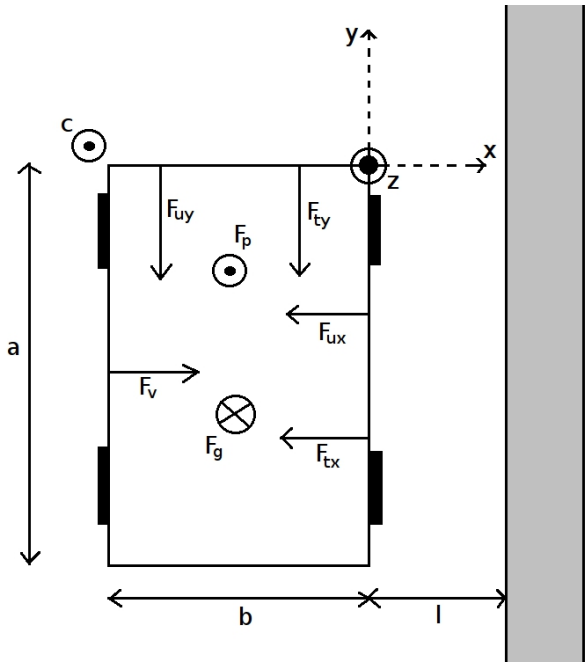
NALOGA: Po cesti vozi tovornjak z hitrostjo 80 km/h. Tovornjak je dolg 8 m, širok 2 m in visok 4 m in ima maso 14 ton. S strani začne pihati veter z hitrostjo 150 km/h. Ob nekem času voznik zaspi in ne upravlja več z tovornjakom. Kdaj in koliko metrov od točke, kjer je voznik zaspal, se bo tovornjak zaletel v zaščitno ograjo ob cesti, od katere je bil na začetku oddaljen 2 m? Koeficient trenja med cesto in kolesi v prečni smeri je 0.25, v vzdolžni smeri pa 0.05. Koeficient zračnega upora znaša 1.1, gostota zraka pa 1.2 kg/m^3.

V smeri pozitivne osi x deluje sila upora vetra, ki premika tovornjak v smer pozitivne osi x, zato v nasprotni smeri delujeta sila upora zraka in sila trenja. V smeri pozitivne osi y se tovornjak giblje naprej, zato v nasprotno smer zopet delujeta sila upora zraka in sila trenja, v negativno smer osi z deluje sila teže, v nasprotno smer pa sila podlage:
$v_{0y} = 80$ km/h $= 22.2$ m/s
$a = 8\ m \quad b = 2\ m \quad c = 4\ m$
$m = 14$ ton $= 14000$ kg
$v_v = 150$ km/h $= 41.7$ m/s
$k_{ty} = 0.05 \quad k_{tx} = 0.25$
$c_u = 1.1 \quad \rho_z = 1.2$ kg/m^3



Najprej zapišemo 2. Newtonov zakon za cel sistem v vektorski obliki:

$$\vec{F}_v + \vec{F}_{tx} + \vec{F}_{ux} + \vec{F}_{ty} + \vec{F}_{uy} + \vec{F}_g + \vec{F}_p = m\vec{a}.$$

$$\begin{aligned} (\ & F_v, 0, 0) + (-F_{tx}, 0, 0) + (-F_{ux}, 0, 0) + (0, -F_{ty}, 0) + \\ (\ & 0, -F_u y, 0) + (0, 0, -mg) + (0, 0, F_p) = m(a_x, a_y, a_z). \end{aligned}$$

V posameznih smereh tako dobimo enačbe:

$$x \ : \ F_v - F_{tx} - F_{ux} = ma_x, \tag{1}$$
$$y \ : \ -F_{ty} - F_{uy} = ma_y, \tag{2}$$
$$z \ : \ -F_g + F_p = ma_z = 0. \tag{3}$$

V z smeri se tovornjak ne giblje: $a_z = 0$.
Označimo trenutno hitrost in trenutni položaj tovornjaka (upoštevamo, da se v z smeri ne giblje):

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (v_x(t), v_y(t), 0) \\ \vec{r}(t) &= (x(t), y(t), 0). \end{aligned}$$

Označimo še začetno hitrost in položaj:

$$\begin{aligned} \vec{v}_0(t) &= (0, v_{0y}, 0) \\ \vec{r}_0(t) &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Razpišemo še izraze za posamezne sile:

$$F_v = \frac{1}{2} c_u \rho_z ac(v_v - v_x)^2, \tag{4}$$

tu nastopa razlika med hitrostjo vetra in hitrostjo tovornjaka v x smeri, torej relativna hitrost med tovornjakom in vetrom, saj se tako veter kot tovornjak gibljeta v pozitivno smer osi x. Upoštevali smo, da je prečni presek tovornjaka glede na smer gibanja v osi x enak ac.

$$F_{ux} = \frac{1}{2} c_u \rho_z acv_x^2, \tag{5}$$

tu nastopa samo hitrost tovornjaka v x smeri, saj je na desni strani tovornjaka zrak na miru, tovornjak pa se giblje v smeri osi x z hitrostjo v_x. Prečni presek je enak kot pri sili vetra, ac.

$$F_{uy} = \frac{1}{2} c_u \rho_z bcv_y^2 \tag{6}$$

tu nastopa hitrost tovornjaka v y smeri, saj je zrak na miru, tovornjak pa se giblje v smeri osi y s hitrostjo v_y. Prečni presek glede na smer gibanja v osi y pa je enak bc.

$$\begin{aligned} F_{tx} &= k_{tx}F_p, && (7)\\ F_{ty} &= k_{ty}F_p, && (8)\\ F_g &= mg. && (9) \end{aligned}$$

Iz enačbe za smer z dobimo: $F_p = mg$. To in izraze za posamezne sile vstavimo v enačbi za smer x in y:

$$\begin{aligned} x &: \frac{1}{2}c_u\rho_z ac(v_v - v_x)^2 - k_{tx}mg - \frac{1}{2}c_u\rho_z acv_x^2 = ma_x,\\ y &: -\frac{1}{2}c_u\rho_z bcv_y^2 - k_{ty}mg = ma_y. \end{aligned}$$

Iz teh enačb izrazimo pospeška:

$$\begin{aligned} x &: \frac{1}{2}c_u\rho_z acv_v^2 - c_u\rho_z acv_v v_x + \frac{1}{2}c_u\rho_z acv_x^2 - k_{tx}mg - \frac{1}{2}c_u\rho_z acv_x^2 = ma_x,\\ & a_x = \frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g - \frac{c_u\rho_z acv_v}{m}v_x, && (10)\\ y &: a_y = -\frac{c_u\rho_z bc}{2m}v_y^2 - k_{ty}g. && (11) \end{aligned}$$

Smer osi x:
Uporabimo definicijo pospeška:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g - \frac{c_u\rho_z acv_v}{m}v_x. \qquad (12)$$

Dobili smo diferencialno enačbo za funkcijo $v_x(t)$. Ločimo spremenljivki in integriramo po času od časa 0 do nekega časa t, po hitrosti pa potem od začetne hitrosti do hitrosti ob nekem času t:

$$\int_{v_{0x}=0}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g - \frac{c_u\rho_z acv_v}{m}v_x} = \int_0^t dt = t.$$

Preden integriramo, poizkušamo narediti integral brezdimenzijski. V ta namen izpostavimo iz imenovalca na levi strani vse člene, ki ne vsebujejo v_x:

$$\int_0^{v_x(t)} \frac{dv_x}{(\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g)(1 - \frac{c_u\rho_z acv_v}{m(\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g)}v_x)} = t$$

$$\frac{1}{\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g}\int_0^{v_x(t)} \frac{dv_x}{1 - \frac{c_u\rho_z acv_v}{\frac{1}{2}c_u\rho_z acv_v^2 - k_{tx}mg}v_x} = t.$$

Vse, kar stoji zraven v_x, mora biti izraz oblike 1 deljeno z neko hitrostjo, da se enote pokrajšajo, tako lahko definiramo hitrost:

$$\begin{aligned} V_{0x} &= \frac{\frac{1}{2}c_u\rho_z acv_v^2 - k_{tx}mg}{c_u\rho_z acv_v} = \frac{1}{2}v_v - \frac{k_{tx}mg}{c_u\rho_z acv_v} = \\ &= \frac{1}{2} * 41.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - \frac{0.25 * 14000\ \mathrm{kg} * 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{1.1 * 1.2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} * 8\ \mathrm{m} * 4\ \mathrm{m} * 41.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \quad (13) \end{aligned}$$

Dobimo:

$$\int_0^{v_x(t)} \frac{dv_x}{1 - \frac{v_x}{V_{0x}}} = (\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g)t.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = v_x/V_{0x}$, $du = dv_x/V_{0x}$:

$$\int_0^{u(t)} \frac{du}{1-u} = \frac{1}{V_{0x}}(\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g)t.$$

Kar stoji zraven t na desni strani, mora biti izraz oblike 1 deljeno z nekim časom, da se enote pokrajšajo, tako lahko definiramo čas:

$$\begin{aligned} T_{0x} &= \frac{V_{0x}}{\frac{c_u\rho_z acv_v^2}{2m} - k_{tx}g} = \\ &= \frac{1.36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{\frac{1.1*1.2\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}*8\ \mathrm{m}*4\ \mathrm{m}*(41.7)^2\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}}{2*14000\ \mathrm{kg}} - 0.25 * 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 7.965\ \mathrm{s}. \quad (14) \end{aligned}$$

Izraz smo tako prevedli v brezdimenzijsko obliko:

$$\int_0^{u(t)} \frac{du}{1-u} = \frac{t}{T_{0x}}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $w = 1 - u$, $dw = -du$:

$$\begin{aligned} \int_1^{w(t)} \frac{dw}{w} &= -\frac{t}{T_{0x}}, \\ \mathrm{Ln}(w(t)) - \mathrm{Ln}(1) &= -\frac{t}{T_{0x}}, \\ w(t) &= e^{-\frac{t}{T_{0x}}}, \\ 1 - \frac{v_x(t)}{V_{0x}} &= e^{-\frac{t}{T_{0x}}}. \end{aligned}$$

Tako dobimo izraz za hitrost tovornjaka v x smeri kot funkcije časa:

$$v_x(t) = V_{0x}(1 - e^{-\frac{t}{T_{0x}}}). \tag{15}$$

Sedaj uporabimo še definicijo hitrosti:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = V_{0x}(1 - e^{-\frac{t}{T_{0x}}}). \tag{16}$$

Ločimo spremenljivki in integriramo od časa 0 do nekega časa t, ter od začetnega položaja v smeri x do nekega položaja $x(t)$:

$$\int_{x_0=0}^{x(t)} dx = \int_0^t V_{0x}(1 - e^{-\frac{t}{T_{0x}}}).$$

Dobimo:

$$x(t) = V_{0x}(t + T_{0x}e^{-\frac{t}{T_{0x}}})|_0^t = V_{0x}t + V_{0x}T_{0x}e^{-\frac{t}{T_{0x}}} - V_{0x}T_{0x}.$$

Definiramo še:

$$X_0 = V_{0x}T_{0x} = 1.36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} * 7.965\ \mathrm{s} = 10.83\ \mathrm{m}. \tag{17}$$

Dobili smo izraz za odvisnost koordinate x od časa:

$$x(t) = X_0(e^{-\frac{t}{T_{0x}}} - 1). \tag{18}$$

Smer osi y:
Uporabimo definicijo pospeška:

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -\frac{c_u\rho_z bc}{2m}v_y^2 - k_{ty}g. \tag{19}$$

Dobili smo diferencialno enačbo za funkcijo $v_y(t)$. Ločimo spremenljivki dt in dv_y ter integriramo po času od časa 0 do nekega časa t in hitrost od začetne hitrosti do neke hitrosti ob času t:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{-\frac{c_u\rho_z bc}{2m}v_y^2 - k_{ty}g} = \int_0^t dt = t.$$

Zopet naredimo integral brezdimenzijski, tako da izpostavimo v imenovalcu vse člene, ki ne vsebujejo v_y:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{-k_{ty}g(1 + \frac{c_u\rho_z bc}{2mk_{ty}g}v_y^2)} = t.$$

Definiramo novo hitrost:

$$V_{0y} = \sqrt{\frac{2mk_{ty}g}{c_u\rho_z bc}} = \sqrt{\frac{2 * 14000 \text{ kg} * 0.05 * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1.1 * 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} * 2 \text{ m} * 4 \text{ m}}} = 36.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{20}$$

Dobimo:

$$\int_{v_{0y}}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{1 + \frac{v_y^2}{V_{0y}^2}} = -k_{ty}gt.$$

uvedemo novo spremenljivko $u = v_y/V_{0y}$, $du = dv_y/V_{0y}$:

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{1+u^2} = -\frac{k_{ty}g}{V_{0y}}t.$$

Uvedemo nov čas:

$$T_{0y} = \frac{V_{0y}}{k_{ty}g} = \frac{36.06 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.05 * 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 73.52 \text{ s} \tag{21}$$

Dobili smo brezdimenzijski izraz:

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{1+u^2} &= -\frac{t}{T_{0y}} \\ \arctan(u)|_{u_0}^{u(t)} &= \arctan(u(t)) - \arctan(u_0) = -\frac{t}{T_{0y}} \end{aligned}$$

Uporabimo enakost:

$$\arctan(x) - \arctan(y) = \arctan(\frac{x-y}{1+xy}),$$

Dobimo:

$$\begin{aligned} \arctan(\frac{u(t)-u_0}{1+u(t)u_0}) &= -\frac{t}{T_{0y}}, \\ u(t) - u_0 &= \tan(-\frac{t}{T_{0y}})(1+u(t)u_0), \\ u(t) &= \frac{u_0 - \tan(\frac{t}{T_{0y}})}{1 + u_0 \tan(\frac{t}{T_{0y}})}. \end{aligned}$$

Dobili smo izraz za hitrost v_y kot funkcije časa:

$$v_y(t) = V_{0y}\frac{\frac{v_{0y}}{V_{0y}} - \tan(\frac{t}{T_{0y}})}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(\frac{t}{T_{0y}})}. \tag{22}$$

Oziroma, če definiramo:

$$A = \frac{v_{0y}}{V_{0y}} = \frac{22.2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{41.7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0.6156, \tag{23}$$

je izraz za hitrost v y smeri:

$$v_y(t) = \frac{v_{0y} - V_{0y}\tan(\frac{t}{T_{0y}})}{1 + A\tan(\frac{t}{T_{0y}})}. \tag{24}$$

Sedaj uporabimo še definicijo hitrosti:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = V_{0y}\frac{A - \tan(\frac{t}{T_{0y}})}{1 + A\tan(\frac{t}{T_{0y}})}. \tag{25}$$

Ločimo spremenljivki in integriramo od časa 0 do nekega časa t, ter od začetnega položaja v smeri y do nekega položaja $y(t)$:

$$\int_{y_0=0}^{y(t)} dy = \int_0^t v_y(t)dt = \int_0^t V_{0y}\frac{\frac{v_{0y}}{V_{0y}} - \tan(\frac{t}{T_{0y}})}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(\frac{t}{T_{0y}})}.$$

Dobimo:

$$y(t) = v_{0y}\int_0^t \frac{dt}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(\frac{t}{T_{0y}})} - V_{0y}\int_0^t \frac{\tan(\frac{t}{T_{0y}})dt}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(\frac{t}{T_{0y}})}.$$

Uvedemo novo spremenljivko $u = t/T_{0y}$, $du = dt/T_{0y}$:

$$y(t) = v_{0y}T_{0y}\int_0^u \frac{du}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(u)} - V_{0y}T_{0y}\int_0^u \frac{\tan(u)du}{1 + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\tan(u)} = v_{0y}T_{0y}I_1 - V_{0y}T_{0y}I_2.$$

Integrala lahko pogledamo v tabele (oz. izračunamo z Mathematico), znašata pa:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1}(u + \frac{v_{0y}}{V_{0y}}\mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u) + \cos(u))), \\ I_2 &= \frac{1}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}u - \mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u) + \cos(u))). \end{aligned}$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{v_{0y}T_{0y}u}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1} - \frac{V_{0y}T_{0y}\frac{v_{0y}}{V_{0y}}u}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1} + \\ &+ \frac{v_{0y}T_{0y}\frac{v_{0y}}{V_{0y}}}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1}\mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u) + \cos(u)) + \frac{V_{0y}T_{0y}}{\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2} + 1}\mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u) + \cos(u)). \end{aligned}$$

Prva dva člena se pokrajšata, v drugih dveh pa izpostavimo logaritem:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u)+\cos(u))\frac{v_{0y}^2T_{0y}+V_{0y}^2T_{0y}}{V_{0y}(\frac{v_{0y}^2}{V_{0y}^2}+1)} = \\ &= V_{0y}T_{0y}\mathrm{Ln}(\frac{v_{0y}}{V_{0y}}\sin(u)+\cos(u)). \end{aligned}$$

Definiramo razdaljo Y_0:

$$Y_0 = V_{0y}T_{0y} = 36.06\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} * 73.52\ \mathrm{s} = 2651\ \mathrm{m} \tag{26}$$

Dobili smo izraz za spreminjanje koordinate y v odvisnosti od časa:

$$y(t) = Y_0\mathrm{Ln}(A\sin(\frac{t}{T_{0y}})+\cos(\frac{t}{T_{0y}})). \tag{27}$$

Rešitev:
Ob času $t = T$ se tovornjak zaleti v steno. Takrat sta koordinati tovornjaka:

$$x(T) = l = X_0(e^{-\frac{T}{T_{x0}}}-1)+V_{0x}T, \tag{28}$$

$$y(T) = y_1 = Y_0\mathrm{Ln}(A\sin(\frac{T}{T_{0y}})+\cos(\frac{T}{T_{0y}})). \tag{29}$$

Iz enačbe za koordinato x lahko izrazimo T. Tega se ne da izraziti analitično, vendar (če izrazimo T z pomočjo Mathematice), dobimo izraz:

$$T = T_{0x}+\frac{l}{V_{0x}}+T_{0x}W(-e^{-\frac{l}{X_0}+1}), \tag{30}$$

kjer je W Lambertova funkcija, to je neanalitična funkcija, ki je obrat funkcije $f(W) = We^{-W}$. Ko vstavimo številke, dobimo:

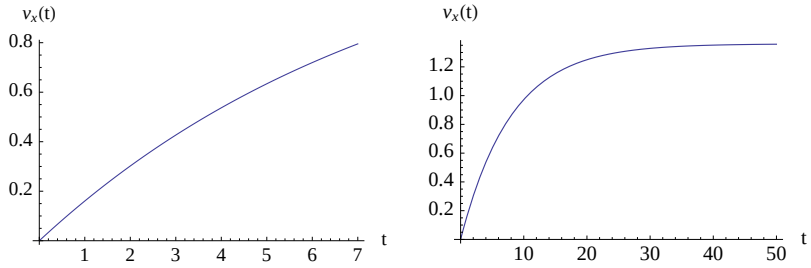
$$T = 5.382\ \mathrm{s} \tag{31}$$

Izračunani T nesemo v enačbo za koordinato y, in dobimo:

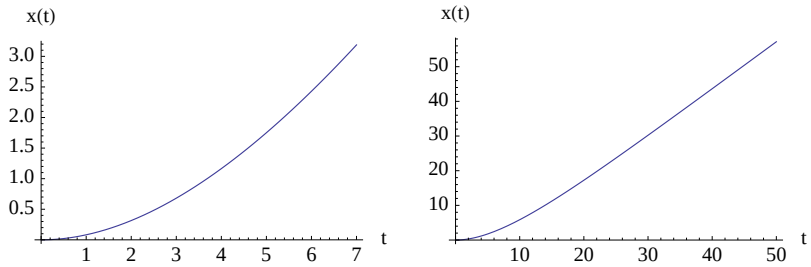
$$y_1 = 52.81\ \mathrm{m}. \tag{32}$$

Tovornjak se torej zaleti v steno 5.382 sekunde po tem, ko voznik zaspi, to pa se zgodi 52.81 metra naprej od mesta, kjer je voznik zaspal.

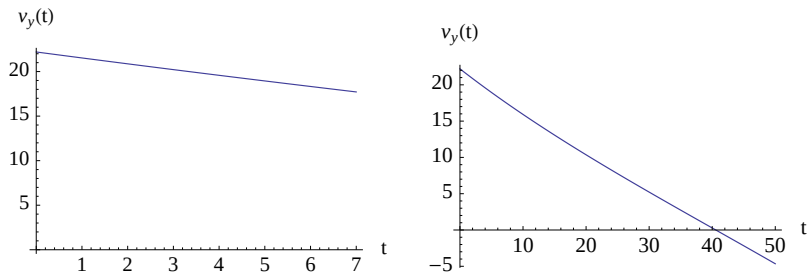
Odvisnosti vseh izračunanih količin od časa:
Hitrost v smeri x:



Položaj v smeri x:



Hitrost v smeri y:



Položaj v smeri y: