

# Napredni detektorji delcev in obdelava podatkov

Andrej Studen

January 29, 2016

## Abstract

Vaje pri predmetu Napredni detektorji delcev in obdelava podatkov.

## 1 Uvod

- Oцени gostoto ionizacije (v parih/cm) MIP delca v ionizacijski celici polnjeni z argonom (Ar,  $\rho=1.66 \cdot 10^{-3}$  g/cm<sup>3</sup>, A=39.9, Z=18,  $\eta=26$  eV/e-ion).
- Kakšna bo dolžina sledi miona v vodi, ki nastane po interakciji 1 GeV mionskega nevtrina?
- Kakšna je oblika napetostnega pulza na cilindrični ionizacijski celici?
- Oцени gostoto ionizacije (pari e-h/cm) MIP v silicijevem detektorju ( $\rho=2.33$  g/cm<sup>3</sup>, Z=14, A=28,  $\eta=3.6$  eV/par).

Bethe-Bloch:

$$\frac{dE}{dx} = K\rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta^2} \left[ \ln \left( \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 W_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right] \quad (1)$$

K	0.1535 MeV cm <sup>2</sup> /g
$\beta, \gamma$	hitrost delca
$z$	naboj delca
Z, A, $\rho$	parameteri snovi
$m_e$	masa elektrona
	max. prenos energije pri enem trku
$W_{\max}$	$2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 / (1 + 2s\sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2} + s^2)$
	$s = m_e / M$ , M je masa delca
I	ionizacijska energija, $\approx 10$ eV · Z

## 2 Kalmanov filter/Progresivno fitanje sledi

[http://web.mit.edu/kirtley/kirtley/binlustuff/literature/control/Kalman filter.pdf](http://web.mit.edu/kirtley/kirtley/binlustuff/literature/control/Kalman%20filter.pdf)

Pri iskanju sledi s Kalmanovim filtrom uporabljamo notranje stanje  $\mathbf{x}_k$ , ki ga na vsakem koraku s prehodno matriko  $\mathbf{F}$  prestavimo iz prejšnjega stanja  $\mathbf{x}_{k+1}$ :

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k \quad (2)$$

Pri tem je  $\mathbf{w}_k$  šum prehoda, za katerega si navadno predstavljamo, da je porazdeljen Gausovsko s povprečno vrednostjo 0 in (ko)variančno matriko  $\mathbf{Q}_k$ . Pri sledenju delcem v šum prehoda vtaknemo večkratno sipanje, za katerega poznamo porazdelitev lege in smeri po prehodu skozi dano debelino. Notranje stanje  $\mathbf{x}_k$  je povezano z opazljivkami  $\mathbf{y}_k$ ; pri tem gre lahko za linearno kombinacijo stanja in opazljivk, tako da je med njima operator  $\mathbf{H}_k$ . Pri meritvi prihaja do napak  $\mathbf{v}_k$ , ki so porazdeljene gausovsko s širinami  $\mathbf{R}_k$ .

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3)$$

V danem koraku opisujemo kovarianco določenih parametrov z matriko  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W}_k = \left( E \left[ (\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)(\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k)^T \right] \right)^{-1} \quad (4)$$

Tipična uporaba filtra je v kombinaciji napovedi in iskanja optimalnih vrednosti s pomočjo napovedi. Pri tem uporabljamo optimizirajočo funkcijo:

$$\chi^2 = (\hat{\mathbf{x}}'_k - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{W}'_k (\hat{\mathbf{x}}'_k - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k)^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) \quad (5)$$

Prvi člen predstavlja oceno napake do vključno  $\mathbf{x}_k$  glede na kovarianco parametrov, zadnji člen pa predstavlja prispevek zadnje meritve. Pri tem sta  $\hat{\mathbf{x}}'_k$  in  $\mathbf{W}'_k$  oceni pravih matrik za korak  $k$ ,

$$\mathbf{W}'_k = (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{F}^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}'_k = \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1} \quad (7)$$

Iz enačbe (5) lahko dobimo nove vrednosti za  $\mathbf{x}_k$ , s tem da zahtevamo, da naj minimizirajo  $\chi^2$ :

$$\frac{d\chi^2}{d\mathbf{x}_k} = -2\mathbf{W}'_k (\hat{\mathbf{x}}'_k - \mathbf{x}_k) - 2\mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k) = 0 \quad (8)$$

Od tod lahko izrazimo  $\mathbf{x}_k$

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{W}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} (\mathbf{W}'_k \hat{\mathbf{x}}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k) \quad (9)$$

Izboljšano kovarianco pa dobimo kot:

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k \quad (10)$$

Skupno bo torej zbirka korakov:

---


$$\begin{aligned} \mathbf{W}'_k &= (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{W}_{k-1} \mathbf{F}^{-1} & (6) \\ \mathbf{x}'_k &= \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1} & (7) \\ \mathbf{x}_k &= (\mathbf{W}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k)^{-1} (\mathbf{W}'_k \hat{\mathbf{x}}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{y}_k) & (9) \\ \mathbf{W}_k &= \mathbf{W}'_k + \mathbf{H}_k^T \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k & (10) \end{aligned}$$


---

## 2.1 Primer

Iskanje parametrov sledi  $(k, z)$  na podlagi  $n$  meritev  $\mathbf{y}_k$  na ravninah na medsebojni razdalji  $\Delta$ .

Nastavitve:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_j &= \begin{pmatrix} z_j \\ k_j \end{pmatrix} \\ \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 1 & \Delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{H} &= (1 \quad 0) \\ \mathbf{R}^{-1} &= \frac{1}{\sigma^2}\end{aligned}$$

Začetni korak je pri  $k=1$ . Lotimo se ga kar pri (10):

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

pri čemer smo privzeli  $\mathbf{W}'_1=0$  za oceno kovariančne matrike. Začetno stanje inicializiramo kot:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Zdaj se premaknemo na  $j=2$ . Začnemo pri ocenah za (6):

$$\mathbf{W}'_2 = (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{W}_1 \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\Delta \\ -\Delta & \Delta^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

in (7)

$$\mathbf{x}'_2 = \mathbf{F} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

### 3 Iz izpita

- Šibko interagirajoče masivne delce (WIMP) skušamo neposredno zaznavati preko njihovih (elastičnih) trkov z jedri. Vzemi, da imajo WIMP maso  $M=100$  GeV in mirujejo v medgalaktičnem prostoru, skozi katerega se giblje osončje s hitrostjo  $2,2 \cdot 10^5$  m/s. Oceni največji prenos energije pri trku z mirujočim jedrom  $^{72}_{32}\text{Ge}$ . Kakšno maso germanijevega detektorja potrebujemo za dogodek na leto pri ocenjenem preseku  $10^{-45} \text{ cm}^2$  in toku  $10^5$  WIMP/cm<sup>2</sup>s?

Reševali bomo s pomočjo težiščnega sistema, količine v tem sistemu bomo označevali s  $*$ , sicer velja da smo jih izmerili v laboratorijskem sistemu vezanem na planet Zemljo. Nastopale bodo količine pred in po trku, tiste po trku bomo označili z  $'$ . Delcu WIMP smo vzdeli indeks 1, jedru Ge pa 2. Ker je v laboratorijskem sistemu (planet zemlja, detektor) hitrost WIMP-Pov precej manjša od hitrosti svetlobe ( $\beta_{\text{WIMP}}=0.7 \cdot 10^{-3}$ ) lahko računamo nerelativistično.

Težiščni sistem je tisti, za katerega bo veljalo:

$$\mathbf{p}_1^* + \mathbf{p}_2^* = 0 \quad (15)$$

kjer je  $\mathbf{p}^*$  gibalna količina delca v težiščnem sistemu.

Ob (nerelativistični) Galilejevi transformaciji bo:

$$\mathbf{p}_1^* = M(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}^*) \quad (16)$$

$$\mathbf{p}_2^* = -m\mathbf{v}^* \quad (17)$$

kjer smo z  $M$  označili maso WIMP, z  $m$  pa maso jedra. Od tod hitro dobimo hitrost težiščnega sistema:

$$\mathbf{v}^* = \frac{M}{m+M}\mathbf{v}_1 \quad (18)$$

Po trku se velikost gibalnih količin v težiščnem sistemu ne bo spremenila; spremenil se bo le kot gibanja.

$$p_1'^* = p_1^* = p_2'^* = p_2^* = \frac{mM}{m+M}v_1 \quad (19)$$

Označimo kot  $\theta$  med smerjo  $\mathbf{v}_1^*$  in smerjo  $\mathbf{v}_1'^*$  v težiščnem sistemu ( $\mathbf{v}_1^*$  je vzporedna z  $\mathbf{v}^*$  in  $\mathbf{v}_1$ ). V laboratorijskem sistemu (inverzna Galilejeva transformacija) bomo izmerili hitrosti:

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_1'^* \quad (20)$$

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}_2'^* \quad (21)$$

Zaradi (15) bosta  $\mathbf{v}_1'^*$  in  $\mathbf{v}_2'^*$  ravno nasprotno usmerjena. Kot med  $\mathbf{v}^*$  in  $\mathbf{v}_2'^*$  bo ravno  $\pi - \theta$ . Kinetična energija jedra Ge po trku bo torej:

$$W_{k,2}' = \frac{m}{2}v_2'^2 = \frac{m}{2}(v^{*2} + 2v_2'^*v^*\cos(\pi - \theta) + v_2'^{*2}) \quad (22)$$

ki bo največja, ko bo  $\pi - \theta = 0$ , torej ko bo  $\theta = \pi$  in se bo WIMP odbil nazaj, jedro Ge pa v smeri začetnega gibanja WIMPa. Določimo še hitrost  $v_2'^*$ :

$$v_2'^* = \frac{p_2'^*}{m} = \frac{M}{M+m}v_1 = v^* \quad (23)$$

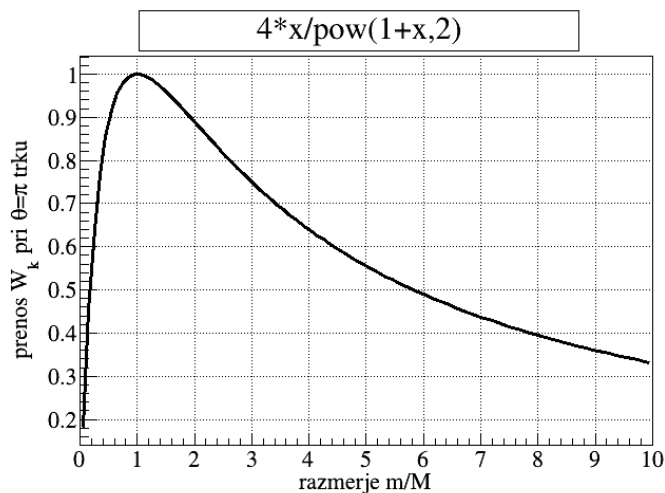
kar vidimo pravzaprav že iz (17). Potem vidimo, da je  $v_2' = 2v^*$  in

$$W_{k,2}' = 2mv^{*2} = \frac{4mM}{(m+M)^2} \frac{M}{2}v_1^2 = \frac{4mM}{(m+M)^2}W_{k,1} \quad (24)$$

Hitro pogledamo še v robni primer; ko je  $m = M$ , bo  $4mM/(m+M)^2 = 1$  in bo prenos energije popoln, kot je to v navadi za prožne trke enakih teles. V našem primeru pa imamo  $M = 100$  GeV,  $m \approx 72$  GeV, zato bo:

$$W_{k,2}' = 0.97 W_{k,1} \quad (25)$$

Za drugačna razmerja  $x = m/M$  kaže delež prenosa energije pri  $\theta = \pi$  sipanju spodnja slika.



Kinetična energija WIMP je:

$$W_{k,1} = 100 \text{ GeV} \beta_{\text{WIMP}}^2 = 53 \text{ keV}, \quad (26)$$

naš rezultat pa je za 3 % manjši, torej okrog 50 keV.

*Drugi del naloge*

Iz preseka določimo atenuacijsko dolžino:

$$\mu = \frac{\sigma \rho N_A}{M} \quad (27)$$

Delež interagirajočih v plasti debeline  $d$  bo:

$$\frac{j'}{j} = 1 - e^{-\mu d} \approx \mu d \quad (28)$$

Število interakcij  $R$  na časovno enoto je:

$$R = j S \mu d = j \mu V = j \frac{\sigma \rho N_A}{M} V = \frac{j \sigma m N_A}{M} \quad (29)$$

Od tod za želeno število  $R$  potrebujemo maso:

$$m = \frac{MR}{\sigma N_A j} \quad (30)$$

Za naš primer ( $M=72$ ,  $R=3 \cdot 10^{-8}/\text{s}$ ,  $j=10^5/\text{cm}^2\text{s}$ ,  $\sigma=10^{-45}\text{cm}^2$ ) dobimo:

$$m = 36 \text{ kton} \quad (31)$$