

Vaje pri predmetu Fizikalna merjenja 2

Andrej Studen

2015

15. marec 2017

<http://www-f9.ijs.si/~studen/sola/fizmer2/vaje2015.pdf>

1 Prehod delcev skozi snov

- Bohrova formula ¹ za energijske izgube delcev v snovi je:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{e_0^2 r_e z^2}{\epsilon_0} \frac{Z}{M_A} \rho N_A \log \left[\frac{\beta^2 \gamma^2 c}{z r_e \bar{v}} \right] \quad (1)$$

Navadno združimo konstante v K:

$$K = \frac{e_0^2 r_e N_A}{\epsilon_0} \quad (2)$$

Določi konstanto K! (2.3.2015)

$$K = \frac{4\pi(\hbar c)^2 \alpha^2 N_A}{m_e c^2} = 0,3 \text{ MeV cm}^2 \text{ mol}^{-1}$$

- Kakšen je maksimalen prenos energije težkega delca (masa M) na elektron (m) v enem trku?

V laboratorijskem sistemu opišemo gibanje težkega delca z γ_1 (energija) in $\beta_1 \gamma_1$ (gibalna količina), elektrona pa z $\beta_2 \gamma_2 = 0$ (ker miruje) in $\gamma_2 = 1$. Priredimo težiščni sistem, za katerega velja:

$$M\beta_1^* \gamma_1^* + m\beta_2^* \gamma_2^* = 0 \quad (3)$$

¹glej http://www.kip.uni-heidelberg.de/~coulon/Lectures/Detectors/Free_PDFs/Lecture2.pdf

Med težiščnim in laboratorijskim sistemom je transformacija:

$$(\beta\gamma)^* = \cosh \alpha(\beta\gamma) - \sinh \alpha\gamma \quad (4)$$

$$\gamma^* = \cosh \alpha\gamma - \sinh \alpha(\beta\gamma) \quad (5)$$

Iz (3) in transformacije dobimo:

$$\cosh \alpha(\beta_1\gamma_1) - \sinh \alpha\gamma_1 + q \cosh \alpha(\beta_2\gamma_2) - q \sinh \alpha\gamma_2 = 0 \quad (6)$$

$$\tanh \alpha = \frac{\beta_1\gamma_1}{\gamma_1 + q} \quad (7)$$

Maksimalen prenos energije bo takrat, ko bo smer gibalne količine elektrona v težiščnem sistemu po trku ravno nasprotna gibanju pred trkom:

$$\beta_2^{*'} \gamma_2^{*'} = -\beta_2^* \gamma_2^* \quad \text{in} \quad \gamma_2^{*'} = \gamma_2^*$$

Energija po trku v težiščnem sistemu bo:

$$\begin{aligned} \gamma_2' &= \cosh \alpha\gamma_2^{*'} + \sinh \alpha\beta_2^{*'} \gamma_2^{*'} \\ &= \cosh \alpha\gamma_2^* - \sinh \alpha\beta_2^* \gamma_2^* \\ &= \cosh^2 \alpha\gamma_2 + \sinh^2 \alpha\gamma_2 \\ &= \frac{1 + \tanh^2 \alpha}{1 - \tanh^2 \alpha} \end{aligned}$$

Pridobljena energija pa bo:

$$\frac{\Delta E}{mc^2} = \gamma_2' - \gamma_2 = \frac{1 + \tanh^2 \alpha}{1 - \tanh^2 \alpha} - 1 = \frac{2 \tanh^2 \alpha}{1 - \tanh^2 \alpha} = \frac{2\beta_1^2\gamma_1^2}{1 + 2q\gamma_1 + q^2} \quad (8)$$

- Navadno namesto Bohrove formule uporabljamo Bethejevo formulo, ki ima v argumentu logaritma:

$$\frac{\beta^2\gamma^2 c}{zr_e\bar{v}} \rightarrow \frac{2m_e c^2 \beta^2\gamma^2}{I}$$

kjer je I povprečna ionizacijska energija atoma v snovi,

$$I \approx ZI_0 \quad ; \quad I_0 = 10 \text{ eV}$$

- **Primerjaj energijske izgube protonov (p), kaonov (K), pionov (π) in mionov (μ) z gibalno količino 1 GeV/c v detektorju iz Ar pri sobni temperaturi ($Z=18$, $A=40$, $\rho=4 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$) (2.3.2015)**

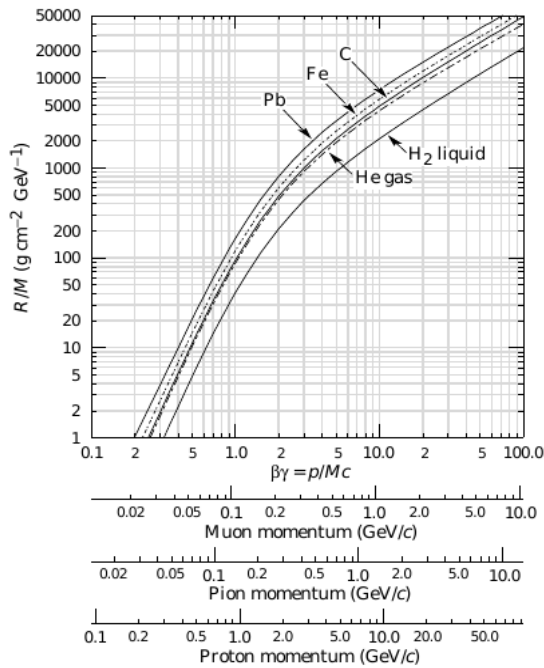
		p	K	π	μ
$\beta\gamma$		1	2	7	10
γ		$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{101}$
β		$\frac{\sqrt{2}}{2} (\approx 0,7)$	$\frac{2}{\sqrt{5}} (\approx 0,9)$	$\frac{7}{\sqrt{50}} (\approx 1)$	$\frac{10}{\sqrt{101}} (\approx 1)$
Z/M _A	mol/g			0,5	
ρ	g/cm ³			$4 \cdot 10^{-3}$	
I	eV			180	
$Q = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I}$		$5,6 \cdot 10^3$	$2,2 \cdot 10^4$	$2,7 \cdot 10^5$	$5,6 \cdot 10^6$
W=logQ		8,6	10	12,5	13,2
$B = K z^2 \rho \frac{Z}{M_A}$	keV/cm			0.6	
F=B/ β^2	keV/cm	1,2	0,75	0,6	0,6
dE/dx=F·W	keV/cm	10,3	7,5	7,5	7,9

Lahko ločimo le protone od ostalih!

- Oцени sipalni presek za sipanje težkih nabitih delcev (pionov, mionov, ...) na atomih snovi. Za najmanjšo energijo prenosa vzemi kar povprečno ionizacijsko energijo ZI_0 , $I_0=10$ eV, posebej za svinec, $Z=82$, za hitrost sipanih delcev vzemi kar $v=c$.

Pomoč: <http://hep.ucsb.edu/courses/ph225a/jackson.pdf>

- Kakšna je povprečna energija pri posameznem sipanju na elektronih? Za energijsko okno vzemi ZI_0 in T_{max} , kot si ga dobil zgoraj.
- Doseg R delca z maso M v snovi z gostoto ρ podaja graf, kjer je na osi x podan produkt $\beta\gamma$, na osi y pa $\eta=R\rho/M$. Za lažje odčitavanje lahko uporabimo tabelo.



$\beta\gamma$	η [gcm ⁻² /GeV]		
	C	Fe	Pb
0,3	1,9	2,8	3,9
0,4	5	6,5	9,5
0,5	11	14	21
0,6	20	25	40
0,7	32	45	60
0,8	50	62	88
0,9	72	90	140
1	90	130	180
2	350	600	800
3	1000	1200	1500
4	1400	1900	2500
5	2000	2500	3200
6	2500	3000	4200
7	3000	3900	5000
8	3800	4500	6000
9	4200	5200	6800
10	4900	6000	7200
20	10000	11000	15000
50	25000	30000	36000
100	50000	60000	75000

- Curek protonov z gibalno količino 10 GeV/c usmerimo skozi sklad plasti, sestavljen iz:
 - 0,5 m debele plasti v kateri je ujet Ar pri sobni temperaturi
 - 0,5 m debele plasti jekla
 - 0,5 m debele plasti svinca.

Kako debel kvader svinca moramo še dodati, da se bo curek delcev ustavil? (2.3.2015)

1. korak. Iz $\beta\gamma=10$ na začetku prve plasti se osredotočimo na vrstico v tabeli, ki se začne z 10. Ar z $Z=18$ je še najbolj podoben C, zato vzamemo kar podatek zanj; $\eta=4900$. Od tod določimo doseg:

$$R = \eta \frac{M}{\rho} = 2,7 \cdot 10^6 \text{ cm} = 27 \text{ km},$$

Za ρ smo dobili iz plinske enačbe z $M_A(\text{Ar})=40$:

$$\rho = \frac{pM_A}{RT} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

Sklad debeline 0,5 m je zanemarljiv v primerjavi z dosegom, zato bo tudi izguba energije zanemarljiva in bo po prehodu plasti argona delec imel približno enako energijo.

2. korak. Na vstopu v jeklo je $\beta\gamma=10$ - vzamemo zdaj stolpec za Fe, $\eta=6000$, $R=760$ cm, kjer smo za ρ vzeli $7,9 \text{ g/cm}^3$. Tu debelina $w=50$ cm ni več zanemarljiva v primerjavi z dosegom. Izgubo energije določimo tako, da poiščemo $\beta'\gamma'$ za delec, ki ima za 50 cm krajši doseg R' :

$$R' = R - w = 710 \text{ cm}$$

Od tod določimo η' :

$$\eta' = \frac{R'\rho}{M} = 5600 \text{ gcm}^{-2}/\text{GeV}$$

in ker je ta v tabeli ravno na pol med $\eta(9)=5200$ in $\eta(10)=6000$, vzamemo $\beta'\gamma'=9,5$.

3. korak. Na vstopu v svinec ima proton torej $\beta'\gamma'=9,5$. Zdaj gledamo v tretji stolpec; $\eta''=7000 \text{ gcm}^{-2}/\text{GeV}$, $R''=619$ cm pri $\rho=11,3 \text{ g/cm}^3$. Spet doseg ni zanemarljiv, iščemo delec s $w=0,5$ m krajšim dosegom:

$$R''' = R'' - w = 570 \text{ cm} \quad ; \quad \eta''' = 6400 \text{ gcm}^{-2}/\text{GeV} \quad ; \quad \beta'''\gamma''' = 8,5$$

To zadnje, $\beta'''\gamma'''$ odčitamo iz tabele, saj je 6400 ravno na pol poti med 6000 ($\beta\gamma=8$, Pb) in 6800 ($\beta\gamma=9$, Pb). Po prehodu skozi prve plasti bo imel delec gibalno količino $8,5 \text{ GeV}/c$.

4. korak Preostalo energijo bo delec izgubljal v svincu. Spet gremo lahko v tabelo; iz $\beta'''\gamma'''=8,5$ določimo $\eta''''=6400$ in $R''''=570$ cm. Lahko pa opazimo, da smo enako količino rabili že zgoraj (R''') in uporabimo kar tisto. V obeh primerih velja, da bomo rabili 570 cm debel kvader.

- **Pri obsevanju tumorjev uporabljajo curek protonov z energijami do 250 MeV. S pomočjo tabele za doseg oceni porazdelitev izgub takih protonov v telesu po globini od vstopne točke curka. Vzami, da ima telo gostoto vode in sestavo, v kateri prevladuje ogljik.**(9.3.2015)

Iz kinetične energije 250 MeV dobimo $\gamma=1,25$ in $\beta\gamma=0,75$. Za C bo $\eta=41 \text{ gcm}^{-2}/\text{GeV}$. Do naslednjega vnosa pri $\beta\gamma=0,7$ se bo η spremenila

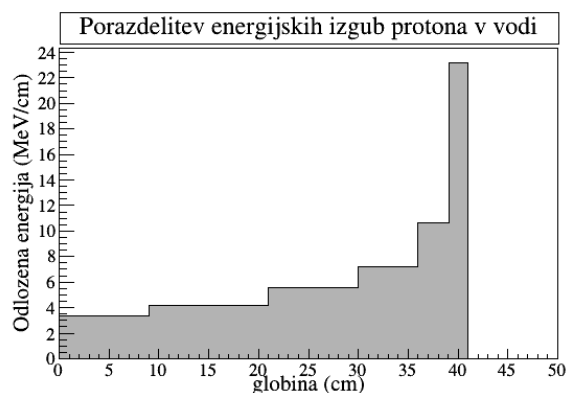
za $9 \text{ gcm}^{-2}/\text{GeV}$, doseg pa za $R=9 \text{ cm}$ (gostota je 1 g/cm^3 , proton ima masa $\approx 1 \text{ GeV}$). Pri $\beta\gamma=0,7$ ima proton kinetično energijo T :

$$T = Mc^2(\gamma - 1) = Mc^2(\sqrt{1 + \beta^2\gamma^2} - 1)$$

ki je enaka $0,22Mc^2$ oziroma 220 MeV , torej je izgubil 30 MeV . Podobno delamo dalje in izpolnimo tabelo; osenčena stolpca sta prepisana iz tabele za doseg; prva vrstica pri $\beta\gamma=0,75$ je interpolacija vrstic pri $\beta\gamma=0,7$ in $0,8$.

$\beta\gamma$	T MeV	ΔT MeV	R cm	Δd cm	d cm	$\Delta T/\Delta d$ MeV/cm
0,75	250	0	41	0	0	0
0,7	220	30	32	9	9	3,3
0,6	170	50	20	12	21	4,2
0,5	120	50	11	9	30	5,5
0,4	77	43	5	6	36	7,1
0,3	44	33	1,9	3,1	39,1	11
0	0	44	0	1,9	41	23

Isto še grafično, kjer brez težav prepoznamo Braggov vrh.



2 Interakcije fotonov

- Izračunaj energijo fotona z energijo 1 MeV po Comptonovem sipanju za 90° ! (9.3.2015)

Izpeljemo enačbo za Comptonsko sipanje; ohranjati se morata skupna energija in gibalna količina. Vzamemo \mathbf{k} , gibalno količino vhodnega fotona (energija E), \mathbf{k}' gibalno količino izhodnega fotona z energijo E' , W , kinetično energijo sipanega Comptonskega elektrona, \mathbf{p} , gibalno količino elektrona in θ , kot med \mathbf{k} in \mathbf{k}' . Zaradi ohranitve gibalne količine bo veljalo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

Vzamemo velikost, in dobimo:

$$p^2 = k^2 + k'^2 - 2kk' \cos \theta$$

Iz ohranitve energije pa imamo:

$$E + m = E' + m + W$$

kjer smo privzeli $c=1$. Izrazimo skupno energijo elektrona $W+m$, uporabimo invariatno četverca $(W+m)^2 = m^2 + p^2$ in dobimo

$$p^2 = (E - E')^2 + 2m(E - E')$$

Za foton bo $k=E$, vstavimo enakost energije v enakost gibalne količine:

$$-2EE' \cos \theta = -2EE' + 2m(E - E')$$

Delim z $2E'$, preuredim:

$$m \frac{E}{E'} = m + E(1 - \cos \theta)$$

Delim z m in izrazim E'/E :

$$\frac{E'}{E} = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)} \quad \text{z} \quad \alpha = \frac{E}{mc^2}$$

Za samo nalogo vstavim $\alpha=1 \text{ MeV}/0.51 \text{ MeV} = 2$ in $\cos \theta=0$, torej

$$E' = E \frac{1}{1 + \alpha} \Big|_{\alpha=2} = \frac{E}{3} = 330 \text{ keV}$$

Energija sipanega fotona ima minimum (W pa maksimum) pri $\cos \theta=-1$, takrat bo

$$E' = \frac{E}{1 + 2\mu} = 200 \text{ keV}$$

$$W = E - E' = 800 \text{ keV}$$

- Izračunaj atenuacijski koeficient v NaI; gostota = 3.67 g/cm². Posebej za Comptonsko sipanje μ_C in fotoefekt μ_P , skupni in delež Comptonskih interakcij! Vrednosti so podane za 140.5 keV fotone.

Element	Z	A	μ_C/ρ [g/cm ⁻²]	μ_F/ρ [g/cm ⁻²]
Na	11	23	0.1285	3.3·10 ⁻³
I	53	126.9	0.105	0.66

- Oцени hitrost spreminjanja verjetnosti za Comptonsko interakcijo z energijo! Skupni presek s parameterom $\alpha=E_\gamma/mc^2$ je:

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left[\frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left\{ 2\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1+2\alpha) \right\} + \frac{1}{2\alpha} \log(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right]$$

- Določi asimetrijo naprej-nazaj za Comptonsko sipanje! Primerjaj za sipanje pri 100 keV in 1 MeV!

Diferencialni presek na prostorski kot Ω , s parameterom $\alpha=E_\gamma/mc^2$ je:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} P^2 \left[P + \frac{1}{P} - 1 + \cos^2 \theta \right]$$

pri čemer je P razmerje med končno in začetno energijo fotona,

$$P = \frac{1}{1 + \alpha(1 - \cos \theta)}$$

kjer je θ sipalni kot.

- Izračunaj povprečno prosto pot fotonov z energijo 1 MeV v NaI. Gostota NaI je 3,67 g/cm³, Na ima Z=11, M_A=23,0, I pa Z=53, M_A=127. (9.3.2015)

Pri 1 MeV v NaI prevladuje Comptonsko sipanje. Zanj lahko izračunamo verjetnost po Klein-Nishini:

$$\sigma = 2\pi r_0^2 \left[\frac{1+\alpha}{\alpha^2} \left\{ 2\frac{1+\alpha}{1+2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1+2\alpha) \right\} + \frac{1}{2\alpha} \log(1+2\alpha) - \frac{1+3\alpha}{(1+2\alpha)^2} \right] \quad (9)$$

Parameter $\alpha=E/mc^2$ je določen enako kot v prejšnji nalogi. Pri energiji 1 MeV bo torej $\alpha=2$, in bo

$$\sigma(1 \text{ MeV, elektron}) = 0,42 \cdot 2\pi r_0$$

(prvi člen je nekje med $4/3$ (IR limita) in 0). Ko vstavimo $r_0=2.8 \text{ fm}$, dobimo $2\pi r_0^2=0.5 \text{ b}$ ($1 \text{ b}=10^{-28} \text{ m}^2$) in skupni presek:

$$\sigma(1 \text{ MeV, elektron}) = 0,2 \text{ b}$$

Zgornje je presek na elektron. V čistih snoveh samo množimo z atomskim številom Z , v mešanica in spojinah pa določimo povprečno atomsko število:

$$\bar{Z} = \sum_i w_i Z_i$$

kjer je w_i utežni delež gradnika i , Z_i pa njegovo atomsko število. V našem primeru imamo:

$$\bar{Z} = \frac{23}{127 + 23} 11 + \frac{127}{127 + 23} 53 = 46,6$$

in

$$\sigma(1 \text{ MeV, NaI}) = 9,6 \text{ b}$$

Povprečno prosto pot (atenuacijsko dolžino) λ dobimo iz:

$$\lambda = \frac{M_A}{N_A \rho \sigma} = 7,1 \text{ cm}, \quad (10)$$

kjer smo za M_A vzeli vsoto (150 g/mol) in $N_A=6 \cdot 10^{23} / \text{mol}$.

- **Oceni razmerje verjetnosti na atom za fotoelektrično absorpcijo v siliciju ($^{28}_{14}\text{Si}$) in germaniju ($^{72}_{32}\text{Ge}$)!** (9.3.2015)

Za fotoefekt približno velja:

$$\sigma \propto \frac{Z^{4-5}}{E^{2,5-3,5}}$$

zato dobimo razmerje kot:

$$\frac{\sigma_{Ge}}{\sigma_{Si}} = \frac{Z_{Ge}^5}{Z_{Si}^5} = \left(\frac{32}{14}\right)^5 = 62,$$

kar je veliko, glede na to, da je razmerje Z le približno 2!

- Kateri od treh glavnih procesov (fotoelektrični efekt, Comptonovo sipanje, tvorba parov) je prevladujoč v naslednjih situacijah:

- 1 MeV γ v aluminiju?
- 100 keV γ v vodiku?
- 100 keV γ v železu?
- 10 MeV γ v ogljiku?
- 10 MeV γ v svincu?

V pomoč ti bo spodnja slika! (16.3.2015)

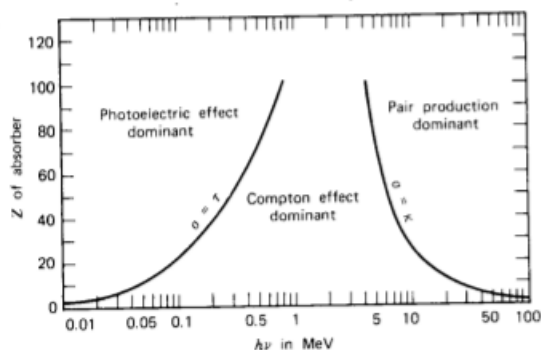


Figure 2.20 The relative importance of the three major types of gamma-ray interaction. The lines show the values of Z and $h\nu$ for which the two neighboring effects are just equal. (From *The Atomic Nucleus* by R. D. Evans. Copyright (1955 by the McGraw-Hill Book Company. Used with permission.)

Knoll. Radiation and Measurement, 2. izdaja, stran 52.

3 Cilindrična ionizacijska celica

- Izpelji obliko signala v cilindrični ionizacijski celici. Notranja elektroda ima polmer r_1 , zunanja r_2 , med njima je električna napetost ΔU , gibljivost elektronov je $\mu_e = 400 \text{ cm}^2/\text{s}$, gibljivost ionov $1.5 \text{ cm}^2/\text{s}$, interakcija se zgodi na polmeru r^* . (16.3.2015)

Obliko toka podaja Ramov teorem o influenci:

$$I = qE_w v \quad (11)$$

kjer je q naboj potujočega delca, \mathbf{v} njegova hitrost, \mathbf{E}_w pa utežno polje elektrode, na kateri merimo signal.

Utežno polje določimo podobno kot električno polje - zahtevamo, da je med elektrodami enačba za utežni potencial ϕ_w Poissonova:

$$\nabla^2 \phi_w = 0 \quad (12)$$

Na izbrani bralni elektrodi je potencial $\phi_w=1$, na preostalih elektrodah pa je $\phi_w=0$.

Za utežno polje v cilindrični geometriji bo veljalo povsem enako kot za električno polje - ves naboj je zbran le na centralni žici in na obodu, sicer polja ni. Zato računamo kar z Gaussovimi izreki in se delamo, da je tudi na notranji elektrodi fiktiven utežni naboj e_w . Potem dobimo za utežno polje (velikost) na razdalji r od središča obeh žic (dolžine L):

$$E_w = \frac{e_w}{2\pi r L \epsilon \epsilon_0} \quad (13)$$

Napetostna razlika (tako utežnega kot pravega polja) je integral:

$$\phi_w(r_1) - \phi_w(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E_w dr = \frac{e_w}{2\pi L \epsilon \epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (14)$$

Ko izberemo notranjo elektrodo kot bralno elektrodo in vstavimo konstanto nazaj v izraz za polje, dobimo:

$$E_w = \frac{1}{r \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (15)$$

Utežno polje je pozitivno in kaže navzven.

Hitrost delcev je zaradi pogostih trkov sorazmerna s poljem,

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{E} \quad (16)$$

in električno polje podobno kot zgoraj povežemo z napetostno razliko. Navadno je notranja elektroda na pozitivni napetosti relativno na obod celice, in imamo:

$$E = \frac{\Delta U}{r \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (17)$$

Pri tako postavljenem potencialu tudi električno polje kaže navzven in je vzporedno z utežnim poljem. Hitrosti sta ravno nasprotno predznačeni za različno nabite delce; hitrost elektronov je obratna kot smer polja, negativna, in kaže radialno navznoter, hitrost ionov pa je pozitivna in kaže navzven.

$$v = \pm \mu_{e,i} E \quad (18)$$

Pri ionizaciji vedno nastane enaka količina naboja elektronov in ioniziranih ionov, naboj q_e elektronov bo torej obratno sorazmeren naboju $q_i = Q$ ionov. Tok v trenutku ko je nosilec naboja na razdalji r bo torej:

$$I = \frac{Q \mu_{e,i} \Delta U}{r^2 \ln^2 \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (19)$$

Zgornjo enačbo bi radi izrazili še v časovni sliki. Za to moramo povezati lego naboja r in čas merjen relativno glede na trenutek interakcije v celici. V trenutku $t=0$ bosta tako oblak elektronov kot oblak ionov na mestu interakcije pri $r=r^*$. Gibalna enačba je kar enačba 18. Po separaciji spremenljivk imamo:

$$\int_{r^*}^{r(t)} r dr = \pm \int_0^t \frac{\mu_{e,h} \Delta U}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} dt \quad (20)$$

z rešitvijo:

$$r^2(t) = r^{*2} \pm \frac{2\mu_{e,h} \Delta U}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} t = r^{*2} \left(1 \pm \frac{t}{t_0} \right) \quad (21)$$

kjer smo s parameterom t_0 označili parameter povezan z geometrijo celice, napetostjo in mestom interakcije:

$$t_0 = \frac{r^{*2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)}{2\mu_{e,h} \Delta U} \quad (22)$$

Enačbo 21 lahko vstavimo direktno v 19, po identifikaciji še enega t_0 imamo:

$$I = \frac{Q}{2t_0 \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \frac{1}{1 \pm t/t_0} \quad (23)$$

Signal I bo trajal, dokler nosilci ne dosežejo elektrode in s tem končajo gibanje. Ti časi so različni za elektrone in ione. Zaradi pozitivno nabite notranje žice bodo elektroni potovali navznoter (negativni predznak), ioni pa navzven. Elektroni se bodo torej gibali, dokler bo $r(t) > r_1$, ioni pa za $r(t) < r_2$. Časa T ko nosilci dosežejo elektrodo, pa bosta:

$$T_e = t_0 \left(1 - \left(\frac{r_1}{r^*} \right)^2 \right) \quad T_i = t_0 \left(\left(\frac{r_2}{r^*} \right)^2 - 1 \right) \quad (24)$$

V večini primerov bo $r_1 \ll r^*$ in r_2/r^* med 1 in 10, tako da bo čas gibanja elektronov približno t_0 , čas gibanja ionov pa do $10t_0$, torej mnogo daljši kot čas gibanja elektronov. Še več, tudi sam t_0 bo za elektrone mnogo krajši (gibljivost!) kot za ione. Skupaj bo verjetno $T_i \sim 1000 T_e$.

Elektronske signale navadno pretvorimo v napetost. Tu si predstavljamo, da preko celice merimo napetost z voltmetrom. V elektronski shemi je to ekvivalentno vezavi upora vzporedno s tokovnim izvorom. Pri tem moramo upoštevati, da ima tudi sama celica kapaciteto C. Če je upornost voltmetra mnogo manjša od impedance kondenzatorja, bo imela napetost kar obliko enačbe 23, le pomnoženo z upornostjo R. Če pa bo, kot je običajno, upornost mnogo večja, bo tok stekel mimo upora na kondenzator. Takrat bomo na osciloskopu lahko spremljali spremembo signalne napetosti, ki jo dobimo iz povezave napetosti in toka na kondenzatorju:

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad (25)$$

torej:

$$U = \frac{1}{C} \int_0^t I(t) dt \quad (26)$$

Vstavimo tok iz enačbe 23 in integriramo za končni rezultat:

$$U(t) = \pm \frac{Q}{2C \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \ln(1 \pm t/t_0) & 0 < t < T \\ \ln(1 \pm T/t_0) & t > T \end{cases} \quad (27)$$

- Določi maksimalni signal, ko dobimo ionizacijo Q pri $r^* = (\sqrt{r_1 r_2}, 0.5(r_1 + r_2)$ in $0.9r_2)$. Signal katerih delcev nam da večjo napetost v posameznem primeru? Pri katerem r^* bosta prispevka enaka? (23.3.2015)

- Določi polmer R , pri katerem bo verjetnost za zadetek $z r_j R$ enaka kot verjetnost za zadetek $r_j R$. Glede na to in rezultat prejšnje naloge - signal katerih nosilcev naboja je dominanten? (23.3.2015)
- Kakšna je verjetnost za interakcijo 1 MeV fotona v 0,5 m celici iz Ar ($Z=18$, $A=40$, $p=1$ bar)? (23.3.2015)
- Kakšna bo povprečna odložena energija miona z gibalno količino 1 GeV/c v isti celici? Vzemi povprečno ionizacijsko energijo 30 eV in oceni število ioniziranih atomov in fluktuacije tega števila. Tipičen $F=0.15$. (nekaj 23.3.2015, še 30.3.2015)
- Kakšna naj bo napetost med nabitima vzporednima elektrodama razmaknjenima za 1 cm, da bo multiplikativni faktor enak 10? Vzemi $A=27$ cm/torr in $B=400$ V/cm /torr; tlak je 760 Torr je ena atmosfera. (30.3.2015)
- Iz kolokvija: Cilindrično ionizacijsko celico hkrati preletita dva delca; eden na razdalji $0.9 r_2$ in drugi na razdalji $0.1 r_2$ od centra celice, kjer je r_2 polmer zunanje (obdajajoče) negativno nabite elektrode. Skiciraj signal po multiplikaciji in največjo napetost, ki jo doseže signal $100 \mu s$ po preletu delcev. Vzemi, da oba delca odložita 100 keV energije in da je multiplikativni faktor enak 10^4 . Celica ima parametre $r_2=2$ cm, $r_1=20 \mu m$, $U=500$ V, $L=20$ cm. Gibljivost elektronov je $400 \text{ cm}^2/Vs$, ionov $1,5 \text{ cm}^2/Vs$.

Primarna ionizacija tvori pare elektron-ion; ioni se podajo na pot proti obroču, elektroni proti centralni elektrodi, kjer se bodo pomnožili. Čas potovanja za elektrone izračunamo z enačbo (24):

$$T_e \sim t_0 = \begin{cases} 56 \mu s & r^* = 0,9 \cdot r_2 \\ 0,7 \mu s & r^* = 0,1 \cdot r_2 \end{cases}$$

kjer lahko $(r_1/r^*)^2$ v obeh primerih zanemarimo pri računanju T_e . Ko dospejo elektroni do notranje elektrode, se pomnožijo, kajti šele v bližini notranje žice je električno polje dovolj veliko, da bo prvi Townsendov koeficient znaten. Iz elektronov prvotne (primarne in sekundarne) ionizacije, ki jih je $E_0/\eta \approx 30 \cdot 10^3$, dobimo ME_0/η parov ob

multiplikativnem faktorju M . Novonastali elektroni imajo do elektrode le kratko pot; njihov signal je zanemarljiv. Signal ionov pa je oblike (27) z mestom nastanka $r^*=r_1$ in kapaciteto $C=2\pi\epsilon_0 L/\ln[r_2/r_1]$, premaknjen za čas potovanja elektronov do notranje elektrode:

$$U(t) = \frac{ME_0e_0}{4\eta\pi\epsilon_0 L} \begin{cases} 0 & t < T_e \\ \ln\left(1 + \frac{t-T_e}{t'_0}\right) & T_e < t < T_e + T' \\ \ln\left(1 + \frac{T'}{t'_0}\right) & t > T_e + T' \end{cases}$$

z:

$$t'_0 = \frac{r_1^2 \ln(r_2/r_1)}{2\mu_i U} = 20 \text{ ns in } T' = \frac{r_2^2 \ln(r_2/r_1)}{2\mu_i U} = 20 \text{ ms}$$

Napetost bo logaritemsko naraščala do časa $T'=20$ ms, njen maksimum na intervalu med 0 in 100 μs bo torej na robu intervala pri $t=100 \mu\text{s}$. Predfaktor je:

$$U_0 = \frac{ME_0e_0}{4\eta\pi\epsilon_0 L} = 0,25 \text{ V}$$

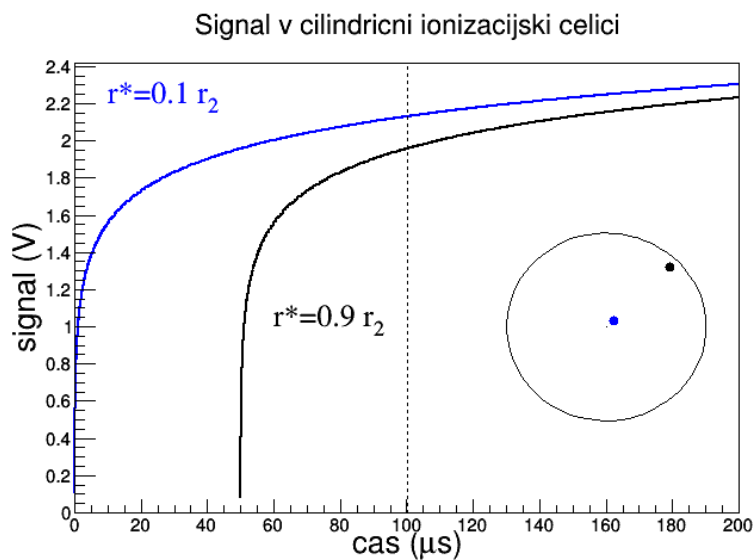
Pri interakciji v bližini žice imamo $T_e \sim 0$, zato bo maksimum pri:

$$U_1 = U_0 \ln\left[1 + \frac{100 \mu\text{s}}{20 \text{ ns}}\right] = 8,7 U_0 = 2,2 \text{ V}$$

Pri oddaljeni interakciji pa je $T_e \sim 50 \mu\text{s}$, zato imamo:

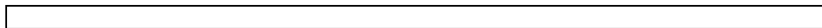
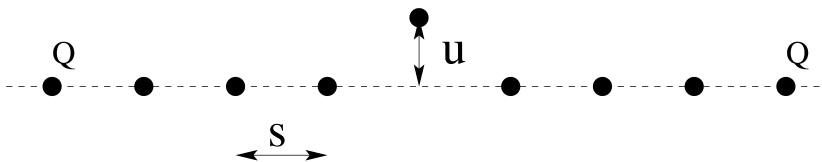
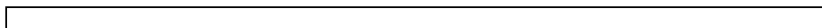
$$U_2 = U_0 \ln\left[1 + \frac{50 \mu\text{s}}{20 \text{ ns}}\right] = 8U_0 = 2 \text{ V}$$

kar nam da skupno amplitudo 4,2 V.



4 VŽPK

- Izračunaj potrebno napetost v žici, da ne bo prišlo do vertikalnih premikov anodnih žic v VŽPK! (30.3.2015)



Vzemimo, da se žica umakne za u v smeri pravokotno na ravnino žic. Na delček umaknjene žice dolžine dx bo sosednja žica delovala s silo:

$$d\mathbf{F}_e = de\mathbf{E} = \frac{Q}{L} dx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Ls} \mathbf{e}_s \quad (28)$$

kjer je \mathbf{e}_s enotski vektor v smeri zveznice med žicama, L je dolžina

žice, Q naboj, s pa razmak med žicami. Zanima nas le komponenta, ki vleže žico v smeri pravokotno na ravnino žic; za velikost te komponente napišemo:

$$dF_e = \left(\frac{Q}{L}\right)^2 \frac{dx}{2\pi\epsilon\epsilon_0 s} \frac{u}{s} \quad (29)$$

kjer smo predpostavili $u \ll s$ in nadomestili sinus kota s tangensom; $u/\sqrt{u^2 + s^2} \rightarrow u/s$.

S tem smo upoštevali prispevek najbližje žice. V resnici je na drugi strani izmaknjene žice še ena na enaki razdalji, zato množimo prispevek z 2. Enako nastopajo v paru tudi žice na razdalji $2s$, $3s$ in tako naprej – pri vsaki ustrezno upoštevamo tudi kot, ki bo zdaj $u/2s$, $u/3s$ in tako naprej. Skupna sila bo torej vsota:

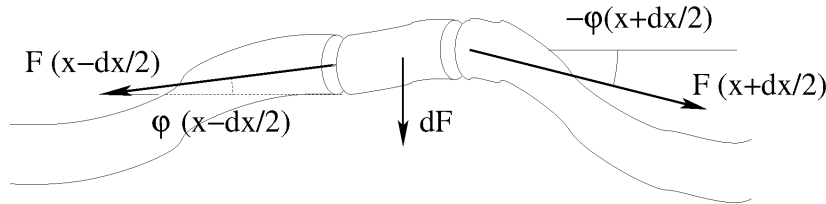
$$dF_e = \frac{Q^2 dx}{2\pi\epsilon\epsilon_0 L^2} \left(2\frac{u}{s} + 2\frac{u}{(2s)^2} + \dots\right) = \frac{Q^2 dx}{2\pi\epsilon\epsilon_0 L^2} 2\frac{u}{s^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \quad (30)$$

Vrsta konvergira, rezultat je:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (31)$$

Torej je skupna sila (neskončne vrste) žic:

$$dF_e = \frac{\pi u Q^2}{6\epsilon\epsilon_0 s^2 L^2} dx \quad (32)$$



V ravnovesju je vsota te sile in sile, ki nastane kot posledica napetosti žice enaka nič. Namreč, ko se žica ukrivi kot kaže slika, kažeta sili vzdolž žice v malenkostno drugačni smeri. Obe sta po velikosti še vedno enaki sili, ki napenja žico, zaradi razlike v smereh pa na delček dolžine dx deluje sila:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{F}(x + dx/2) - \mathbf{F}(x - dx/2) \quad (33)$$

Premike v vzdolžni smeri zanemarimo - po eni strani nam je vseeno, kateri konček žice gledamo, po drugi strani je ukrivljenost dovolj majhna, da sta komponenti vzdolž žice praktično enaki. Zanima nas razlika sil v smeri prečno na žico; velikost dobimo kot:

$$dF = F [\sin\{\varphi(x + dx/2)\} - \sin\{\varphi(x - dx/2)\}] \quad (34)$$

Za majhna odstopanja u od ravnovesne lege bo tudi žica skoraj ravna; strmina du/dx (kjer je x koordinata vzdolž žice) bo povsod majhna (ne pa nič!). Takrat lahko nadomestimo $\sin \varphi = \tan \varphi = du/dx$, in imamo:

$$dF = F \left(\frac{du}{dx}(x + dx/2) - \frac{du}{dx}(x - dx/2) \right) \quad (35)$$

Vsota sil mora biti nič:

$$\frac{\pi u Q^2}{6\epsilon\epsilon_0 s^2 L^2} dx + F \left(\frac{du}{dx}(x + dx/2) - \frac{du}{dx}(x - dx/2) \right) = 0 \quad (36)$$

oziroma:

$$\frac{\frac{du}{dx}(x + dx/2) - \frac{du}{dx}(x - dx/2)}{dx} = -\frac{\pi u Q^2}{6\epsilon\epsilon_0 s^2 F L^2}, \quad (37)$$

Po limiti $dx \rightarrow 0$ ostane:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{\pi Q^2}{6\epsilon\epsilon_0 s^2 F L^2} u, \quad (38)$$

z rešitvijo:

$$u = u_0 \sin(kx); \quad k = \sqrt{\frac{\pi Q^2}{6\epsilon\epsilon_0 s^2 F L^2}} \quad (39)$$

in robnimi pogoji:

$$u(0) = 0 \quad u(L) = 0 \quad (40)$$

kajti žica je pritrjena na obeh straneh. Prvemumu pogoju smo zadostili z izbiro sinusa namesto kosinusa, zaradi drugega pa mora veljati:

$$kL = n\pi \quad (41)$$

Z večanjem sile k pada in ima gubanje žice manj in manj vozlov. Najmanjši k dobimo za $kL = \pi$, za manjše k pa je edina preostala rešitev $u(x)=0$. Za preprečitev premikov žice mora torej veljati:

$$kL < \pi; \quad F > \frac{Q^2}{6\pi\epsilon\epsilon_0 s^2} \quad (42)$$

Faktor 6 v imenovalcu ni nujno edina rešitev. Omejili smo se na primer, kjer je le ena od žic premaknjena, ostale pa so v ravnini. Pravzaprav bi morali preveriti vse možne postavitve žic in izbrati od vseh tisto, za katero rabimo največjo napetost. Če recimo predpostavimo, da so vse sode žice umaknjene za $u/2$ navzgor, lihe pa za $u/2$ navzdol, dobimo rešitev, ki zahteva:

$$F > \frac{Q^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 s^2} \quad (43)$$

Dejansko v novodobnih komorah z optičnimi pripravami preverjajo lego žic in eksperimentalno določajo potrebno napetost. Pri tem se je izkazala zgornja ocena za dober približek. Pri tem je potrebno tudi paziti na mehanske meje pri napenjanju žic, ki dostikrat določajo silo, ki je uporabljena v sestavljenem detektorju.

Vir: http://lhcb-muon.web.cern.ch/lhcb-muon/documents/Sauli_77-09.pdf

5 Polprevodniški detektorji

- Določi gostoto stanj v prevodnem (elektroni) in valenčnem pasu (vrzeli) v čistem polprevodniku! (20.4.2015)
- Določi gostoto prostih nosilcev naboja v termično ravnovesnem polprevodniku! (20.4.2015)
- Določi lego Fermijeve energije v termično ravnovesnem polprevodniku brez primesi! (20.4.2015)
- Določi lego Fermijeve energije v termično ravnovesnem dopiranem polprevodniku. (20.4.2015)
- Določi povprečne energijske izgube v 300 μm debelem silicijevem detektorju za mion ($M=105 \text{ MeV}/c^2$) z gibalno količino 1 GeV/c. Računaj kot $\Delta E=dE/dX \cdot d$, čeprav to ni povsem

pravilno! Oцени povprečno število nastalih parov v Si, kjer je energija potrebna za tvorbo para elektron-vrzel enaka $\eta=3.6$ eV/par. (4.5.2015)

- Določi energijsko ločljivost σ_E/E silicijevega detektorja za 100 keV fotone pri fotoefektu! (4.5.2015)
- Kakšna je oblika signala iz silicijevega detektorja po prehodu skozi CR vezje (glej sliko)? Naredi za par nastal pri globini d^* v $p+nn+$ diodi, z napetostjo U v zaporni smeri, ki je večja od napetosti polnega osiromašenja U_{FD} . Bralna je vrhnja elektroda. (4.5.2015, del 11.5. 2015).

Signal bomo določili iz Ramovega teorema (11), kjer potrebujemo enačbo hitrosti in utežnega polje v detektorju.

1. Za računanje **gibanja naboja** vzemimo, da je detektor v obliki tanke rezine; če je površina mnogo večja od debeline, se bodo vsi vplivi v smeri prečno na debelino izravnali, rešujemo le vzdolž globine, torej eno-dimenzionalni problem. Naj bo koordinatni sistem z osjo x torej obrnjen vzdolž globine, izhodišče je vrh detektorja v plasti p^+ pri $x=0$, detektor se konča z plastjo n^+ pri debelini $x=d$. Taki geometriji navadno pravimo dioda. Diodo osiromašimo s z napetostjo, ki je pozitivna pri $x=d$ (na spodnji strani detektorja), brez izgube splošnosti postavimo $U(0)=0$ in $U(d)=U_0$. Ko bo detektor osiromašen, bo v srednji n plasti ostal pozitivni naboj donorjev, zato bo električno polje linearno. S primerno izbiro konstant ga lahko zapišemo kot:

$$E(x) = -\frac{U_0}{d} + \frac{2U_{FD}}{d} \left(\frac{x}{d} - \frac{1}{2} \right)$$

kjer smo z U_{FD} označili parameter detektorja, napetost popolnega osiromašenja, odvisnega od dopiranja detektorja.

Hitrost je preko gibljivosti za posamezne delce povezana z električnim poljem:

$$v_e = -\mu_e E \quad v_h = \mu_h E \quad (44)$$

kjer se elektroni (e) gibljejo v nasprotno smer električnega polja, vrzeli (h) pa v smeri električnega polja. Za delce i , kjer so i lahko

elektroni (e) ali vrzeli (h) in zgornji predznak uporabimo za vrzeli, spodnjega pa za elektrone, bo:

$$\frac{dx_i}{dt} = \pm\mu_i \left(-\frac{U_0}{d} + \frac{2U_{FD}}{d} \left(\frac{x_i}{d} - \frac{1}{2} \right) \right)$$

Preoblikujemo in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} \mp \frac{2\mu_e U_{FD}}{d^2} x_i &= \mp \frac{\mu_i (U_0 + U_{FD})}{d} \\ \frac{dx_i}{dt} \mp \frac{x_i}{t_i} &= \mp u_i \end{aligned}$$

kjer smo uvedli parametre:

$$t_i = \frac{d^2}{2\mu_i U_{FD}} \quad u_i = \mu_i \frac{U_0 + U_{FD}}{d}$$

Zanimivo, da je t_i povezan le z geometrijo detektorja: upornostjo skozi U_{FD} , debelino in gibljivostjo, u_i pa tudi z nastavitvami, torej napetostjo U_0 .

Rešitev za x_i je vsota partikularne rešitve, konstante $v_i t_i$ in homogene rešitve z $\pm t/t_0$ v argumentu eksponenta:

$$x_i(t) = Ae^{\pm t/t_i} + v_i t_i$$

Parameter $v_i t_i$ je enak za obe vrsti nosilcev, dobimo:

$$w = v_i t_i = \frac{U + U_{FD}}{2U_{FD}} d > d$$

kjer zadnjo neenakost dobimo za običajne napetosti U_0 nad pragom popolnega osiromašenja²

Konstanto A dobimo iz začetnih pogojev: ob času $t=0$ bodo vsi nosilci na mestu interakcije, ki se naj zgodi na globini d^* ; očitno: $0 < d^* < d$. V obeh primerih dobimo enako konstanto:

$$A = -(w - d^*)$$

²Za napetosti manjše od U_0 bi morali tudi polje računati drugače. S tem primerom se tu ne bomo ukvarjali.

in enačbo:

$$x_i(t) = w - (w - d^*)e^{\pm t/t_0}$$

Za vrzeli je hitrost $v_h = dx_h/dt$ negativna in se gibljejo proti zgornji (negativno nabiti) elektrodi, za elektrone pa ravno obratno. Vrzeli se bodo gibale, dokler ne bodo dosegle elektrode pri $x=0$:

$$\begin{aligned} x_h(T_h) = 0 &= w - (w - d^*)e^{T_h/t_h} \\ T_h &= t_h \ln\left(\frac{w}{w - d^*}\right) \end{aligned}$$

Elektroni bodo v gibanju do elektrode pri $x_e=d$:

$$\begin{aligned} x_e(T_e) = d &= w - (w - d^*)e^{-T_e/t_0} \\ T_e &= t_e \ln\left(\frac{w - d^*}{w - d}\right) \end{aligned}$$

Za U_0 le malenkost nad U_{FD} so lahko časi $T_{e,h}$ zelo dolgi; za znatne napetosti postanejo obvladljivi; pri $U_0=2U_{FD}$ so omejeni na $\ln(3) t_{e,h} \sim 1,1 t_{e,h}$.

Hitrost dobimo z odvodom $x_i(t)$, upoštevajoč čas gibanja imamo:

$$v_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \mp \frac{w-d^*}{t_i} e^{\pm t/t_i} & 0 < t < T_i \\ 0 & t > T_i \end{cases}$$

2. Za **utežno polje** nam ista geometrija da preprosto rešitev: spet rešujemo Poissonov enačbo le vzdolž globine, dobimo

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi_w}{dx^2} &= 0 & \phi_w(x) &= Ax + B \\ \phi_w(0) &= 1 & \phi_w(d) &= 0 \\ \phi_w(x) &= 1 - \frac{x}{d} & E_w(x) &= +\frac{1}{d} \end{aligned}$$

Surov signal iz detektorja bo torej:

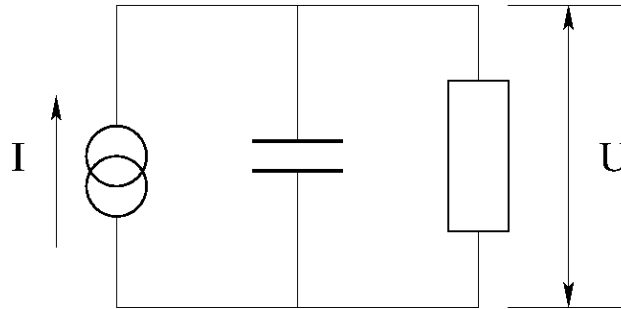
$$I(t) = -I_i \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{\pm t/t_i} & 0 < t < T_i \\ 0 & t > T_i \end{cases}$$

, kjer smo označili:

$$I_i = \frac{Q w - d^*}{d t_i}$$

Zaradi različnega predznaka naboja Q za vrzeli in elektrone bo signal v obeh primerih negativen.

Signal nato spustimo skozi RC filter, kjer tokovni izvor predstavlja senzor, kondenzator kapaciteto detektorja in upornik z upornostjo R voltmeter, s katerega odčitamo napetostni signal U .



Tok se razdeli na tok skozi kondenzator (I_C) in tok skozi upornik (I_R), uporabimo še Ohmov zakon, da dobimo:

$$I = I_C + I_R$$

$$I = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R}$$

Rešitev za U je vsota homogene ($U=Ae^{-t/RC}$) in partikularne rešitve. Za $t < 0$ in $t > T_i$ je homogena rešitev tudi že prava rešitev; v vmesnih trenutkih partikularno rešitev iščemo z nastavkom $U=Be^{\pm t/t_i}$. Ko krajšamo eksponent, ostane:

$$I_i = B \left(\pm \frac{C}{t_i} + \frac{1}{R} \right) \quad B = \frac{RI_i}{1 \pm \frac{RC}{t_i}}$$

Zahtevamo še $U(t=0)=0$ in zveznost pri $t=T_i$, zato imamo

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ Ae^{-t/RC} + \frac{RI_i}{1 \pm \frac{RC}{t_i}} e^{\pm t/t_i} & 0 < t < T_i \\ A_1 e^{-t/RC} & t > T_i \end{cases}$$

Konstanto A dobimo iz $U(t=0)=0$. Pri $t=T_i$ pa lepimo:

$$\frac{RI_i}{1 \pm \frac{RC}{t_i}} (e^{\pm T_i/t_i} - e^{-T_i/RC}) = A_1 e^{-T_i/RC}$$

in končno:

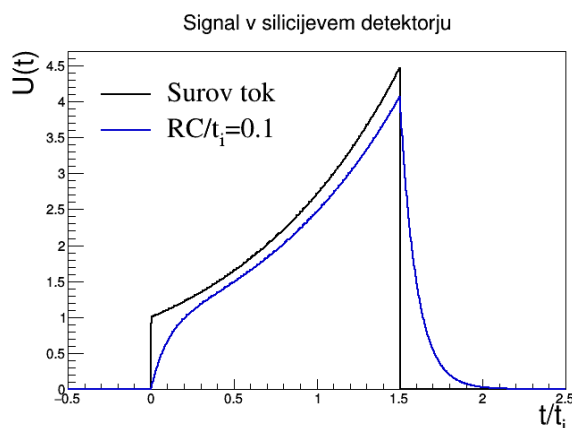
$$U(t) = \frac{RI_i}{1 \pm \frac{RC}{t_i}} \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (e^{\pm t/t_i} - e^{-t/RC}) & 0 < t < T_i \\ (e^{\pm T_i/t_i} - e^{-T_i/RC}) e^{-(t-T_i)/RC} & t > T_i \end{cases}$$

Še posebna primera:

1. Ko je $RC \ll t_i$, signal narašča kot:

$$U(t) = RI_i(1 - e^{-t/RC}) \approx \frac{I_i}{C}t$$

Po preteku časa T_i pa se zaradi kratke razpadne konstante RC kaj hitro vrne nazaj k 0. Primerjavo RC oblikovanega in surovega toka kaže slika. Ker napetost U praktično reproducira surov signal, govorimo o *voltage-sensitive*, napetostnem ojačevalcu.



2. Ko je $RC \gg t_i$, zanemarimo 1 v imenovalcu predčlena, imamo:

$$U(t) = \frac{I_i t_i}{C} (\pm e^{\pm t/t_i} \mp e^{-t/RC})$$

V prvih trenutkih bo spet:

$$U(t) = \frac{I_i t_i}{C} (\mp 1 \pm e^{\pm t/t_i}) \approx \frac{I_i}{C} t$$

Za čase daljše od T_i pa imamo:

$$U(t) = \frac{I_i t_i}{C} [e^{\pm T_i/t_i} - 1] e^{-(t-T_i)/RC}$$

V prvem izrazu prepoznamo integral naboja, namreč:

$$Q_i = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = I_i \int_0^{T_i} e^{\pm t/t_i} dt = \pm I_i t_i [e^{\pm T_i/t_i} - 1].$$

Upoštevamo še:

$$e^{\pm T_i/t_i} = e^{\pm t_i \ln f_i/t_i} = f_i^{\pm 1},$$

kjer je f_i izraz v logaritmu ob časih za ustrezne delce. Upoštevajoč te čase bo:

$$Q_e = Q \frac{w - d^*}{d} \left[1 - \frac{w - d}{w - d^*} \right] = Q \frac{d - d^*}{d}$$

$$Q_h = Q \frac{w - d^*}{d} \left[\frac{w}{w - d^*} - 1 \right] = Q \frac{d^*}{d}$$

In še:

$$Q_e + Q_h = Q$$

kar nam da potrditev, da bo vsota signala vrzeli in elektronov ravno enaka naboju, ki ga za sabo pusti nabit delec.

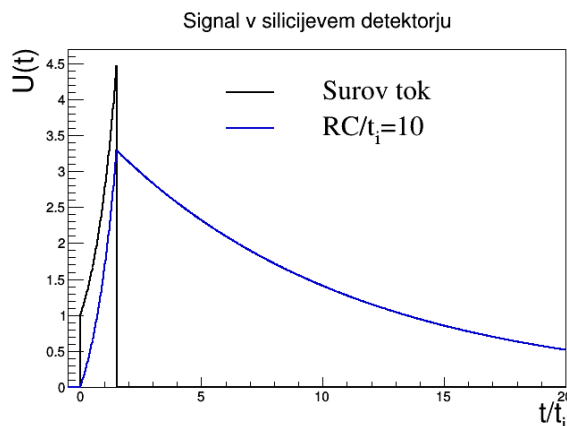
Signal bo:

$$U(t) = \frac{Q_i}{C} e^{-(t-T_i)/RC}$$

oziroma, ko je $t \gg T_i$:

$$U(t) = \frac{Q_i}{C} e^{-t/RC}$$

Tokrat govorimo o *charge-sensitive amplifier* oz. o nabožno občutljivem ojačevalcu. Potek takega signal kaže naslednja slika.



6 Scintilatorji

- Določi število nastalih fotonov na cm sledi v NaI za mion ($M=105 \text{ MeV}/c^2$) z gibalno količino $1 \text{ GeV}/c$. NaI ima gostoto $3.67 \text{ g}/\text{cm}^3$ in v povprečju sveti z 32 fotoni na keV odložene energije. (11.5.2015)
- Določi energijsko ločljivost LaBr_3 za 100 keV fotone pri fotoefektu. LaBr_3 daje 62 fotonov na keV odložene energije, detektorji svetlobe (fotopomnoževalke ipd.) imajo kvantne izkoristke med 10 in 40 %. (11.5.2015)
- Določi obliko signala iz scintilatorja (in foto-detektorja) po prehodu skozi RC vezje za različno razmerje konstant RC in τ ! (11.5.2015)

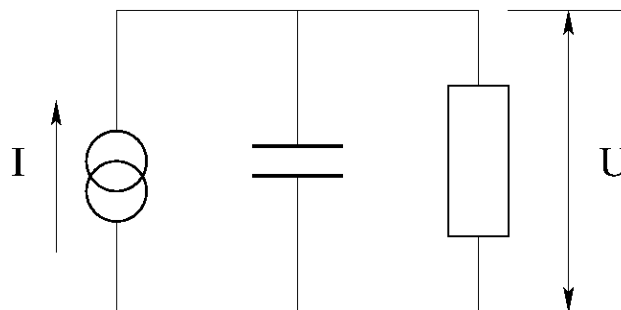
Tok fotonov v scintilatorju opišemo kot:

$$R = R_0 e^{-t/\tau}$$

V preprostem modelu je detektor svetlobe tako hiter, da je tudi električni tok na izhodu iz detektorja enake oblike:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

Ta tokovni sunek je na sliki prikazan kot tokovni izvor, skupaj z kondenzatorjem in uporom; kondenzator je del svetlobnega detektorja, upor pa predstavlja voltmeter, s katerim odčitamo signalno napetost U .



Pobrskamo po znanju elektronike: Tok I se razdeli na tok skozi upor I_R in tok skozi kondenzator I_C ; za vsakega zapišemo povezavo med tokom in padcem napetosti:

$$I_C = C \frac{dU}{dt} \quad I_R = \frac{U}{R}$$

Ko zapišemo še vsoto, imamo:

$$I = I_C + I_R$$

$$I_0 e^{-t/\tau} = C \frac{dU}{dt} + \frac{U}{R}$$

Rešitev diferencialne enačbe je vsota homogene rešitve:

$$U_h = A e^{-t/RC}$$

in partikularne rešitve, ki jo iščemo z nastavkom:

$$U_p = B e^{-t/\tau}$$

Vstavimo jo v enačbo; potem ko krajšamo eksponente, dobimo:

$$I_0 = B \left(-\frac{C}{\tau} + \frac{1}{R} \right)$$

$$B = \frac{RI_0}{1 - \frac{RC}{\tau}}$$

Vsota homogene in partikularne rešitve bo:

$$U = A e^{-t/RC} + \frac{RI_0}{1 - \frac{RC}{\tau}} e^{-t/\tau}$$

Konstanto A določimo iz začetnega pogoja $U(0)=0$, dobimo:

$$U = \frac{RI_0}{1 - \frac{RC}{\tau}} (e^{-t/\tau} - e^{-t/RC})$$

Oglejmo si še dve limiti:

1. Ko je $RC \ll \tau$, odpade drugi člen v razliki v imenovalcu; imamo samo:

$$U = RI_0 (e^{-t/\tau} - e^{-t/RC})$$

V prvih trenutkih razvoja signala, ko je $t \ll \tau$, hkrati pa $t \sim RC$, bo celo

$$U = RI_0(1 - e^{-t/RC})$$

za $t \ll RC$ pa celo:

$$U = RI_0 \frac{t}{RC} = \frac{I_0}{C} t$$

in je kapaciteta detektorja kritično pomembna pri hitrosti naraščanja signala, kar je izredno pomembno pri hitrih (LHC) ali natančnih (PET) aplikacijah.

Po drugi strani bo za $t \gg RC$ drugi člen v razliki eksponentov že zelo majhen, in ga lahko v primerjavi s prvim celo zanemarimo:

$$U = RI_0 e^{-t/\tau}$$

Razen produkta z upornostjo je signal identičen toku v detektorju svetlobe, zato temu režimu delovanja pogosto rečemo tudi *voltage amplifier* oz. napetostni ojačevalnik.

2. Ko je $RC \gg \tau$, pa lahko zanemarimo 1 v razliki v imenovalcu prve konstante:

$$U = \frac{I_0\tau}{C} (e^{-t/RC} - e^{-t/\tau})$$

Kljub temu da sta se naravi RC in τ zamenjali, bo v prvih trenutkih še vedno:

$$U = \frac{I_0\tau}{C} (1 - e^{-t/\tau}) \approx \frac{I_0\tau}{C} \frac{t}{\tau} = \frac{I_0}{C} t$$

Za znatne čase; $t \gg \tau$ pa drugi eksponent zanemarimo in imamo:

$$U = \frac{I_0 \tau}{C} e^{-t/RC}$$

V prvem členu prepoznamo ves naboj, ki ga je ustvaril detektor svetlobe, namreč:

$$Q = \int_0^{\infty} I_0 e^{-t/\tau} dt = I_0 \tau$$

in

$$U = \frac{Q}{C} e^{-t/RC}$$

zato temu režimu rečemo tudi *charge-sensitive amplifier* oz. nabojno občutljiv ojačevalec.

7 Detekcija nevtronov

- Določi porazdelitev energije dvakrat sipanih nevtronov na jedrih elementa z masnim številom A (18.5.2015)

V laboratorijskem sistemu nevtroni elastično trkajo z mirujočimi jedri. Trk najlažje opišemo v težiščnem sistemu; to je tisti, v katerem je vsota vseh gibalnih količin delcev enaka 0. Naj bo masa nevtrona m in njegova hitrost v_1 . Približno lahko rečemo (zanemarjajoč semiempirično masno formulo in razliko v masi protonov in nevtronov), da je masa tarčnega jedra $A \cdot m$. Zaradi znatne mase nevtronov računamo nerelativistično. Težiščni sistem (v katerem količine označimo s $*$) se bo gibal vzporedno z nevtronom s hitrostjo v^* :

$$v^* = \frac{mv_1}{m + Am} = \frac{v_1}{A + 1} \quad (45)$$

V težiščnem sistemu bo hitrost nevtrona, ki ga označimo z v_1 , zaradi Galilejeve transformacije:

$$v_1^* = v_1 - v^* = \frac{A}{A + 1} v_1 \quad (46)$$

in hitrost jedra, ki mu dodamo indeks 2 :

$$v_2^* = 0 - v^* = -\frac{1}{A + 1} v_1$$

kjer smo vzeli, da jedro na začetku miruje ($v_2 = 0$). Gibalni količini G pa bosta:

$$G_1^* = mv_1^* = m \frac{A}{A+1} v_1$$

$$G_2^* = mv_2^* = -mA \frac{1}{A+1} v_1$$

in kot vidimo, sta res nasprotno enaki.

Ohranitev energije in gibalne količine v težiščnem sistemu pomeni, da bosta gibalni količini posameznih delcev po trku ostali enaki, spremenila se bo le smer gibanja. Vzemimo, da se nevtron po trku giblje s hitrostjo \mathbf{v}'_1 , kjer s krepko pisavo pridamo količini lastnosti vektorja, s ' pa smo identificirali količine po trku. Po velikosti sta začetna in končna (') hitrost nevtrona v težiščnem sistemu enaki, torej

$$v'_1 = v_1$$

Ob inverzni Galilejevi transformaciji bo hitrost v laboratorijskem sistemu (torej brez *) enaka:

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}^* + \mathbf{v}'_1^*$$

Ker nas zanima izguba energije, rabimo le velikost vektorja \mathbf{v}'_1 . Še več, kinetična energija bo povezana s kvadratom velikosti hitrosti, tako da lahko izračunamo le:

$$v'^2_1 = (\mathbf{v}^* + \mathbf{v}'_1^*)(\mathbf{v}^* + \mathbf{v}'_1^*) = v^{*2} + 2v^*v'_1 \cos \theta' + v'^2_1^*$$

kjer smo vzeli, da se nevtron po trku giblje pod kotom θ' glede na začetno smer gibanja; kot θ' merimo v težiščnem sistemu. Vstavimo enači (45) in (46):

$$v'^2_1 = \frac{A^2 + 2A \cos \theta' + 1}{(A+1)^2} v_1^2$$

Razmerje kinetičnih energij po (E') in pred (E) trkom bo tako:

$$\frac{E'}{E} = \frac{mv'^2_1}{mv_1^2} = \frac{A^2 + 2A \cos \theta' + 1}{(A+1)^2}$$

in je neodvisno od energije. Uvedemo parameter:

$$\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1} \right)^2 \in [0, 1)$$

kjer spodnjo mejo dosežemo za tarčo iz vodika. Ker lahko $\cos \theta'$ zavzame le vrednosti med -1 in 1, dobimo meje za energijo sipanega fotona:

$$\alpha E < E' < E$$

Brez večjih težav lahko privzamemo, da je porazdelitev po sipalnem kotu sferno simetrična (sipanje na orbitalah s v jedru). Takrat bo porazdelitev po energijah po prvem trku:

$$\frac{dw}{dE'} = \frac{dw}{d \cos \theta'} \left| \frac{d \cos \theta'}{dE'} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d \cos \theta'}{dE'} \right|$$

Izračunamo inverz odvoda:

$$\frac{dE'}{d \cos \theta'} = \frac{2A}{(A+1)^2} E = (1 - \alpha) E$$

Kar nam da konstatno porazdelitev po energijah enkrat sipanega nevtrona:

$$\frac{dw}{dE'} = \begin{cases} 0 & E' < \alpha E \\ \frac{1}{(1-\alpha)E} & \alpha E < E' < E \\ 0 & E' > E \end{cases} \quad (47)$$

Za bolj jasno predstavo zapišimo $w_1(E', E)$ kjer notacija pomeni gostoto verjetnosti, da bo imel nevtron energijo E' po enkratnem sipanju, če je imel pred sipanjem energijo E . $w_1(E', E)$ ustreza porazdelitvi v enači (47). Ustrezno s to notacijo iščemo funkcijo $w_2(E'', E)$, ki jo zapišemo kot:

$$w_2(E'', E) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(E', E) w_1(E'', E') dE'$$

kar v besedah opišemo kot sipanje nevtrona z energijo E , pri čemer je energija sipanega elektrona E' , ki mu sledi še eno sipanje, kjer pa je vhodna energija E' in je energija po sipanju E'' . Pri tem se ne oziramo na

energijo vmesnega stanja E' ampak seštejemo po vseh možnih energijah. Zaradi stopničaste narave w_1 bodo meje integrala bistveno odvisne od velikosti E'' glede na E . Za lažjo predstavo zapišimo $w_1(E'', E')$:

$$w_1(E'', E') = \begin{cases} 0 & E'' < \alpha E' \\ \frac{1}{(1-\alpha)E'} & \alpha E' < E'' < E' \\ 0 & E'' > E' \end{cases} \quad (48)$$

Relacijo za $w_1(E'', E')$ različno od 0 moramo obrnit tako, da nam podaja interval E' glede na dani E'' , namreč:

$$\alpha E' < E'' < E' \quad \rightarrow \quad E'' < E' < \frac{E''}{\alpha} \quad (49)$$

Podobno imamo $w_1(E', E)$ različno od 0, le ko je:

$$\alpha E < E' < E \quad (50)$$

Da bo w_2 različen od 0, mora E' ležati v obeh intervalih. V obeh primerih je razmerje med zgornjo in spodnjo mejo enako α , zato en interval nikoli ne bo ležal znotraj drugega; imamo le dve možnosti:

1. da je spodnja meja (50) v intervalu (49):

$$E'' < \alpha E < \frac{E''}{\alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha^2 E < E'' < \alpha E$$

Takrat bodo meje integrala za w_2 spodnja meja (50) in zgornja meja (49):

$$w_2(E'', E) = \frac{1}{(1-\alpha)^2 E} \int_{\alpha E}^{\frac{E''}{\alpha}} \frac{dE'}{E'}$$

2. da je spodnja meja (49) v intervalu (50):

$$\alpha E < E'' < E$$

Takrat so meje integrala spodnja meja (49) in zgornja meja (50):

$$w_2(E'', E) = \frac{1}{(1-\alpha)^2 E} \int_{E''}^E \frac{dE'}{E'}$$

Ko poberemo vse skupaj, dobimo:

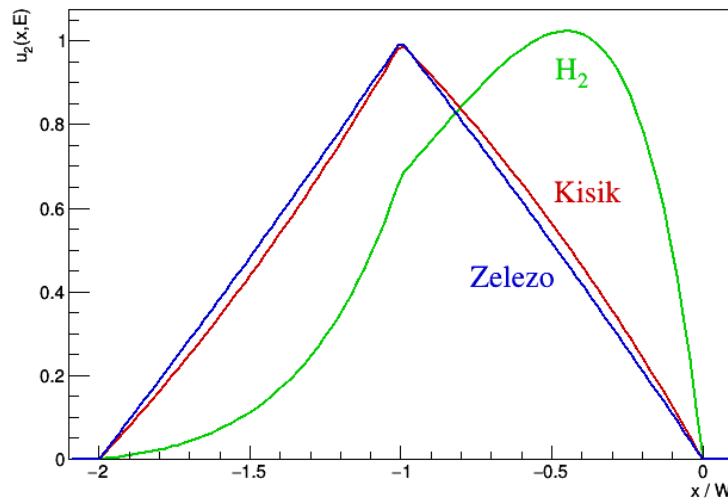
$$w_2(E'', E) = \frac{1}{(1 - \alpha)^2 E} \begin{cases} \ln \frac{E''}{E} - 2 \ln \alpha & \alpha^2 E < E'' < \alpha E \\ -\ln \frac{E''}{E} & \alpha E < E'' < E \end{cases}$$

Za lažjo predstavo oblike uvedemo novo spremenljivko $x = \ln(E''/E)$ in parameter $W = -\ln \alpha$. Ker je $\alpha < 1$, je $W > 0$. Dobimo še eksponent pri prehodu na novo spremenljivko, skupaj:

$$u_2(x, E) = \frac{e^x}{(1 - \alpha)^2} \begin{cases} x + 2W & -2W < x < -W \\ -x & -W < x < 0 \end{cases}$$

kar pa je, za $A > 20$ zelo podobno trikotni funkciji, ki bi jo dobili po konvoluciji dveh konstantnih porazdelitev. Ilustracijo porazdelitve kaže slika, kjer na os x nanašamo skalirano koordinato x/W , za vodik (H_2 , $A=2$), kisik (O , $A=16$) in železo (Fe , $A=56$).

Porazdelitev po $\log(E''/E)$ po drugem sipanju



- Določi število potrebnih sipanj, po katerih se nevtronom spremeni kinetična energija z 1 MeV na 1/40 eV in jih štejemo za termične! (18.5.2015 in 25.5.2015)

Iz prejšnje naloge dobimo porazdelitev po energijskih izgubah po enem trku kot

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 + 2A \cos \theta' + A^2}{(1 + A)^2}$$

Po vzoru iz prejšnje naloge uvedemo spremenljivko:

$$u = \ln \frac{E'}{E}$$

Ocenimo povprečno izgubo na trk glede na izotropno porazdelitev, ki smo jo predpostavili v prejšnji nalogi:

$$\eta = \langle u \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \left[\frac{1 + 2A \cos \theta' + A^2}{(1 + A)^2} \right] d \cos \theta'$$

Nedoločeni integral za tako funkcijo je:

$$\int \ln \left[\frac{a + bx}{c} \right] = \left(\frac{b}{a} + x \right) \ln \left[\frac{a + bx}{c} \right] - \left(\frac{b}{a} + x \right)$$

kar nam da za naš integral:

$$\eta = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1 + A^2}{2A} + 1 \right) \ln \left[\frac{1 + A^2 + 2A}{(1 + A)^2} \right] - \left(\frac{1 + A^2}{2A} + 1 \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1 + A^2}{2A} - 1 \right) \ln \left[\frac{1 + A^2 - 2A}{(1 + A)^2} \right] + \left(\frac{1 + A^2}{2A} - 1 \right) \right\}$$

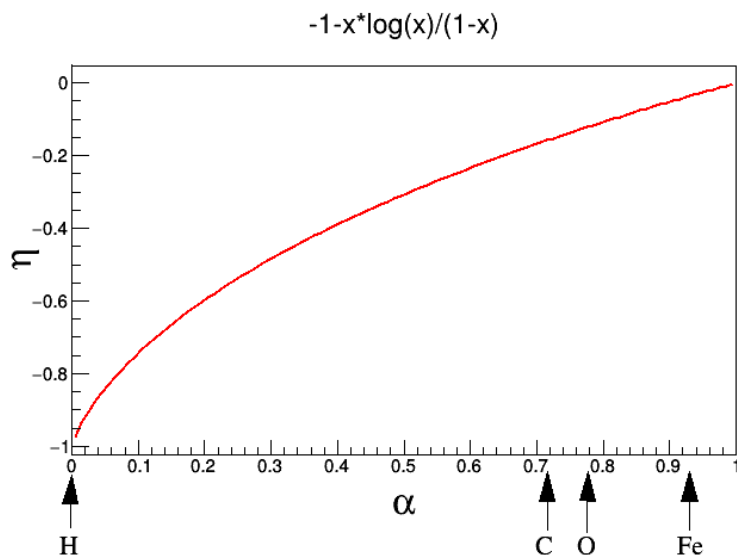
Po algebri dobimo:

$$\eta = -1 - \frac{\alpha \ln \alpha}{1 - \alpha}$$

Dve navidezni neskončnosti sta pravzaprav zelo pohlevni, tako pri $\alpha \rightarrow 0$ kot pri $\alpha \rightarrow 1$ je η končna:

$$\eta(\alpha = 0) = -1 \quad \text{in} \quad \eta(\alpha = 1) = 0$$

Slika kaže odvisnost logaritma povprečne izgube od parametra α



V odvisnosti od A in posledično α bo povprečni delež ohranjene energije okrog $e^{-1}=37\%$ za lahke, okrog $e^{-0,2}=80\%$ za srednje in več kot 90 % za težke elemente.

Ker se pri zaporednih trkih logaritmi ohranjene energije seštevajo, dobimo povprečno število potrebnih trkov kot kvocient med logaritmom željene izgube in η :

$$N = \frac{\ln \frac{E_1}{E_0}}{\eta}$$

Kot primer si oglejmo moderacijo v vodi. Voda je sestavljena iz vodika (H, A=1) in kisika (O, A=16). Izračunamo η za vsakega posebej:

$$\begin{array}{ll} \eta_H = -1 & \alpha_H = 0 \\ \eta_O = -0,56 & \alpha_O = 0,78 \end{array}$$

Pogostost trkov za posamezni tip jeder je sorazmerna z masnim deležem gradnikov v snovi. Tega določimo kot:

$$w_i = \frac{A_i}{\sum_j A_j} \quad (51)$$

V vodi je $w_H=1/9=0,11$ in $w_O=8/9=0,89$, in efektivna η je torej:

$$\eta = w_O \eta_O + w_H \eta_H = -0.61$$

Do termične energije torej nevtroni s kinetično energijo 1 MeV rabijo:

$$N = \frac{\ln(0,025 \text{ eV}/1 \text{ MeV})}{-0.61} = 17,5/0,61 = 28,7 \text{ trkov}$$

8 Identifikacija delcev

- Določi povprečne izgube delcev pionov (π), kaonov (K) in protonov (p) v 0,5 m debeli večični proporcionalnik komori (VŽPK) napolnjeni z Ar pri običajnih pogojih. Vzemi, da smo vsem izmerili enako gibalno količino 0,5 GeV/c. Za ločevanje p in K določi energijsko mejo, da bomo zajeli 99 % vseh protonov, pri čemer bo v vzorcu manj kot 1 % kaonov, ki so prečkali detektor. (25.5.2015)

Parameter ζ :

$$\zeta = \frac{K Z x \rho}{2 A \beta^2}$$

Povprečna izguba:

$$\Delta_p = \zeta \left(\ln \frac{mc^2 \beta^2 \gamma^2}{I} + \ln \frac{\zeta}{I} + \dots \right)$$

Naključna napaka na odloženi energiji, izražena kot širina na polovični višini vrha Landauove porazdelitve:

$$w = 4\zeta \quad \sigma = 1,7\zeta$$

kjer je σ parameter Gaussove porazdelitve, ki se ji Landauova porazdelitev približuje za debele detektorje ($x \rightarrow \infty$).

Za dano porazdelitve ciljnih delcev w_i in spodnji energijski prag T_1 in zgornji energijski prag T_2 bo delež pravilno prepoznanih delcev kar

$$P_i = \int_{T_1}^{T_2} w_i(E) dE$$

Če si mislimo, da so w_i Gaussove porazdelitve, bomo za izkoristek dobili:

$$P_i = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{\Delta_{p,i} - T_1}{\sqrt{2}\sigma_i} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{T_2 - \Delta_{p,i}}{\sqrt{2}\sigma_i} \right) \right\}$$

Nekatere popularne vrednosti funkcije $\operatorname{erf}(\cdot)$ in $\operatorname{erfc}(\cdot)$ daje tabela:

x	erf(x)	erfc (x)
$\sqrt{2}/2$	0,683	0.327
$\sqrt{2}$	0,954	0,0455
$3\sqrt{2}/2$	0,997	0,0027

Podobno bomo za napačno prepoznane delce uporabili prispevke drugih j delcev, ki segajo v naš energijski interval:

$$Q_i = \sum_j \int_{T_1}^{T_2} w_j(E) dE$$

Za delce, katerih povprečna izguba $\Delta_{p,j}$ je manjša od T_1 brez težav premaknemo zgornjo mejo v neskončnost; ravno nasprotno ravnamo z delci z $\Delta_{p,k} > T_2$, v približku Gaussovih porazdelitev bo:

$$Q_i = \sum_{j, \Delta_{p,j} < T_1} \text{erfc} \left(\frac{T_1 - \Delta_{p,j}}{\sqrt{2}\sigma_j} \right) + \sum_{k, \Delta_{p,k} > T_2} \text{erfc} \left(\frac{\Delta_{p,k} - T_2}{\sqrt{2}\sigma_k} \right)$$

- Delce π , K in p ločujemo z merjenjem časa preleta z detektorjem z ločljivostjo $\sigma=100$ ps in razdaljo $d=3$ m med detektorjema. Ko imajo delci gibalno količino $0,5$ GeV/c, določi meje na merjenih časih, da bo v vzorcu za posamezni delec 99 % ciljnih delcev in da bo napačno prepoznanih delcev manj kot 1 %. Kakšna je največja gibalna količina, pri kateri lahko s tako čistostjo ločujemo delce K in p? (9.6.2015)

Čas preleta je:

$$t = \frac{d}{c\beta}$$

Porazdelitve časovnih meritev so res Gaussovske, ravnamo podobno kot pri prej snji nalogi. Pri iskanju največje energije zahtevamo, da je razlika povprečnih časov za prelet K in p večja od $6\sigma_t$ in od tod določimo gibalno količino.

Za β je uporabna enačba:

$$\beta = \frac{\beta\gamma}{\gamma} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (52)$$

in

$$\frac{1}{\beta} = \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} = 1 + \frac{m^2}{2p^2}$$

kjer velja razvoj za dovolj relativistične delce, kar verjetno drži za iskanje maksimalne gibalne količine.

- Delce π , K in p ločujemo z merjenjem Čerenkovih fotonov na $d=1$ m oddaljenem zaslonu iz fotopomnoževalk. Vzemi, da lahko polmer nastale krožnice merimo na $100 \mu\text{m}$ natančno. Za radiator z $n=1,0005$ določi prag za Čerenkovo sevanje delcev. Pri gibalni količini $10 \text{ GeV}/c$ določi polmer krožnic za delce nad pragom in oceni meje za 99 % čistost. Do katere gibalne količine še lahko ločujemo delce K in p s tako natančnostjo? (9.6.2015)

Čerenkov kot:

$$\cos \theta_C = \frac{1}{n\beta}$$

Prag sevanje pri:

$$\frac{1}{n\beta} < 1$$

Polmer:

$$R = d \tan \theta_C = d \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta_C} - 1} = d \sqrt{n^2 \beta^2 - 1}$$

9 Obisk laboratorija odseka F9

(1.6.2015)