TEORIJA GRUP 2000/1

Andrej Studen

# Oktaedrska grupa (O)

SEMINAR

## 1 Definicija

Oktaederska grupa je grupa točkovnih simetrij oktaedra. Simetrije te grupe ustrezajo tudi točkovnim simetrijam kocke. Zato si bomo elemente grupe lažje predstavljali na mreži kocke.

## 2 Elementi

Za opis elementov grupe si predstavljamo kocko s težiščem v središču koordinatnega sistema in stranicami vzporednimi koordinatnimi osmi.

Elementi grupe so očitno $C_4$ podgrupe okoli vsake od koordinatnih osi. Označimo jih z V za vertikalno os, F za frontalno (y ali **k** os) in H za horizontalno (x ali **i** os), in indeksom, ki ustreza vrtenju v pozitivni smeri okrog te osi za kot $\frac{2k\Pi}{4}$, torej:

$$V_1,\ V_2,\ V_3 \tag{1}$$

$$H_1,\ H_2,\ H_3 \tag{2}$$

$$F_1,\ F_2,\ F_3 \tag{3}$$

Nadalje bodo to $C_3$ podgurpe okrog telesnih diagonal. Te so štiri in vsebujejo po eno izmed oglišč ene ploskve vzporedne $xy$ ravnini. Označimo oglišča z A=(-1,-1,-1), B=(1,-1,-1), C=(1,1,-1), D=(-1,1,-1), in imenujmo elemente glede na kot rotacije v pozitivni smeri okrog diagonale za kot $\frac{2k\Pi}{3}$ kot:

$$A_1,\ A_2$$

$$B_1,\ B_2$$

$$C_1,\ C_2$$

$$D_1,\ D_2$$

Na koncu ostanejo še $C_2$ rotacije okrog osi, vzporednim ploskovnim diagonalam, na polovični višini. Takih osi je 6, imenujemo jih glede na $C_4$ osi, na katere so paroma pravokotne. S tem mislimo, da lahko za obe diagonali vsake ploskve, dvignjeni na polo'vično vis'ino nad to ploskev, najdemo os simetrije $C_4$, ki je na obe pravokotna. Z nižjim indeksom imenujemo bližjo točki A, torej:

$$v_1,\ v_2$$
$$h_1,\ h_2$$
$$f_1,\ f_2$$

Dodamo še enoto

$$E$$

in imamo skupaj 24 elementov.

# 3 Tablica množenja

| E | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $H_1$ | $H_2$ | $H_3$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $A_1$ | $A_2$ | $B_1$ | $B_2$ | $C_1$ | $C_2$ | $D_1$ | $D_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | E | $A_1$ | $v_1$ | $C_1$ | $B_1$ | $v_2$ | $D_1$ | $h_1$ | $F_3$ | $f_1$ | $H_1$ | $h_2$ | $F_1$ | $f_2$ | $H_3$ |
| $V_2$ | $V_3$ | E | $V_1$ | $h_1$ | $F_2$ | $h_2$ | $f_1$ | $H_2$ | $f_2$ | $B_2$ | $D_1$ | $C_2$ | $A_1$ | $D_2$ | $B_1$ | $A_2$ | $C_1$ |
| $V_3$ | E | $V_1$ | $V_2$ | $B_2$ | $v_2$ | $D_2$ | $C_2$ | $v_1$ | $A_2$ | $H_1$ | $f_2$ | $F_1$ | $h_1$ | $H_3$ | $f_1$ | $F_3$ | $h_2$ |
| $H_1$ | $D_1$ | $h_2$ | $C_2$ | $H_2$ | $H_3$ | E | $A_1$ | $h_1$ | $B_2$ | $f_2$ | $V_3$ | $V_1$ | $f_1$ | $F_3$ | $v_1$ | $v_2$ | $F_1$ |
| $H_2$ | $v_2$ | $F_2$ | $v_1$ | $H_3$ | E | $H_1$ | $f_2$ | $V_2$ | $f_1$ | $D_2$ | $C_2$ | $D_1$ | $C_1$ | $B_2$ | $A_2$ | $B_1$ | $A_1$ |
| $H_3$ | $B_1$ | $h_1$ | $A_2$ | E | $H_1$ | $H_2$ | $D_2$ | $h_2$ | $C_1$ | $F_1$ | $v_1$ | $v_2$ | $F_3$ | $f_1$ | $V_3$ | $V_1$ | $f_2$ |
| $F_1$ | $A_1$ | $f_2$ | $D_2$ | $C_2$ | $f_1$ | $B_1$ | $F_2$ | $F_3$ | E | $v_1$ | $H_3$ | $h_1$ | $V_3$ | $V_1$ | $h_2$ | $H_1$ | $v_2$ |
| $F_2$ | $v_1$ | $H_2$ | $v_2$ | $h_2$ | $V_2$ | $h_1$ | $F_3$ | E | $F_1$ | $C_1$ | $B_1$ | $A_2$ | $D_2$ | $A_1$ | $D_1$ | $C_2$ | $B_2$ |
| $F_3$ | $C_1$ | $f_1$ | $B_2$ | $D_1$ | $f_2$ | $A_2$ | E | $F_1$ | $F_2$ | $V_1$ | $h_1$ | $H_3$ | $v_2$ | $v_1$ | $H_1$ | $h_2$ | $V_3$ |
| $A_1$ | $f_2$ | $D_2$ | $F_1$ | $v_1$ | $C_1$ | $V_1$ | $h_1$ | $B_2$ | $H_1$ | $A_2$ | E | $V_2$ | $C_2$ | $D_1$ | $F_2$ | $H_2$ | $B_1$ |
| $A_2$ | $H_3$ | $B_1$ | $h_1$ | $F_3$ | $D_1$ | $f_2$ | $V_3$ | $C_2$ | $v_1$ | E | $A_1$ | $D_2$ | $F_2$ | $H_2$ | $B_2$ | $C_1$ | $V_2$ |
| $B_1$ | $h_1$ | $A_2$ | $H_3$ | $F_1$ | $C_2$ | $f_1$ | $v_2$ | $D_1$ | $V_1$ | $F_2$ | $C_1$ | $B_2$ | E | $V_2$ | $D_2$ | $A_1$ | $H_2$ |
| $B_2$ | $F_3$ | $C_1$ | $f_1$ | $v_2$ | $D_2$ | $V_3$ | $H_1$ | $A_1$ | $h_1$ | $D_1$ | $V_2$ | E | $B_1$ | $A_2$ | $H_2$ | $F_2$ | $C_2$ |
| $C_1$ | $f_1$ | $B_2$ | $F_3$ | $V_1$ | $A_1$ | $v_1$ | $H_3$ | $D_2$ | $h_2$ | $B_1$ | $F_2$ | $H_2$ | $D_1$ | $C_2$ | E | $V_2$ | $A_2$ |
| $C_2$ | $H_1$ | $D_1$ | $h_2$ | $f_1$ | $B_1$ | $F_1$ | $v_1$ | $A_2$ | $V_3$ | $H_2$ | $D_2$ | $A_1$ | $V_2$ | E | $C_1$ | $B_2$ | $F_2$ |
| $D_1$ | $h_2$ | $C_2$ | $H_1$ | $f_2$ | $A_2$ | $F_3$ | $V_1$ | $B_1$ | $v_2$ | $V_2$ | $B_2$ | $C_1$ | $H_2$ | $F_2$ | $A_1$ | $D_2$ | E |
| $D_2$ | $F_1$ | $A_1$ | $f_2$ | $V_3$ | $B_2$ | $v_2$ | $h_2$ | $C_1$ | $H_3$ | $C_2$ | $H_2$ | $F_2$ | $A_2$ | $B_1$ | $V_2$ | E | $D_1$ |
| $v_1$ | $H_2$ | $v_2$ | $F_2$ | $C_1$ | $V_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $V_3$ | $C_2$ | $H_3$ | $F_1$ | $f_2$ | $h_2$ | $H_1$ | $F_3$ | $f_1$ | $h_1$ |
| $v_2$ | $F_2$ | $v_1$ | $H_2$ | $D_2$ | $V_3$ | $B_2$ | $D_1$ | $V_1$ | $B_1$ | $h_2$ | $f_1$ | $F_3$ | $H_3$ | $h_1$ | $f_2$ | $F_1$ | $H_1$ |
| $h_1$ | $A_2$ | $H_3$ | $B_1$ | $F_2$ | $h_2$ | $V_2$ | $B_2$ | $H_1$ | $A_1$ | $F_3$ | $V_1$ | $V_3$ | $F_1$ | $f_2$ | $v_2$ | $v_1$ | $f_1$ |
| $h_2$ | $C_2$ | $H_1$ | $D_1$ | $V_2$ | $h_1$ | $F_2$ | $C_1$ | $H_3$ | $D_2$ | $f_1$ | $v_2$ | $v_1$ | $f_2$ | $F_1$ | $V_1$ | $V_3$ | $F_3$ |
| $f_1$ | $B_2$ | $F_3$ | $C_1$ | $B_1$ | $F_1$ | $C_2$ | $H_2$ | $f_2$ | $V_2$ | $v_2$ | $h_2$ | $H_1$ | $V_1$ | $V_3$ | $H_3$ | $h_1$ | $v_1$ |
| $f_2$ | $D_2$ | $F_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $F_3$ | $D_1$ | $V_2$ | $f_1$ | $H_2$ | $V_3$ | $H_1$ | $h_2$ | $v_1$ | $v_2$ | $h_1$ | $H_3$ | $V_1$ |

| E | $v_1$ | $v_2$ | $h_1$ | $h_2$ | $f_1$ | $f_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $V_1$ | $F_2$ | $H_2$ | $B_2$ | $D_2$ | $C_2$ | $A_2$ |
| $V_2$ | $v_2$ | $v_1$ | $H_1$ | $H_3$ | $F_1$ | $F_3$ |
| $V_3$ | $H_2$ | $F_2$ | $A_1$ | $C_1$ | $B_1$ | $D_1$ |
| $H_1$ | $A_2$ | $B_1$ | $V_2$ | $F_2$ | $C_1$ | $D_2$ |
| $H_2$ | $V_3$ | $V_1$ | $h_2$ | $h_1$ | $F_3$ | $F_1$ |
| $H_3$ | $C_2$ | $D_1$ | $F_2$ | $V_2$ | $B_2$ | $A_1$ |
| $F_1$ | $C_1$ | $B_2$ | $A_2$ | $D_1$ | $V_2$ | $H_2$ |
| $F_2$ | $V_1$ | $V_3$ | $H_3$ | $H_1$ | $f_2$ | $f_1$ |
| $F_3$ | $A_1$ | $D_2$ | $B_1$ | $C_2$ | $H_2$ | $V_2$ |
| $A_1$ | $F_3$ | $f_1$ | $V_3$ | $v_2$ | $h_2$ | $H_3$ |
| $A_2$ | $H_1$ | $h_2$ | $F_1$ | $f_1$ | $v_2$ | $V_1$ |
| $B_1$ | $h_2$ | $H_1$ | $F_3$ | $f_2$ | $V_3$ | $v_1$ |
| $B_2$ | $f_2$ | $F_1$ | $F_1$ | $v_1$ | $H_3$ | $h_2$ |
| $C_1$ | $F_1$ | $f_2$ | $v_2$ | $V_3$ | $H_1$ | $h_1$ |
| $C_2$ | $H_3$ | $h_1$ | $f_2$ | $F_3$ | $V_1$ | $v_2$ |
| $D_1$ | $h_1$ | $H_3$ | $f_1$ | $F_1$ | $v_1$ | $V_3$ |
| $D_2$ | $f_1$ | $F_3$ | $v_1$ | $V_1$ | $h_1$ | $H_1$ |
| $v_1$ | E | $V_2$ | $D_2$ | $B_2$ | $D_1$ | $B_1$ |
| $v_2$ | $V_2$ | E | $C_1$ | $A_1$ | $A_2$ | $C_2$ |
| $h_1$ | $D_1$ | $C_2$ | E | $H_2$ | $D_2$ | $C_1$ |
| $h_2$ | $B_1$ | $A_2$ | $H_2$ | E | $A_1$ | $B_2$ |
| $f_1$ | $D_2$ | $A_1$ | $D_1$ | $A_2$ | E | $F_2$ |
| $f_2$ | $B_2$ | $C_1$ | $C_2$ | $B_1$ | $F_2$ | E |

## 4 Podgrupe

Podgrupe so podmnožice, ki so zaprte za množenje in ustrezajo vsem lastnostim grup.

Poleg grup, iz katerih smo sestavili grupo O:

- $C_4$:

$$\{E, V_1, V_2, V_3\}$$
$$\{E, H_1, H_2, H_3\}$$
$$\{E, F_1, F_2, F_3\}$$

- $\mathrm{C}_2^4$

$$\{E, V_2\}$$
$$\{E, H_2\}$$
$$\{E, F_2\}$$

- $C_3$:

$$\{E, A_1, A_2\}$$
$$\{E, B_1, B_2\}$$
$$\{E, C_1, C_2\}$$
$$\{E, D_1, D_2\}$$

- $C_2$:

$$\{E, v_1\}$$
$$\{E, v_2\}$$
$$\{E, f_1\}$$
$$\{E, f_2\}$$
$$\{E, h_1\}$$
$$\{E, h_2\}$$

imamo še sestavljene podgurpe:

- $C_2^h$,V:

$$\{E, V_2, H_2, F_2\}$$
$$\{E, v_1, v_2, V_2\}$$
$$\{E, h_1, h_2, H_2\}$$
$$\{E, f_1, f_2, F_2\}$$

- D$_3$:

$$\{E, v_2, h_2, f_1, A_1, A_2\}$$
$$\{E, v_1, h_2, f_2, B_1, B_2\}$$
$$\{E, v_2, h_1, f_2, C_1, C_2\}$$
$$\{E, v_1, h_1, f_1, D_1, D_2\}$$

- D$_4$:

$$\{E, v_1, v_2, V_1, V_2, V_3, H_2, F_2\}$$
$$\{E, h_1, h_2, H_1, H_2, H_3, V_2, F_2\}$$
$$\{E, f_1, f_2, F_1, F_2, F_3, H_2, V_2\}$$

- T:

$$\{E, A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, V_2, H_2, F_2\}$$

## 5 Razredi

Z osmi, pravoktonimi na $C_4$ os sta v istem razredu zasuk za $\pm\frac{\Pi}{2}$. Z vrtenjem okrog telesnih diagonal so v istem razredu vsi taki zasuki okorog vseh treh osi $C_4$. V svojem razredu so tako tudi rotacije za Π. Vse $C_3$ sestavljajo naslednji razred, zadnjega pa vse $C_2$ rotacije. Tako lahko zapišemo:

$$3C_2^h + 6C_4 + 6C_2 + 8C_3 + E$$

kot razcep O na ekvivalenčne razrede.

## 6 Karakterji grupe

Karakterji so sledi ireducibilnih upodobitev grupe. Najdemo jih lahko s faktorsko grupo, saj je $O = D_3 \wedge C_2^h$, torej poiščemo najprej karakterje za $D_3$. Ta ima tri razrede:

$$3C_2 + 2C_3 + E$$

in [Elliot, 1979] enako število upodobitev. Iz enačbe:

$$\sum_{i=1}^{3} d_i^2 = |g| = 6$$

razberemo, da so dimenizije nerazcepnih upodobitev $d_i$ enake 1, 1 in 2. Z $|g|$ označimo moč grupe. S pomočjo ortogonalnostnih relacij:

$$\sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)*} = |g| \delta_{\alpha\beta} \tag{4}$$

$$\sum_\alpha \chi_p^{(\alpha)*} \chi_q^{(\alpha)} = \frac{|g|}{C_p} \delta_{pq} \tag{5}$$

lahko določimo karkaterje za ta preprost primer. $\chi_p^{(\alpha)}$ je karakter nerazcepne upodobitve $\alpha$ elementa iz razreda $p$, $C_p$ pa je moč tega razreda. Tabela karakterjev $D_3$ po razredih je:

| | E | C$_3$ | C$_2$ |
|---|---|---|---|
| C$_p$ | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | -1 |
| 3 | 2 | -1 | 0 |

Ko vpišemo to v tabelo za O, dobimo še 12 neznank $\chi_i$:

| | E | $C_3$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_4^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_p$ | 1 | 8 | 6 | 6 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | $\chi_1$ | $\chi_2$ |
| 3 | 2 | -1 | 0 | $\chi_3$ | $\chi_4$ |
| 4 | 3 | $\chi_5$ | $\chi_6$ | $\chi_7$ | $\chi_8$ |
| 5 | 3 | $\chi_9$ | $\chi_{10}$ | $\chi_{11}$ | $\chi_{12}$ |

Te dobimo s pomočjo enačb (4) in (5). Končna tabela je tako:

| | E | $C_3$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_4^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_p$ | 1 | 8 | 6 | 6 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 3 | 2 | -1 | 0 | 0 | 2 |
| 4 | 3 | 0 | -1 | 1 | -1 |
| 5 | 3 | 0 | 1 | -1 | -1 |

# 7 Upodobitev nad prostorom polinomov druge stopnje

Inducirana preslikava nad prostorom funkcij $\phi(\mathbf{r})$ je definirana kot:

$$\phi'(\mathbf{r}) = T(G)\phi(\mathbf{r}) = \phi(G^{-1}\mathbf{r}) \tag{6}$$

Ker obstaja podgrupa T grupe O je dovolj poiskati upodobitve dveh grupnih elementov, do ostalih pa pridemo z njunim množenjem. Tako vzamemo en element iz te podgrupe, npr. $A_1$ in mu dodamo en element iz preostanka grupe, npr. $V_1$, tak, da ni v nobeni podgrupi z $A_1$. Zares je to dovolj, da z njima in njunimi produkti pokrijemo grupo.

Najprej naredimo upodobitev S(g) nad običajnim tri-dimenzionalnim prostorom. Razpenjajo naj ga bazni vektorji **i**,**j** in **k**, kot običajno.

$$S(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad S(V_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V prostoru polinomov druge stopnje pa definirajmo bazo z:

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{r})^2, \\
\phi_2(\mathbf{r}) &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{r})^2, \\
\phi_3(\mathbf{r}) &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})^2, \\
\phi_4(\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{j}\cdot\mathbf{r}), \\
\phi_5(\mathbf{r}) &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \\
\phi_6(\mathbf{r}) &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{r})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}).
\end{aligned}$$

Te funkcije so med seboj linearno neodvisne in vsak polinom druge stopnje v x,y in z lahko sestavimo iz teh funkcij. Zato je to zares baza.

Po pravilu (6) lahko zapišemo upodobitve T(g) grupe O nad tem prostorom. Seveda zadostuje upodobitev elementov $V_1$ in $A_1$, do ostalih pa pridemo z njunim medsebojnim množenjem.

$$T(A_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad T(V_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seveda je to razcepna upodobitev. Da poiščemo nerazcepne upodobitve, iz katerih je sestavljena, pa moramo poznati karakterje te upodobitve za vse razrede. Poleg identitete, $C_4$ in $C_3$ razredov, katerih predstavnike poznamo, določimo še predstavnike $C_4^2$ in $C_2$ razredov, recimo $V_2 = V_1V_1$ in $h_1 = V_1A_1$:

$$T(V_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad T(h_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

To nam da vektor karakterjev po razredih $\chi = (6, 0, 2, 0, 2)$. Zdaj lahko poiščemo razcep te upodobitve na nerazcepno upodobitev. Število posameznih upodobitev $m_\alpha$ nam podaja enačba:

$$m_\alpha = \frac{1}{|g|} \sum_p C_p \chi_p^{(\alpha)*} \chi_p \tag{7}$$

To nam da zapis:

$$T = 1 \cdot T^{(1)} \dot{+} 1 \cdot T^{(3)} \dot{+} 1 \cdot T^{(5)} \tag{8}$$

# Literatura

[Elliot, 1979] J. P. Elliot, P. G. Dawber. *Symmetry in physics*. London: MacMillan Publishers, 1979.