1 Žarkovna optika

Na nabit delec, ki se giblje v EM polju, deluje Lorentzova sila:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

To zapišemo v kartezičnih koordinatah $\vec{r} = (x, y, z) = (x(z), y(z), z)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= e(\vec{E}_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) && (2)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= e(\vec{E}_y + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z) && (3)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= e(\vec{E}_z + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x) && (4)
\end{aligned}$$

ali pa v cilindričnih koordinatah $\vec{r} = (r, \theta, z) = (r(s), \theta(s), z(s))$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 &= e(\vec{E}_r + \dot{r}\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta) && (5)\\
\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= e(\vec{E}_\theta + \dot{z}B_r - \dot{r}B_z) && (6)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= e(\vec{E}_z + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) && (7)
\end{aligned}$$

Primeri

1. Homogeno električno polje (npr. v linearnem pospeševalniku)

$$E_y = E_x = \vec{B} = 0; \quad E_z \neq 0$$

2. Homogeno magnetno polje (npr. v cikličnem pospeševalniku)

$$B_\theta = B_r = \vec{E} = 0; \quad B_z \neq 0$$

Iz enačbe 5 dobimo izraz za **ciklotronsko frekvenco** $\omega \equiv \dot{\theta} = -\frac{eB_z}{m}$

3. Gibanje v aksialni smeri v nehomogenem magnetnem polju

$$B_z = B_z(r) \quad B_r \neq 0 \quad \& \quad B_r \ll B_z \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

Iz enačbe 7 sledi

$$\ddot{z} + n\omega^2 z = 0, \tag{10}$$

kjer smo definirali indeks polja n kot

$$n \equiv -\frac{r}{B_z}\frac{\partial B_z}{\partial r} \tag{11}$$

Rešitve:

- $n > 0$ - radialno padajoče polje. Dobimo aksialne betatronske oscilacije s frekvenco $\omega_z = \omega\sqrt{n}$:

$$z = C\cos\omega t + S\sin\omega t \tag{12}$$

- $n < 0$ - radialno naraščajoče polje. Dobimo aksialno nestabilno gibanje

$$z = C\,\mathrm{ch}\,\omega t + S\,\mathrm{sh}\,\omega t \tag{13}$$

Za konstantno obodno hitrost $v = \omega r = \frac{ds}{dt} = konst.$ lahko časovne odvode izrazimo z odvodom po parametru s:

$$\begin{aligned} z &= z(s) && (14)\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = z'v && (15)\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= z''v && (16) \end{aligned}$$

Rešitev za $n > 0$:

$$z = C\cos\frac{\sqrt{n}}{r}s + S\sin\frac{\sqrt{n}}{r}s \tag{17}$$

Konstante dolčimo iz začetnih pogojev $z = z_0$ in $z' = z'_0$

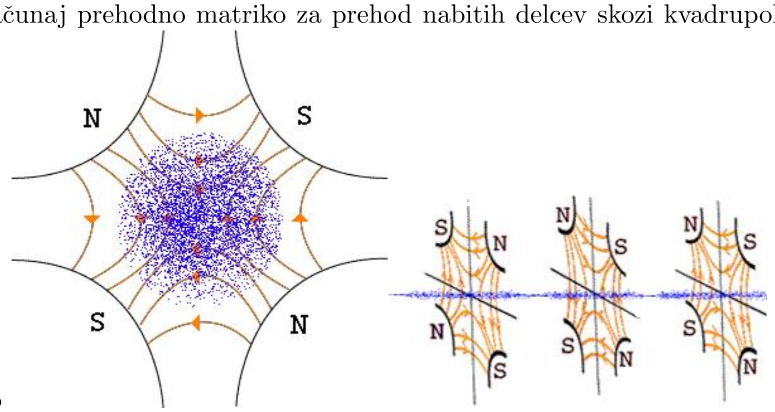
$$\begin{aligned} z &= z_0\cos\frac{\sqrt{n}}{r}s + z'_0\frac{r}{\sqrt{n}}\sin\frac{\sqrt{n}}{r}s && (18)\\ z' &= -z_0\frac{\sqrt{n}}{r}\sin\frac{\sqrt{n}}{r}s + z'_0\cos\frac{\sqrt{n}}{r}s && (19) \end{aligned}$$

Definirajmo prenosno matriko:

$$\begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\sqrt{n}}{r}s & \frac{r}{\sqrt{n}}\sin\frac{\sqrt{n}}{r}s \\ -\frac{\sqrt{n}}{r}\sin\frac{\sqrt{n}}{r}s & \cos\frac{\sqrt{n}}{r}s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \tag{20}$$

4. Gibanje v radialni smeri v nehomogenem magnetnem polju (enak magnet kot v prejšnji nalogi

5. Izračunaj prehodno matriko za prehod nabitih delcev skozi kvadrupolno



lečo

6. Vzdolžno stabilno gibanje delca v linearnem pospeševalniku.