

# **Optični eksperimenti v mikrovalovnem področju**

## Uvod

Mikrovalovi so se pri poskusih iz fizikalne optike močno uveljavili zaradi primerne valovne dolžine, ki znaša nekaj cm in je še najbližje razdaljam, s katerimi imamo opravka v vsakdanjem življenju. Pri pojavih v vidnem in rentgenskem spektru elektromagnetnega valovanja se je treba večkrat odreči nekaterim eksperimentom, ker so težko ali v celoti nedostopni zaradi zelo kratke valovne dolžine valov, z mikrovalovi pa jih izvedemo brez večjih težav. V vseh štirih eksperimentih te vaje – opazovanje stoječega valovanja, Dopplerjevega pojava, totalnega odboja in evanescentnega vala ter Braggovega uklona na modelu kristala – uporabljamo isti izvor mikrovalov in detektor. Kot izvor služi refleksni klistron, na katerega je pritrjena oddajna antena, detektor sestavlja sprejemna antena z mikrovalovno diodo, ki je priključena na mikrovoltmeter.

## Stoječe valovanje

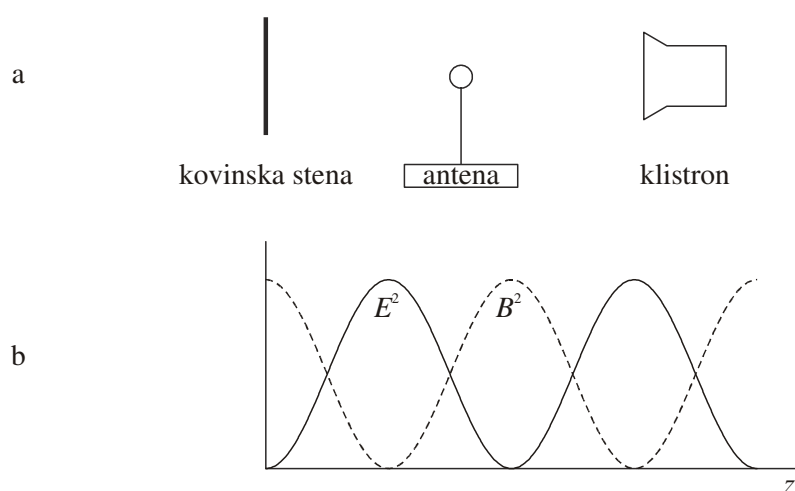
Elektromagnetni valovi se odbijajo od kovinskih površin. Ravna kovinska plošča je odlično zrcalo za mikrovalove, saj znaša vdorna globina pri mikrovalovnih frekvencah le nekaj mikrometrov in kovina zato ne absorbira skoraj nič energije. Če ploščo postavimo dovolj daleč od izvora, smemo vzeti, da je vpadno valovanje ravno. Tedaj sta amplitudi vpadnega in odbitega valovanja enaki, zato med izvorom in zrcalom nastane stoječe valovanje. Zaradi majhne vdorne globine je na površini kovinske plošče tangencialna komponenta električne poljske jakosti tako kot pri statičnem električnem polju skoraj 0. Na tem mestu se vpadno in odbito valovanje seštejeta tako, da ima električna poljska jakost tam vozle:  $E$  odbitega valovanja ima tam nasprotno fazo kot  $E$  vpadnega valovanja. Ker normalni odboj obrne smer Poyntingovega vektorja  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ , ki sovpada s smerjo širjenja valovanja, se mora torej vektor gostote magnetnega polja odbiti z nespremenjeno fazo. Gostota magnetnega polja nastalega stoječega valovanja ima zato na zrcalu hrbet (slika 1). Električna poljska jakost, ki naj kaže vzdolž osi  $y$ , je vsota dveh ravnih valov, ki se širita v

nasprotnih smereh, imata enaki amplitudi  $E_{0y}$  in sta fazno zamaknjena za  $\pi$  :

$$\begin{aligned} E_y &= E_{0y} \cos(-kz - \omega t) + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \pi) \\ &= E_{0y} [\cos(kz + \omega t) - \cos(kz - \omega t)] \\ &= -2E_{0y} \sin(kz) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (1)$$

Gostoto magnetnega polja opiše

$$B_x = 2B_{0x} \cos(kz) \cos(\omega t). \quad (2)$$



Slika 1. Shema meritve stoječega valovanja (a) ter profila kvadrata amplitud električnega in magnetnega polja v odvisnosti od oddaljenosti od zrcala (b).

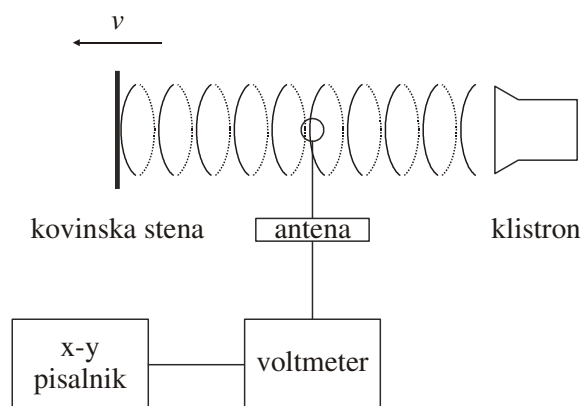
Upoštevali smo, da so mikrovalovi iz refleksnega klistrona linearno polarizirani; če ne bi bili, bi jih lahko polarizirali z mrežico vzporednih žic. Ta lahko služi tudi kot zrcalo za linearno polarizirano valovanje. Če jo postavimo pravokotno na smer širjenja valovanja in zasukamo tako, da kažejo žice vzdolž električne poljske jakosti, igra mrežica vlogo analizatorja in ne prepusti nič valovanja, ki se potemtakem v celoti odbije. V nasprotnem primeru, ko zasukamo mrežico tako, da kažejo žice pravokotno na električno poljsko jakost, gre vpadno valovanje nemoteno skozi.

Električna poljska jakost stoječega valovanja, ki jo opisuje enačba (1), ima v točkah, razmaknjenih za polovico valovne dolžine, ob vsakem  $t$  vrednost 0 : tem točkam pravimo vozli. Drugod niha z amplitudo, ki doseže največjo vrednost natanko med dvema vozlima. Magnetno polje je fazno premaknjeno glede na električno polje za četrtno valovne dolžine, tako da vozli  $\mathbf{B}$  sovpadajo s hrbti  $\mathbf{E}$  in obratno. Razdaljo med sosednjima vozlima električnega polja lahko izmerimo s sprejemno anteno in

tako določimo valovno dolžino mikrovalov. Ker ima mikrovalovna dioda kvadratično karakteristiko, so odčitki sorazmerni s kvadratom električne poljske jakosti.

## Dopplerjev pojav

Hitrost predmeta, od katerega se je valovanje odbilo, lahko izračunamo iz razlike frekvenc odbitega in vpadnega valovanja. Ker je hitrost zrcala  $v$  vaji ( $v$ ) mnogo manjša od hitrosti svetlobe ( $c$ ), dospevajo maksimi električnega polja vpadnega valovanja do zrcala v časovnih razmakih, ki so za  $(v/c)(1/\nu)$  daljši od nihajnega časa vpadnega valovanja v opazovalnem sistemu, kjer izvor miruje; ta znaša  $1/\nu$ . Obenem dospevajo maksimi odbitega valovanja do sprejemne antene, ki miruje glede na klistron, v časovnih razmakih, ki so se za  $(v/c)(1/\nu)$  daljši od nihajnega časa odbitega valovanja v opazovalnem sistemu, kjer zrcalo kot sekundarni izvor miruje. V laboratorijskem koordinatnem sistemu ima torej odbito valovanje za  $2(v/c)(1/\nu)$  daljši nihajni čas od vpadnega oziroma za  $\Delta\nu = 2(v/c)\nu$  nižjo frekvenco. Odbito valovanje pada na sprejemno anteno, ki je postavljena med izvor in zrcalo (slika 2).



Slika 2. Shema eksperimenta pri opazovanju Dopplerjevega pojava

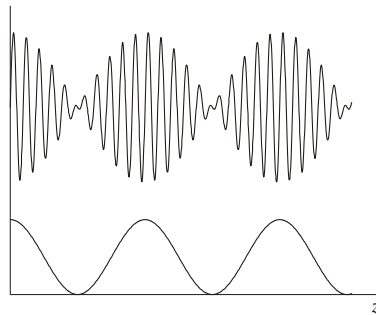
Električno poljsko jakost, ki jo izmeri sprejemna antena, tvorita dva prispevka: ker se lega antene ne spreminja, nas zanima le časovna odvisnost in velja

$$E_y(t) = E_{0y} \cos(\omega t) + E_{1y} \cos(\omega t + \Delta\omega t + \delta) \\ = [E_{0y} + E_{1y} \cos(\Delta\omega t + \delta)] \cos(\omega t) + E_{1y} \sin(\omega t) \sin(\Delta\omega t + \delta), \quad (3)$$

kjer smo z  $\delta$  označili fazno razliko vpadnega in odbitega valovanja. Enačba (3) opisuje utripanje: električna poljska jakost še vedno niha približno s frekvenco klistrona, vendar se amplituda  $E$  počasi spreminja s (krožno) frekvenco utripanja  $\Delta\omega = 2(v/c)\omega$ . Ker ima dioda sprejemne antene kvadratično karakteristiko in ker detekcijski sistem tako ali tako ne sledi frekvencam mikrovalov, z anteno merimo povprečje kvadrata električne poljske jakosti preko zelo velikega števila nihajev. Zaradi utripanja pa se to povprečje zlagoma spreminja. Enačbo (3) kvadriramo in povprečimo znotraj časovnega intervala, ki je mnogo daljši od  $1/\omega$ , a krajši od  $1/\Delta\omega$  (slika 3), in dobimo napetost signala iz diode:

$$\frac{1}{2} (E_{0y}^2 + E_{1y}^2) + 2E_{0y}E_{1y} \cos(\Delta\omega t + \delta). \quad (4)$$

Upoštevali smo, da da omenjeno časovno povprečenje  $\overline{\cos^2(\omega t)} = 1/2$  in  $\overline{\cos(\omega t)} = 0$ .



Slika 3. Utripajoče električno polje vpadnega in odbitega valovanja (a) in časovna odvisnost signala, ki ga dobimo s kvadriranjem  $E$  in povprečenjem preko intervala, ki je mnogo daljši od  $1/\omega$ , a krajši od  $1/\Delta\omega$  (b).

## Totalni odboj

Pri prehodu elektromagnetnega valovanja iz optično gostejšega sredstva z lomnim količnikom  $n$  v zrak z lomnim količnikom  $\approx 1$  se kot med smerjo valovanja in normalo meje spremeni, kakor narekuje lomni zakon:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}. \quad (5)$$

Tu je  $\alpha$  vpadni kot in  $\beta$  lomni kot. Pri vpadnih kotih, ki presegajo  $\alpha_T = \arcsin(1/n)$ , pride do totalnega odboja valovanja; mejni kot  $\alpha_T$  ustreza lomnemu kotu  $\beta = \pi/2$ . Vendar pa tudi pri totalnem odboju elektromagnetno valovanje ob meji sredstev penetrira v optično redkejšo sredstvo. Električno poljsko jakost v optično gostejšem sredstvu 1 zapišimo kot  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ , električno poljsko jakost v zraku kot  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ . Absolutni vrednosti valovnih vektorjev  $\mathbf{k}_1$  in  $\mathbf{k}_2$  sta takole povezani s frekvenco:

$$|\mathbf{k}_1| = n \frac{\omega}{c} \quad (6)$$

in

$$|\mathbf{k}_2| = \frac{\omega}{c}, \quad (7)$$

kjer je  $c$  hitrost svetlobe. Odtod sledi, da je

$$k_1^2 = n^2 k_2^2. \quad (8)$$

Ker ležijo vpadni, odbiti in lomljeni žarek v isti ravnini, lahko koordinatni sistem zasučemo tako, da je  $k_{1x} = k_{2x} = 0$  in je os  $z$  pravokotna na mejo med sredstvom. Kvadrat valovnega vektorja v zraku je tedaj enak  $\omega^2/c^2 = k_2^2 = k_{2y}^2 + k_{2z}^2$ . Ker mora biti število valov na enoto dolžine vzdolž osi  $y$  na meji sredstev enako ne glede na to, na kateri strani meje jih štejemo, mora veljati  $k_{1y} = k_{2y}$ . Obenem velja še

$$k_{2y} = k_{1y} = |\mathbf{k}_1| \sin \alpha = n \frac{\omega}{c} \sin \alpha. \quad (9)$$

Odtod sledi, da je

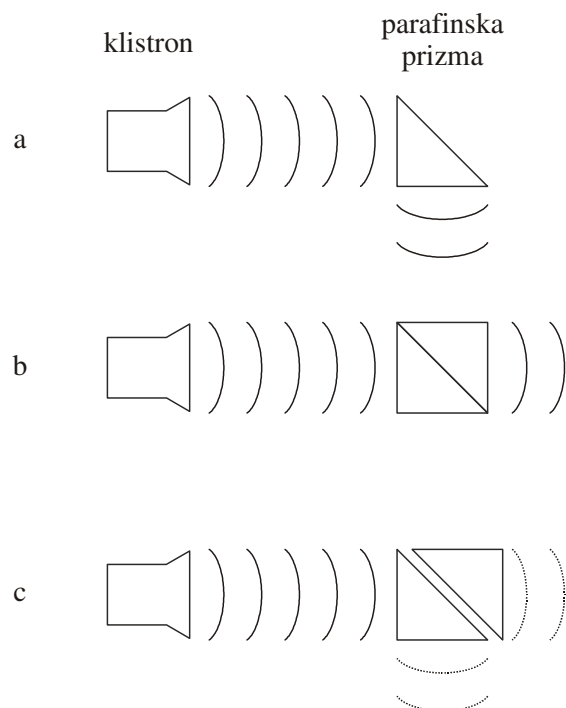
$$k_{2z}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} [1 - n^2 \sin^2 \alpha]. \quad (10)$$

Pri  $\alpha > \alpha_T$  je  $k_{2z}^2 < 0$  in je  $k_{2z}$  imaginarno število,  $k_{2z} = i\kappa$ . Električna poljska jakost v vakuumu je torej oblike

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \exp(-\kappa z) \cos(k_{2y} y - \omega t). \quad (11)$$

Dobili smo valovanje, katerega amplituda eksponentno pada z oddaljenostjo od meje med sredstvoma; gostota energije elektromagnetnega valovanja je sorazmerna z  $\exp(-2\kappa z)$ . Pri totalnem odboju sega valovanje v optično redkejše sredstvo do globine, primerljive z valovno dolžino. Če meji tedaj približamo drug kos snovi, v kakršni je prišlo do totalnega odboja, bo nekaj evanescentnega vala prešlo vanj: v skrajnem primeru, ko je zračna špranja infinitezimalno tanka, do totalnega odboja sploh ne pride in se valovanje nemoteno širi preko stika. Ker pojema jakost evanescentnega vala z značilno razdaljo  $1/\kappa \approx \lambda$ , amplituda prepuščenega potujočega vala znatna le, če širina špranje ni bistveno večja od valovne dolžine. Zato je pojav težko opazovati pri vidni svetlobi z valovno dolžino nekaj 100 nm, pri mikrovalovih s centimetrsko valovno dolžino pa je mnogo lažje. Shema poskusa je prikazana na sliki 4: parafinsko prizmo, katere osnovna ploskev je enakokraki pravokotni trikotnik, postavimo tako, da vpadajo mikrovalovi na najbližjo ploskev pravokotno, nato pa na poševno ploskev pod kotom  $\pi/4$ . Ker je lomni količnik parafina 1.5, je kot totalnega odboja  $\alpha_r = 41.5^\circ$ , zato pride na tej ploskvi do totalnega odboja. Sprejemna antena, ki jo postavimo v smeri vpadnega valovanja za prizmo, zazna signal, ki hitro pojema z oddaljenostjo antene od poševne ploskve. Če postavimo anteno pravokotno na smer vpadnega valovanja ob tretjo navpično stranico prizme, bo prestregla valovanje, ki se totalno odbije.

Če zdaj prvi prizmi približamo še eno enako prizmo in jo postavimo tako, da znaša širina špranje med poševnima ploskvama nekaj cm, bo sprejemna antena, postavljena v smeri vpadnega valovanja za drugo prizmo, zaznala prepuščene mikrovalove. Ko postavimo anteno ob stransko ploskev prve prizme, zopet ujamemo odbito valovanje, katerega amplituda je manjša kot prej, ko smo opazovali totalni odboj na eni sami prizmi. Relativna jakost odbitega in prepuščenega valovanja je odvisna od širine špranje.



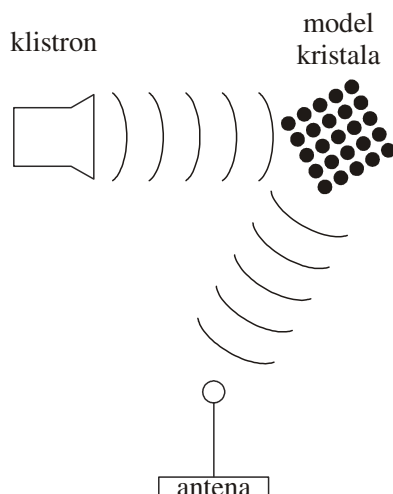
Slika 4. Potovanje mikrovalov na eni prizmi (a), na dveh prizmah, ki sta tesno skupaj (b), na dveh prizmah, ki ju ločuje tanka špranja (c). V slednjem primeru se prepuščeno valovanje širi v smeri vpadnega, čeprav je vpadni kot glede na ravnino špranje večji od kota totalnega odboja.

## Uklon na modelu kristala

Tudi uklonske poskuse, ki so osnovni način raziskav strukture atomskih in molekularnih kristalov z rentgensko svetlobo, lahko prenesemo v mikrovalovno območje, če značilna razdalja modulacije dielektrične konstante primerljiva z valovno dolžino mikrovalov. V ta namen uporabimo model kristala s preprosto kubično (simple cubic) mrežo, ki ga tvori v stiroporno matriko razmeščenih 125 jeklenih kroglic s premerom 1 cm. Kristal postavimo na osrednji del goniometra, katerega ročica, kamor namestimo sprejemno anteno, se vrti dvakrat hitreje od osrednjega dela: vpadni kot je tedaj vselej enak polovici kota med ročico in smerjo vpadnega valovanja. Ročico poravnamo, da je vzporedna z vpadnim valovanjem, in kristal zasučemo tako, da sta dve od stranic pravokotni na vpadno valovanje (slika 5). Potenciometer, ki meri zasuk goniometra, povežemo z baterijo in priključimo na abscisno os pisalnika, na ordinatno os priključimo signal s sprejemne antene.



Naravnomo občutljivosti na obeh oseh ter posnamemo amplitudo uklonjenega valovanja v odvisnosti od vpadnega kota. Uklonjeno valovanje je najmočnejše pri kotih, za katere velja Braggov pogoj  $2d \cos \theta = N\lambda$ , kjer je  $d$  razdalja med mrežnimi ravninami,  $\theta$  vpadni kot,  $N$  nenegativno celo stevilo in  $\lambda$  valovna dolžina. (Seveda pride do uklona le, če je  $\lambda < 2d$ .)



Slika 5: Shema eksperimenta, s katerim opazujemo uklon mikrovalov na modelu kristala

## Dodatek

Na utripanje, nastalo zaradi spremembe frekvence pri Dopplerjevem pojavu, lahko gledamo še drugače. Vpadno valovanje in valovanje, ki se odbije od gibljive plošče, interferirata tako, da nastane neke vrste potujoče stojno valovanje, pri čemer vozli in hrbti valovanja potujejo z enako hitrostjo kot plošča. Kot pri stoječem valovanju je tudi tu amplituda nihanja električne poljske jakosti spremenljiva, le da je funkcija časa in ne kraja. Časovni interval med dvema vozloma je enak  $\lambda/2v$ . Imamo  $1/\Delta\nu = \lambda/2v = c/2\nu v$ , odkoder sledi za frekvenco ponavljanja vozlov  $\Delta\nu = 2\nu/cv$ . To pa ravno ustreza Dopplerjevemu premiku.

Večina eksperimentov v tej vaji je bila pripravljena v okviru diplomskega dela E. Krištofa pod vodstvom F. Cvelbarja.

## Naloga

Določite valovno dolžino mikrovalov z merjenjem razdalje med vozli stoječega mikrovalovnega valovanja v zraku!

Izmerite hitrost premikajoče se kovinske stene z Dopplerjevim pojavom in primerjajte rezultat z neposredno meritvijo!

Opazujte totalni odboj na parafinski prizmi in izmerite prepuščeni energijski tok v odvisnosti od širine reže med prizmama!

Z analizo Braggovega uklona na modelu kristala določite razdaljo med jeklenimi kroglicami modela!

## Literatura

- [1] E. Krištof, diplomsko delo, FNT Univerze v Ljubljani, 1969.
- [2] C. L. Andrews, *Optics of the electromagnetic spectrum* (Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1960).
- [3] R. P. Feynman, R. B. Leighton in M. Sands, *The Feynman lectures on physics* (Addison-Wesley, Reading, 1965).
- [4] F. S. Crawford, Jr., *Waves, Berkley physics course* (McGraw Hill, New York, 1968).