{aligned} \quad (8.42)$$

Enačbo (293) lahko potem zapišemo kot:

$$g(t) = -1 + \frac{e^{\sigma t}}{2} \left[\left(1 - \frac{\sigma}{j\omega}\right) (\cos \omega t + j \sin \omega t) + \left(1 + \frac{\sigma}{j\omega}\right) (\cos \omega t - j \sin \omega t) \right] \quad (8.43)$$

To uredimo tako, da faktorje zmnožimo in ustrezno pokrajšamo enake izraze z nasprotnimi predznaki. Tako se bodo pokrajšali $\cos \omega t$ ki množi $(\pm \sigma/j\omega)$, ter 1, ki množi $(\pm j \sin \omega t)$. Tako nam ostane le:

$$g(t) = -1 + \frac{1}{2} e^{\sigma t} \left(\cos \omega t - \frac{\sigma}{j\omega} j \sin \omega t \right) + \frac{1}{2} e^{\sigma t} \left(\cos \omega t - \frac{\sigma}{j\omega} j \sin \omega t \right) \quad (8.44)$$

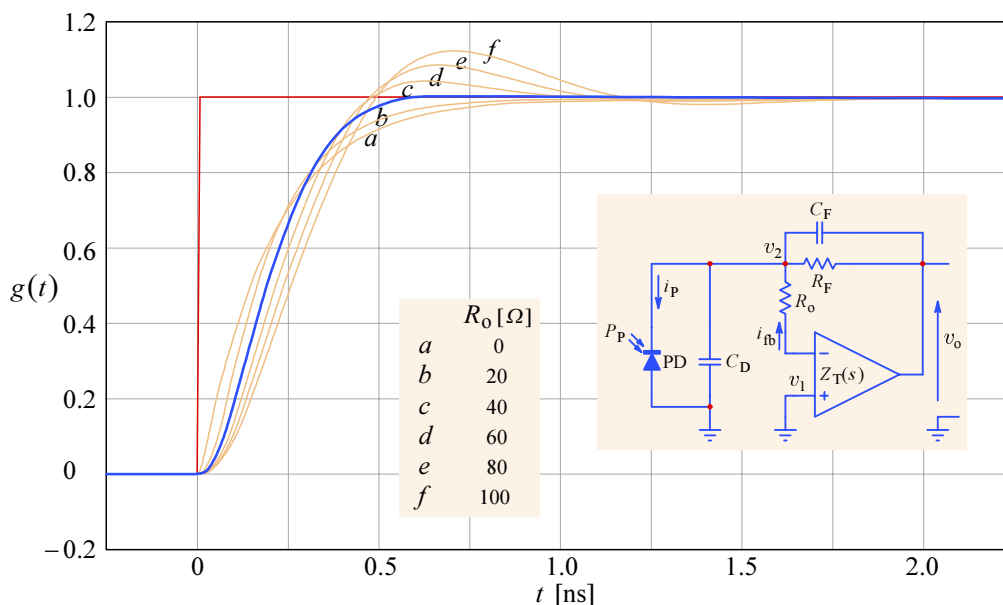
Pokrajšajmo še imaginarne enote in prištejmo polovične izraze v oklepajih. Dobimo:

$$g(t) = -1 + e^{\sigma t} \left(\cos \omega t - \frac{\sigma}{\omega} \sin \omega t \right) \quad (8.45)$$

Funkcija (312) je čisto realna. Vpišimo še namesto σ in ω komponente polov iz (301):

$$\sigma = -\frac{1}{C_D R_o} \quad \omega = -\frac{1}{C_D R_o} \sqrt{\frac{C_D R_o}{C_T R_f} - 1} \quad (8.46)$$

Na [SL.8.8](#) je narisani časovni odziv na stopnico $g(t)$ za enake vrednosti R_o , kot pri frekvenčnem odzivu.



SL.8.8: Odziv na stopnico fotodiodnega ojačevalnika s tokovno povratno zanko za različne vrednosti upornosti R_o . Vrednosti ostalih komponent so: $R_T = 330 \text{ k}\Omega$, $C_T = 0.1 \text{ pF}$, $C_D = 3 \text{ pF}$, $R_f = 1 \text{ k}\Omega$, $C_f = 0.1 \text{ pF}$. Sistem ima najhitrejši vzponski čas (10-90% amplitude) okoli 0.25 ns v primeru (c), $R_o = 40 \Omega$, ko je tudi ovojnična zakasnitev na [SL.8.7](#) maksimalno ravna in v ravnem delu znaša 0.21 ns, to pa je čas prehoda polovice amplitude.

Tako se celotni odziv na stopnico glasi:

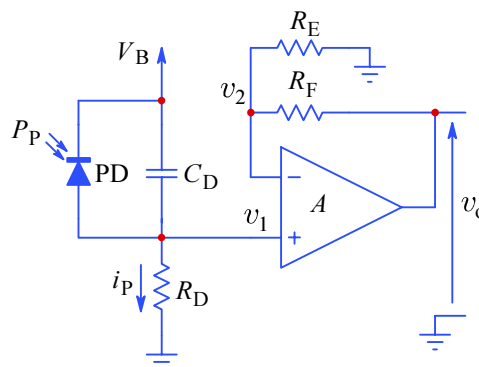
$$g(t) = -1 + e^{-\frac{t}{C_D R_o}} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{C_D R_o}{C_T R_f}}}{C_D R_o} t\right) + \sqrt{1 - \frac{C_D R_o}{C_T R_f}} \sin\left(\frac{\sqrt{1 - \frac{C_D R_o}{C_T R_f}}}{C_D R_o} t\right) \right] \quad (8.47)$$

Spoznali smo da je mogoče ojačevalnik s tokovo povratno zanko uglastiti za optimalni časovni odziv z izbiro upornosti R_o vezani zaporedno invertirajočemu signalnemu vhodu. Toda to je možno le takrat, ko imamo fotodiodo z majhno površino in majhno kapacitivnostjo. V obravnavanem primeru smo imeli fotodiodo SFH203, ki ob zaporni napetosti $-25V$ ima C_D le okoli 3 pF.

8.2. Ojačevalnik CFB s fotodiodo večje kapacitivnosti

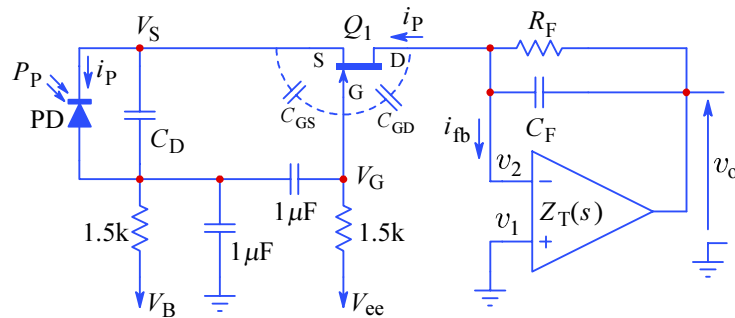
Sprašujemo se kaj lahko naredimo kadar nujno potrebujemo fotodiodo z veliko površino (za večjo svetlobno občutljivost) in hkrati kar se da visoko mejno frekvenco.

Proizvajalci fotodiod v spremni literaturi pogosto priporočajo vezavo kot na [Sl.8.9](#), kjer je fotodioda priključena na breme 50Ω , ojačevalnik pa je v običajni neinvertirajoči vezavi za napetostno ojačenje. Taka vezava je sicer sila preprosta in ne potrebuje nobene posebne optimizacije; vse kar moramo storiti je da izberemo ustrezno hiter in nizkošumni ojačevalnik, bodisi z napetostno, bodisi s tokovno povratno zanko. Žal se pogosto izkaže da taka vezava ni najbolj posrečena iz več razlogov. Najprej, če bi radi ohranili linearnost odziva fotodiode, je nujno izbrati razmeroma majhno upornost bremena R_D , ki je lahko največ $1 k\Omega$, še raje pa 100Ω , ali celo 50Ω ; prav tako zaporna napetost V_B mora biti kar se da velika, zato da sprememba zaradi $i_P R_D$ ne vpliva na linearnost. Velika zaporna napetost je sicer v prid hitrejšemu odzivu, ker zmanjša C_D (3.9). Vendar majhna vrednost R_D poslabša razmerje signal/šum. Poleg tega faktor signalnega ojačenja $G = 1 + R_F/R_E$ v enaki meri ojači tudi šum, ter hkrati še enosmerno napako zaradi temnega toka fotodiode in vhodne napetostne napake (offset) ojačevalnika.



Sl.8.9: Običajni fotodiodni ojačevalnik, po priporočilih nekaterih proizvajalcev fotodiod.

Eno izredno zanimivo možnost nam ponuja vezje na [Sl.8.10](#), kjer spojni FET (jFET) Q_1 loči fotodiodno kapacitivnost od povratne zanke ojačevalnika.



Sl.8.10: Kadar nujno potrebujemo fotodiode z veliko površino, torej tudi z veliko parazitno kapacitivnostjo $C_D > 30$ pF, si lahko pomagamo s tako vezavo. Tranzistor jFET Q_1 deluje z ozemljenimi vrati, zato ima tokovno ojačenje ~ 1 , napetostno ojačenje pa ~ 0 , vendar je njegova bistvena vloga ločiti fotodiodo od povratne zanke ojačevalnika. Ojačevalnik bo tako zaznaval le kapacitivnost ponor-vrata C_{GD} , ki pri jFETih ponavadi znaša ~ 2 pF ali manj. Pomanjkljivost te vezave se kaže pri zelo šibki osvetlitvi fotodiode, ko je tok skozi jFET majhen, in je impedanca izvora razmeroma visoka, zato je fotodioda dodatno obremenjena s kapacitivnostjo vrata-izvor C_{GS} ; pa še transkonduktanca jFETA g_{fs} je pri šibkem toku majhna, zato bo zgornja mejna frekvenca za šibke tokove precej nižja, kot pri večjih tokovih. Če pa nas zanima le hitrost odziva za večje signale, lahko vzporedno fotodiodi dodamo upornost $R_p \approx 100$ k Ω (še raje vir konstantnega toka s še enim enakim jFETom), ki ki drži jFET odprt pri šibkih osvetlitvah, zato se frekvenčna meja z osvetlitvijo ne bo bistveno spreminjala. To sicer povzroči enosmerno napako na izhodu, ki je enaka $R_F V_{GS} / R_p$, a jo je mogoče kompenzirati z upornostjo med ponorom (D) jFETA in pozitivno napajalno napetostjo; žal s tem povečamo šumno ojačenje, zlasti če je vrednost R_F velika.

Ker je kapacitivnost med vrati in ponorom jFETA $C_{GD} \approx 2$ pF, je povratno zanko ojačevalnika razmeroma preprosto ukrotiti. Prav tako kapacitivnost med vrati in izvorom jFETA $C_{GS} \approx 5$ pF ne poveča veliko C_D , kateri je vezana vzporedno, če je le ta že razmeroma velika. Tako bo zgornja mejna frekvenca omejena bolj s fotodiodo samo, kot pa z ojačevalnikom, jFETom, ali ostalimi pasivnimi komponentami.

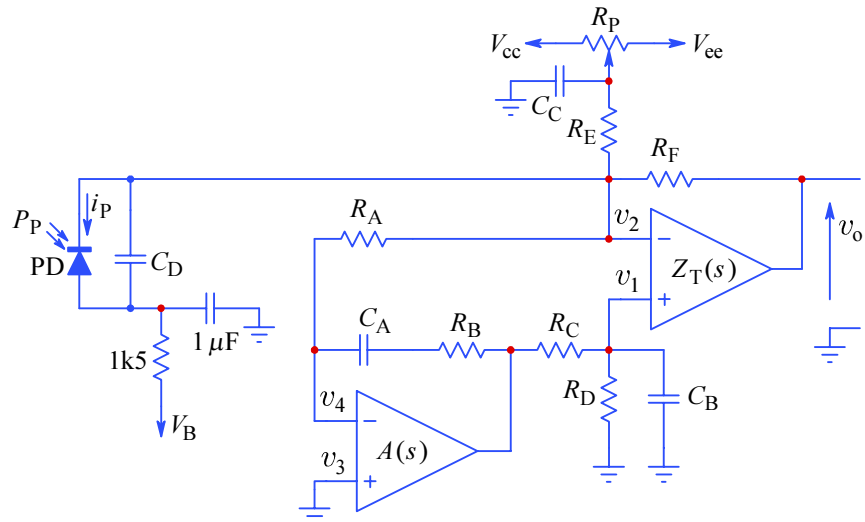
Težave lahko nastopijo ob šibki osvetlitvi, ko je foto-tok majhen in je zato jFET skoraj zaprt. Takrat je impedanca izvora jFETA razmeroma velika (nekaj k Ω), zato do izraza pride kapacitivnost C_{GS} , ki je vzporedna kapacitivnosti fotodiode C_D in nekoliko upočasnji foto-odziv. Poleg tega jFET pri šibkih tokovih, $I_D < 10$ μ A, ima kar 6–8 \times nižjo transkonduktanco g_{fs} , kot ta znaša v območju 100 μ A $< I_D < 2$ mA, zato bo tudi porast toka skozi jFET počasnejši.

Enako vezavo je seveda mogoče uporabiti tudi s klasičnimi ojačevalniki z napetostno povratno zanko, zlasti v primerih ko bi tok invertirajočega vhoda CFB ojačevalnika bil prevelik in bi povzročal večjo enosmerno napako.

8.3. Zmanjšanje enosmerne napake pri CFB ojačevalniku

Zrardi razmeroma velike razlike v vhodni impedanci med invertirajočim in neinvertirajočim vhodom pri ojačevalnikih s tokovno povratno zanko bo fotodiodni ojačevalnik v invertirajoči vezavi pogosto imel na izhodu tudi precejšnjo enosmerno napako. Le ta bo vsota napetostne razlike med obema vhodoma in padca napetosti na upornosti povratne zanke R_F zaradi vhodnega toka invertirajočega vhoda. [Sl.8.11](#) kaže enega od možnih načinov neodvisne kompenzacije napetostne in tokovne enosmerne napake. Tukaj je $Z_T(s)$ ojačevalnik s tokovno povratno zanko, $A(s)$ pa je ojačevalnik z napetostno povratno zanko, ki je lahko razmeroma počasen, vendar mora imeti zelo majhno napetostno napako (denimo, OP-07 katerega $V_{ofs} \approx 10$ μ V,

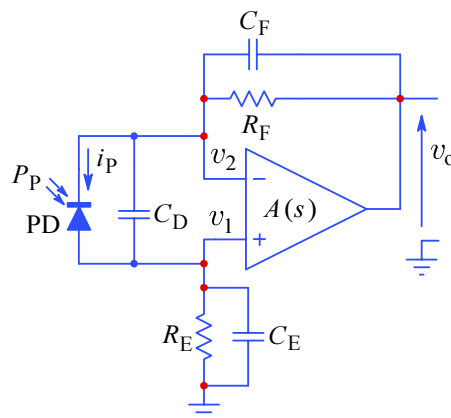
lahko pa uporabimo tudi ICL7650, LTC1150, ali podobni avto-komutacijski ojačevalnik, katerega $V_{ofs} \approx 1 \mu\text{V}$, ali manj). Ta ojačevalnik uporabimo v integratorski vezavi in z njo kompenziramo napetostno napako med vozlišči v_1 in v_2 . S potenciometrom R_P pa potem izničimo še tokovno napako.



Sl.8.11: Zmanjšanje napetostne enosmerne napake CFB ojačevalnika s pomočjo integratorsko vezanega VFB ojačevalnika. Tokovno napako lahko potem odpravimo s potenciometrom.

9. Optimizacija za visoko občutljivost

V dosedanjih obravnavah smo spoznali kako zahteva po večji hitrosti vpliva na pogoje stabilnosti sistema. Zahteva po visoki občutljivosti tudi vpliva na pogoje stabilnosti, toda v manjši meri, pa tudi stabilizirati sistem je bolj preprosto kadar je hitrost odziva drugotnega pomena. Po drugi strani ima visoka občutljivost svoje meje v šumu sistema, čeprav ukrepi, ki so v teh primerih na voljo, delno tudi sovpadajo z zahtevami za večje razmerje signal/šum. Pri obravnavi naslednjega primera bomo izhajali prav iz tega dejstva.



SI.9.1: Sistem z zelo visoko občutljivostjo.

Bistvena razlika med tem vezjem in dosedaj obravnavanimi je v tem, da neinverzirajoči vhod ojačevalnika ni ozemljen, zato vhodni tok i_v teče hkrati skozi imedanco povratne zanke Z_F in impedanco proti zemlji Z_E . Smoter take vezave je v manjši občutljivosti na elektromagnetne motnje, ki se inducirajo hkrati na obeh koncih fotodiode, ojačevalnik pa jih izloči, ker ne ojači skupnega signala, pač pa le razliko. V tem primeru je smiselno impedanci v obeh vejah med seboj izenačiti, torej naj bo $Z_E = Z_F$.

Analiza je v tem primeru preprosta, napetost $v_o - v_2$ mora biti enaka napetosti $v_1 - 0$. Ker pa ojačevalnik skuša doseči ravnovesje $v_2 \approx v_1$, bo izhodna napetost preprosto dvakratnik vhodne napetosti, $v_o = 2v_1$.

Tok fotodiode i_p se deli na tok i_c skozi kapacitivnost C_D in vhodni tok i_v :

$$i_p = i_c + i_v \quad (\text{xx1})$$

in i_c povzroči na fotodiodni kapacitivnosti C_D vhodno napetostno razliko:

$$v_1 - v_2 = i_c \frac{1}{sC_D} \quad (\text{xx2})$$

zato je vhodni tok i_v :

$$i_v = i_p - (v_1 - v_2)sC_D \quad (\text{xx3})$$

Potemtakem je potencial v_1 :

$$v_1 = i_v Z_E \quad (\text{xx4})$$

Taisti vodni tok i_v na impedanci povratne zanke Z_F ustvari potencialno razliko $v_o - v_2$, zato je v_2 :

$$v_2 = v_o - i_v Z_F \quad (\text{xx5})$$

Izhodna napetost v_o je potem, če upoštevamo prenosno funkcijo ojačevalnika, enaka:

$$v_o = v_1 + (v_1 - v_2)A(s) \quad (\text{xx6})$$

kjer bomo za $A(s)$ privzeli enako preprosto enopolno funkcijo, kot v (6.26):

$$A(s) = A_0 \frac{-s_1}{s - s_1} \quad (\text{xx7})$$

Če enačbi (xx4) in (xx5) vstavimo v (xx3) dobimo:

$$i_v = i_P - (i_v Z_E - v_o + i_v Z_F) s C_D \quad (\text{xx8})$$

Iz te relacije lahko eksplicitno izrazimo vhodni tok:

$$i_v = \frac{i_P + v_o s C_D}{1 + (Z_E + Z_F) s C_D} \quad (\text{xx9})$$

To lahko stavimo v (xx4) in (xx5), nato pa še v (xx6):

$$v_o [1 + A(s)] = \frac{i_P + v_o s C_D}{1 + (Z_E + Z_F) s C_D} [Z_E + (Z_E + Z_F) A(s)] \quad (\text{x10})$$

Ločimo koeficiente pri v_o in i_P :

$$v_o \left\{ 1 + A(s) - \frac{s C_D [Z_E + (Z_E + Z_F) A(s)]}{1 + (Z_E + Z_F) s C_D} \right\} = \frac{i_P [Z_E + (Z_E + Z_F) A(s)]}{1 + (Z_E + Z_F) s C_D} \quad (\text{x11})$$

in sedaj lahko izrazimo transimpedančno prenosno funkcijo:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E [1 + (1 + \frac{Z_F}{Z_E}) A(s)]}{[1 + (Z_E + Z_F) s C_D] \left\{ 1 + A(s) - \frac{s C_D [Z_E + (Z_E + Z_F) A(s)]}{1 + (Z_E + Z_F) s C_D} \right\}} \quad (\text{x12})$$

Če izberemo $Z_F = Z_E$:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E [1 + 2A(s)]}{[1 + 2s C_D Z_E] \left\{ 1 + A(s) - \frac{s C_D Z_E [1 + 2A(s)]}{1 + 2Z_E s C_D} \right\}} \quad (\text{x13})$$

Uredimo imenovalc:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E [1 + 2A(s)]}{[1 + 2s C_D Z_E] [1 + A(s)] - s C_D Z_E [1 + 2A(s)]} \quad (\text{x14})$$

in delimo z $[1 + 2A(s)]$:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E}{[1 + 2s C_D Z_E] \frac{1 + A(s)}{1 + 2A(s)} - s C_D Z_E} \quad (\text{x15})$$

Pri frekvencah nižjih od ojačevalnikove prehodne frekvence je $s < A_0 s_1$. Takrat bo ulomek $[1 + A(s)]/[1 + 2A(s)] \approx 1/2$:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E}{[1 + 2sC_D Z_E] \frac{1}{2} - sC_D Z_E} \quad (\text{x16})$$

Frekvenčno odvisni del imenovalca se pokrajša:

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E}{\frac{1}{2} + sC_D Z_E - sC_D Z_E} \quad (\text{x17})$$

in ostane le:

$$\frac{v_o}{i_P} = 2Z_E \quad (\text{x18})$$

Zamenjajmo še Z_E z pripadajočimi komponentami:

$$Z_E = \frac{1}{\frac{1}{R_E} + sC_E} = R_E \frac{\frac{1}{R_E C_E}}{s + \frac{1}{R_E C_E}} \quad (\text{x19})$$

Končno lahko transimpedančno prenosno funkcijo normiramo na vhodno upornost in dobimo prenosno funkcijo prve stopnje:

$$\frac{v_o}{i_P R_E} = 2 \frac{\frac{1}{R_E C_E}}{s + \frac{1}{R_E C_E}} \quad (\text{x20})$$

S tem smo potrdili intuitivno domnevo z začetka obravnave, $v_o = 2v_1$. Pri višjih frekvencah vpliva ojačevalnika ne moremo več zanemariti, takrat je $s > A_0 s_1$, zato je $A(s) < 1$ in je ulomek $\frac{1+A(s)}{1+2A(s)} \approx 1$, posledično pa bo (x15):

$$\frac{v_o}{i_P} = \frac{Z_E}{1 + 2sC_D Z_E - sC_D Z_E} = \frac{Z_E}{1 + sC_D Z_E} \quad (\text{x21})$$

Če ponovno izrazimo Z_E s pripadajočimi komponentami:

$$\frac{v_o}{i_P} = R_E \frac{\frac{1}{R_E C_E}}{s + \frac{1}{R_E C_E}} \cdot \frac{1}{1 + sC_D R_E \frac{\frac{1}{R_E C_E}}{s + \frac{1}{R_E C_E}}} \quad (\text{x22})$$

Transimpedančno prenosno funkcijo spet normiramo na vhodno upornost:

$$\frac{v_o}{i_P R_E} = \frac{\frac{1}{R_E C_E}}{s \left(1 + \frac{C_D}{C_E}\right) + \frac{1}{R_E C_E}} \quad (\text{x23})$$

in delimo s koeficijentom pri s , da dobimo kanonično obliko:

$$\frac{v_o}{i_P R_E} = \frac{\frac{1}{R_E C_E} \cdot \frac{C_E}{(C_E + C_D)}}{s + \frac{1}{R_E C_E} \cdot \frac{C_E}{(C_E + C_D)}} \quad (\text{x24})$$

Pokrajšamo še C_E in ugotovimo da ponovno imamo opravka s funkcijo prve stopnje.

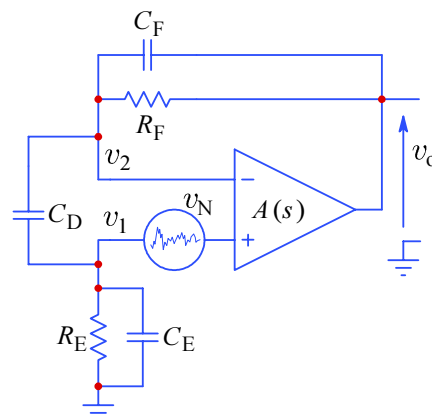
Pol funkcije v tem primeru določa vsota fotodiodne in kompenzacijske kapacitivnosti:

$$\frac{v_o}{i_p R_E} = \frac{\frac{1}{R_E(C_E+C_D)}}{s + \frac{1}{R_E(C_E+C_D)}} \quad (\text{x25})$$

To pomeni da bo v prehodnem območju, ko je $s \approx A_0 s_1$ prenosna funkcija ukrivljena nekoliko bolj kot je to navadna funkcija prve stopnje, kar se odraža na predvsem na faznem prehodu in ovojnični zakasnitvi. Odstopanje pa ni veliko in pride do izraza le če leži sistemski pol v okolici pola določenega z ojačevalnikovo prehodno frekvenco, oziroma $|-1/(R_E C_E)| \approx |A_0 s_1|$. Vendar to ni pogost primer, ker ponavadi želimo pri tem načinu vezave imeti kar se da veliko upornost R_E in R_F . Posledično (če le ni sam ojačevalnik zelo počasen) bo v veliki večini primerov $|-1/(R_E C_E)| < |A_0 s_1|$; takrat veljata prva aproksimacija in prenosna funkcija (x20).

To dejstvo se bo odrazilo tudi na časovnem odzivu na tokovno stopnico, kjer bo to preprosta eksponencialna funkcija:

$$g(t) = \frac{v_o(t)}{i_p(t) R_E} = 2 \left(1 - e^{-\frac{t}{R_E C_E}} \right) \quad (\text{x26})$$



SI.9.2: Enakovredna vhodna šumna napetost za analizo šumnega ojačenja.

Tako kot v prej obravnavanih primerih je tudi tukaj celotna šumna napetost enaka kvadratnemu korenu iz vsote kvadratov napetosti posameznih šumnih virov (tokovna komponenta šuma pri ojačevalnikih, ki imajo na vhodu FETe, je v primerjavi z napetostno komponento zelo majhna in jo lahko zanemarimo). Seveda termično šumno upornost fotodiode in termično upornost jemljemo neposredno, med tem ko šumno napetost ojačevalnika moramo množiti še z šumnim ojačenjem sistema, ki jo izpeljemo skladno z vezavo na [SI.9.2](#).

Enakovredno šumno napetost ojačevalnika v_N dobimo če gostoto napetostnega šumnega spektra e_N (preberemo jo v podatkih izdelovalca ojačevalnika) množimo s korenem iz pasovne širine sistema, le to pa določa pol $p = -1/R_E C_E$ v prenosni funkciji (x20), torej $\Delta f \equiv -p/2\pi$ (ker je spodnja mejna frekvenca enaka nič, DC):

$$v_N = e_N \sqrt{\frac{1}{2\pi R_E C_E}} \quad (\text{x27})$$

Pri določanju funkcije šumnega ojačenja izhajamo iz superpozicije šumnega vira in vhodne napetostne razlike, ki jo množimo ojačenje odprte zanke:

$$v_o = [v_N + (v_1 - v_2)]A(s) \quad (\text{x28})$$

Izhodni tok ojačevalnika (brez bremena) teče v enaki velikosti skozi vse tri impedance v povratni zanki, zato veljata relaciji:

$$\frac{v_o - v_2}{Z_F} = (v_2 - v_1)sC_D \quad (\text{x29})$$

$$(v_2 - v_1)sC_D = \frac{v_1}{Z_E} \quad (\text{x30})$$

Iz (x30) izrazimo v_2 :

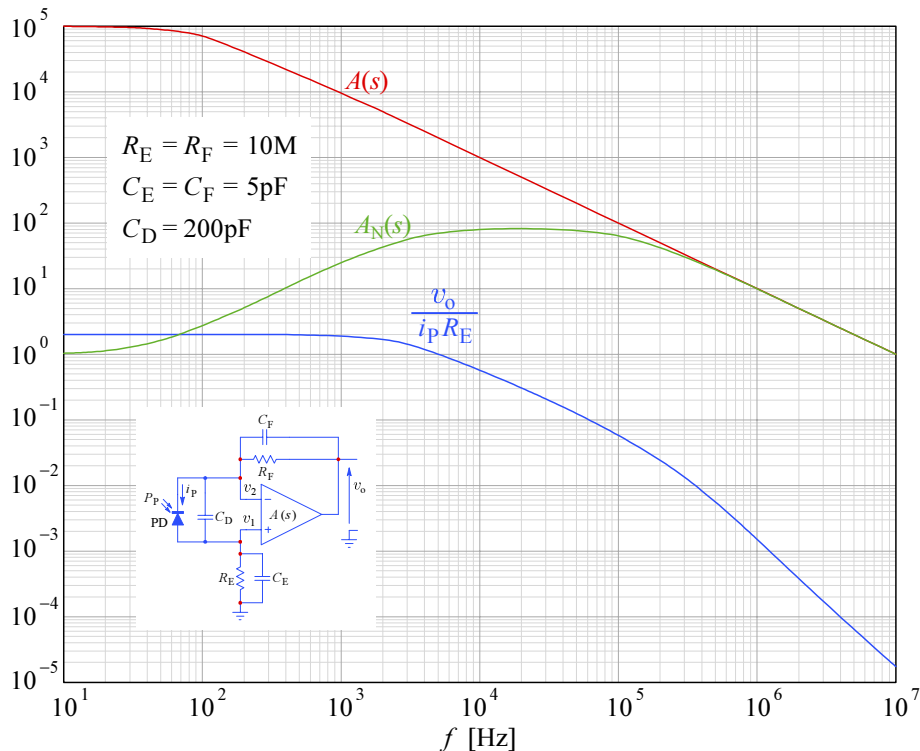
$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{1}{sC_D Z_E} \right) \quad (\text{x31})$$

kar vstavimo v (x29) da dobimo v_1 :

$$v_1 = \frac{v_o}{1 + \frac{Z_F}{Z_E} + \frac{1}{sC_D Z_E}} \quad (\text{x32})$$

Izraza za v_1 in v_2 (x32) in (x31) vstavimo v (x28) in dobimo:

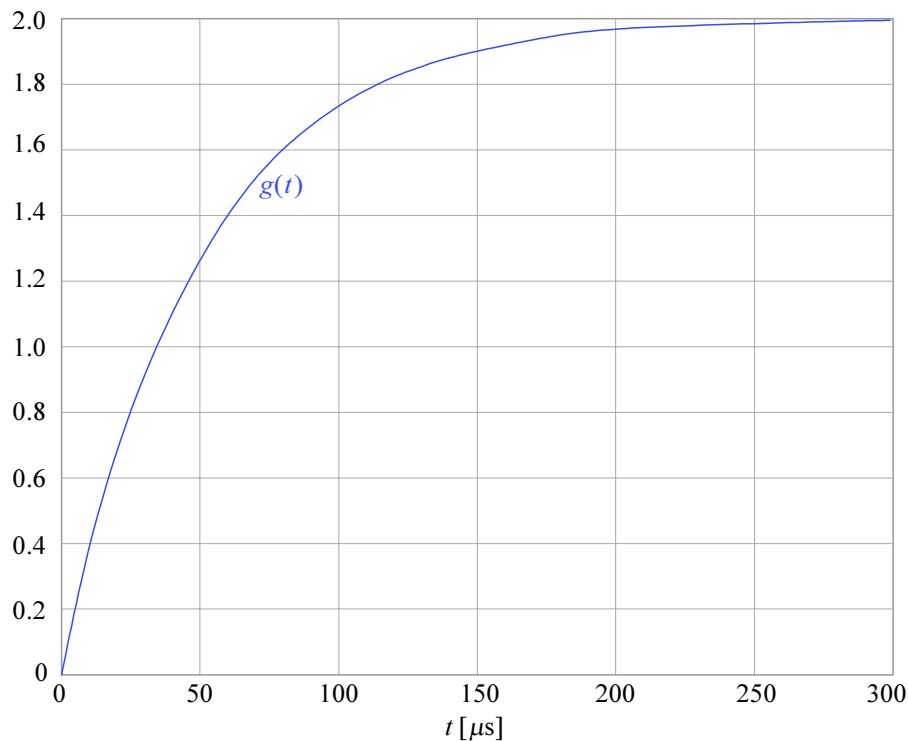
$$\frac{v_o}{v_N} = \frac{1}{\frac{1}{A(s)} - \frac{1}{sC_D(Z_E + Z_F) + 1}} \quad (\text{x33})$$



SI.9.3: Prenosna funkcija $v_o/i_P R_E$, enačba (x15) v primerjavi z ojačenjem odprte zanke $A(s)$, ter s šumnim ojačenjem $A_N(s)$, enačba (x33), za v grafu podane vrednosti komponent. Ker smo prenosno funkcijo normirali na R_E , izkazuje graf ojačenje $2\times$ na nizkih frekvencah, dominantni pol pa je pri $-1/R_E C_E$. Šumno ojačenje začne naraščati pri $1/R_E(C_D + C_E)$, ima maksimum pri $C_D/(1 + 2C_E)$, nakar doseže ojačenje odprte zanke in začne v skladu s tem padati.

Kot je razvidno iz grafov na [Sl.9.3](#), je šumno ojačenje sistema razmeroma veliko, $C_D/(1 + 2C_E)$, in ostaja večje od 1 vse do prehodne frekvence f_T (~ 10 MHz). Zato je taka vezava primerna le kadar je termični šum obeh uporov večji od napetostnega šuma ojačevalnika, pomnoženega s šumim ojačenjem. Vendar sta upora premoščena s pripadajočo kompenzacijsko kapacitivnostjo, zato termični šum uporov nad frekvenco dominantnega pola pada. To pomeni da bo za izpolnitev prejšnjega kriterija potrebno izbrati kar se da velike upornosti. Na srečo, signalno ojačenje narašča premosorazmerno z upornostjo, šum pa s korenom iz upornosti, oziroma še počasneje, zaradi tega ker se z upornostjo spreminja tudi zgornja mejna frekvenca sistema. Na tej podlagi je zato vedno mogoče sistem optimizirati, a če ne gre drugače, še vedno lahko izberemo fotodiodo z manjšo površino in manjšo kapacitivnostjo.

Na [Sl.9.4](#) je narisano odziv sistema na tokovno stopnico po enačbi (x26), ob enakih vrednostih posameznih komponent.



Sl.9.4: Odziv sistema na enotno tokovno stopnico po enačbi (x26), ob enakih vrednostih komponent kot pri frekvenčnem odzivu.

Dodatek A:

Družine polinomov in različni kriteriji optimizacije odziva sistema

Odziv sistema je mogoče optimizirati po različnih kriterijih. V moderni teoriji filterjskih ojačevalnikov poznamo več družin polinomov, katerih matematične lastnosti ustrezajo določenim optimizacijskim kriterijem, ter posledično rezultirajo v posebnih legah polov. Sistem stopnje n , torej tak ki vsebuje n reaktivnih komponent (C ali L), ter n disipativnih (R), ob dani zgornji mejni frekvenci ω_h , lahko razvrstimo v eno od naslednjih glavnih optimalnih družin:

- 1) **Butterworthova** družina je optimalna v smislu maksimalno ravnega frekvenčnega odziva, s tem da je vseh $n - 1$ odvodov frekvenčnega odziva v izhodišču koordinatnega sistema ($\omega = 0$) enako nič: $\partial^n |F(j\omega)| / \partial \omega^n \Big|_{\omega=0} = 0$. Poli te družine ležijo vsi na levi strani kompleksne ravnine, na krogu z radijem, ki je enak pasovni širini sistema ω_h , so razporejeni simetrično (konjugirano-kompleksno) glede na realno os in so razmaknjeni za enake kote.
- 2) **Bessel-Thomsonova** družina je optimalna v smislu maksimalno ravne ovojnične zakasnitve, s tem da je vseh $n - 1$ odvodov ovojnične zakasnitve v izhodišču enako nič: $\partial^n \varphi(\omega) / \partial \omega^n \Big|_{\omega=0} = 0$. Ob maksimalno ravni zakasnitvi gredo vse frekvence v prepustnem pasu skozi sistem enako zakasnjene, s tem se oblika signala (ob določeni ω_h) ohrani. Taki sistemi imajo maksimalno hiter vzponski čas ob minimalnem prenihaju. Poli te družine ležijo na levi strani kompleksne ravnine, na družini elips, katerih bližnje gorišče sovpada z koordinatnim izhodiščem, daljnje gorišče pa leži na pozitivnem delu realne osi.
- 3) **Čebiševljeva** (*Пафнугий Львович Чебышев*, 1821–1894) družina prvega tipa je optimalna v smislu maksimalno strmega poteka frekvenčnega odziva v neposredni okolici zgornje mejne frekvence: $|\partial |F(j\omega)| / \partial \omega \Big|_{\omega=\omega_h} = \max$, toda ob vnaprej določenemu valovitemu odstopanju v prepustnem frekvenčnem pasu za $\pm r$ [dB] ('ripple factor'). Poli te družine ležijo na levi strani kompleksne ravnine na elipsah, katerih gorišči ležita na imaginarni osi, simetrično glede na koordinatno izhodišče.
- 4) **Čebiševljeva** družina drugega tipa (znana tudi kot 'inverzna' Čebiševljeva družina) je optimalna v smislu maksimalno strmega naklona frekvenčnega poteka v zapornem pasu, $|\partial |F(j\omega)| / \partial \omega \Big|_{\omega>\omega_h} = \max$, toda ob vnaprej določenemu valovitemu odstopanju v zapornem pasu za $-r$ [dB]. Poli te družine ležijo na elipsah katerih gorišči ležita na realni osi simetrično glede na koordinatno izhodišče; ničle pa ležijo vse na imaginarni osi, simetrično glede na koordinatno izhodišče.
- 5) **Cauerjeva** (*Wilhelm Cauer*, 1900–1945) družina (znana tudi kot družina 'eliptičnih' filtrov) je kombinacija Čebiševljevih družin, ima maksimalno strm prehod iz prepustnega v zaporni pas, $|\partial |F(j\omega)| / \partial \omega \Big|_{\omega>\omega_h} = \max$, ob vnaprej določenemu valovitemu odstopanju v prepustnem in v zapornem pasu.

Prve tri družine v prenosni funkciji sistema vsebujejo le pole, zadnji dve pa tudi ničle. Strmina frekvenčnega poteka zapornega pasu ($\omega > \omega_h$) narašča z stopnjo n .

Poleg naštetih glavnih družin poznamo še **Gaussove** (več vrst), **Legendreove** (*A.M. Legendre*, 1752–1833), ter različne tipe aproksimacij fazno linearnih sistemov z omejenim odstopanjem ('**Equi-Ripple Linear Phase**'), toda lastnosti teh sistemov so vedno sub-optimalne v primerjavi z eno izmed glavnih družin.

Zgoraj naštetimi optimizacijskimi kriteriji v osnovi definirajo nizko-prepustne sisteme, vendar je enake kriterije mogoče uporabiti tudi za visoko-prepustne, pasovno prepustne in pasovno zaporne sisteme. Algoritmi za pretvorbo iz ene oblike v drugo so razmeroma preprosti, vendar je to bolj zanimivo za splošno teorijo filtrov.

Različni sistemi imajo lahko različna ojačenja in različne mejne frekvence, sistemi različnih stopnje n pa so tudi različno strimi. Zaradi primerjave teh sistemov na enakih osnovah se ponavadi zatekamo naslednji **sistemski standardizaciji**:

- a) **vsi sistemi naj imajo vrednosti polov normirane na zgornjo mejno kotno frekvenco enopolnega sistema, ω_h , ki naj bo 1 radian na sekundo (kar je enakovredno krožni frekvenci $f_h = 1/2\pi$ [Hz]).**
- b) **vsi sistemi naj imajo ojačenje enosmernega (DC, $\omega = 0$) toka ali napetosti normirano na enoto, $A_0 = 1$.**

Seveda, za normirane sisteme lahko izračunamo le medsebojna razmerja posameznih komponent vezja; dejanske vrednosti dobimo šele, če pole pomnožimo z dejansko zgornjo mejno frekvenco in ojačenje z dejanskim ojačenjem. Za določen frekvenčni potek lahko sicer izberemo kakršne koli vrednosti komponent, le produkti RC , ali L/R , morajo ustrezati zahtevani legi polov. V praksi pa je treba upoštevati, da tranzistorji ne zmorejo poljubno velikih tokov in napetosti, zato je nujno pasivne komponente dimenzionirati na ustrezne napetostno-tokovne razmere. Poleg tega je treba imeti v mislih razsejane in parazitne impedance, ki so posledica medsebojnih povezav komponent, geometrije, ter nekaterih materialnih lastnosti (na primer dielektričnost izolacijskega materiala, na katerem je vezje zgrajeno), zato izbrane impedance ne smejo biti previsoke, če naj se izognemo vplivu neželenih impedanc.

Izpeljali bomo pole le za Butterworthovo in Bessel-Thomsonovo družino, ker sta le ti primerni za fotodiodne ojačevalnike.

A1: Butterworthova družina

Pole Butterworthove družine izpeljemo lahko iz izraza za kvadrirano magnitudo frekvenčnega odziva sistema stopnje n :

$$|G_n(s)|^2 = \frac{1}{1 + (s^2)^n} = G_n(s) \cdot G_n(-s) \quad (\text{A.1})$$

To je sistem s samimi poli; teh je $2n$, ker gre $|G_n(s)|^2 \rightarrow \infty$ kadar je:

$$1 + s^{2n} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Koreni enačbe (A.2) so:

$$s = \sqrt[2n]{-1} \quad (\text{A.3})$$

Izraz (A.3) razrešimo s pomočjo znamenitih *de Moivrejevih* (*Abraham de Moivre*, 1667–1754) formul, ki povezujejo kompleksna števila s trigonometrijskimi relacijami:

$$-1 = \cos(1 + 2q)\pi + j \sin(1 + 2q)\pi \Big|_{q=0,1,\dots,2n-1} \quad (\text{A.4})$$

Od tod sledi:

$$\sqrt[2n]{-1} = \cos \frac{(1 + 2q)\pi}{2n} + j \sin \frac{(1 + 2q)\pi}{2n} \Big|_{q=0,1,\dots,2n-1} \quad (\text{A.5})$$

Vse te rešitve ležijo v kompleksni ravnini na krogu z enotnim radijem, katerega center sovпада z koordinatnim izhodiščem. Žal tukaj nismo bili srečne roke pri izbiri parametra q : že pri $n = 1$ (in $q = 0$) imamo $\cos(\pi/2) = 0$ in $\sin(\pi/2) = 1$, kar pomeni da je pol čisto imaginaren, namesto realen. Enako se zgodi pri $n > 1$, če je $1 + 2q = n$, ali $1 + 2q = 3n$. Fizikalno nam negativna realna os pomeni izgubo energije skozi toplotno disipacijo na uporu. Par polov na sami imaginarni osi tako ne bi imel nobenega dušenja in bi povzročil nestabilnost sistema.

Čisto imaginarnim polom se lahko izognemo, če sinusno-cosinusne izraze množimo z imaginarno enoto j , in tako zavrtimo lego polov za $\pi/2$; tudi taki poli so rešitve enačbe D.1. Poleg tega bi radi pole šteli od 1 do n , namesto od 0 do $n - 1$. Zato bomo naredili zamenjavo $k = q + 1$, in dobili:

$$s_k = \sigma_k + j\omega_k = -\sin \frac{(2k - 1)\pi}{2n} + j \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2n} \Big|_{k=1,2,\dots,n} \quad (\text{A.6})$$

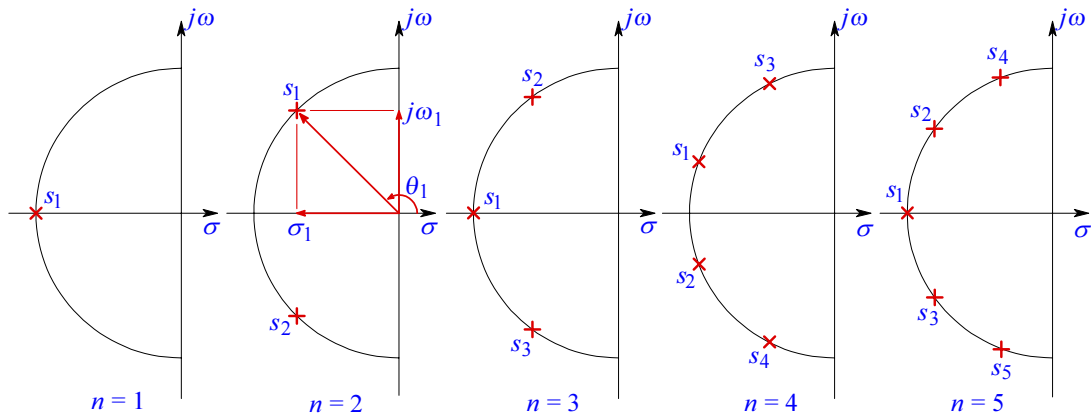
To lahko zapišemo tudi v Eulerjevi obliki:

$$s_k = e^{j\pi \frac{1 + \frac{2k-1}{n}}{2}} \Big|_{k=1,2,\dots,n} \quad (\text{A.7})$$

Tabela A1: Butterworthovi poli za prvih pet stopenj

Stopnja n	σ [rad/s]	ω [rad/s]	θ [°]
1	-1.0000	0.0000	180
2	-0.7071	± 0.7071	180 ∓ 45.0000
3	-1.0000 -0.5000	0.0000 ± 0.8660	180 180 ∓ 60.0000
4	-0.9239 -0.3827	± 0.3827 ± 0.9239	180 ∓ 21.5000 180 ∓ 67.5000
5	-1.0000 -0.8090 -0.3090	0.0000 ± 0.5878 ± 0.9511	180 180 ∓ 36.0000 180 ∓ 72.0000

Lege polov v kompleksni ravnini na osnovi Tabele A1 in enačb (A.6) in (A.7) za prvih pet sistemov so narisane na [Sl.A1](#).



Sl.A1: Lega Butterworthovih polov za prvih pet polinomskih stopenj

Stabilnost sistema sicer določa Nyquistov kriterij (na frekvencah kjer je ojačenje sistema > 1 , fazni zasuk ne sme biti večji od 270°), bolj splošno pa Routh–Hurwitzova (*Edward J. Routh*, 1831–1907, *Adolf Hurwitz*, 1859–1919) zahteva: karakteristični polinom sistema je polinom Hurwitzovega tipa le, če so koeficijenti pri vseh potencah neodvinsne spremenljivke (od s^n do s^0) večji od nič (realni in pozitivni). Tak polinom ima vse pole v levem delu kompleksne ravnine, zato pri $|G_n(s)|^2$ moramo n polov v levem delu kompleksne ravnine pripisati $G(s)$, preostalih n polov na desni strani kompleksne ravnine pa pripada $G(-s)$.

Prenosna funkcija (A.1) izražena s poli s_k bi lahko imela obliko:

$$G(s) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)} \quad (\text{A.8})$$

toda ojačenje tako izražene prenosne funkcije pada z večanjem reda n . Če izrazimo $G(s)$ za $s = 0$, dobimo:

$$G(0) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (-s_k)} \quad (\text{A.9})$$

Z deljenjem $G(s)/G(0)$ dobimo normirano funkcijo $F(s)$, katere ojačenje je $A_0 = 1$, neodvisno od stopnje n :

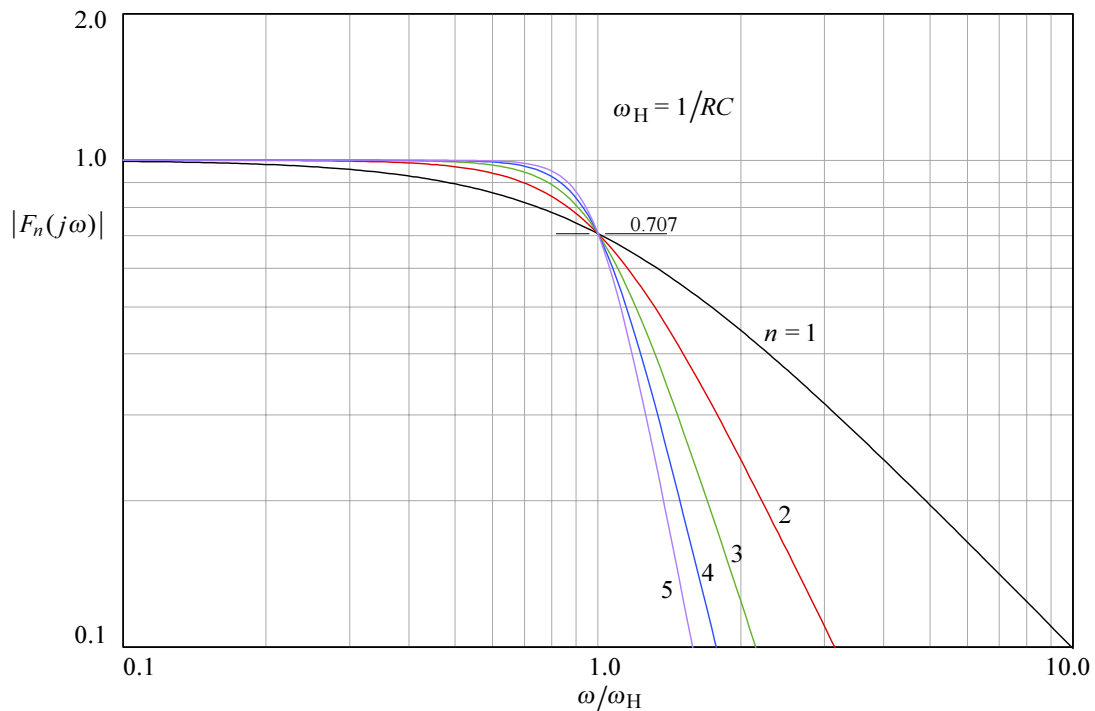
$$F(s) = \frac{G(s)}{G(0)} = \prod_{k=1}^n \frac{(-s_k)}{(s - s_k)} \quad (\text{A.10})$$

Produkt polov v števcu določa zgornjo mejno frekvenco sistema ω_h , a to je lastnost le Butterworthovih polov (pri ostalih družinah le za $n = 2$):

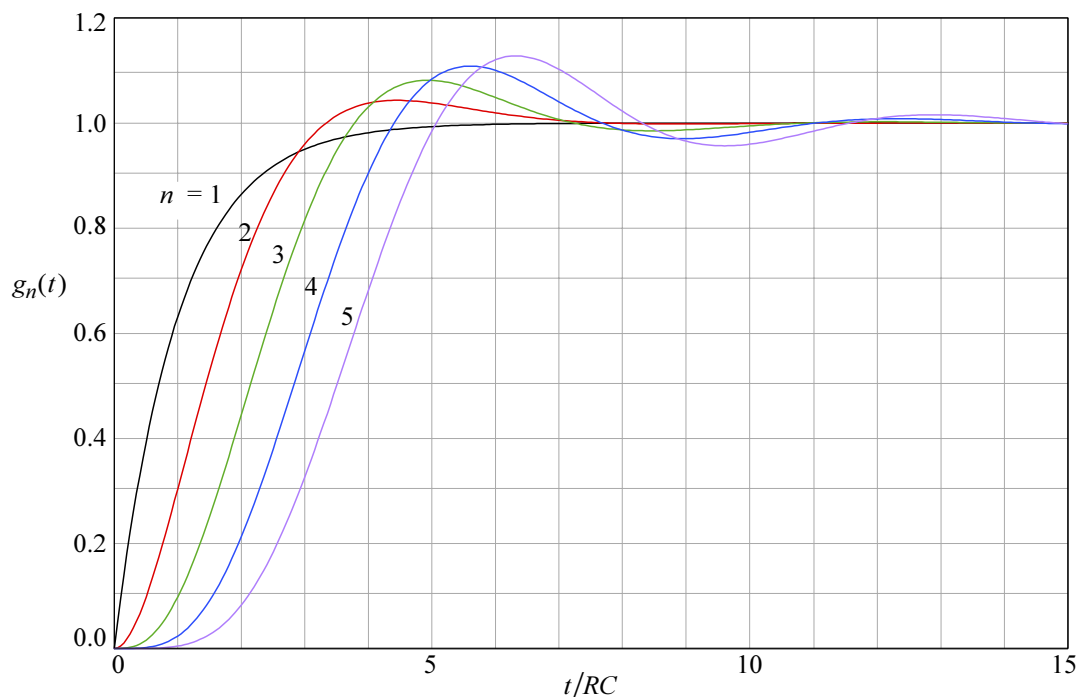
$$\omega_h = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (-s_k)} \quad (\text{A.11})$$

Zaradi lege vseh polov na enotnem krogu, $|s_k| = 1$, je Butterworthov sistem popolnoma določen že s samo stopnjo n , in je za vsak n normiran na isto zgornjo mejno frekvenco $\omega_h = 1$, in ima na tej frekvenci polovično moč:

$$F(j1)F(-j1) = F^2(1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |F(1)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.12})$$



SLA2: Magnituda frekvenčnega odziva Butterworthovih sistemov za prvih pet stopenj, na osnovi enačbe A.10. Mejna frekvenca in nizkofrekvenčno ojačenje sta neodvisna od stopnje n .



SLA3: Odziv na stopnico Butterworthovih sistemov za prvih pet stopenj n .

A2: Bessel-Thomsonova družina

Pole Bessel–Thomsonove družine izpeljemo na osnovi zahteve po enotni ovojnici zakasnitvi. V kompleksni ravnini sistem z časovno zakasnitvijo T lahko izrazimo kot:

$$F(s) = e^{-sT} \quad (\text{A.13})$$

Ta izraz najprej normiramo na enotno zakasnitev, $T = 1$. Nato lahko e^{-s} aproksimiramo s polinomom stopnje n . Toda če to naredimo z uporabo Taylorjeve vrste (*Brook Taylor*, 1685–1731), polinomi za $n > 2$ ne bodo Hurwitzovega tipa. Če pa e^{-s} izrazimo s hipربولičnimi funkcijami:

$$e^{-s} = \frac{1}{\sinh s + \cosh s} = \frac{\frac{1}{\sinh s}}{1 + \frac{\cosh s}{\sinh s}} \quad (\text{A.14})$$

bo Taylorjeva vrsta za hipربولični sinus imela lihe potence s , vrsta za hipربولični cosinus pa bo imela sode potence s ; ulomek teh polinomov, z uporabo verižnih ulomkov, bo polinom Hurwitzovega tipa. Če verižne ulomke okrnimo pri n -tem členu, dobimo Bessel–Thomsonov sistem stopnje n :

$$F(s) = \frac{c_0}{B_n(s)} \quad (\text{A.15})$$

kjer je $B_n(s)$ Besselov polinom stopnje n :

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n c_k s^k \quad (\text{A.16})$$

v katerem vsak $B_n(s)$ ustreza eni od sledečih relacij:

$$\begin{aligned} B_0(s) &= 1 \\ B_1(s) &= s + 1 \\ B_n(s) &= (2n - 1)B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Obrazec za določanje koeficientov c_k za splošno obliko polinoma stopnje n je:

$$c_k = \frac{(2n - k)!}{2^{(n-k)} k! (n - k)!} \Big|_{k=0, 1, 2, \dots, n-1, n} \quad (\text{A.18})$$

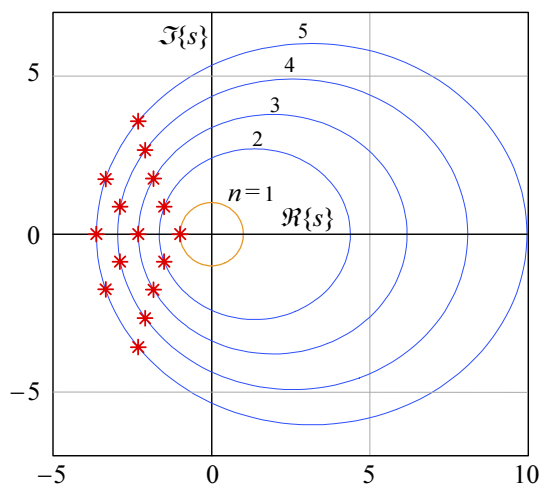
Iz teh koeficientov lahko izračunamo pole po standardnih obrazcih, ki jih lahko najdemo v vsakem matematičnem priročniku; vrednosti za $n = 1 \dots 5$ so navedene v [Tabeli A2](#). Žal analitične rešitve obstajajo le za $n \leq 4$, kot je to dokazal že E. Galois leta 1830. Za $n \geq 5$ pa moramo uporabiti numerične metode. Na srečo imamo pri ojačevalnikih opravka s sistemi, ki so pretežno druge ali tretje stopnje, in le izjemoma četrte ali višje.

Bessel–Thomsonovi poli ležijo na levi strani kompleksne ravnine na družini elips, katerih bližji fokus sovпада z koordinatnim izhodiščem, drugi fokus pa leži na

pozitivnem delu realne osi. Lega polov v kompleksni ravnini kaže [Sl.A4](#). Tako izračunani sistemi predstavljajo družino z enotno ovojnično zakasnitvijo. Posledično se pasovna širina sistemov z večanjem stopnje n tudi povečuje.

Tabela A2: Bessel-Thomsonovi poli (enotna ovojnična zakasnitev)

Stopnja n	σ [rad/s]	ω [rad/s]	θ [°]
1	-1.0000	0.0000	180
2	-1.5000	± 0.8660	180 ∓ 30.0000
3	-2.3222 -1.8389	0.0000 ± 1.7544	180 180 ∓ 43.6525
4	-2.8962 -2.1038	± 0.8672 ± 2.6574	180 ∓ 16.6697 180 ∓ 51.6325
5	-3.6467 -3.3520 -2.3247	0.0000 ± 1.7427 ± 3.7510	180 180 ∓ 27.4696 180 ∓ 56.9366



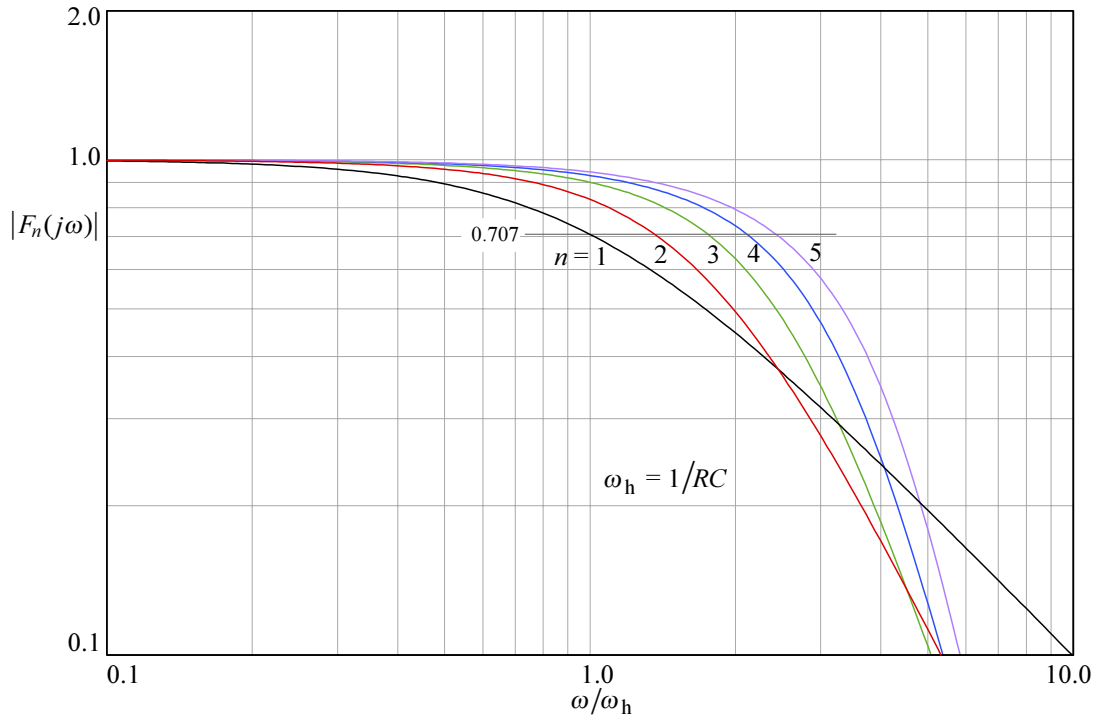
Sl.A4: Lega Bessel-Thomsonovih polov za prvih pet polinomskih stopenj n .

Za razliko od Butterworthovih polov, kjer je pasovna širina sistema n -te stopnje enaka bodisi n -temu korenu iz produkta vseh n polov, bodisi absolutni vrednosti katerega koli posamičnega pola, in je neodvisna od stopnje n , pri Besselovih polih se pasovna širina povečuje s stopnjo n . Povečanje pasovne širine ω_H sistema stopnje n v primerjavi s pasovno širino ω_h sistema prve stopnje ($n = 1$) izražamo s faktorjem $\eta_b = \omega_H/\omega_h$. Vrednosti za prvih 5 stopenj so navedene v [Tabeli A3](#):

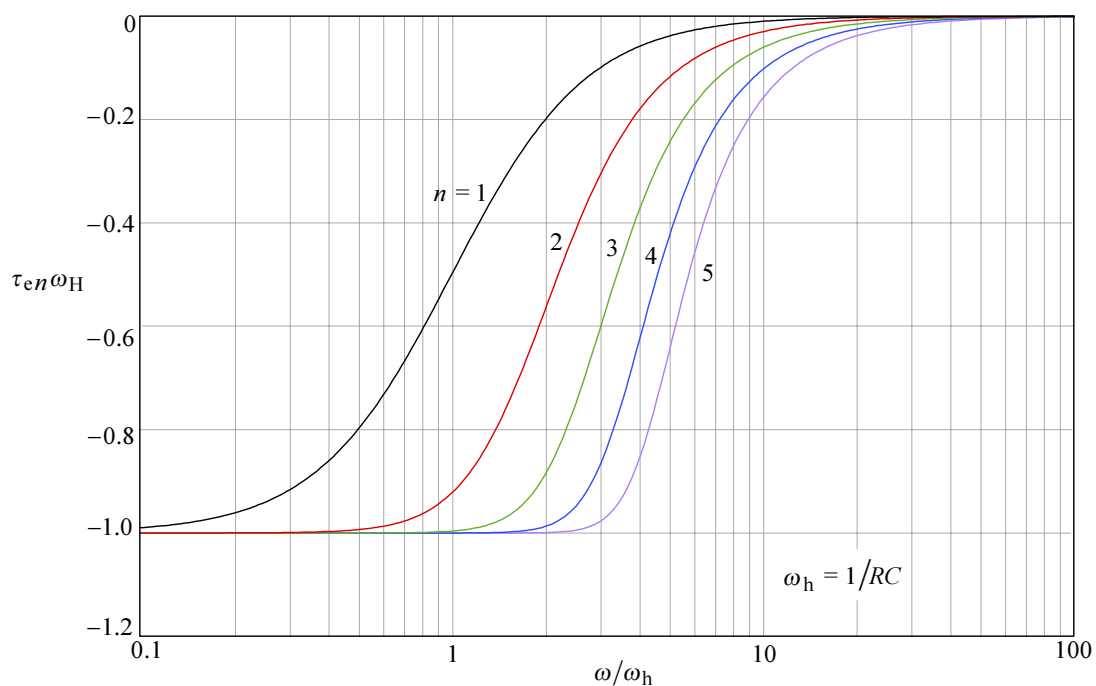
Tabela A3: Relativna pasovna širina večpolnih Besselovih sistemov

n	1	2	3	4	5
η_b	1.00	1.36	1.75	2.12	2.42

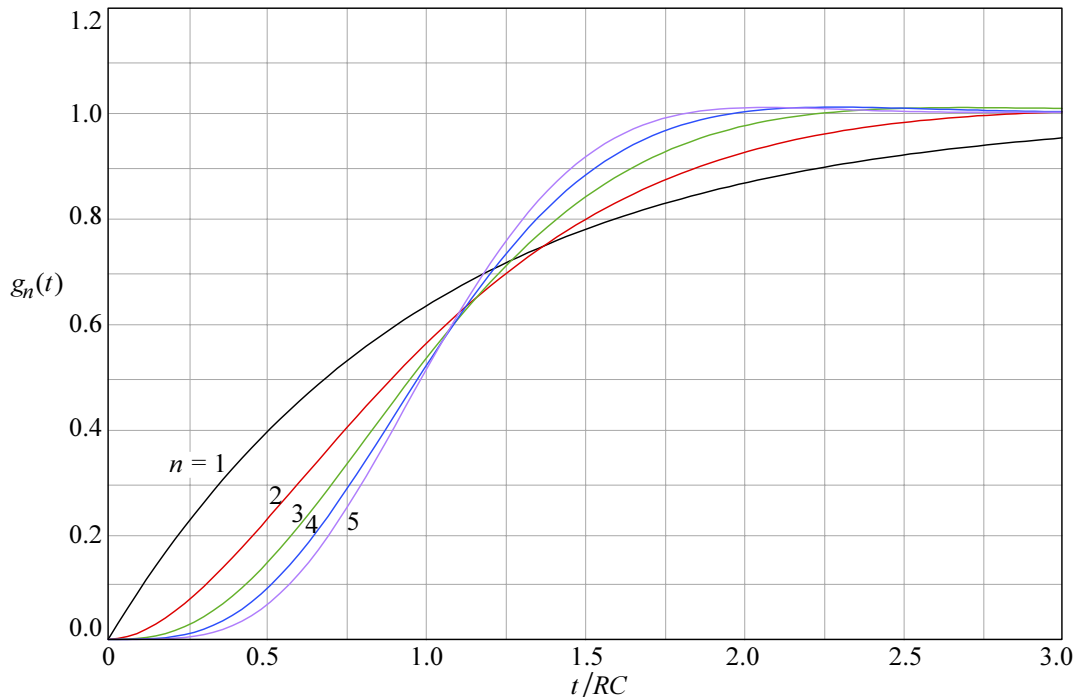
Na podlagi vrednosti normiranih polov druge stopnje, $s_{a,b} = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$, bi napačno sklepali da je pasovna širina $\omega_{H2} = \sqrt{s_a s_b} = 1.7321$, dejansko pa je njena vrednost, izračunana iz magnitude frekvenčnega odziva le 1.36. Skratka, analitičnega izraza za pasovno širino sistema z Besselovimi poli ni. Rezultat dobimo le numerično.



SLD5: Magnituda frekvenčnega odziva Besselovih sistemov za prvih pet polinomskih stopenj. Z večanjem stopnje polinoma zgornja mejna frekvenca narašča. To je posledica dejstva da smo za izračun polov izhajali iz enotne ovojnične zakasnitve.



SLD6: Ovojnična zakasnitev Besselovih sistemov za prvih pet polinomskih stopenj n . Vsi sistemi imajo enako nizkofrekvenčno zakasnitev, iz česar smo pri izpeljavi polov tudi izhajali.



Sl.D7: Odziv na stopnico Besselovih sistemov za prvih pet polinomskih stopenj n . Opazimo kako se z večanjem stopnje polinoma zakasnitev odziva na polovični amplitudi hirta približuje normirani časovni enoti $t/RC = 1$. Oziroma obratno, amplituda pri $t/RC = 1$ pada z vrednosti $1/e \approx 0.63$ za $n = 1$ proti vrednosti 0.5. Prav tako se z večanjem stopnje n skrajšuje vzponski čas (čas med 10% in 90% končne vrednosti odziva). Toda prenehaj nad končno vrednost je skoraj konstanten in manjši od 0.5% končne vrednosti za vse stopnje.

Bessel-Thomsonove pole lahko normiramo še na dva načina. S prvim načinom asimptoto frekvenčnega poteka na visokih frekvencah ($\omega > \omega_h$) naredimo enako asimptoti Butterworthovega sistema enake stopnje. Če naj ω_a postane nova zgornja mejna frekvenca, lako zapišemo:

$$\left| F(\omega_a) \right| = \frac{c_0}{2\omega_a^n} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \omega_a = c_0^{1/n} \quad (\text{A.19})$$

Če korene $B_n(s)$ zdelimo z $c_0^{1/n}$, bo ovojnična zakasnitev enaka $c_0^{1/n}$, namesto 1; posledično se bo pasovna širina sistema zmanjševala s povečanjem stopnje n .

Z drugim načinom normiramo pasovno širino na 1 rad/s za katero koli stopnjo n , tako kot pri Butterworthovi družini. Žal pa za ta postopek ne obstaja preprosta analitična relacija, pač pa je potrebno rezultat poiskati numerično: če pole množimo rekurzivno s ustreznim korekcijskim faktorjem, ki je sorazmeren ulomku prvotne in nove pasovne širine, dosežemo zadovoljivo natančnost že v nekaj korakih.

Dodatek B:

Splošne rešitve polinomov 1., 2., 3. in 4. stopnje

Polinom 1. stopnje: $ax + b = 0$

Kanonična oblika: $x + \frac{b}{a} = 0$

Rešitev: $x = -\frac{b}{a}$

Polinom 2. stopnje: $ax^2 + bx + c = 0$

Kanonična oblika: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Rešitev: $x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Polinom 3. stopnje: $px^3 + qx^2 + rx + s = 0$

Kanonična oblika: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

kjer so koeficijenti: $a = \frac{q}{p}, \quad b = \frac{r}{p}, \quad c = \frac{s}{p}$

Rešitve:

Polinomska diskriminanta:

$$D = -4a^3c + a^2b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2$$

Skupni faktor:

$$M = \sqrt[3]{-2a^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{-D} + 9ab - 27c}$$

Koreni:

$$x_3 = -\frac{a}{3} + \frac{M}{3\sqrt[3]{2}} - \frac{\sqrt[3]{2}(3b - a^2)}{3M}$$

$$x_2 = -\frac{a}{3} - \frac{(1 - j\sqrt{3})M}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{(1 + j\sqrt{3})(3b - a^2)}{3\sqrt[3]{2^2}M}$$

$$x_1 = -\frac{a}{3} - \frac{(1 + j\sqrt{3})M}{6\sqrt[3]{2}} + \frac{(1 - j\sqrt{3})(3b - a^2)}{3\sqrt[3]{2^2}M}$$

Če zamenjamo:

$$K = \sqrt{a^2 - 3b}$$

$$M = 4a^3c - a^2b^2 - 18abc + 4b^3 + 27c^2$$

$$N = 2a^3 - 9ab + 27c$$

je realna rešitev:

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{2}{3} K \sin \frac{\arctan \frac{jN}{3\sqrt{3M}}}{3}$$

in dve konjugirano-kompleksni rešitvi sta:

$$x_2 = -\frac{a}{3} + K \sin \frac{\arctan \frac{jN}{3\sqrt{3M}}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} K \cos \frac{\arctan \frac{jN}{3\sqrt{3M}}}{3}$$

$$x_1 = -\frac{a}{3} + K \sin \frac{\arctan \frac{jN}{3\sqrt{3M}}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} K \cos \frac{\arctan \frac{jN}{3\sqrt{3M}}}{3}$$

Opomba: na voljo so tudi čisto algebrske (ne-trigonometrične) rešitve, dosegljive, med drugim, tudi znotraj programa Matlab, v.5.3 for Students (The MathWorks, Inc., <<http://www.mathworks.com>>). Ukazne vrstice so preproste:

```
syms x a b c      % define x, a, b and c as symbols
r = solve( x^3 + a*x^2 + b*x + c ) ;
```

Realna rešitev je:

$$r(1) = \frac{1}{6} \frac{(36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} - 6(1/3b - 1/9a^2) / (36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} - 1/3a}$$

in konjugirano-kompleksni rešitvi sta:

$$r(2) = \frac{-1}{12} \frac{(36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} + 3(1/3b - 1/9a^2) / (36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} - 1/3a + 1/2i \cdot 3^{1/2}}{(1/6) \frac{(36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} + 6(1/3b - 1/9a^2) / (36ab - 108c - 8a^3 + 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54bca + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2})^{1/3} + 1/3a}$$

$$\begin{aligned}
 & (12*b^3-3*b^2*a^2-54*b*c*a+81*c^2+12*c*a^3)^{(1/2)} \\
 &)^{(1/3)} \\
 &) \\
 r(3) = & \\
 & -1/12* \\
 & (36*a*b-108*c-8*a^3+12* \\
 & (12*b^3-3*b^2*a^2-54*b*c*a+81*c^2+12*c*a^3)^{(1/2)} \\
 &)^{(1/3)} + \\
 & 3*(1/3*b-1/9*a^2) / \\
 & (36*a*b-108*c-8*a^3+12* \\
 & (12*b^3-3*b^2*a^2-54*b*c*a+81*c^2+12*c*a^3)^{(1/2)} \\
 &)^{(1/3)} - \\
 & 1/3*a-1/2*i*3^{(1/2)} * \\
 & (1/6* \\
 & (36*a*b-108*c-8*a^3+12* \\
 & (12*b^3-3*b^2*a^2-54*b*c*a+81*c^2+12*c*a^3)^{(1/2)} \\
 &)^{(1/3)} + \\
 & 6*(1/3*b-1/9*a^2) / \\
 & (36*a*b-108*c-8*a^3+12* \\
 & (12*b^3-3*b^2*a^2-54*b*c*a+81*c^2+12*c*a^3)^{(1/2)} \\
 &)^{(1/3)} \\
 &)
 \end{aligned}$$

$$K = 36ab - 108c - 8a^3$$

$$M = 12(12b^3 - 3b^2a^2 - 54abc + 81c^2 + 12ca^3)^{1/2}$$

$$N = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}$$

$$r_3 = -\frac{a}{3} + \frac{1}{6}[K + M]^{1/3} - 6\frac{N}{[K+M]^{1/3}}$$

$$r_2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{12}[K + M]^{1/3} + 3\frac{N}{[K+M]^{1/3}} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left[\frac{1}{6}(K + M)\right]^{1/3} + 6\frac{N}{[K+M]^{1/3}}\right\}$$

$$r_1 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{12}[K + M]^{1/3} + 3\frac{N}{[K+M]^{1/3}} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\left\{\left[\frac{1}{6}(K + M)\right]^{1/3} + 6\frac{N}{[K+M]^{1/3}}\right\}$$

Polinom 4. stopnje, kanonična oblika:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Rešitve:

Koreni so identični korenom dveh enačb 2. stopnje:

$$x^2 + (a + A)\frac{x}{2} + \left(y + \frac{ay - c}{A}\right) = 0$$

kjer je:

$$A = \pm \sqrt{8y + a^2 - 4b}$$

in y je kateri koli realni koren enačbe 3. stopnje:

$$8y^3 - 4by + (2ac - 8d)y + d(4b - a^2) - c^2 = 0$$

Francoski matematik *Evariste Galois* (1811-1832) je dokazal da rešitev polinomov 5. stopnje in višjih stopenj ni mogoče zapisati v čisto algebrski obliki, kot racionalne funkcije polinomskih koeficijentov.

Numerične rešitve pa seveda obstajajo in jih je mogoče najti z uporabo numeričnih metod znotraj namenskih matematičnih programov, kot je, denimo, Mathematica (Wolfram Research, Inc.), ali že omenjeni Matlab (uporabniki Matlabla lahko preskusijo rutino z imenom ROOTS za iskanje korenov polinoma iz znanih koeficijentov, ter inverzno rutino POLY za iskanje koeficijentov polinoma iz znanih korenov).

Viri in povezave:

[1]

[2]

[3]

[4]

[5]

[6]

[7]

[8]

[9]

[10]

[11]

[12]

Indeks