Prosojnice s predavanj iz fizike na Fakulteti za kemijo in kemijsko tehnologijo Univerze v Mariboru.

Prosojnice so lahko le v pomoč pri študiju predmetov Fizika I in Fizika II, za celovit študij je potrebno uporabljati tudi ustrezen učbenik!

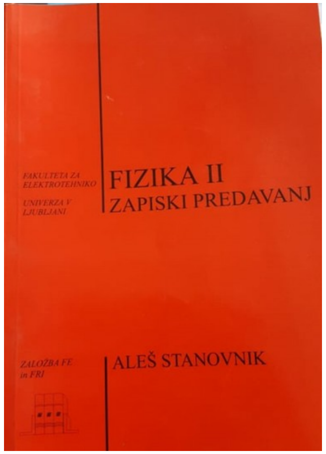
Prosojnice se še dopolnjujejo in nekatere stvari, ki jih obravnavamo na predavanjih, so pomanjkljivo predstavljene ali celo manjkajo. Lahko se je v njih prikradla tudi kakšna napaka in prosim, da me nanjo opozorite.

FIZIKA I

- **Vsebina:** **Fizika I.:** **kinematika, dinamika, gravitacija, elastomehanika, mehanika tekočin in toplota**
  Fizika II.: elektromagnetno polje, električni tok, nihanje, valovanje, začetki moderne fizike in Fizikalni praktikum

(https://moja.um.si/studijski-programi/Strani/default.aspx?jezik=S)

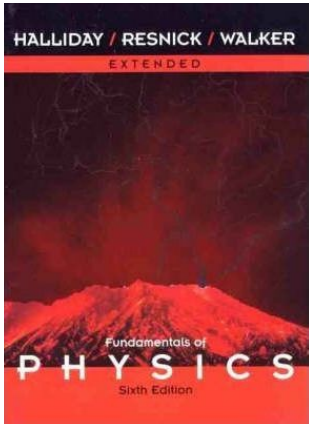
- **Literatura:**
  - A. Stanovnik: Fizika I in II (AS1, AS2)
  - D. Halliday, R. Resnick, Y. Walker: Fundamentals of Physics (HRW)
  - J. Strnad: Fizika, 1. in 2. del (JS1, JS2)

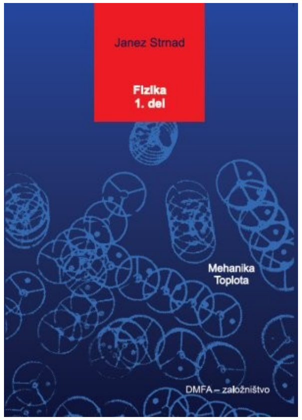


- **Internetna stran (http://fizika.fkkt.um.si/)**
  rezultati so zaščiteni (u: xxx g: xxx)
- UM eŠtudij **https://estudij.um.si**
- Koda za priključitev skupini MS Teams Fizika 1 – UNI je: **4bvjfia**

- Informacije o študiju na moja.UM.si

(https://moja.um.si/student/Strani/default.aspx)





Obveznosti:

- **Fizika I:**
  - pisni del izpita ali dva pisna testa (40%)
  - ustni del izpita (60%) – pogoj za pristop je opravljen pisni del
- **Fizika II:**
  - Fizikalni praktikum (30%) (vse vaje, delovni zvezek, pisni test)
  - pisni del izpita ali dva pisna testa (30%)
  - ustni del izpita (40%) – pogoji za pristop so opravljen izpit iz Fizike I ter opravljena Fizikalni praktikum in pisni del izpita

- **Veljavnost pisnih testov:**
  - ocena 50% ali več – tri izpitna obdobja
  - ocena 40%-49% – izpitno obdobje ki sledi zaključku predavanj pri predmetu (zimsko za Fiziko I in poletno za Fiziko II)

- **Za sporočanje po elektronski pošti uporabljajte svoj študentski elektronski naslov jaz.sem@student.um.si**

Kaj je fizika in s čim se ukvarja?

Fizika (starogrško: φύσις, narava) se ukvarja z odkrivanjem osnovnih zakonitosti narave – iskanjem zvez med količinami.
(Tako skuša razložiti naravne pojave in lastnosti snovi.)

• katere količine opazujemo (merimo):
dolžina, čas, masa, sila, tlak, temperatura …

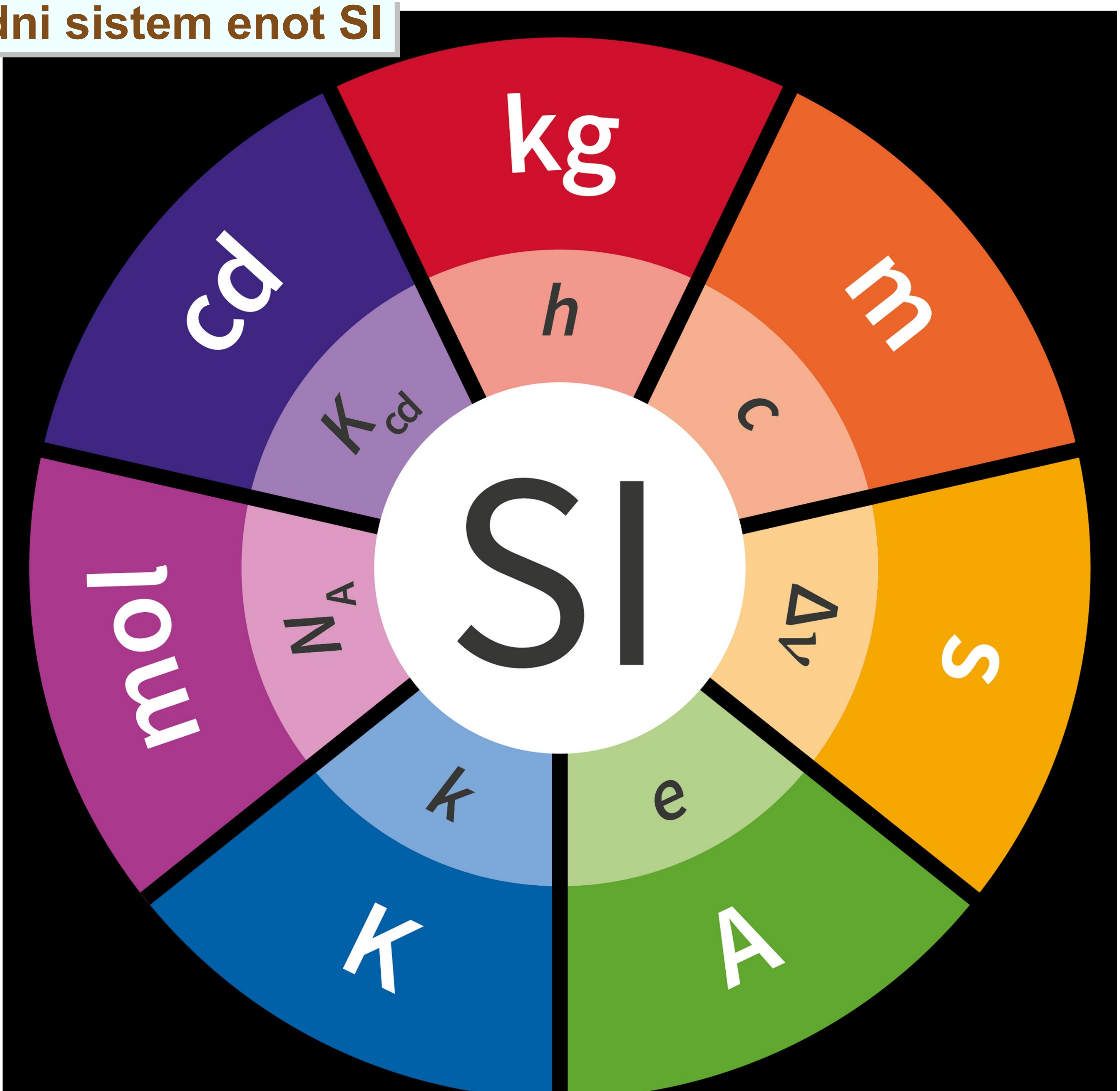
• merske enote: merjenje je primerjava z mersko enoto, ki je obvezen sestavni del zapisa vrednosti neke fizikalne količine

$$1.03\,s\,,\,20.5\,cm\,,\,0.012\,kg$$

• napake pri meritvah in zapis merskih vrednosti:
- absolutna $2.03010932\,s \pm 0.04\,s$
- relativna $2.03(1 \pm 0.02)\,s$

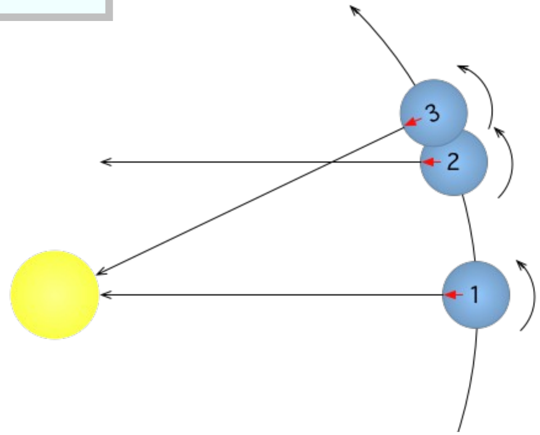
(s številom mest v zapisu nakažemo natančnost zapisane količine)

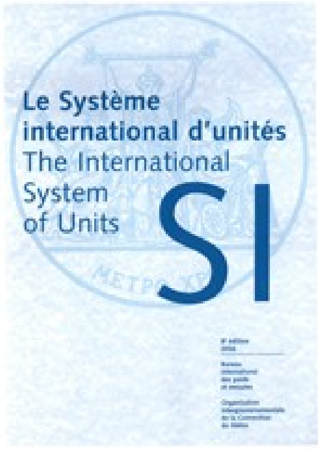
Mednarodni sistem enot SI



https://www.dlib.si/details/URN:NBN:SI:doc-FDX4RY84

Mednarodni sistem enot SI – do 2019





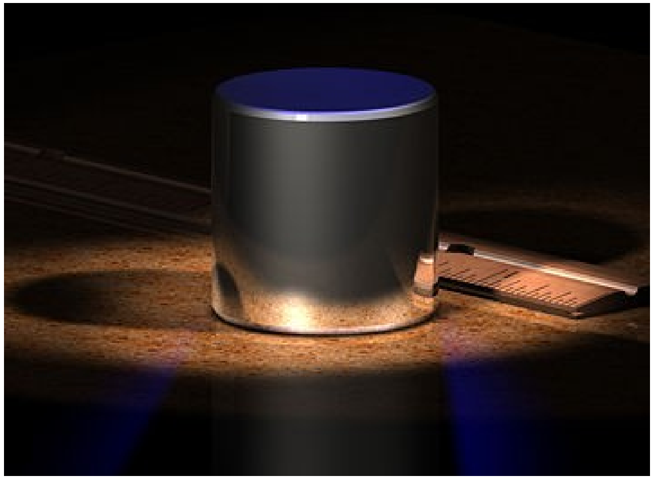
- **čas - sekunda** $[s]$
  - dolžina povprečnega dne, deljena s 86400 (= 24x3600s)

  - **čas potreben za 9.192.631.770 nihajev svetlobe, ki jo izseva ^{133}Cs (pri dogovorjenem prehodu)**

- **dolžina - meter** $[m]$
  - desetmilijonti del dolžine poldnevnika od ekvatorja do pola; → metrska palica iz zlitine iridij-platina (1792)
  - 1.650.763,73 valovnih dolžin svetlobe, ki jo izseva ^{86}Kr (1960)

  - **razdalja, ki jo v vakuumu prepotuje svetloba v času 1s/299.792.458 (dogovor: c = 299.792.458 m/s** – hitrost svetlobe v vakuumu**)**

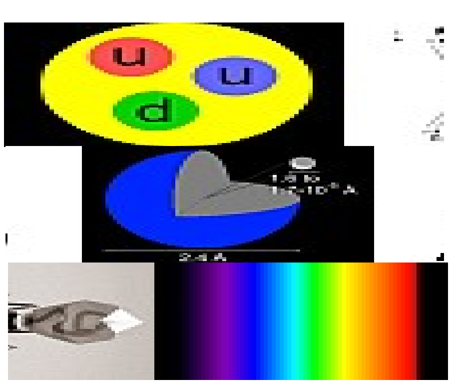
- **masa - kilogram** $[kg]$
  - prakilogram: valj iz zlitine iridij-platina (1887 – masa litra vode pri ~4°C)
  - dodatno: atomska enota 1u=1/12 mase $^{12}C = 1{,}6605402 \times 10^{-27}$ kg
  - **enota za maso (kilogram) je določena z dogovorom o vrednosti Planckove konstante h**



$$kg : h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\, kg\, m^2\, s^{-1} \quad (h)$$

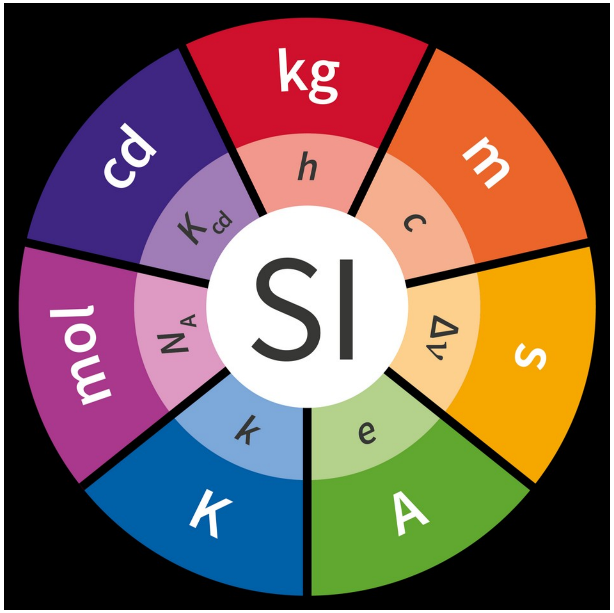
- kelvin $[K]$ in amper $[A]$
- sestavljene: $N, Pa, J, W ., . V$
- pomožne rad (radian-kot), sr (steradian-prostorski kot)
- desetiške predpone

y	z	a	f	p	n	µ	m	c	d	da	h	k	M	G	T	P	E	Z	Y
jokto	zepto	ato	femto	piko	nano	mikro	mili	centi	deci	deka	hekto	kilo	mega	giga	tera	peta	eksa	zeta	jota
10^{-24}	10^{-21}	10^{-18}	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}



Mednarodni sistem enot SI – od 2019

Z novim dogovorom so vrednosti osnovnih enot določene z dogovorjeno vrednostjo nekaterih konstant:

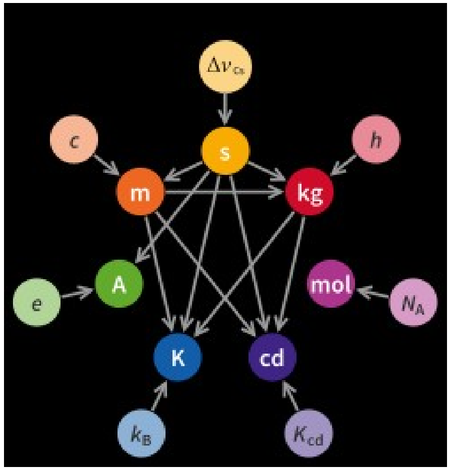


$$s : \Delta \nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770\, s^{-1} \quad \left({}^{133}Cs\right)$$

$$1\, s = \frac{9\,192\,631\,770}{\Delta \nu_{Cs}}$$

$$m : c = 299\,792\,458\, m\, s^{-1} \quad (c)$$

$$m = \frac{c\, s}{299\,792\,458} = \frac{c \cdot 9\,192\,631\,770}{\Delta \nu_{Cs} \cdot 299\,792\,458}$$



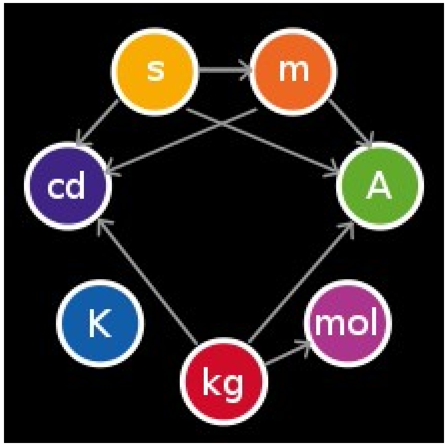
$$kg : h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}\, kg\, m^2\, s^{-1} \quad (h)$$

$$K : k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\, J\, K^{-1} \quad (k)$$

$$A : e_0 = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\, A\, s \quad (e_0)$$

$$mol : N_A = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}\, mol^{-1} \quad (N_A)$$

cd : *spektralna svetlobna učinkovitist pri* $540 \cdot 10^{12}\, Hz$ *je* $683\, cd\, sr / W$



Kvadratna enačba

$$ax^2+bx+c=0 \qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Kotne funkcije

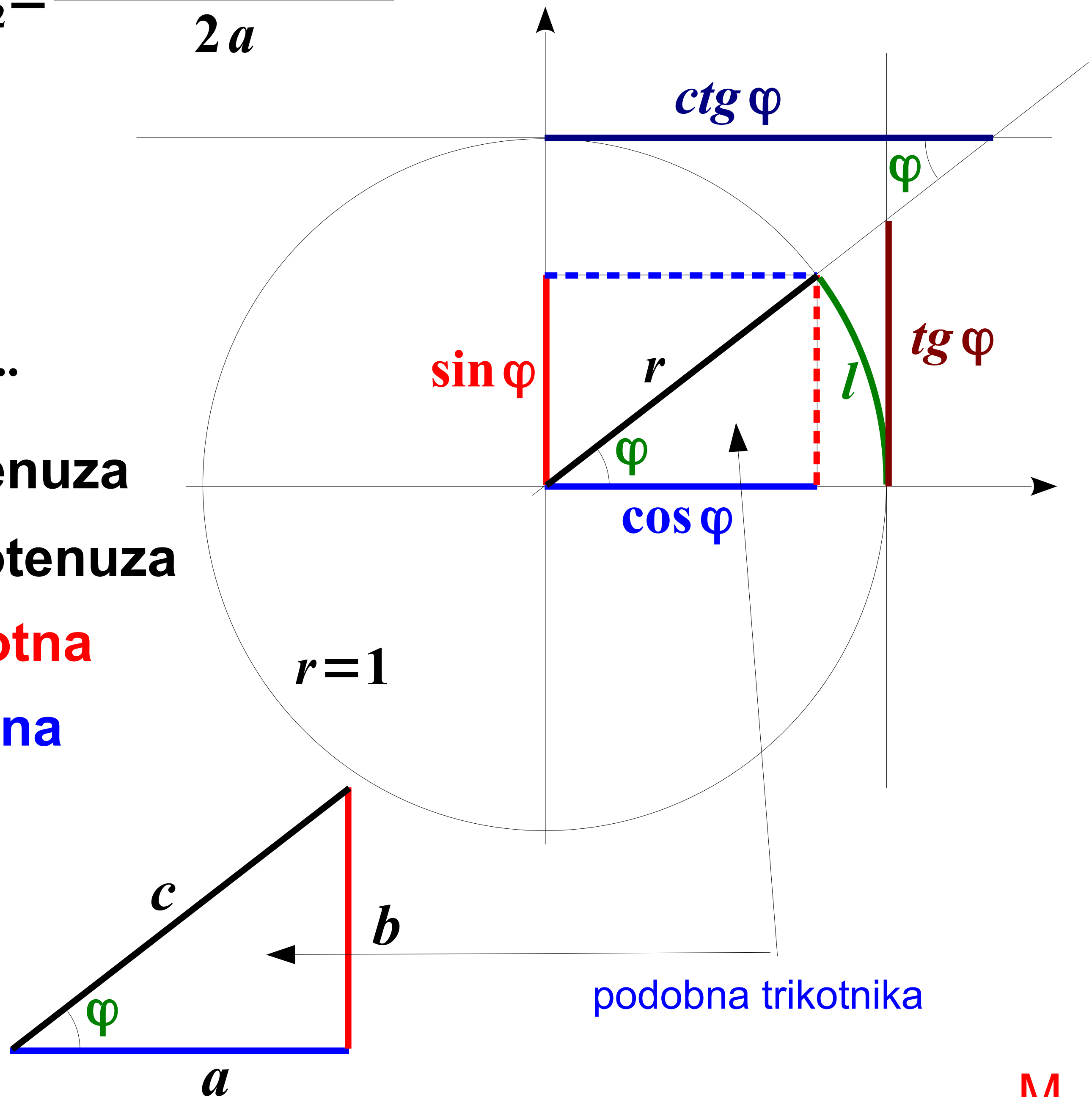
- ločna mera $\varphi=\frac{l}{r}$

$$360^o=2\pi,\ 180^o=\pi,\ 90^o=\frac{\pi}{2}\ldots$$

- cos φ – priležna / hipotenuza
- sin φ – nasprotna / hipotenuza
- ctg φ – priležna / nasprotna
- tg φ – nasprotna / priležna

$$\cos\varphi=\frac{a}{c} \qquad ctg\,\varphi=\frac{a}{b}=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

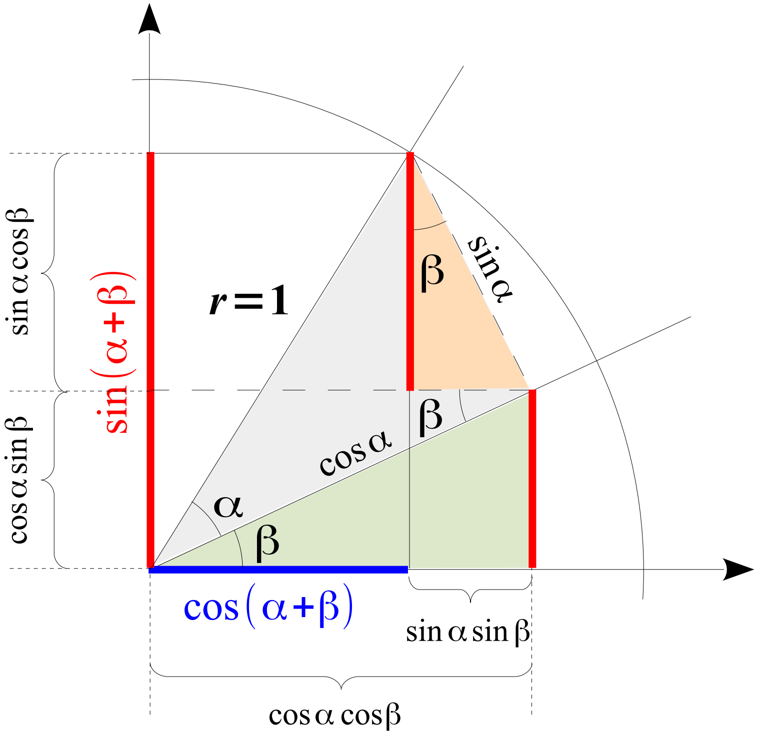
$$\sin\varphi=\frac{b}{c} \qquad tg\,\varphi=\frac{b}{a}=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$



M

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$



$$ax^2+bx+c=0 \;\Rightarrow\; x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \;\Rightarrow$$ prva člena dopolnimo do polnega kvadrata

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{(2a)^2} \;\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \;\Rightarrow \boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

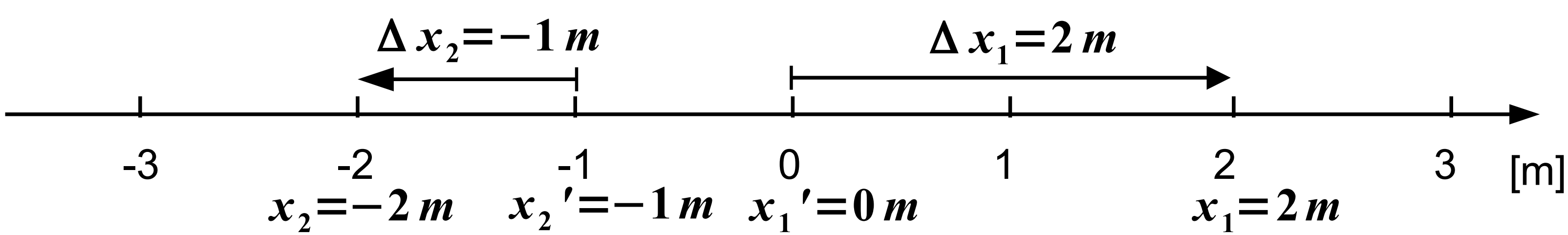
Opis gibanja - kinematika

- ne vprašamo se po vzrokih gibanja
- opazujemo točkasto telo
- izberemo opazovalni sistem
  (koordinatni sistem + ura)

Premo gibanje točkastega telesa (1D)

- lega: x
- premik (končna lega – začetna lega)

$$\Delta x = x - x'$$



- definicija hitrosti - $v \quad [m/s]$

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x-x'}{t-t'}$$

povprečna hitrost

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$$

trenutna hitrost

$$\Delta x=\bar{v}\,\Delta t$$

$$x=x'+\bar{v}(t-t')$$

$$x=x'+\int_{t'}^{t} v(t)\,dt$$

- definicija pospeška - $a \quad [m/s^2]$

$$\bar{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v-v'}{t-t'}$$

povprečni pospešek

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\dot{v}$$

trenutni pospešek

$$\Delta v=\bar{a}\,\Delta t$$

$$v=v'+\bar{a}(t-t')$$

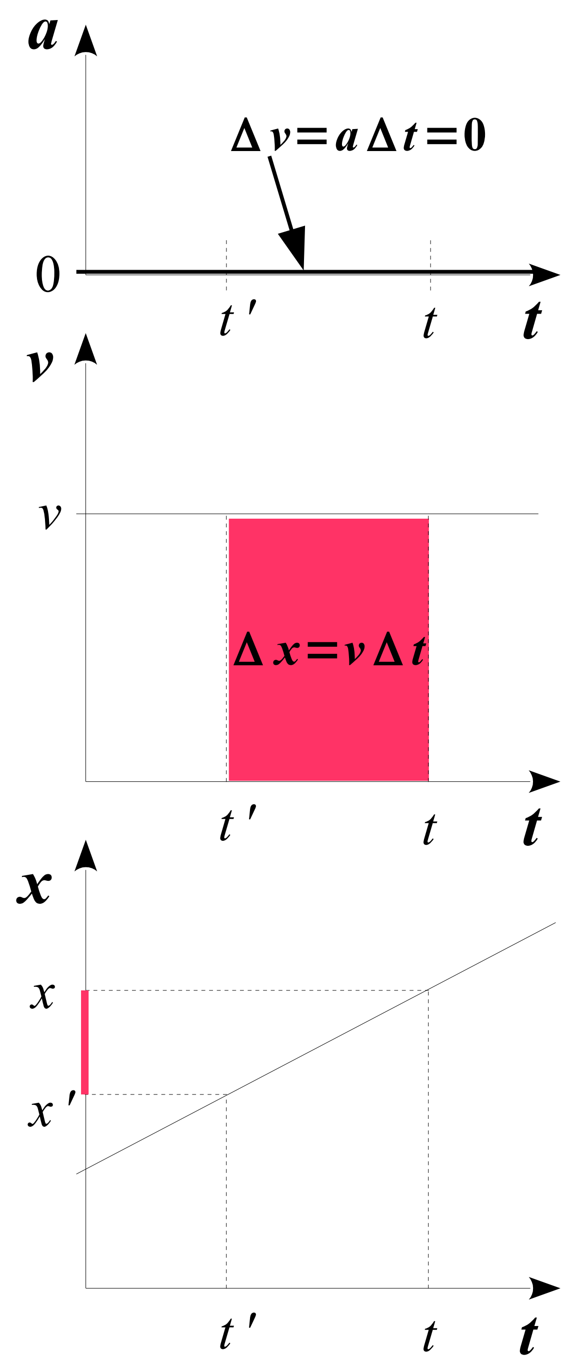
$$v=v'+\int_{t'}^{t} a(t)\,dt$$

Enakomerno premo gibanje

- hitrost je konstantna $v(t)=v$

$$x=x'+v(t-t')$$

$$a=0$$



$$a=\frac{dv}{dt}=0$$

$$x=x'+\int_{t'}^{t} v\,dt=x'+v\int_{t'}^{t} dt=x'+v(t-t')$$

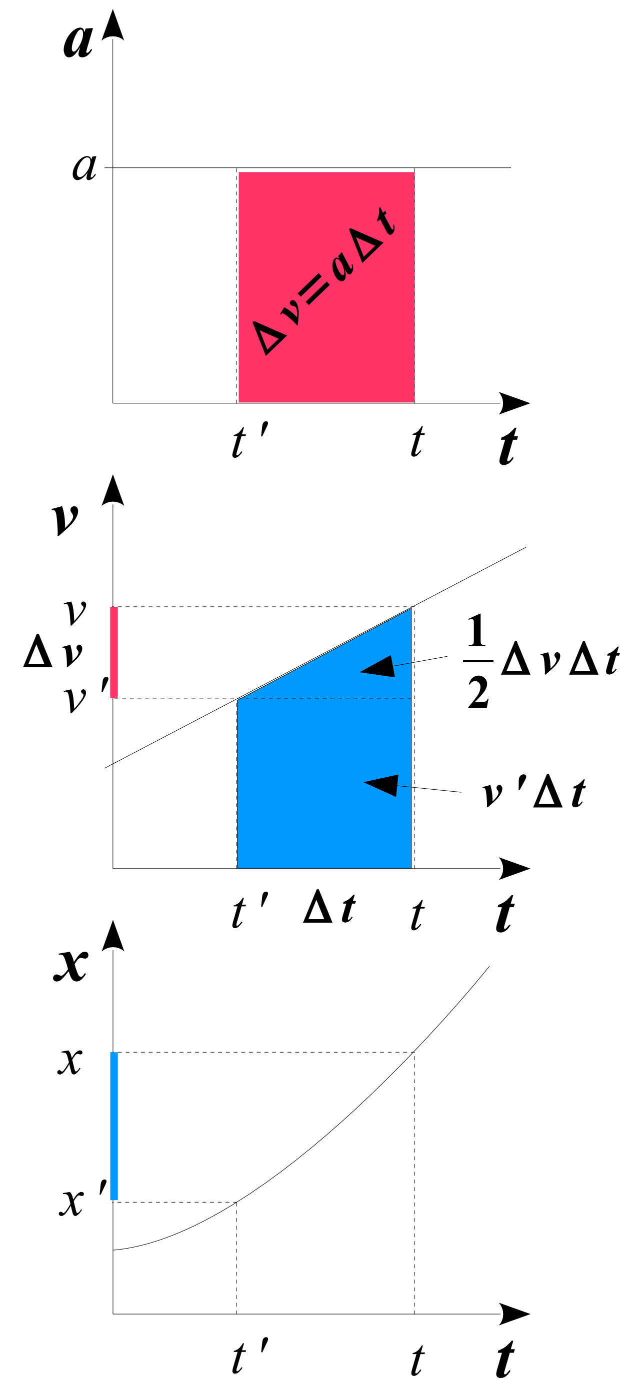
Enakomerno pospešeno premo gibanje

- pospešek je konstanten $a(t)=a$

$$v=v'+a(t-t')$$

$$x=x'+v'(t-t')+\frac{1}{2}a(t-t')^2$$

$$v^2=v'^2+2a(x-x')$$



$$v=v'+\int_0^t a\,dt=v'+a\int_0^t dt=v'+at$$

$$x=x'+\int_0^t v\,dt=x'+\int_0^t (v'+at)\,dt=$$

$$=x'+v'\int_0^t dt+a\int_0^t t\,dt=x'+v't+\frac{1}{2}at^2$$

Navpični met

Vsi predmeti na površini zemlje padajo z enakim pospeškom:

$$g = 9{,}81\, m/s^2$$ težni pospešek

Navpični met je premo enakomerno pospešeno gibanje.

- **y koordinata (y'=0, t'=0):**

$$a_y = -g$$

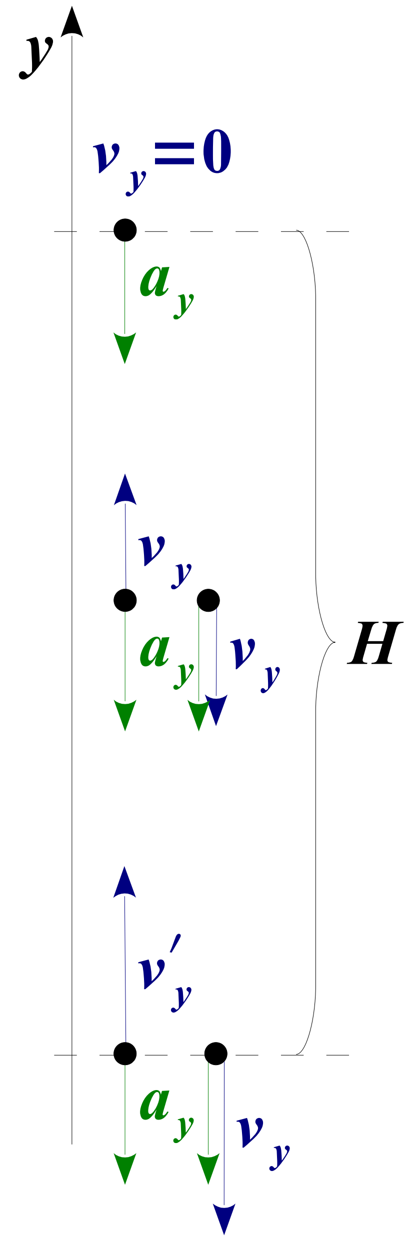
$$v_y = v'_y + a_y t = v'_y - g t$$

$$y = v'_y t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v'_y t - \frac{1}{2} g t^2$$

- **višina:**

$$t_H = \frac{v'_y}{g} \qquad H = \frac{v'^2_y}{2g} \qquad t_0 = \frac{2 v'_y}{g}$$

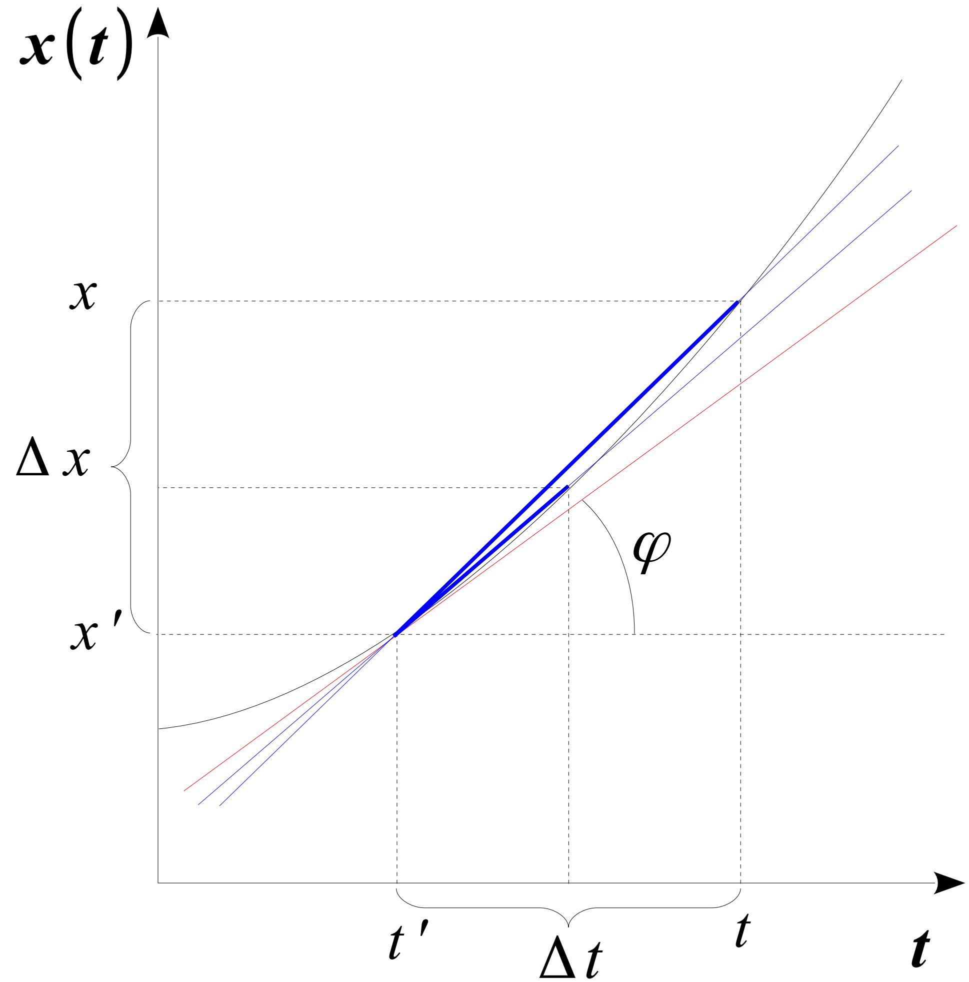
čas leta



Prosti pad je poseben primer navpičnega meta z začetno hitrostjo 0 m/s.

Hitrost (odvod)

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$



- odvod funkcije v neki točki je enak strmini (tangensu naklonskega kota) tangente na graf funkcije v tej točki

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \tan\varphi$$

- primer

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = at$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} a (t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2} a t^2}{\Delta t} =$$

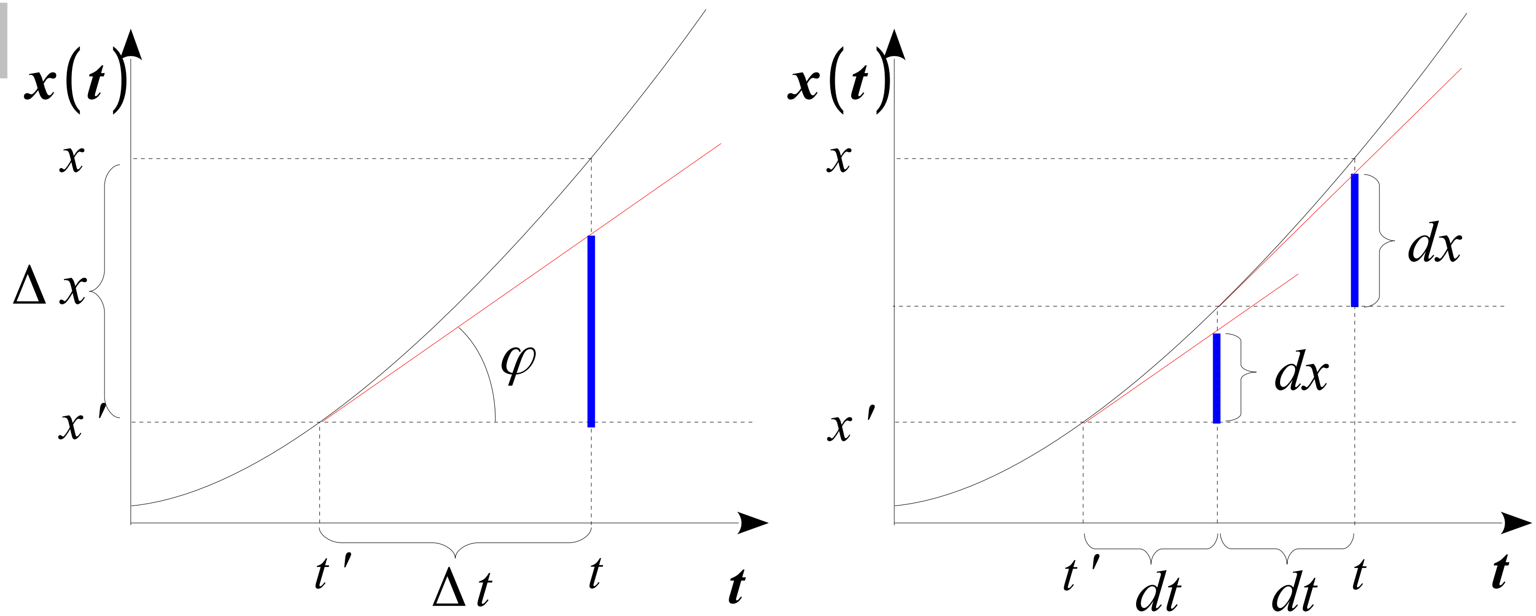
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(\cancel{t^2} + 2t\Delta t + \Delta t^2 - \cancel{t^2})}{2\Delta t} = \lim_{2\Delta t \to 0} \frac{a \Delta \cancel{t}(2t + \Delta t)}{2\Delta \cancel{t}} = at$$

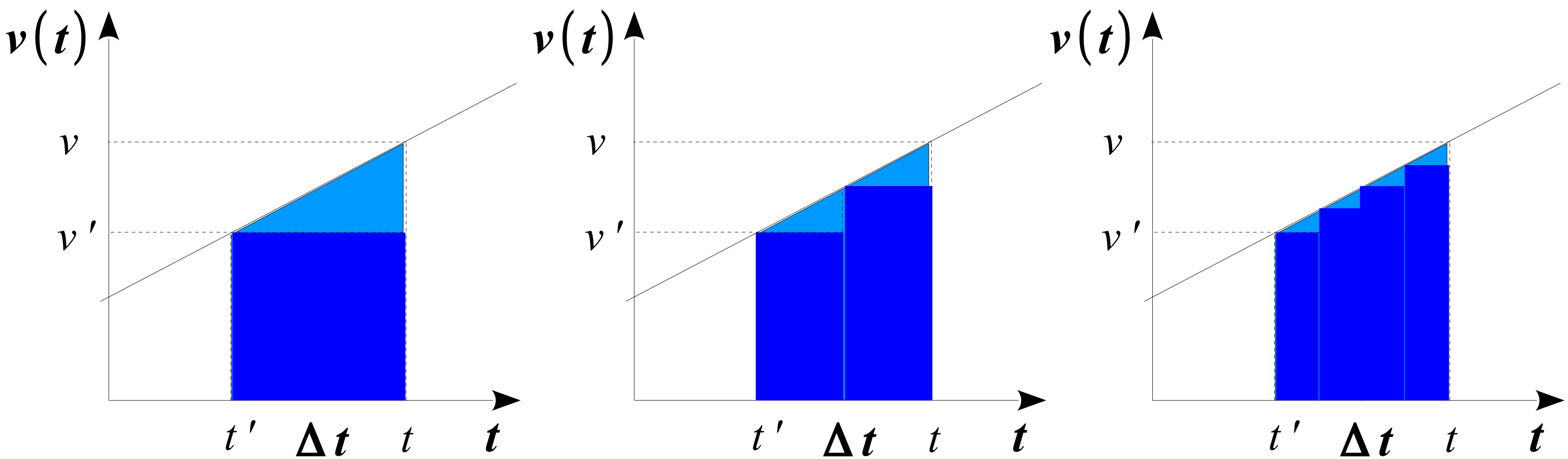
M

Premik (integral)

$$dx = v\,dt$$

$$x = x' + \int_{t'}^{t} v(t)\,dt$$





$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \qquad x(t) = x(t') + \int_{t'}^{t} v(t)\,dt$$

- integral funkcije na nekem intervalu je enak ploščini med grafom funkcije in koordinatno osjo x

M

(Neenakomerno) Pospešeno premo gibanje

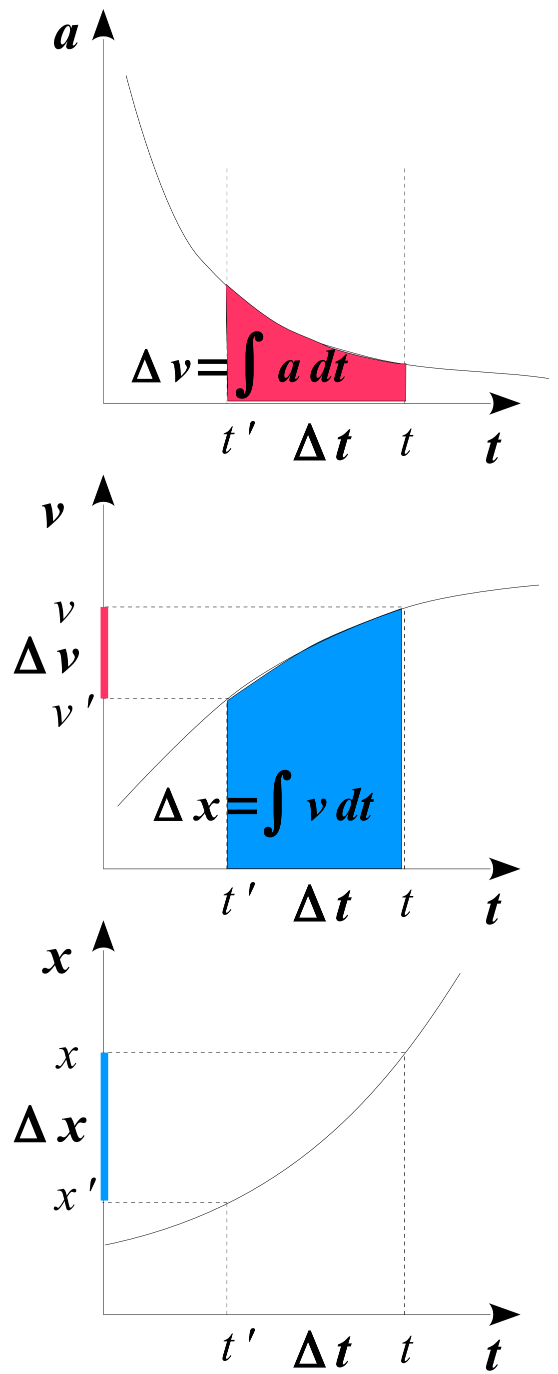
- **pospešek je funkcija časa** $a(t) \neq konst$
- **hitrost je funkcija časa** $v(t) \neq konst$

$$v(t) = v' + \int_{t'}^{t} a(t)\, dt \quad \text{in} \quad a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

$$x(t) = x' + \int_{t'}^{t} v(t)\, dt \quad \text{in} \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

- **velja tudi:**

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$



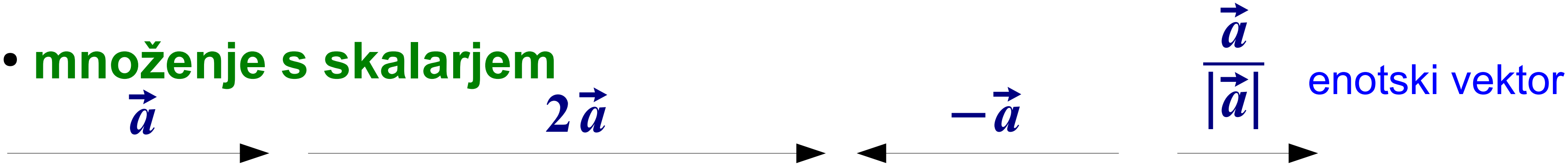
- Primer

Hitrost lokomotive narašča kot v = k√t , kjer je k= konstanta. Določi časovno odvisnost pospeška in lege lokomotive.

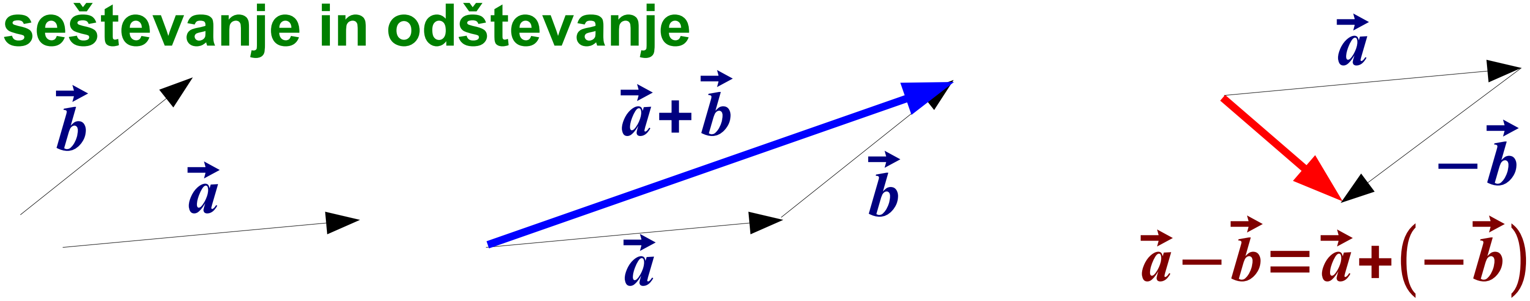
Vektorji

Vektor je količina, ki ima velikost in smer v prostoru

- **množenje s skalarjem**

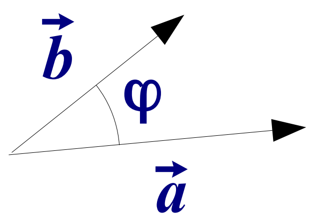


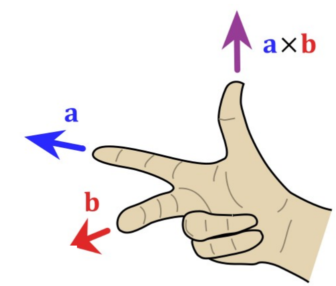
- **seštevanje in odštevanje**



- **množenje dveh vektorjev**
  - **skalarni produkt**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$





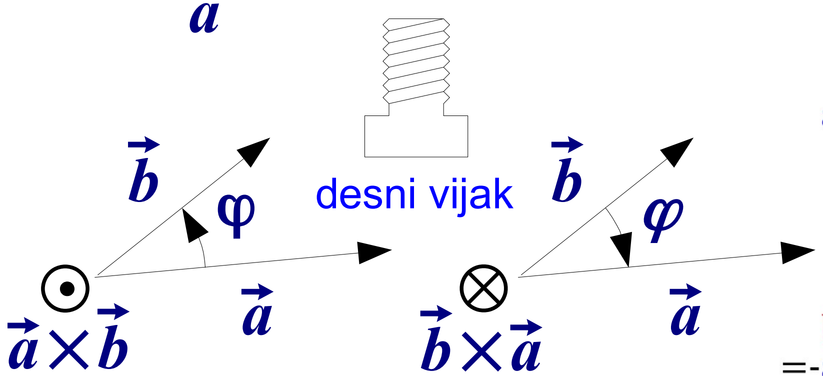
pravilo desne roke

  - **vektorski produkt**

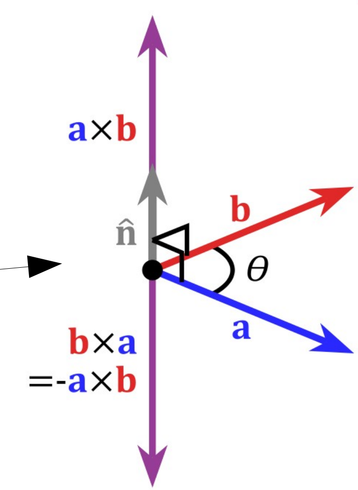
$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$$

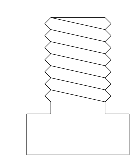
$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$



pravilo desnega vijaka



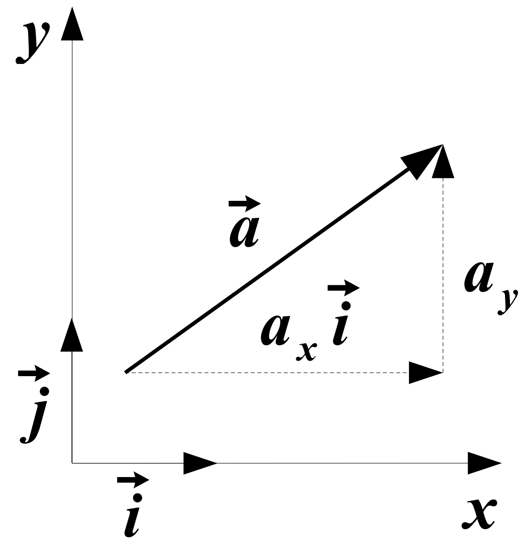


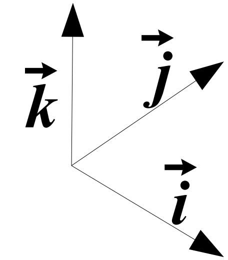
levi vijak

- **komponente vektorja**

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}=(a_x,a_y)$$

$$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}=(b_x,b_y)$$





$$\vec{k}=\vec{i}\times\vec{j}$$

desno-sučni koordinatni sistem

- **operacije**

$$2\vec{a}=(2a_x,2a_y)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y \qquad |\vec{a}|\equiv a=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

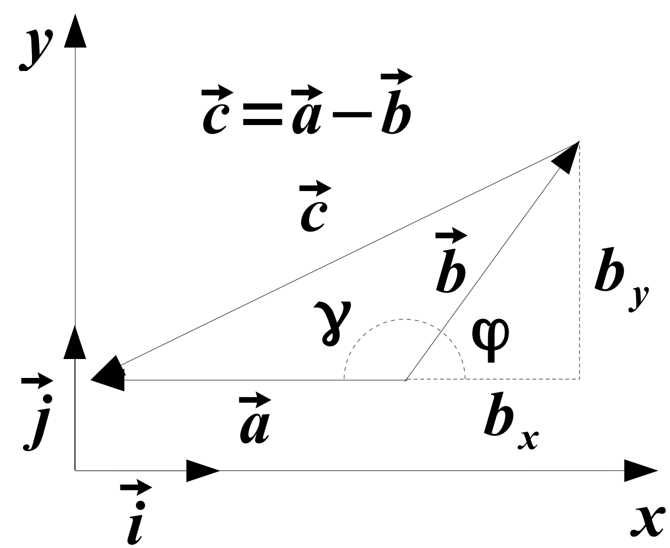
$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y, a_z b_x-a_x b_z, a_x b_y-a_y b_x)$$

- **primer (kosinusni izrek)**

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(-a-b_x,-b_y)=-(a+b\cos\varphi, b\sin\varphi)$$

$$c^2=\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=a^2-2\vec{a}\vec{b}+b^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

$$\begin{aligned}c^2&=(a+b\cos\varphi)^2+b^2\sin^2\varphi=\\&=a^2+2ab\cos\varphi+b^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi=\\&=a^2+2ab\cos\varphi+b^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}=a^2+b^2-2ab\cos\gamma\end{aligned}$$



$$\varphi=\pi-\gamma$$

Krivo gibanje točkastega telesa (3D)

- krajevni vektor $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

- premik $\Delta\vec{r}=\vec{r}-\vec{r}\,'$

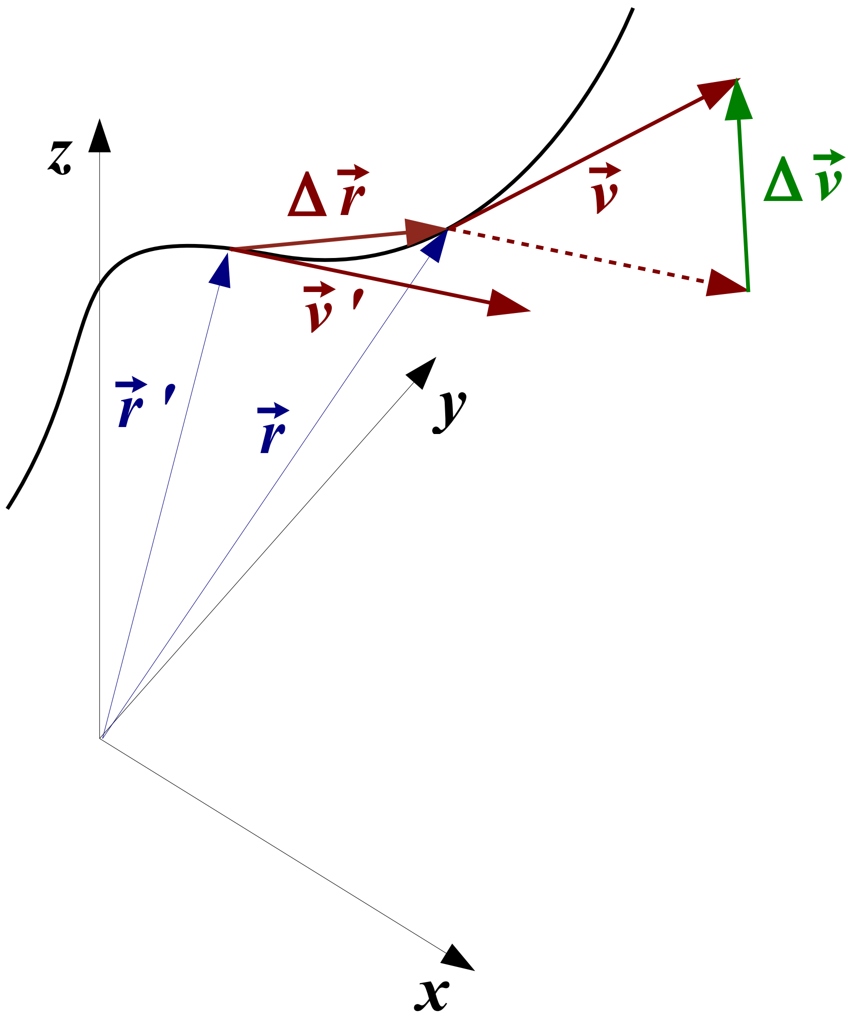
$$\Delta\vec{r}=(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)=(\overline{v_x},\overline{v_y},\overline{v_z})$$

- sprememba hitrosti

$$\Delta\vec{v}=(\Delta v_x,\Delta v_y,\Delta v_z)$$

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t},\frac{\Delta v_y}{\Delta t},\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)=(\overline{a_x},\overline{a_y},\overline{a_z})$$



- hitrost:

$$\bar{\vec{v}}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{t-t\,'}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t},\frac{\Delta y}{\Delta t},\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

povprečna hitrost

$$\Delta\vec{r}=\bar{\vec{v}}\,\Delta t$$

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\bar{\vec{v}}(t-t\,')$$

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)$$

trenutna hitrost

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+\int_{t'}^{t}\vec{v}(t)\,dt$$

- pospešek:

$$\bar{\vec{a}}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\vec{v}-\vec{v}\,'}{t-t\,'}=\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t},\frac{\Delta v_y}{\Delta t},\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)$$

povprečni pospešek

$$\Delta\vec{v}=\bar{\vec{a}}\,\Delta t$$

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\bar{\vec{a}}(t-t\,')$$

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\left(\frac{dv_x}{dt},\frac{dv_y}{dt},\frac{dv_z}{dt}\right)$$

trenutni pospešek

$$\vec{v}=\vec{v}\,'+\int_{t'}^{t}\vec{a}(t)\,dt$$

- dolžina poti in velikost vektorja hitrosti:

$$s=\int_{t'}^{t}|\vec{v}(t)|\,dt \qquad |\vec{v}(t)|=\frac{ds}{dt}$$

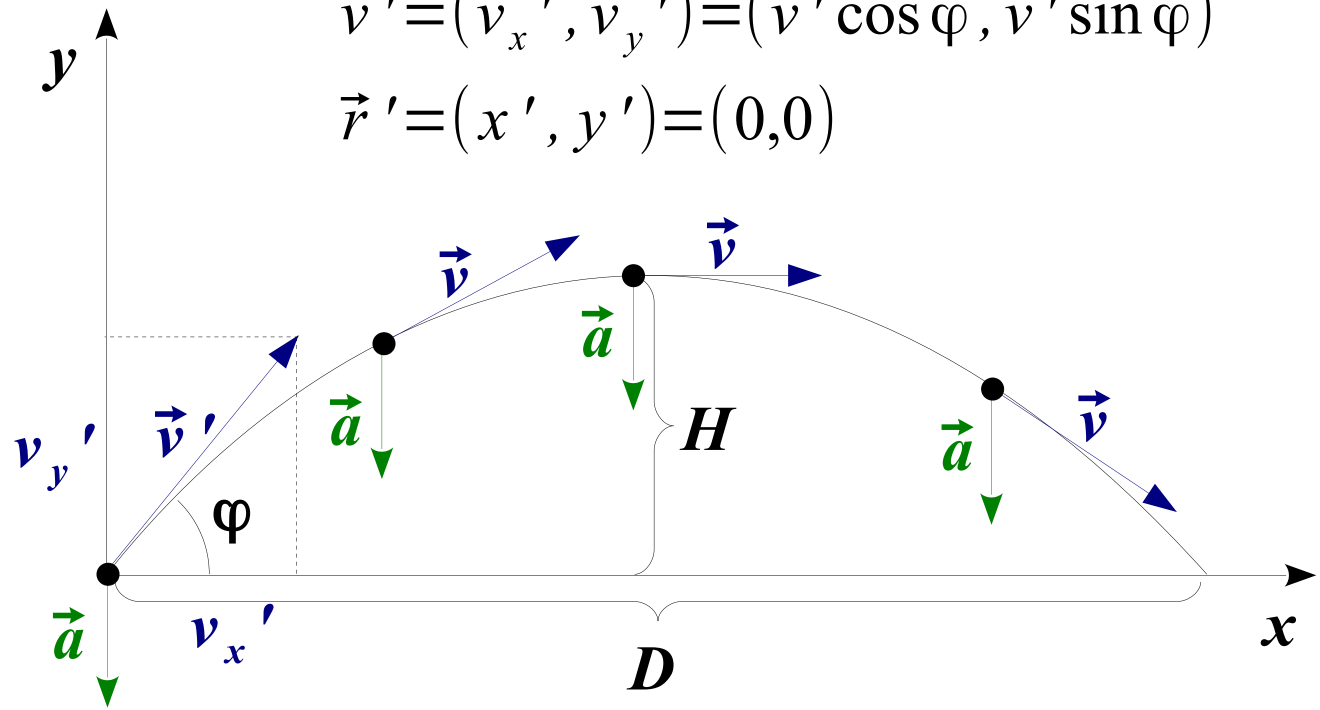
Poševni met

- x koordinata:

$$a_x = 0$$

$$v_x = v_x' = v'\cos\varphi$$

$$x = v_x t = v'\cos(\varphi)\, t$$



$$\vec{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$$

$$\vec{v}\,' = (v_x', v_y') = (v'\cos\varphi, v'\sin\varphi)$$

$$\vec{r}\,' = (x', y') = (0{,}0)$$

- y koordinata:

$$a_y = -g$$

$$v_y = v_y' + a_y t = v'\sin\varphi - g\,t$$

$$y = v_y' t + \frac{1}{2} a_y t^2 = v'\sin(\varphi)\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$

- višina in domet:

$$t_H = \frac{v'\sin\varphi}{g} \qquad t_D = \frac{2v'\sin\varphi}{g}$$

$$H = \frac{v'^2\sin^2\varphi}{2g} \qquad D = \frac{v'^2\sin(2\varphi)}{g}$$

Kroženje točkastega telesa

- definicija kotne hitrosti - $\omega \quad [s^{-1}]$

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{\varphi-\varphi'}{t-t'}$$

povprečna kotna hitrost

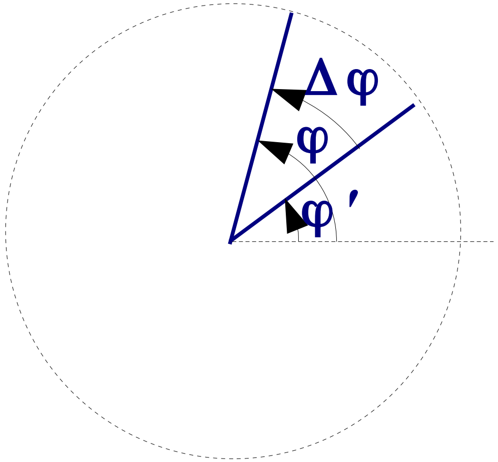
$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$$

trenutna kotna hitrost

$$\Delta\varphi=\bar{\omega}\Delta t$$

$$\varphi=\varphi'+\bar{\omega}(t-t')$$

$$\varphi=\varphi'+\int_{t'}^{t}\omega(t)\,dt$$



- definicija kotnega pospeška - $\alpha \quad [s^{-2}]$

$$\bar{\alpha}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega-\omega'}{t-t'}$$

povprečni kotni pospešek

$$\alpha=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\dot{\omega}$$

trenutni kotni pospešek

$$\Delta\omega=\bar{\alpha}\Delta t$$

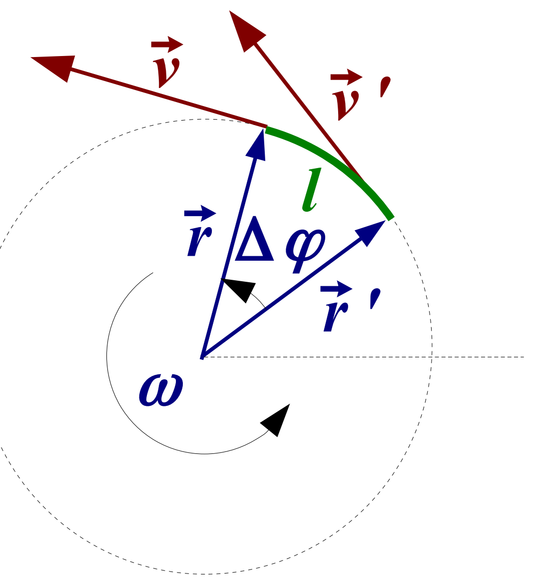
$$\omega=\omega'+\bar{\alpha}(t-t')$$

$$\omega=\omega'+\int_{t'}^{t}\alpha(t)\,dt$$

Enakomerno kroženje - kotna hitrost je konstantna

- obhodni čas - $t_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$
- frekvenca - $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{t_0}$

$$\varphi = \varphi' + \omega(t - t')$$



- obodna hitrost:

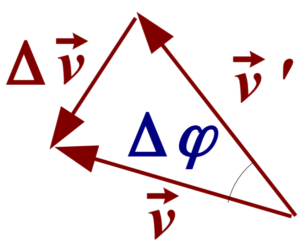
$$v = \omega r$$

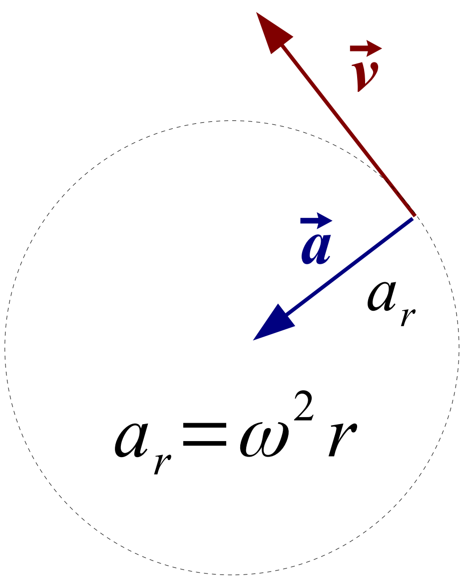
$$\Delta\varphi = \frac{l}{r} = \frac{v\,\Delta t}{r} \Rightarrow v = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} r = \omega r$$

- radialni (centripetalni) pospešek:

$$a_r = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$





$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \approx \frac{v\,\Delta\varphi}{\Delta t} = v\,\omega$$

Enakomerno pospešeno kroženje - kotni pospešek je konstanten

$$\omega=\omega'+\alpha(t-t')$$

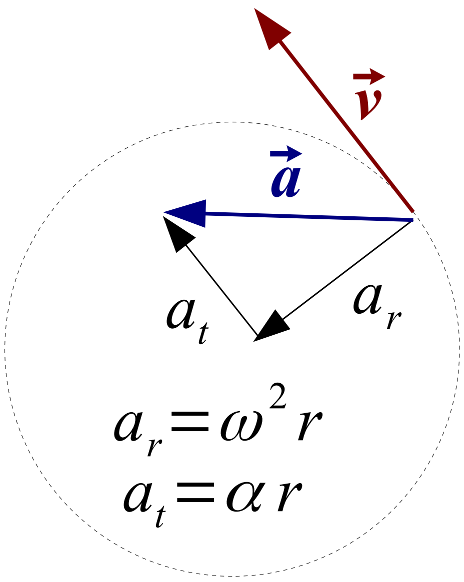
$$\varphi=\varphi'+\omega'(t-t')+\frac{1}{2}\alpha(t-t')^2$$

$$\omega^2=\omega'^2+2\alpha(\varphi-\varphi')$$

$$v=\omega r$$

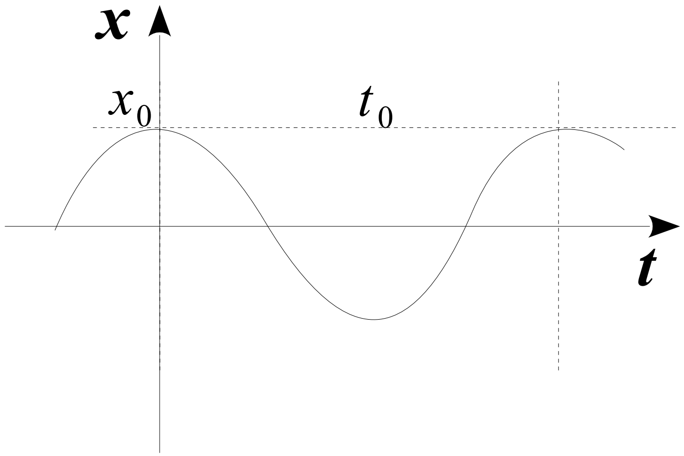
$$a_r=\omega^2 r$$

$$a_t=\alpha r$$



Sinusno nihanje

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{t_0}$$



- nihajni čas - t_0
- frekvenca - ν
- krožna frekvenca - ω
- amplituda - x_0

$$x(t)=x_0\cos(\omega t)$$

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-\omega x_0\sin(\omega t)$$

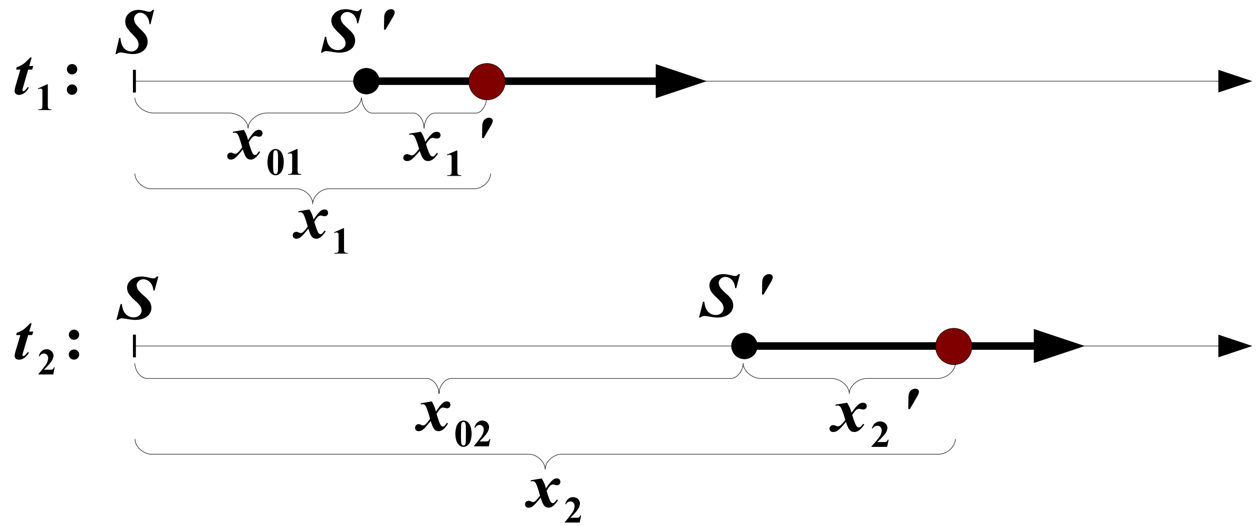
$$a(t)=\frac{dv}{dt}=-\omega^2 x_0\cos(\omega t)=-\omega^2 x(t)$$

RELATIVNO GIBANJE

- 1D $\qquad x = x_0 + x'$

$$v_x = \frac{(x_2 - x_1)}{\Delta t} = \frac{((x_{02} + x_2') - (x_{01} + x_1'))}{\Delta t} =$$

$$= \frac{(x_{02} - x_{01})}{\Delta t} + \frac{(x_2' - x_1')}{\Delta t} = v_0 + v_x'$$

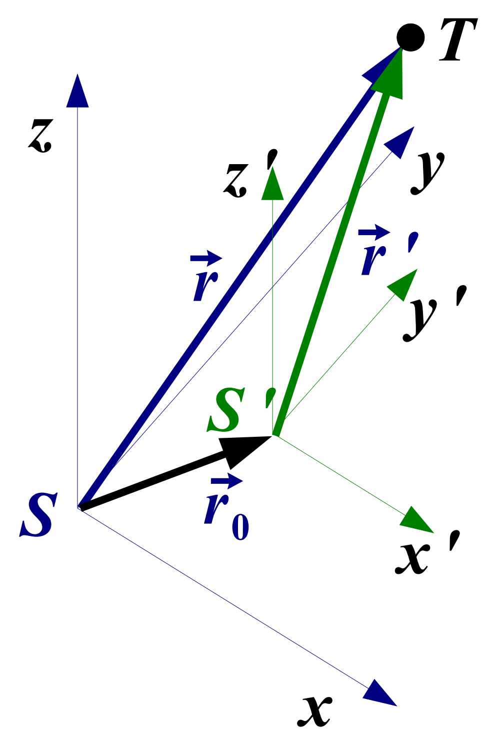


$$v_x = v_0 + v_x'$$

$$a_x = a_0 + a_x'$$

- 3D

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'$$



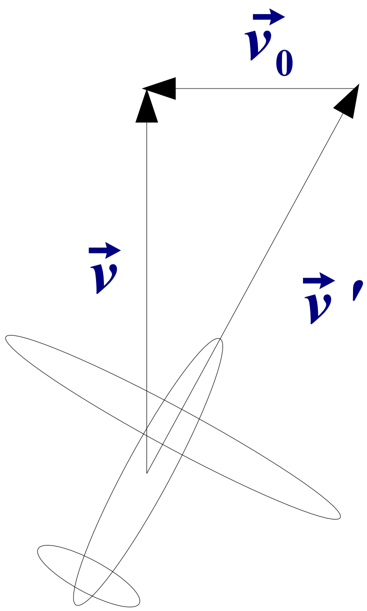
- Galilejeva transformacija – enakomerno gibanje sistema

$$\vec{v}_0=(v_0, 0, 0)$$

$$x=x_0+x' \qquad y=y' \qquad z=z'$$

$$v_x=v_0+v_x' \qquad v_y=v_y' \qquad v_z=v_z'$$

$$a_x=a_x' \qquad a_y=a_y' \qquad a_z=a_z'$$



- primer: Letalo poleti proti letališču, ki je 500 km severno od začetnega letališča. Hitrost letala v zraku je 600 km/h. Kam se mora usmeriti, da bo letel naravnost proti severu, če piha vzhodni veter s hitrostjo 100 km/h? Koliko časa traja let?

Osnovne enačbe gibanja

SILA

• Poskusi kažejo, da telo vztraja pri svojem gibanju (miruje ali se giblje premo enakomerno), dokler ga pri tem ne zmoti vpliv drugega teles. (To velja le, če telo opazujemo v nepospešenem (inercialnem) opazovalnem sistemu.)
• Količina, ki meri ta vpliv, je sila.
• Sila torej povzroči pospešek telesa in jo lahko merimo s pospeškom, ki ga povzroči, ko deluje na neko standardno telo.
• Sila je vektorska količina in, ko na točkasto telo deluje več sil hkrati, je skupna sila enaka vektorski vsoti posameznih sil

VZTRAJNOSTNA MASA

• Enako velika sila lahko pri različnih telesih povzroči različne pospeške.
• Lastnost telesa, ki vpliva na njegov pospešek je vztrajnostna masa.
• Enota za maso je kilogram [kg] in masa standardnega telesa naj bo 1 kg.
• Če telo sestavimo iz dveh teles je njegova masa vsota mas teh teles – masa je aditivna.
• V okviru pojavov, ki jih opisuje klasična fizika se masa ohranja – velja zakon o ohranitvi mase.

Newtonovi zakoni

I. Telo miruje ali se giblje premo enakomerno, če ne deluje nanj nobena sila.

$$\left(\vec{v}\ je\ konstantna \Leftarrow \vec{a}=0 \Leftarrow \sum \vec{F}=0\right)$$

II. Pospešek je sorazmeren s silo in ima smer sile.

$$\boxed{\vec{F}=m\vec{a}}$$

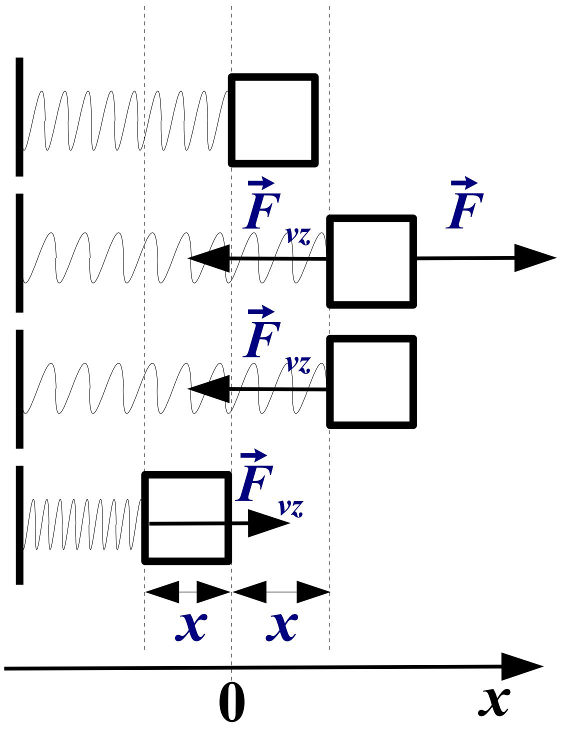
III. Če deluje prvo telo na drugo telo s silo, deluje drugo telo na prvo telo z nasprotno enako silo.

$$\boxed{\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}}$$

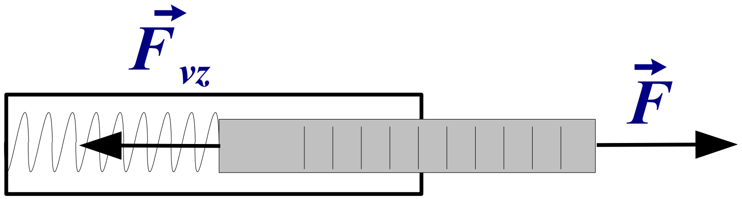
Sila vijačne vzmeti - prožnost $\vec{F}_{vz}$

- sila vzmeti je sorazmerna z raztezkom vzmeti

$$F_{vz} = -k\,x$$



- vzmetna tehtnica



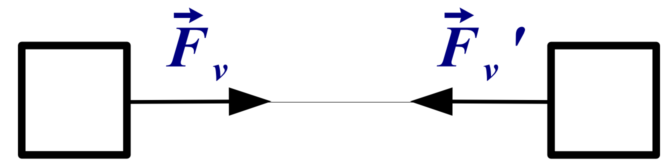
Sila teže $\vec{F}_g$

- to je sila, ki privlači neko telo proti bližnjemu astronomskemu telesu

$$\vec{F}_g = m\,\vec{g}_0 \qquad \vec{g}_0 = (0, -g_0)$$

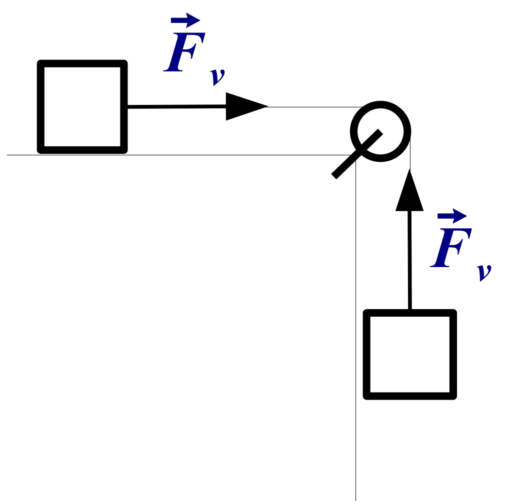
Potezna sila - sila vrvice $\vec{F}_v$

- sila vrvice ima smer vrvice
- z vrvico lahko samo vlečemo – ne moremo potiskati; vrvica mora biti ves čas napeta
- če je vrvica lahka ($m_v \approx 0$) ali, če se sistem ne giblje pospešeno, sta velikosti sil na obeh koncih vrvice enaki



$$(m_v = 0 \vee a = 0) \Rightarrow |\vec{F}_v| = |\vec{F}_v'|$$

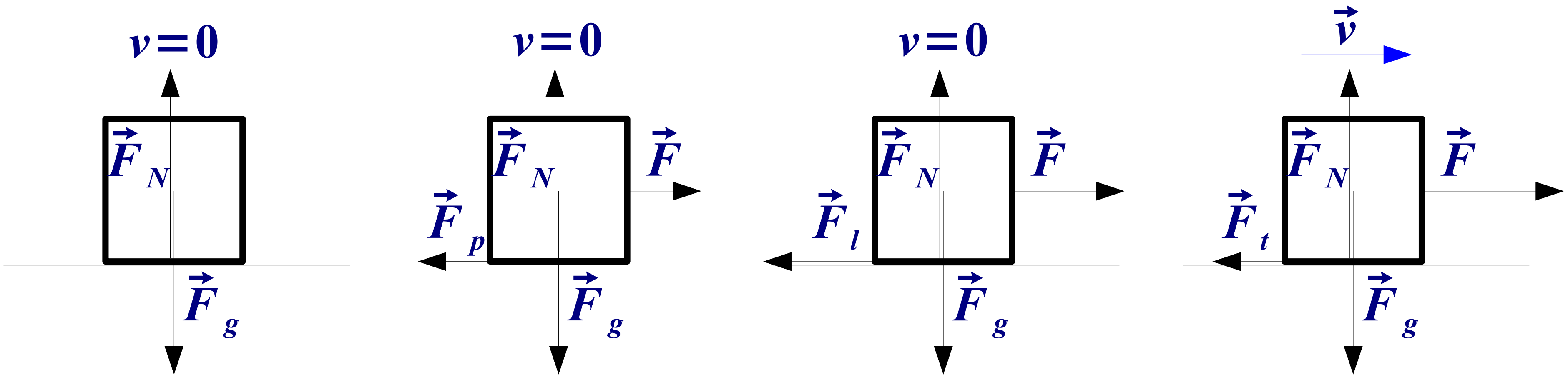
- smer poteka vrvice lahko spremenimo s škripcem
- če sta vrvica in škripec lahka, ali če se sistem ne giblje pospešeno, sta velikosti sil na obeh koncih vrvice enaki (škripec se vrti brez trenja)



$$(m_v = m_š = 0 \vee a = 0) \Rightarrow |\vec{F}_v| = |\vec{F}_v'|$$

Sila „podlage“

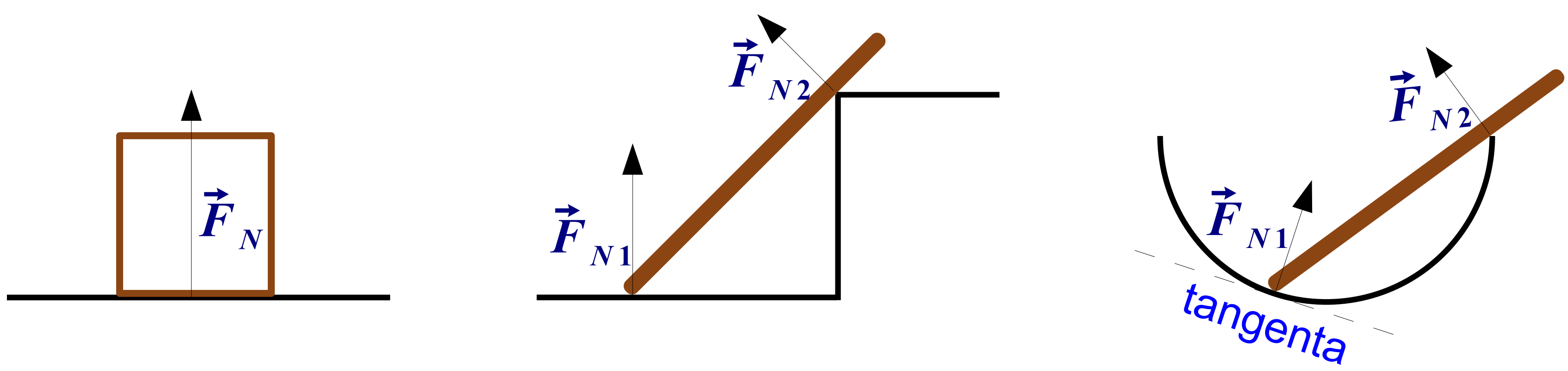
- sila med dvema telesoma, ki se stikata



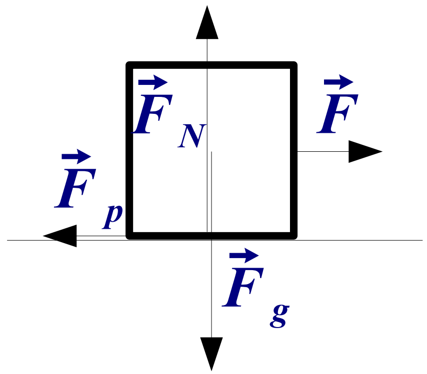
Normalna komponenta sile med telesoma

$\vec{F}_n$

- to je komponenta sile med telesoma, ki je pravokotna na stično ploskev ali njeno tangento, če je ta ukrivljena

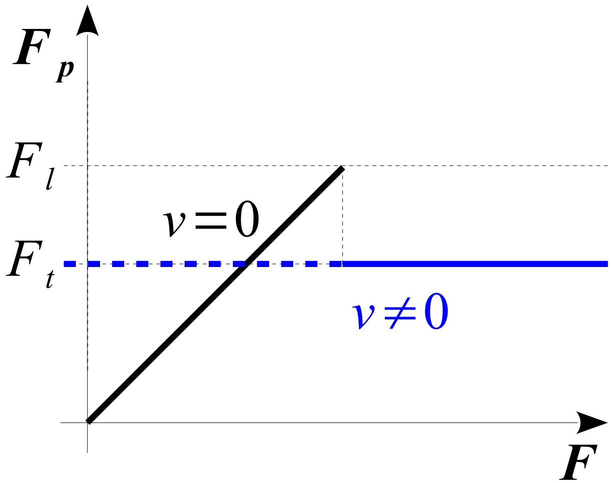


Trenje in lepenje



- sila lepenja je komponenta sile podlage, ki je vzporedna s podlago in deluje med telesoma, ko mirujeta en glede na drugega
- njena maksimalna vrednost je sorazmerna z normalno silo podlage

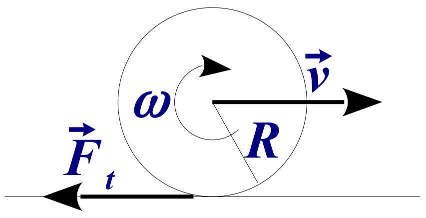
$$F_l = k_l F_n$$



- sila trenja je komponenta sile podlage, ki je vzporedna s podlago in deluje med telesi, ko se gibljeta en glede na drugega
- sorazmerna je z normalno silo podlage

$$F_t = k_t F_n$$

- trenje pri kotaljenju - radij trenja R_0



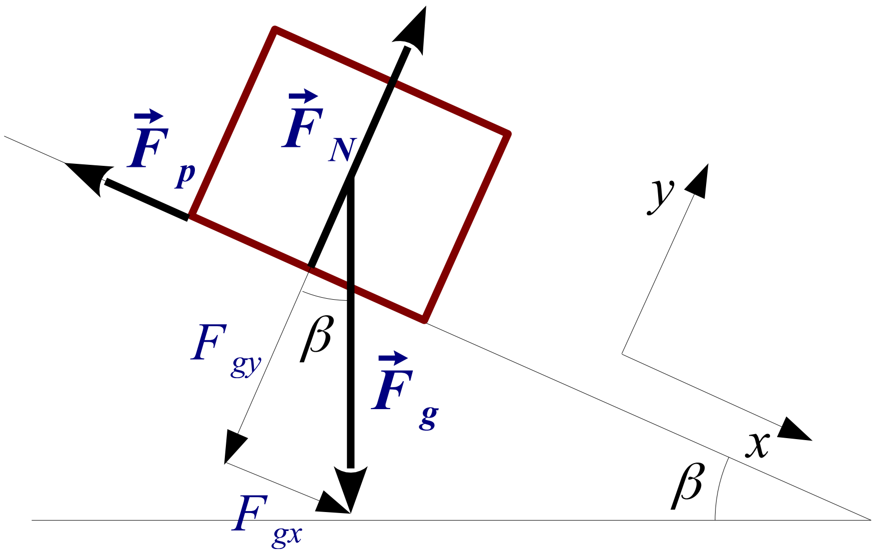
$$k_t = \frac{R_0}{R}$$

	k_t	R_0 [cm]
jeklo-jeklo	0,2	0,05
les-les	0,4	0,2

Ravnovesje na klancu

$$x: F_{gx} - F_p = 0$$

$$y: F_N - F_{gy} = 0$$



$$F_{gx} = F_p \leq F_l = k_l F_N$$

$$mg \sin\beta \leq k_l mg \cos\beta$$

$$\boxed{\tan\beta \leq k_l}$$

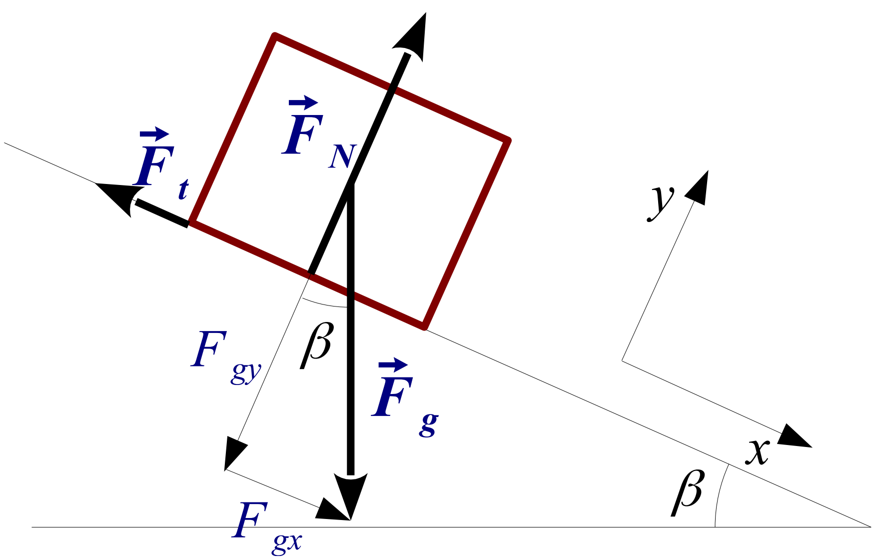
$$F_{gx} = mg \sin\beta$$

$$F_{gy} = mg \cos\beta$$

Drsenje po klancu

$$x: F_{gx} - F_t = ma$$

$$y: F_N - F_{gy} = 0$$



$$mg \sin\beta - k_t mg \cos\beta = ma$$

$$\boxed{a = g\left(\sin\beta - k_t \cos\beta\right)}$$

Sila upora

- to je sila, s katero deluje tekočina na telesa, ki se v njej gibljejo
- primer: kvadratni zakon upora

$$F_u = \frac{1}{2} C S \rho v^2$$

	končna hitrost
dežna kaplja (5mm)	7 m/s
košarkarska žoga	20 m/s
padalec	60 m/s, 5 m/s

Osnovne sile v naravi

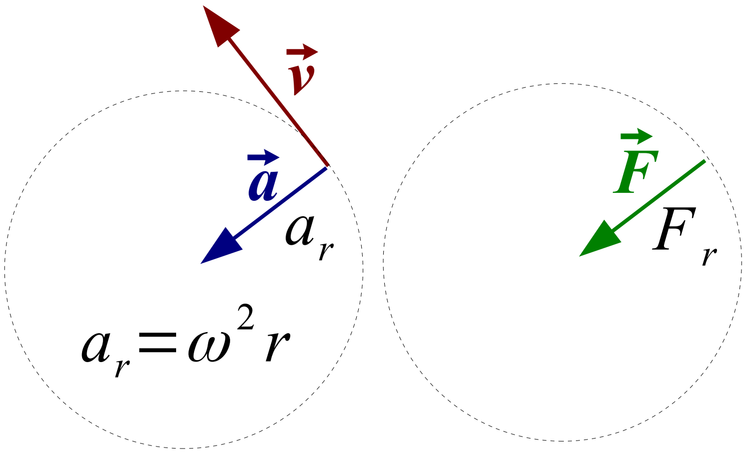
- gravitacija - sila teže
- elektromagnetna sila - vse ostale naštete sile
- močna sila - veže nukleone v atomskem jedru
- šibka sila - radioaktivni razpad β

Sile pri kroženju

- enakomerno kroženje - kotna hitrosti je konstantna

$$F_r = m a_r = m \omega^2 r$$

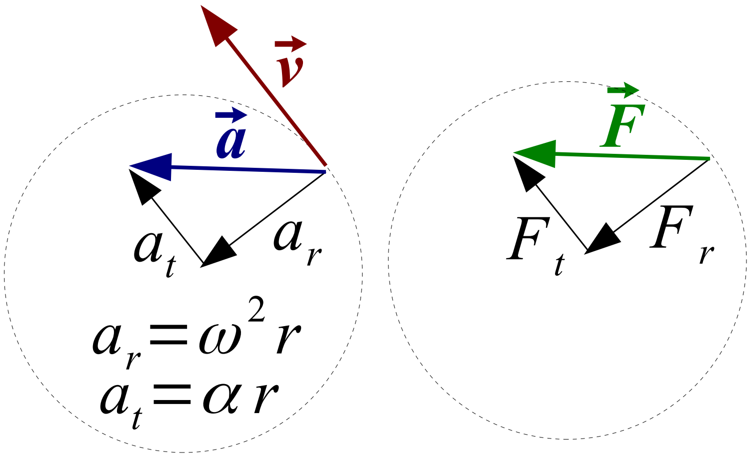
$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow |\sum \vec{F}| = F_r$$



- enakomerno pospešeno kroženje - kotni pospešek je konstantna

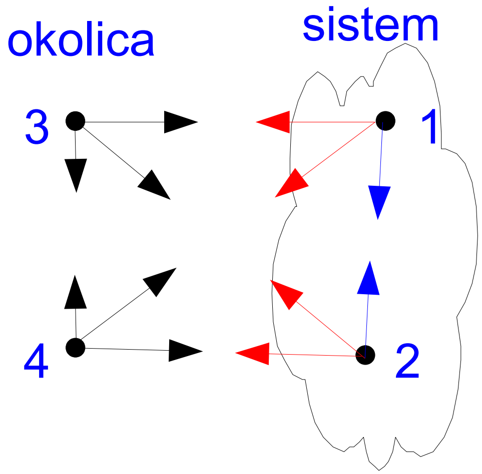
$$F_r = m a_r = m \omega^2 r$$
$$F_t = m a_t = m \alpha r$$

$$|\sum \vec{F}| = \sqrt{F_r^2 + F_t^2}$$



- PRIMER: vrtiljak

Izrek o gibanju težišča



- sistem točkastih teles

$$\vec{F}_{31}+\vec{F}_{41}+\vec{F}_{21}=m_1\vec{a}_1$$
$$\vec{F}_{32}+\vec{F}_{42}+\vec{F}_{12}=m_2\vec{a}_2$$

$$\underbrace{\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{41}+\vec{F}_{42}}_{\text{zunanje sile}}+\underbrace{\cancel{\vec{F}_{21}+\vec{F}_{12}}}_{\text{notranje sile}}=m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{a}^*=\frac{m_1\vec{a}_1+m_2\vec{a}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{v}^*=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{r}^*=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

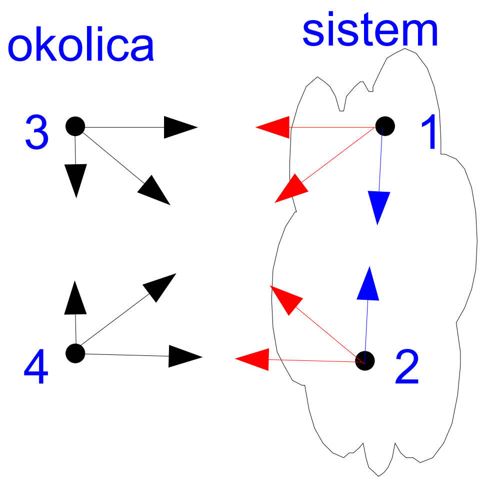
$$\vec{F}_{31}+\vec{F}_{32}+\vec{F}_{41}+\vec{F}_{42}=m\vec{a}^*$$

$$\boxed{\sum\vec{F}_z=m\vec{a}^*}$$

$$m=\sum_i m_i \qquad \vec{r}^*=\frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{m} \qquad \vec{v}^*=\frac{\sum_i m_i\vec{v}_i}{m} \qquad \vec{a}^*=\frac{\sum_i m_i\vec{a}_i}{m}$$

masa sistema — lega težišča — hitrost težišča — pospešek težišča

$$\boxed{\sum \vec{F}_z = m\vec{a}^*}$$

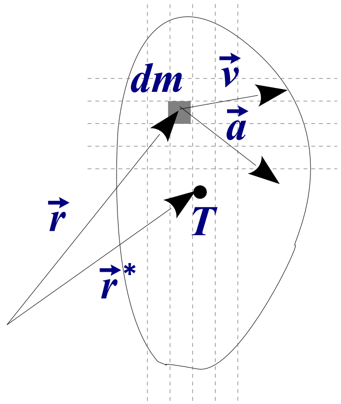


$$m = \sum_i m_i \qquad \vec{r}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} \qquad \vec{v}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} \qquad \vec{a}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{m}$$

masa sistema | lega težišča | hitrost težišča | pospešek težišča

- togo telo

$$m = \int dm \qquad \vec{r}^* = \frac{\int \vec{r}\, dm}{m} \qquad \vec{v}^* = \frac{\int \vec{v}\, dm}{m} \qquad \vec{a}^* = \frac{\int \vec{a}\, dm}{m}$$

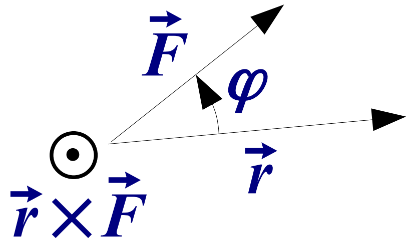


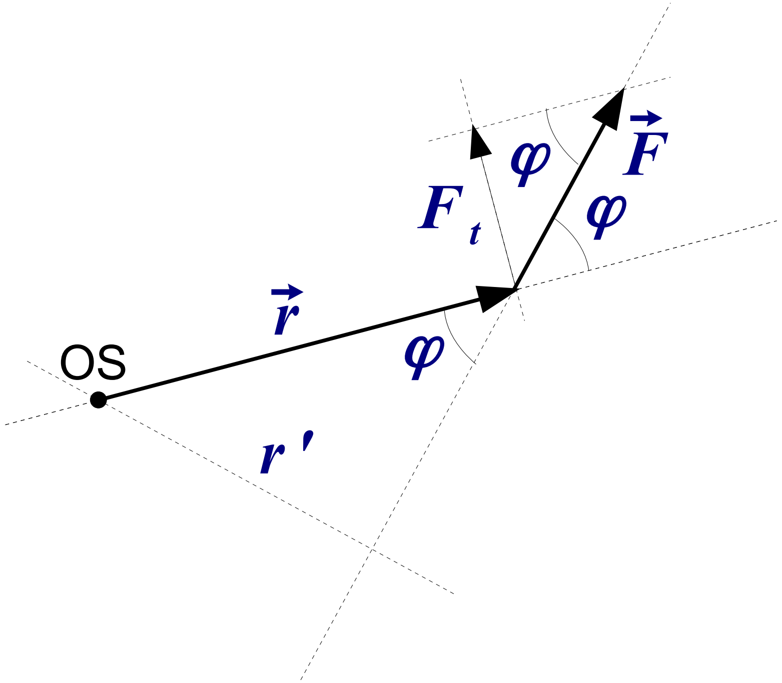
Težišče sistema točkastih teles ali togega telesa se giblje kot točkasto telo, v katerem bi bila zbrana vsa masa sistema in bi nanj delovale vse zunanje sile.

Izreki za kroženje

- navor (vrtilni moment) $\vec{M}[mN]$

$$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

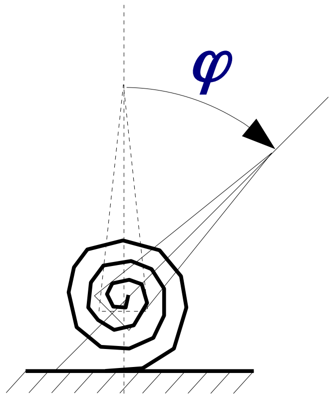




$$|\vec{M}|=|\vec{r}||\vec{F}|\sin\varphi=r'F=rF_t$$

- navor lahko merimo s polžasto vzmetjo

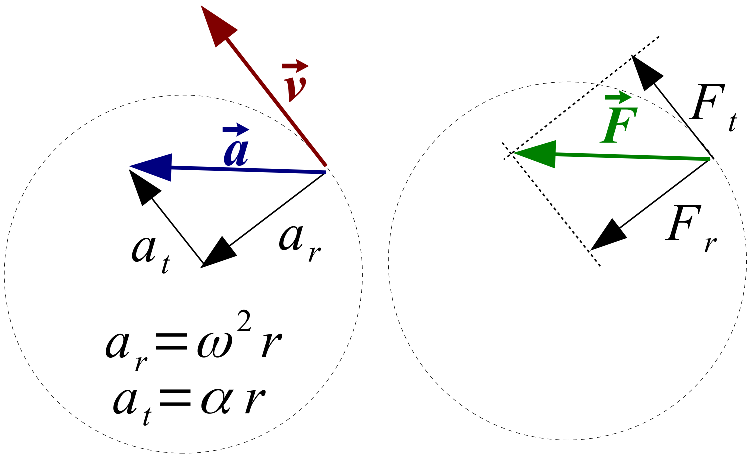
$M=D\varphi$ $\quad D[mN]$ konstanta polžaste vzmeti



- Newtonov zakon za kroženje točkastega telesa

$$F_t = m\,a_t$$

$$r\,F_t = r\,m\,a_t = r\,m\,r\,\alpha = m\,r^2\,\alpha$$

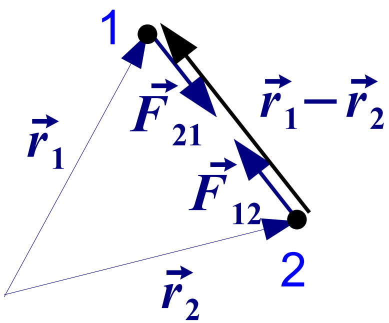


$$\boxed{M = J\,\alpha}$$

- vztrajnostni moment točkastega telesa $J\,[kg\,m^2]$

$$\boxed{J_T = m\,r^2}$$

Vrtenje togega telesa okoli nepremične osi



- vsota notranjih navorov je enaka nič

$$\vec{M}_{21}+\vec{M}_{12}=\vec{r}_1\times\vec{F}_{21}+\vec{r}_2\times\vec{F}_{12}=(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{21}$$

- sile med točkastimi telesi ležijo na zveznici (eksperimentalna izkušnja)

$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\parallel\vec{F}_{21}\Rightarrow\boxed{\vec{M}_{21}+\vec{M}_{12}=0}$$

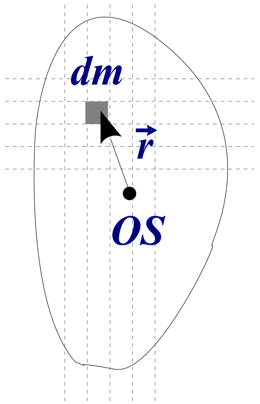
- Newtonov zakon za vrtenje togega telesa

$$\int dM_Z+\int \cancel{dM}_N=\int \alpha r^2 dm=\alpha\int r^2 dm$$

$$\boxed{M=J\alpha}$$

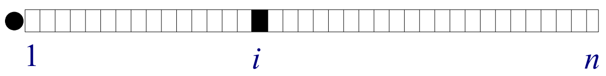
- vztrajnostni moment togega telesa

$$\boxed{J=\int r^2 dm}$$



$$dJ=r^2 dm$$

• vztrajnostni moment tanke palice

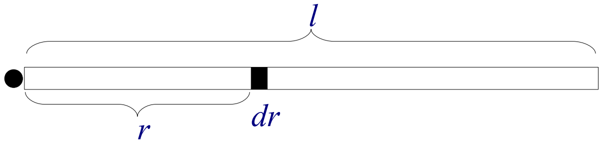


$$J_i = m_i r_i^2 = \frac{m}{n}\left(\frac{i}{n} l\right)^2 = \frac{m l^2}{n^3} i^2$$

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m l^2}{n^3} i^2 = \frac{m l^2}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{m l^2}{n^3}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2\right)$$

$$J = \frac{m l^2}{n^3} \frac{\left(2 n^3 + 3 n^2 + n\right)}{6} = \frac{m l^2}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$n \to \infty \Rightarrow \boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{m\, l^2}}{\boldsymbol{3}}$$

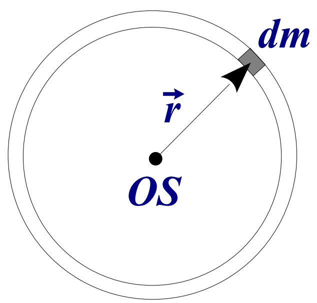


$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho\, dV = r^2 \rho\, S\, dr$$

$$J = \int r^2 dm = \int_0^l \rho\, S\, r^2 dr = \rho\, S \int_0^l r^2 dr$$

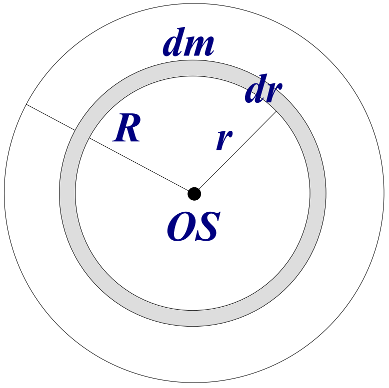
$$\boldsymbol{J} = \rho\, S \frac{r^3}{3}\Big|_0^l = \rho\, S \frac{l^3}{3} = \rho\, S\, l \frac{l^2}{3} = \frac{\boldsymbol{m\, l^2}}{\boldsymbol{3}}$$

• vztrajnostni moment tankega obroča in diska (valja)



$$dJ = r^2 dm$$

$$\boldsymbol{J} = \int r^2 dm = r^2 \int dm = \boldsymbol{m\, r^2}$$



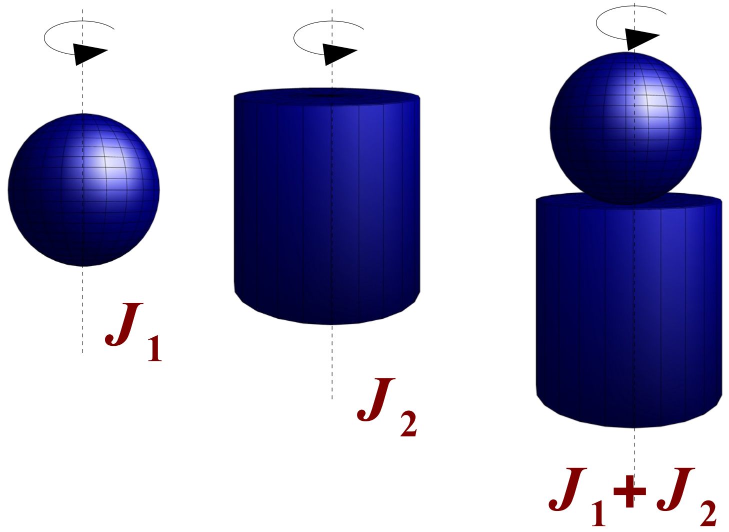
$$dJ = r^2 dm = r^2 \rho\, dV = r^2 \rho\, h\, ds = r^2 \rho\, h\, 2\pi\, r\, dr$$

$$J = 2\pi\rho\, h \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho\, h \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = 2\pi\rho\, h \frac{R^4}{4}$$

$$\boldsymbol{J} = \pi R^2 h \rho \frac{R^2}{2} = \frac{\boldsymbol{m\, R^2}}{\boldsymbol{2}}$$

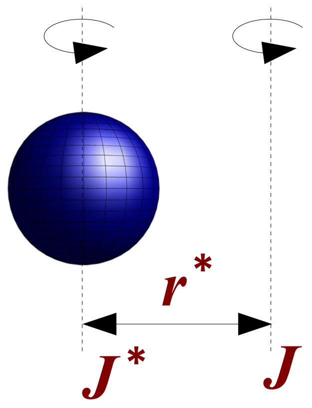
- vztrajnostni momenti so aditivni

$$J = J_1 + J_2$$



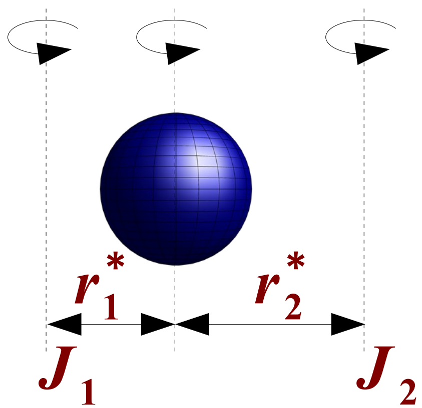
- Steinerjev izrek – vrtenje lahko razstavimo na kroženje težišča in vrtenje okrog vzporedne osi, ki vsebuje težišče

$$J = J^* + m r^{*2}$$



- vzporedne osi – sledi iz Steinerjevega izreka

$$J_1 = J_2 + m\left(r_1^{*2} - r_2^{*2}\right)$$



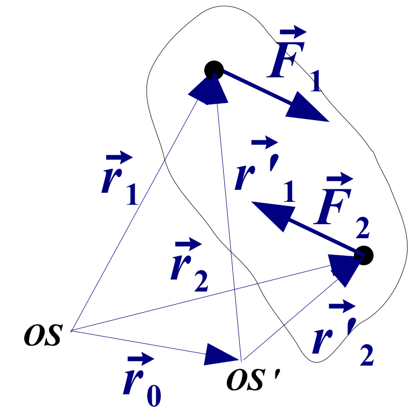
- **izrek o ravnovesju** $\vec{a}=0 \;\wedge\; \alpha=0$

$$\boxed{\sum \vec{F}=0} \quad \text{in} \quad \boxed{\sum \vec{M}=0}$$

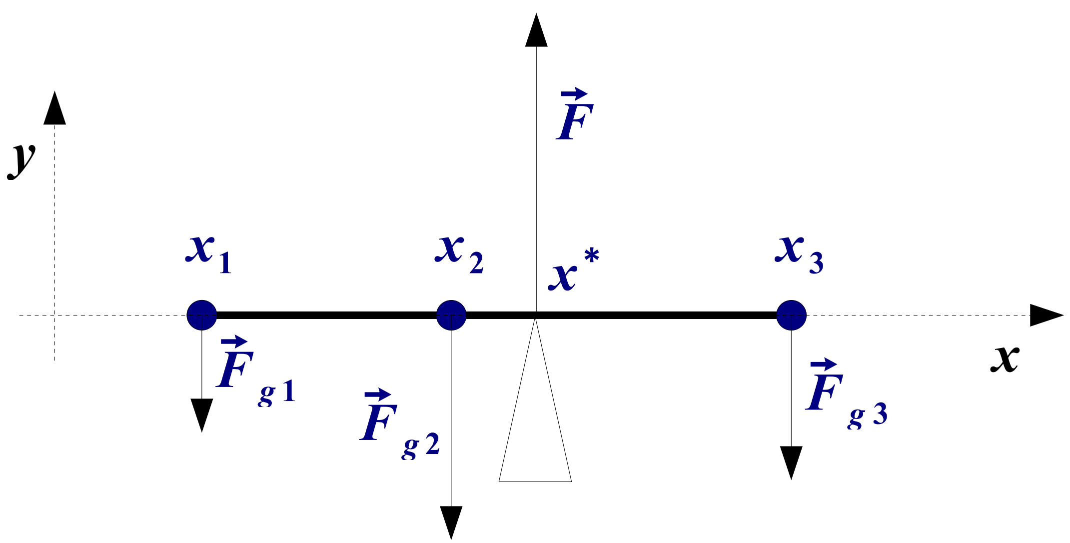
- če je vsota vseh sil enaka nič, je vsota navorov neodvisna od izbire osišča (dvojica sil)

$$\vec{M}=\vec{M}_1+\vec{M}_2=\vec{r}_1\times\vec{F}_1+\vec{r}_2\times\vec{F}_2=(\vec{r}_0+\vec{r}\,'_1)\times\vec{F}_1+(\vec{r}_0+\vec{r}\,'_2)\times\vec{F}_2=$$

$$=\cancel{\vec{r}_0\times(\vec{F}_1+\vec{F}_2)}+\vec{r}\,'_1\times\vec{F}_1+\vec{r}\,'_2\times\vec{F}_2=\vec{M}\,'_1+\vec{M}\,'_2=\vec{M}\,'$$



- ZGLED: težišče - kje moramo podpreti telo, da je v ravnovesju?



Neinercialni opazovalni sistemi

- drugi Newtonov zakon velja le če vpeljemo sistemske sile

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_S = m\vec{a}\,'$$

- enakomerno pospešeni sistem S_a

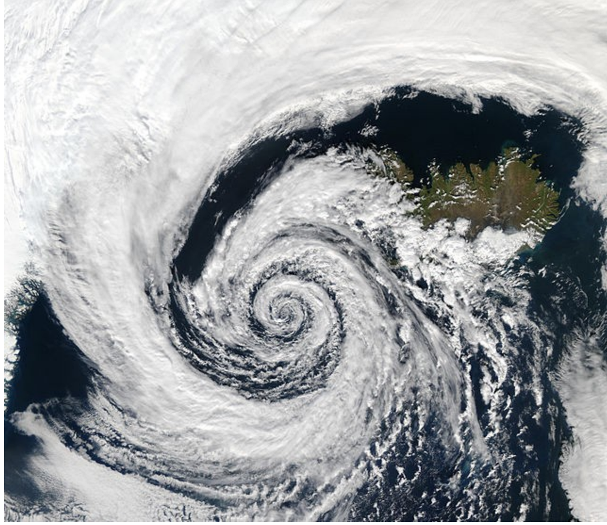
$$\vec{F}_S = -m\vec{a}_0$$

- enakomerno vrteči se sistem S_ω

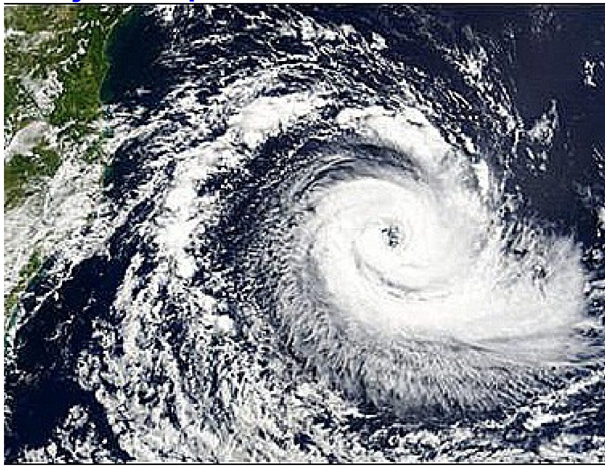
$$\vec{F}_{cen} = m\,\omega_0^2\,\vec{r}_\perp\,'$$ centrifugalna sila

$$\vec{F}_{Cor} = -2m\,\vec{\omega}_0 \times \vec{v}\,'$$ Coriolisova sila

Ciklon na severni



in južni polobli.



Izreki gibanja

Izrek o gibalni količini

• skupni sunek zunanjih sil je enak spremembi gibalne količine

$$\boxed{\int_{t'}^{t} \vec{F}\, dt = m\vec{v} - m\vec{v}\,' = \vec{G} - \vec{G}\,'}$$

ali

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{G}}{dt}}$$

• gibalna količina $\vec{G}\,[kg\, m/s = N\, s]$

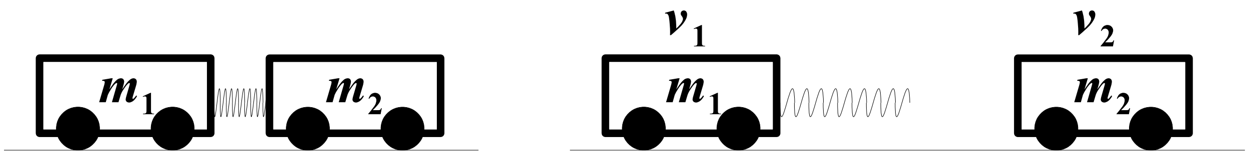
$$\vec{G} = m\vec{v} \qquad\qquad \vec{G} = m\vec{v}^{\,*}$$

za sistem točkastih teles ali togo telo

• če je vsota vseh zunanjih sil enaka nič (in s tem tudi skupni sunek zunanjih sil) se gibalna količina ohranja

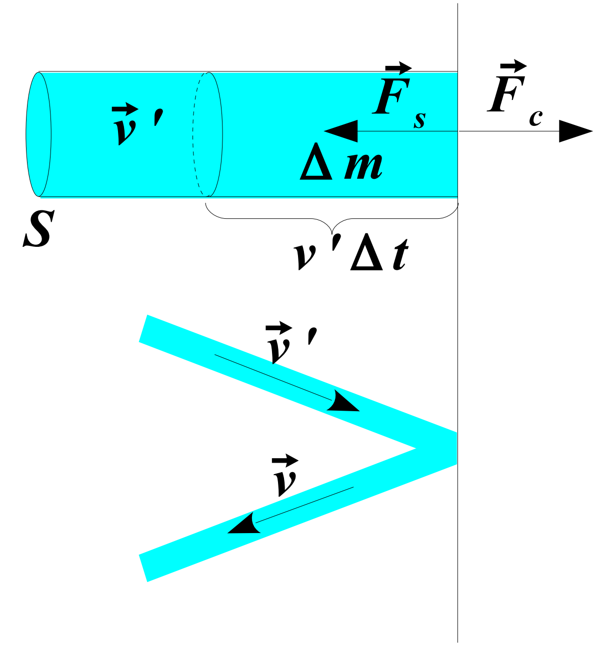
$$\boxed{\sum \vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{G} = \vec{G}\,'}$$

Zgledi:



- odriv (razpad telesa),
ohranja se gibalna količina

$$G' = G \rightarrow 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \rightarrow v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$



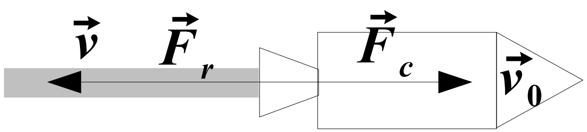
- sila curka

$$\vec{F}_s \Delta t = \vec{G} - \vec{G}\,' = \Delta m \vec{v} - \Delta m \vec{v}\,'$$

$$\rightarrow \vec{F}_s = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v} - \vec{v}\,')$$

$$\vec{F}_c = -\vec{F}_s = \Phi_m(\vec{v}\,' - \vec{v}) = \rho \Phi_V(\vec{v}\,' - \vec{v}) = \rho S v'(\vec{v}\,' - \vec{v})$$

- raketni pogon (povratna sila curka)



$$\vec{F}_r dt = \vec{G} - \vec{G}\,' = dm_c \vec{v} - dm_c \vec{v}_0 = dm_c(\vec{v} - \vec{v}_0) = dm_c \vec{v}\,'$$

$$\vec{F}_c = -\vec{F}_r$$

$$\vec{F}_c dt = -\vec{F}_r dt = -dm_c \vec{v}\,' = dm_r \vec{v}\,' \rightarrow F_c = m_r a = -v' \frac{dm_r}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'$$

$$dv_r = a\,dt = -v' \frac{dm_r}{m_r} \rightarrow v_r = -v' \int_{m'_r}^{m_r} \frac{dm_r}{m_r} = v' \ln \frac{m'_r}{m_r}$$

relativna hitrost izpušnih plinov

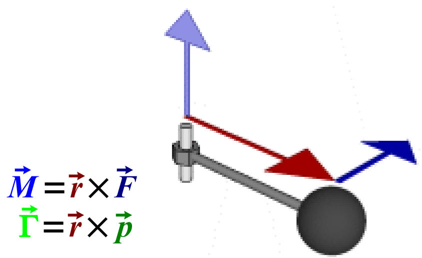
Izrek o vrtilni količini - kroženje točkastega telesa

- skupni sunek zunanjih navorov je enak spremembi vrtilne količine $M = J\,\alpha$

$$\boxed{\int_{t'}^{t} M\,dt = J\,\omega - J\,\omega' = \Gamma - \Gamma'}$$ **ali** $$\boxed{M = \frac{d\Gamma}{dt}}$$

- vrtilna količina $\vec{\Gamma}\,[kg\,m^2/s = m\,N\,s]$

$$\vec{\Gamma} = J\,\vec{\omega} \qquad \Gamma = J\,\omega = m\,r^2\,\omega = m\,r\,v = r\,G$$



- če je vsota vseh zunanjih navorov enaka nič (in s tem tudi skupni sunek zunanjih navorov) se vrtilna količina ohranja

$$\boxed{\sum \vec{M} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}'}$$

Krivo gibanje točkastega telesa

$$\boxed{\vec{\Gamma}=m\,\vec{r}\times\vec{v}=\vec{r}\times\vec{G}}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}}$$

$$\boxed{\int_{t'}^{t}\vec{M}\,dt=\vec{\Gamma}-\vec{\Gamma}\,'}$$

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}=m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v})=m\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}+m\,\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}=\cancel{m\,\vec{v}\times\vec{v}}+m\,\vec{r}\times\vec{a}$$

$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}=\vec{r}\times m\,\vec{a}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

Sistem točkastih teles

- skupna vrtilna količina in navor

$$\boxed{\vec{\Gamma}=\sum_{i}m_i\vec{r}_i\times\vec{v}_i}$$

$$\boxed{\vec{M}=\sum_{i,j}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji}}$$

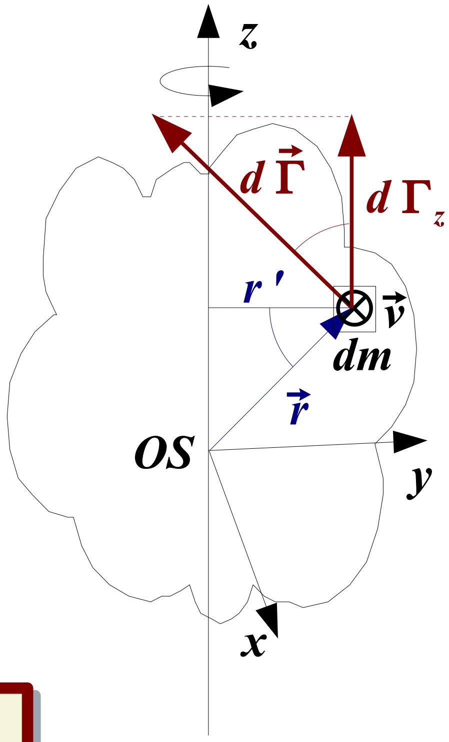
Togo telo

- skupna vrtilna količina in navor

$$\vec{\Gamma}=\int dm\,\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{M}=\int \vec{r}\times d\vec{F}$$

- vrtenje togega telesa okrog nepremične osi



$$d\Gamma=r\,v\,dm\,;\quad \frac{d\Gamma_z}{d\Gamma}=\frac{r'}{r};\quad v=\omega_z r'$$

$$d\Gamma_z=\frac{r'}{r}r\,v\,dm=\omega_z r'^2\,dm$$

$$\Gamma_z=\omega_z\int r'^2\,dm=J_z\omega_z$$

$$\Gamma_z=J_z\omega_z$$

$$\int M_z\,dt=\Delta\Gamma_z;\quad M_z=\frac{d\Gamma_z}{dt}$$

- PRIMER:
  - vrtenje na stolu: uteži, kolo

Gibajoče osišče – osišče v težišču

- tirna vrtilna količina $\vec{\Gamma}_0 = m\,\vec{r}^* \times \vec{v}^*$
- lastna vrtilna količina $\vec{\Gamma}^* = \int dm\,\vec{r}\,' \times \vec{v}\,'$

$$\boxed{\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 + \vec{\Gamma}^*} \quad \boxed{\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}^*} \quad \boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{\Gamma}}{dt}} \quad \boxed{\int_{t'}^{t} \vec{M}\,dt = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}\,'}$$

$$\vec{M}_0 + \vec{M}^* = \frac{d\vec{\Gamma}_0}{dt} + \frac{d\vec{\Gamma}^*}{dt} \qquad \vec{M}_0 = \frac{d\vec{\Gamma}_0}{dt} \qquad \vec{M}^* = \frac{d\vec{\Gamma}^*}{dt}$$

gibanje težišča

vrtenje okoli težišča

$$\vec{F} = m\,\vec{a}^* \qquad M = J\,\alpha$$

- PRIMERA:
  - kotaljenje po klancu
  - odskok z okrogle plošče

Ležaji in glavne osi

- Naloga ležajev je, da omogočajo vrtenje telesa okrog fiksne osi:
  - teža telesa
  - centripetalna sila, ko težišče ni na osi vrtenja
  - navor, ko se telo ne vrti okrog glavne osi

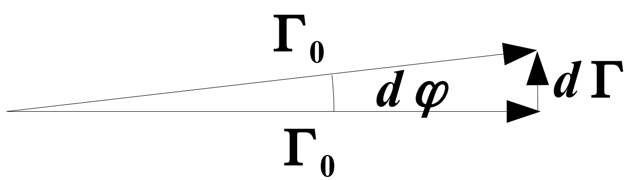
- Glavna os togega telesa je tista, pri kateri ima vektor vrtilne količine smer osi, ko se telo vrti okrog nje.
  - vsako togo telo ima vsaj tri med seboj pravokotne glavne osi.

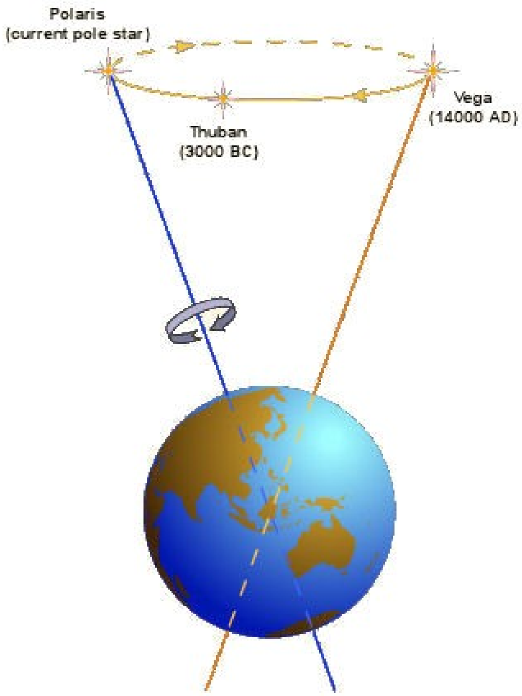
Precesija vrtavke

$$M\,dt = d\Gamma = \Gamma_0\, d\varphi$$

$$M = \Gamma_0 \frac{d\varphi}{dt} = \Gamma_0 \omega_p$$

$$\omega_p = \frac{M}{\Gamma_0}$$





Delo sile in izrek o kinetični energiji

Premo gibanje točkastega telesa

- skupno delo vseh sil je enako spremembi kinetične energije

$$\boxed{A=\int_{x'}^{x} F\,dx = W_K - W_K'}$$

$$A=\int_{x'}^{x} F\,dx=\int_{x'}^{x} m\,a\,dx=\int_{v'}^{v} m\,v\,dv=\frac{1}{2}m\,v^2-\frac{1}{2}m\,v'^2=W_K-W_K'$$

- kinetična energija $W_K\,[J=kg\,m^2/s^2]$

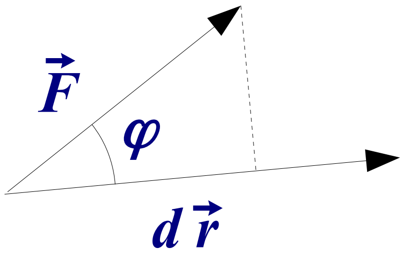
$$\boxed{W_K=\frac{1}{2}m\,v^2=\frac{G^2}{2\,m}}$$

- delo sile $A\,[J=Nm]$

$$\boxed{A=\int_{x'}^{x} F\,dx}$$

- če sila ne deluje v smeri premika točkastega telesa, pri računu dela upoštevamo le njeno komponento v smeri premika

$$A=\int_{x'}^{x} F\,dx\cos\varphi$$



Krivo gibanje točkastega telesa

$$A=\int_{\vec{r}\,'}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

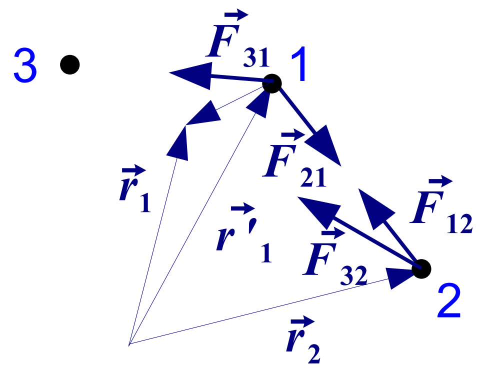
Kroženje točkastega telesa

$$A=\int_{\varphi'}^{\varphi} M\,d\varphi=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega'^2=W_K-W_K'$$

Sistem točkastih teles

$$\int_{\vec{r}_1'}^{\vec{r}_1} \vec{F}_{31} d\vec{r}_1 + \int_{\vec{r}_1'}^{\vec{r}_1} \vec{F}_{21} d\vec{r}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v'^2_1$$

$$\int_{\vec{r}_2'}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{32} d\vec{r}_2 + \int_{\vec{r}_2'}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{12} d\vec{r}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2$$



$$\boxed{A + A_N = W_K - W'_K}$$

$$A_N \neq 0$$

v splošnem

- delo notranjih sil sistema v splošnem ni enako 0
- hitro se prepričamo, da je to res, če eno telo miruje, druge pa se premika

$$\boxed{W_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

kinetična energija sistema

$$A = \sum_{i,j} \int_{\vec{r}\,'}^{\vec{r}} \vec{F}_{ji} d\vec{r}_i$$

delo zunanjih sil

$$A_N = \sum_{i \neq i'} \int_{\vec{r}\,'_i}^{\vec{r}_i} \vec{F}_{i'i} d\vec{r}_i$$

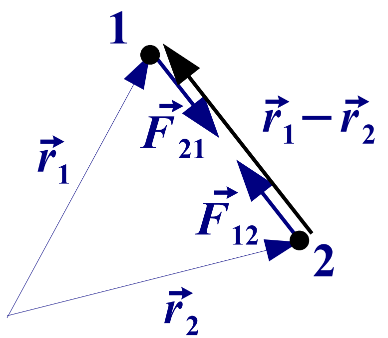
delo notranjih sil

Togo telo

- delo notranjih sil je enako nič

$$\boxed{A_N = 0}$$

$$A_N = \vec{F}_{21}\cdot\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{12}\cdot\Delta\vec{r}_2 =$$
$$= \vec{F}_{21}\cdot\Delta\vec{r}_1 - \vec{F}_{21}\cdot\Delta\vec{r}_2 = \vec{F}_{21}\cdot(\Delta\vec{r}_1 - \Delta\vec{r}_2) =$$
$$= \vec{F}_{21}\cdot((\vec{r}_1 - \vec{r}\,'_1) - (\vec{r}_2 - \vec{r}\,'_2)) =$$
$$= \vec{F}_{21}\cdot((\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - (\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2)) = \vec{F}_{21}\cdot\Delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$



$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}\,'_1 - \vec{r}\,'_2|$$

- delo lahko razstavimo na delo, ki bi ga opravila sila, če bi prijemala v težišču in delo navora te sile glede na težiščno os

$$A = \int_{\vec{r}^{*}\,'}^{\vec{r}^{*}} \vec{F}\cdot d\vec{r}^{*} + \int_{\varphi'}^{\varphi} M^{*}\,d\varphi$$

- kinetično energijo lahko razstavimo na prispevka zaradi gibanja težišča in vrtenja okoli težiščne osi

$$W_K = \frac{1}{2} m v^{*2} + \frac{1}{2} J^{*} \omega^{*2}$$

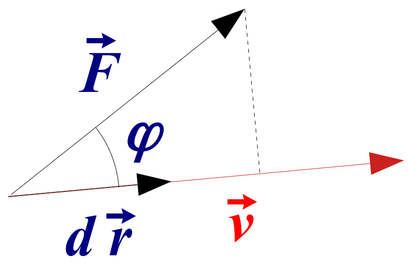
Moč $\quad P[W = J/s]$

- moč je hitrost opravljanja dela

$$\overline{P} = \frac{A}{\Delta t} \quad \text{povprečna} \qquad\qquad P = \frac{dA}{dt} \quad \text{trenutna}$$

- moč pri gibanju in vrtenju

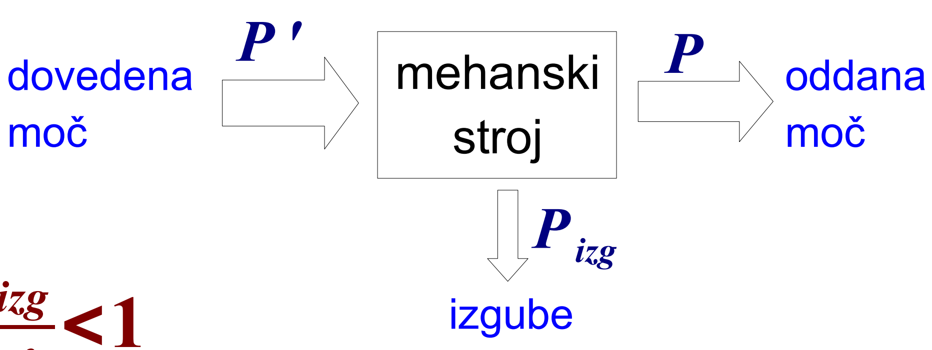
$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{M\, d\varphi}{dt} = M\,\omega$$

- Izkoristek mehanskega stroja

$$P = P' - P_{izg}$$



$$\eta = \frac{P}{P'} = \frac{P' - P_{izg}}{P'} = 1 - \frac{P_{izg}}{P'} < 1$$

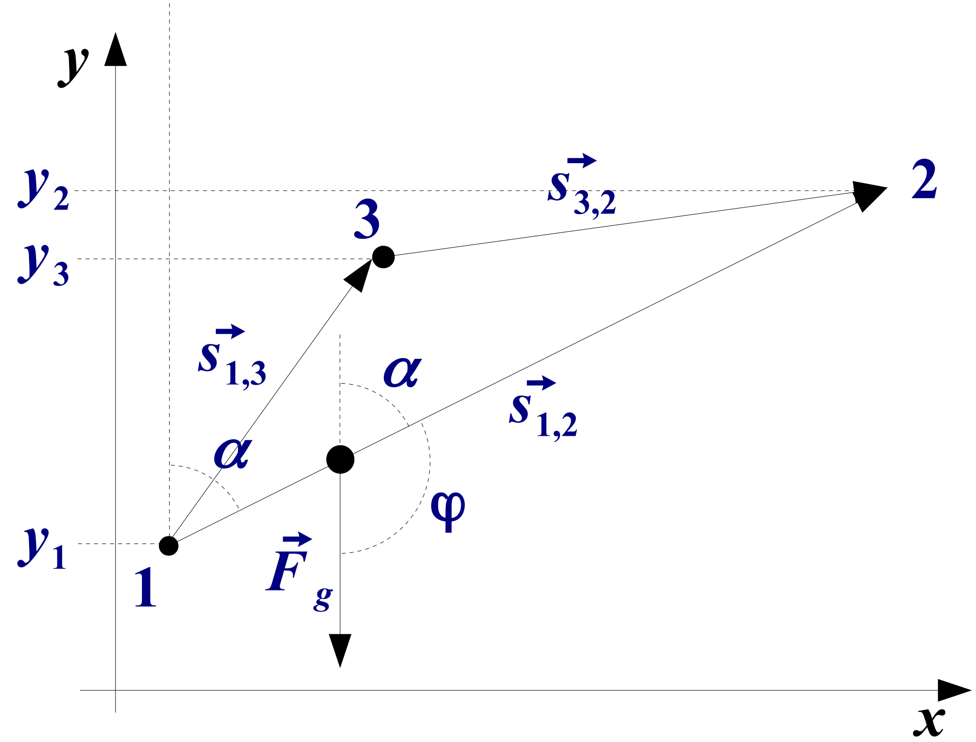
Potencialna energija

- delo sile pri premem premiku od točke 1 do točke 2

$$A_{1,2}=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}_g\cdot\vec{s}_{1,2}$$

$$A_{1,2}=mg\,s_{1,2}\cos(\phi)=mg\,s_{1,2}\cos(\pi-\alpha)=$$

$$=-mg\,s_{1,2}\cos(\alpha)=-mg(y_2-y_1)$$



$$A_{1,3,2}=A_{1,3}+A_{3,2}=$$

$$=-mg(y_3-y_1)-mg(y_2-y_3)=$$

$$=-mg(y_3-y_1+y_2-y_3)=$$

$$=-mg(y_2-y_1)=A_{1,2}$$

$$A_{1,3,2}=A_{1,3}+A_{3,2}=A_{1,2}$$

$$A_{1,2}=-(mgy_2-mgy_1)$$

- delo sile teže je odvisno samo od začetne in končne točke na poti in ne od poti med začetno in končno točko
- sile, katerih delo je neodvisno od poti, so konzervativna
- delo konzervativne sile po zaključeni poti je enako 0

• ker je delo konzervativne sile odvisno le od začetne in končne točke, ga lahko izrazimo kot razliko funkcije lege – potencialne energije

$$A = A_o + A_g = \Delta W_k$$

$$A_o = \Delta W_k + (-A_g)$$

$$A_o = \Delta W_k + \Delta W_g$$

$$\Delta W_g = -A_{1,2} = mgy_2 - mgy_1 = W_{g,2} - W_{g,1}$$

• sprememba potencialne energije je enaka negativnemu delu konzervativne sile

$$\Delta W_{potencialna} = W_p - W'_p = -A_{konzervativna} = -\int_{\vec{r}\,'}^{\vec{r}} \vec{F}_{konzervativna} \cdot d\vec{r}$$

• potencialna energija sile vzmeti

$$A_{vz} = \int_{x'}^{x} F_{vz}\, dx = -k \int_{x'}^{x} x\, dx = -\left(\frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x'^2\right)$$

$$\Delta W_{pr} = -A_{vz} = \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k x'^2 = W_{pr} - W'_{pr}$$

Izrek o mehanski energiji

$$A_{nekonzervativnih\ sil} = \Delta W_{mehanska} = \Delta W_{kinetična} + \Delta W_{potencialna}$$

Delo nekonzervativnih sil je enako spremembi mehanske energije, ki je vsota kinetične energije in potencialnih energij konzervativnih sil.

- izrek o ohranitvi potencialne energije

- izračun konzervativne sile iz znane potencialne energije
- graf potencialne energije
- ravnovesna lega

- primer: gibanje po zanki YouTube SI

Trki

- pri trku delujejo med telesi relativno močne sile relativno kratek čas
- ohranja se gibalna količina

$$\vec{G} = \vec{G}\,'$$

$$m_1 \vec{v}\,'_1 + m_2 \vec{v}\,'_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

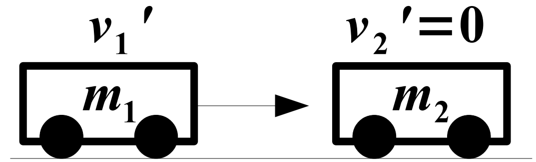
Prožni trk

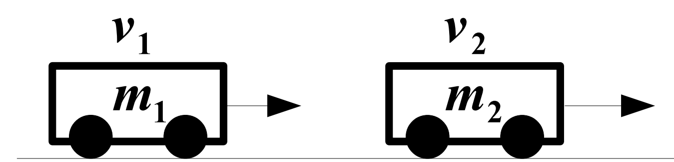
- pri prožnem trku se ohranja tudi kinetična energija

$$W_K = W_K\,'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v\,'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v\,'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

• centralni trk - mirujoča tarča





$$m_1 v'_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$m_1 (v'_1 - v_1) = m_2 v_2$$

$$m_1 (v'^2_1 - v_1^2) = m_2 v_2^2$$

$$\frac{m_1 (v'_1 - v_1)(v'_1 + v_1) = m_2 v_2^2}{(v'_1 + v_1) = v_2}$$

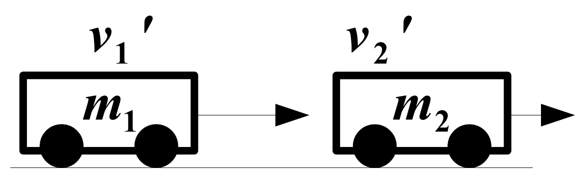
$$m_1 (v'_1 - v_1) = m_2 (v'_1 + v_1)$$

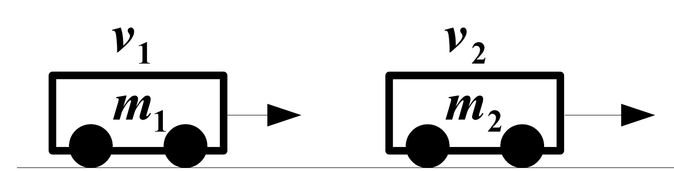
$$m_{1v}{'}_1 - m_2 v'_1 = m_1 v_1 + m_2 v_1$$

$$v_2 = v'_1 \frac{2 m_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_1 = v'_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

• centralni trk - gibajoča tarča





$$\left.\begin{aligned} & m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ & \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{aligned}\right\} \quad v_1 = v'_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + v'_2 \frac{2 m_2}{m_1 + m_2}$$

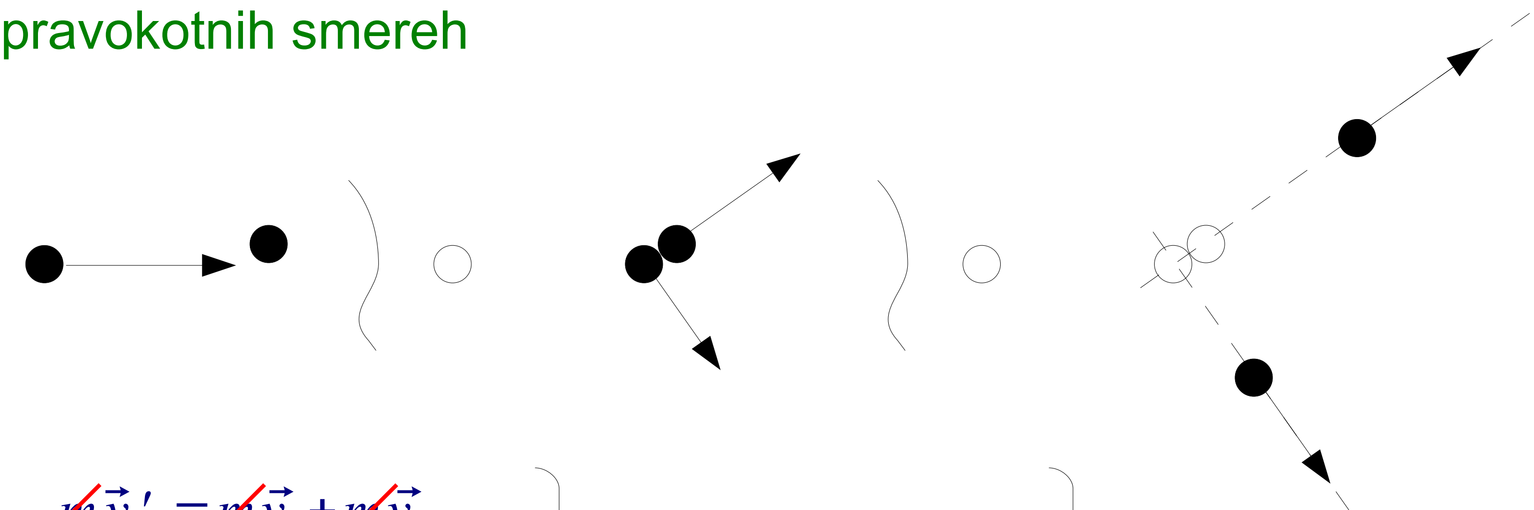
Neprožni trk

- pri neprožnem trku je delo notranjih sil različno od nič in kinetična energija se ne ohranja
- za izračun hitrosti delcev po trku potrebujemo še dodatno informacijo o trku

$$A_n = W_K - W_K'$$

Trk v dveh dimenzijah

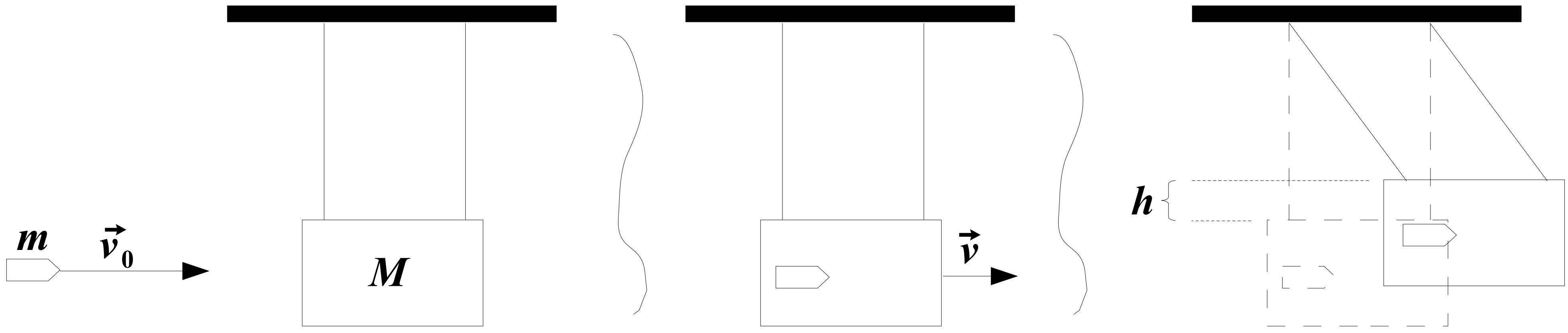
- primer: pri trku telesa z mirujočim telesom enake mase, telesi nadaljujeta pot v pravokotnih smereh



$$\left.\begin{array}{l} \cancel{m}\vec{v}'_1 = \cancel{m}\vec{v}_1 + \cancel{m}\vec{v}_2 \\ \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v'^2_1 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_1^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m} v_2^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \vec{v}'_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad /()^2 \\ v'^2_1 = v_1^2 + v_2^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} v'^2_1 = v_1^2 + 2 v_1 + v_2 + v_2^2 \\ v'^2_1 = v_1^2 + v_2^2 \end{array}\right\} \quad 0 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

Balistično nihalo

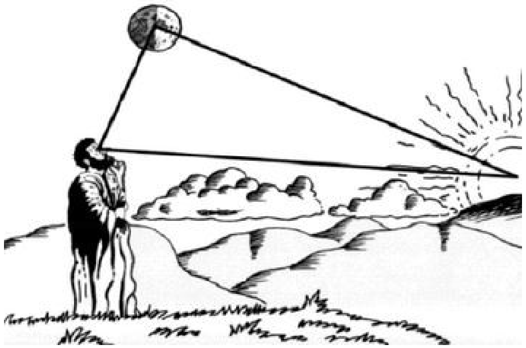
- z balističnim nihalom lahko merimo hitrost izstrelkov
  1) izstrelek se ustavi v kladi, popolnoma neprožni trk
  2) klada z izstrelkom zaniha in se dvigne do višine h, ohranja se mehanska energija sistema



$$\underbrace{m v_0 = (m+M) v \qquad \frac{1}{2}(m+M) v^2 = (m+M) g h}$$

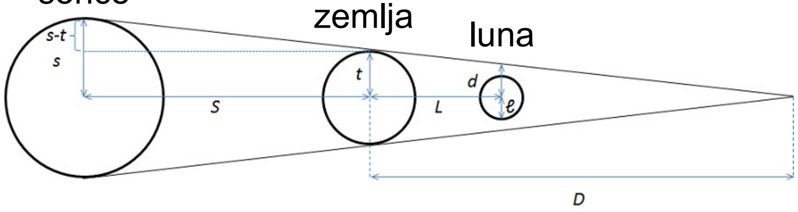
$$v_0 = \frac{(m+M)}{m}\sqrt{2gh}$$

Gravitacijski zakon



• Pitagora, Parmenid (6. st. p.n.š.): zemlja je okrogla in središče vesolja – geocentrični sistem

• Aristarh (3. st. p.n.š.): določi razmerje med velikostjo sonca zemlje in lune; sonce postavi v središče -- heliocentrični sistem

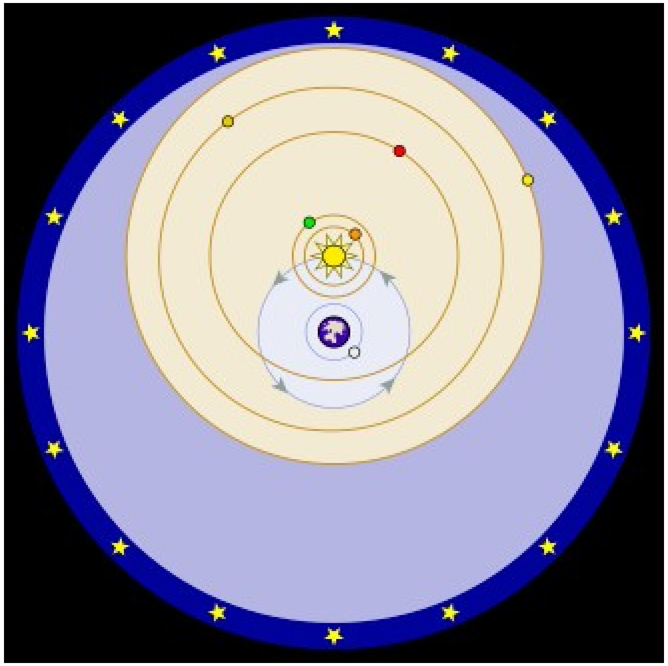


• Eratosten (3. st. p.n.š.): izmeri polmer zemlje

• Ptolomej (2. st.): geocentrični sistem, račun leg planetov

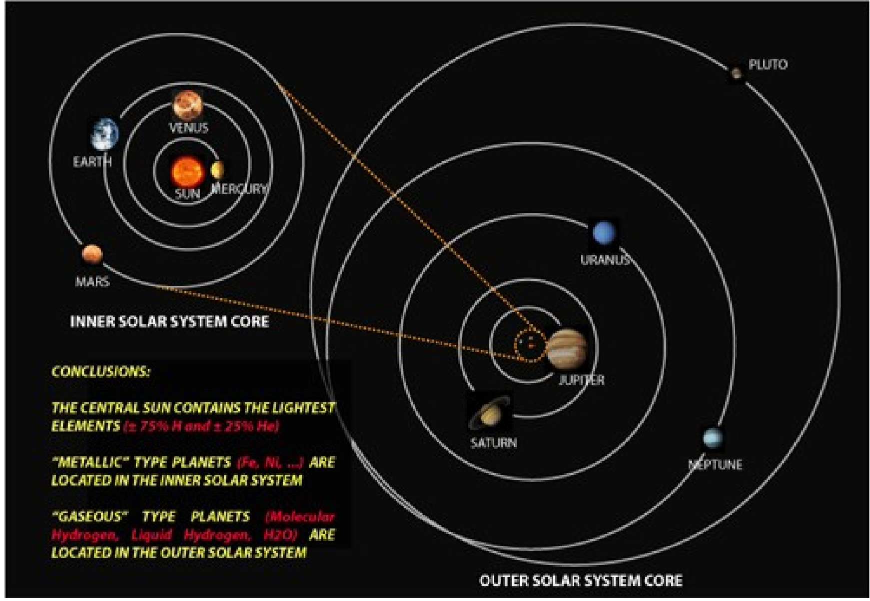
• Kopernik (15. st.): vrnitev na heliocentrični sistem

• Brahe (Tycho, 16. st.): natančne meritve gibanja planetov



Thycohnični sistem – kombinacija geo in heliocentričnega sistema

Keplerjevi zakoni



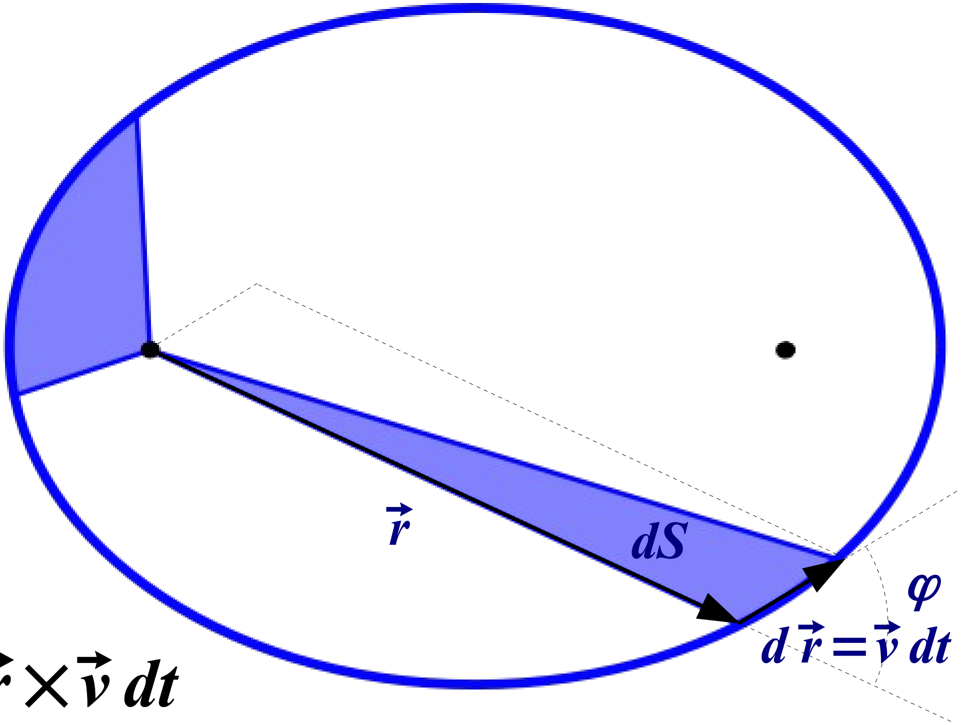
I. ZAKON ORBIT

Pot planeta je elipsa in sonce je v žarišču elipse.
(planet kroži okoli sonca)

M

II. ZAKON PLOŠČIN

Vektor od sonca do planeta opiše v enakih časih enake ploščine.
(kotna hitrost je konstantna)



$$\frac{dS}{dt}=\frac{|\vec{r}\times m\vec{v}|}{2m}=\frac{\Gamma}{2m}$$

$$dS=\frac{1}{2}r\,dr\sin\varphi=\frac{1}{2}r\,v\,dt\sin\varphi=\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v}\,dt$$

III. ZAKON OBHODNI ČASOV

Kvocient kuba velike polosi elipse in kvadrata obhodnega časa je za vse planete enak.

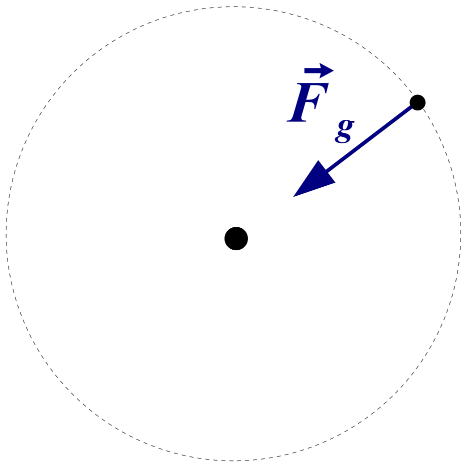
$$\frac{r^3}{t_0^2} = K$$

Gravitacijska sila

- s pomočjo 3. Keplerjevega zakona lahko za kroženje planeta zapišemo

$$F_g = F_r = m_p a_r = m_p \omega^2 r = m_p \frac{4\pi^2}{t_0^2} r$$

$$F_g = 4\pi^2 \frac{r^3}{t_0^2} \frac{m_p}{r^2} = 4\pi^2 K \frac{m_p}{r^2} = G \frac{m_s m_p}{r^2}$$



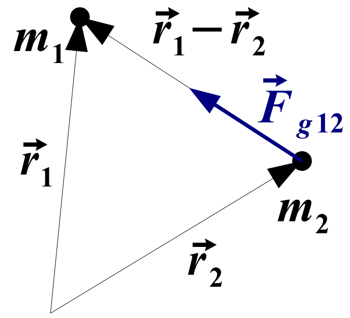
obe telesi nastopata enakovredno: $4\pi^2 K = G m_s$

$$a_r = \omega^2 r$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t_0}$$

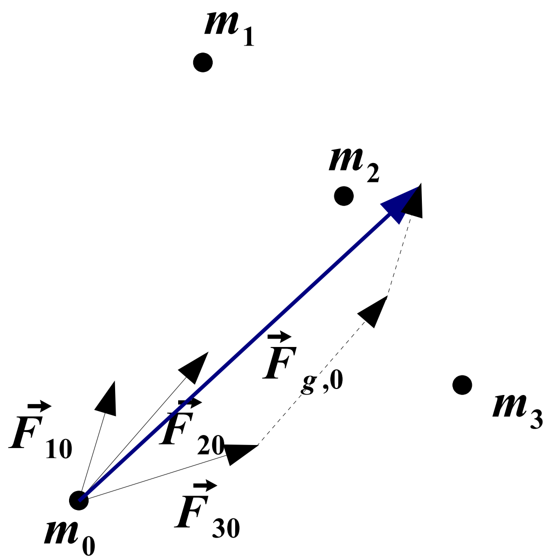
$$\boxed{F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}}$$

• vektorski zapis gravitacijske sile



$$\vec{F}_{g,12}=G\cdot\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2}\cdot\frac{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

• načelo superpozicije



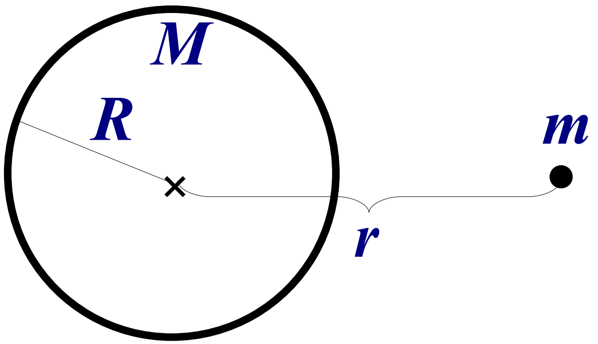
$$\vec{F}_{g,0}=\sum_i \vec{F}_{g,i0}=\sum_i G\cdot\frac{m_0 m_i}{|\vec{r}_i-\vec{r}_0|^2}\cdot\frac{(\vec{r}_i-\vec{r}_0)}{|\vec{r}_i-\vec{r}_0|}$$

• zvezna porazdelitev mase (primer: sila na osi homogenega obroča)

$$\vec{F}_{g,0}=\int G\cdot\frac{m_0\,dm}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

• izrek za krogelne lupine

$$F=\begin{cases} 0 & ;r<R \\ G\cdot\dfrac{M\,m}{r^2} & ;r\geqslant R \end{cases}$$

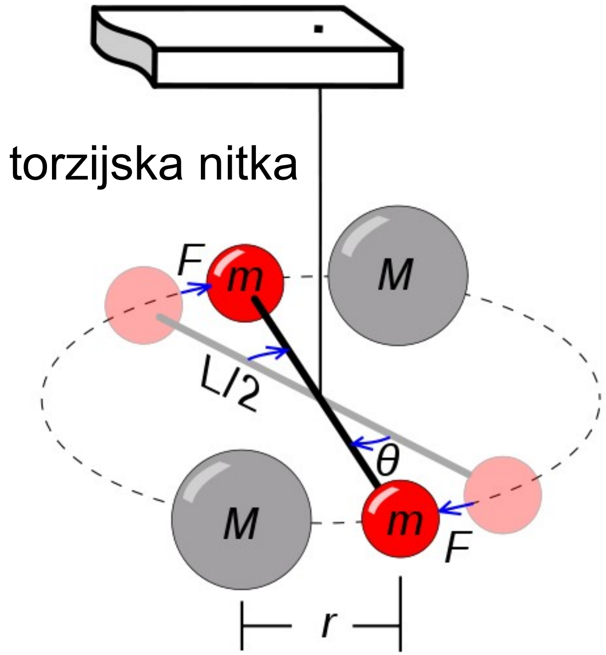


Gravitacijska konstanta - Cavendish

• Cavendish je opravil poskus s katerim je določil gostoto zemlje

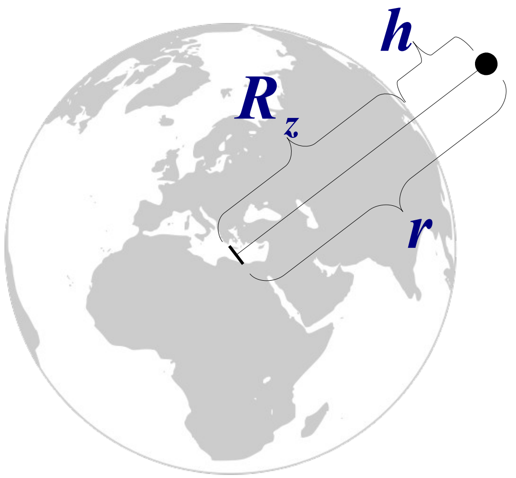
• kasneje so s pomočjo njegove meritve določili gravitacijsko konstanto

$$G=6.67\cdot10^{-11}\,N\,m^2/kg^2$$



- gravitacija na površini zemlje in v njeni notranjosti

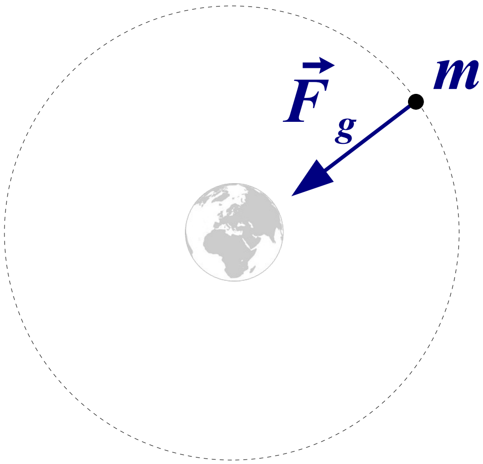
$$F_g = G\frac{m M_z}{R_z^2} = m g_0 \Rightarrow g_0 = \frac{G M_z}{R_z^2}$$



$$g(h) = \frac{G M_z}{(R_z + h)^2} = \frac{G M_z}{R_z^2 (1 + \frac{h}{R_z})^2} = g_0 \frac{1}{1 + 2\frac{h}{R_z} + (\frac{h}{R_z})^2}$$

$$g(h) \approx g_0 (1 - 2\frac{h}{R_z})$$

- kroženje satelitov (nizki, geostacionarni)



$$m g_0 = \frac{m v^2}{R_z} \Rightarrow v = \sqrt{g_0 R_z} \approx 8\, km/s$$

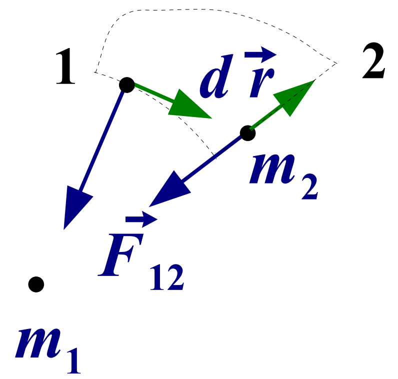
nizki

$$G\frac{m M_z}{r^2} = m g_0 \frac{R_z^2}{r^2} = m \omega^2 r \Rightarrow r = \sqrt[3]{g_0 \frac{R_z^2}{\omega^2}} \approx 42400\, km$$

geostacionarni

• gravitacijska potencialna energija (ubežna hitrost)

$$A_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\int_{r'}^{r} G \frac{m_1 m_2}{r^2} dr = G \frac{m_1 m_2}{r} - G \frac{m_1 m_2}{r'}$$



$$\Delta W_g = -A_g = \left(-G \frac{m_1 m_2}{r}\right) - \left(-G \frac{m_1 m_2}{r'}\right)$$

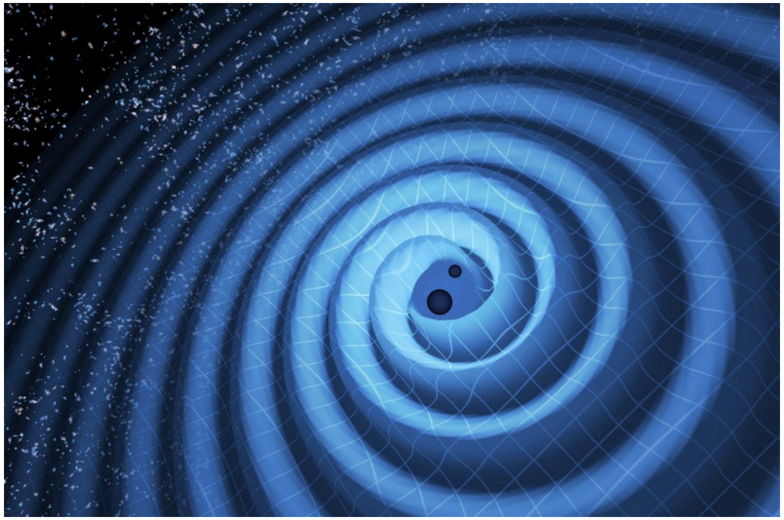
$$\boxed{W_g = -G \frac{m_1 m_2}{r}}$$

• ubežna hitrost

daleč vstran od zemlje
je mehanska energija 0

$$-G \frac{m M_z}{R_z} + \frac{1}{2} m v^2 = -m g_0 R_z + \frac{1}{2} m v_u^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_u = \sqrt{2 g_0 R_z} \approx 11{,}3\, km/s$$

Gravitacijski valovi



Nobelova nagrada za fiziko 2017

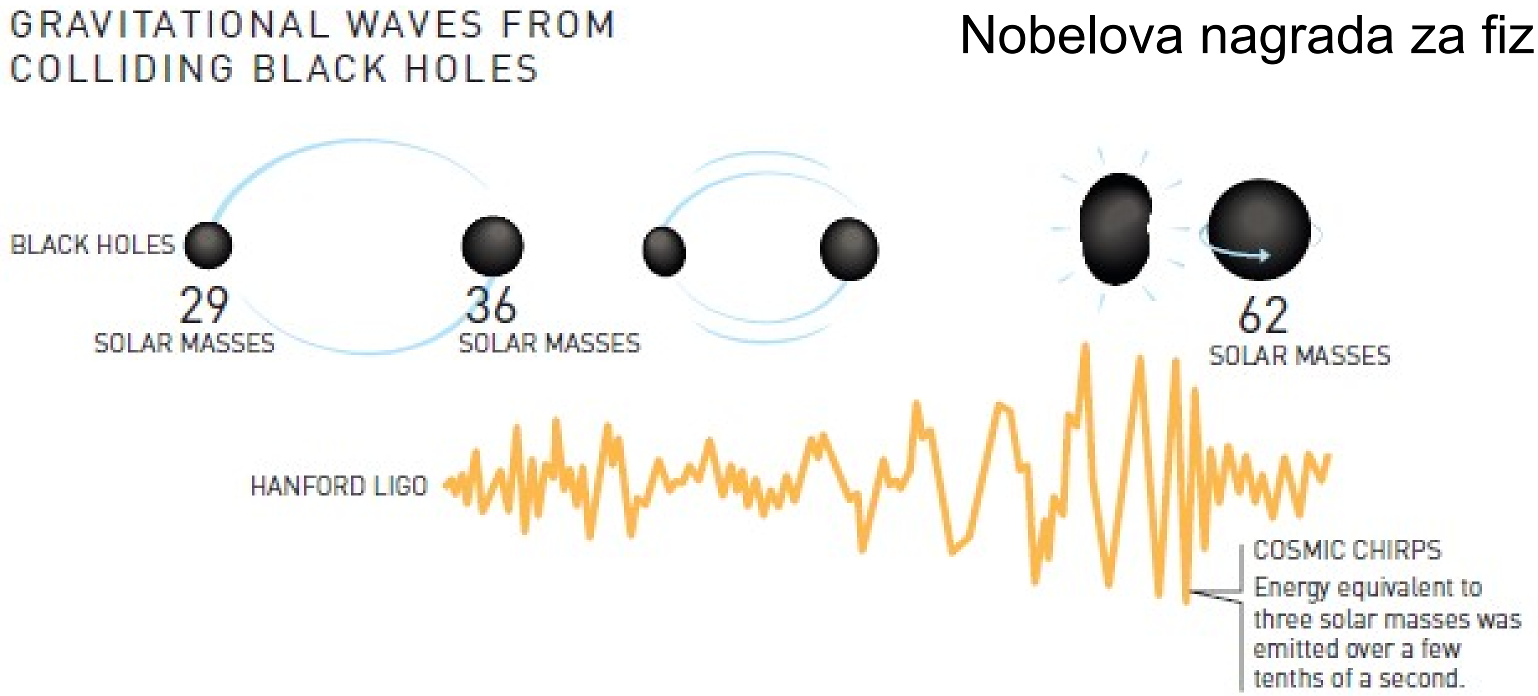


Figure 2. The two black holes emitted gravitational waves for many million years as they rotated around each other. They got closer and closer, before merging to become one black hole in a few tenths of a second. The waves then reached a crescendo which, to us on Earth, 1.3 billion lightyears away, sounded like cosmic chirps that came to an abrupt stop.

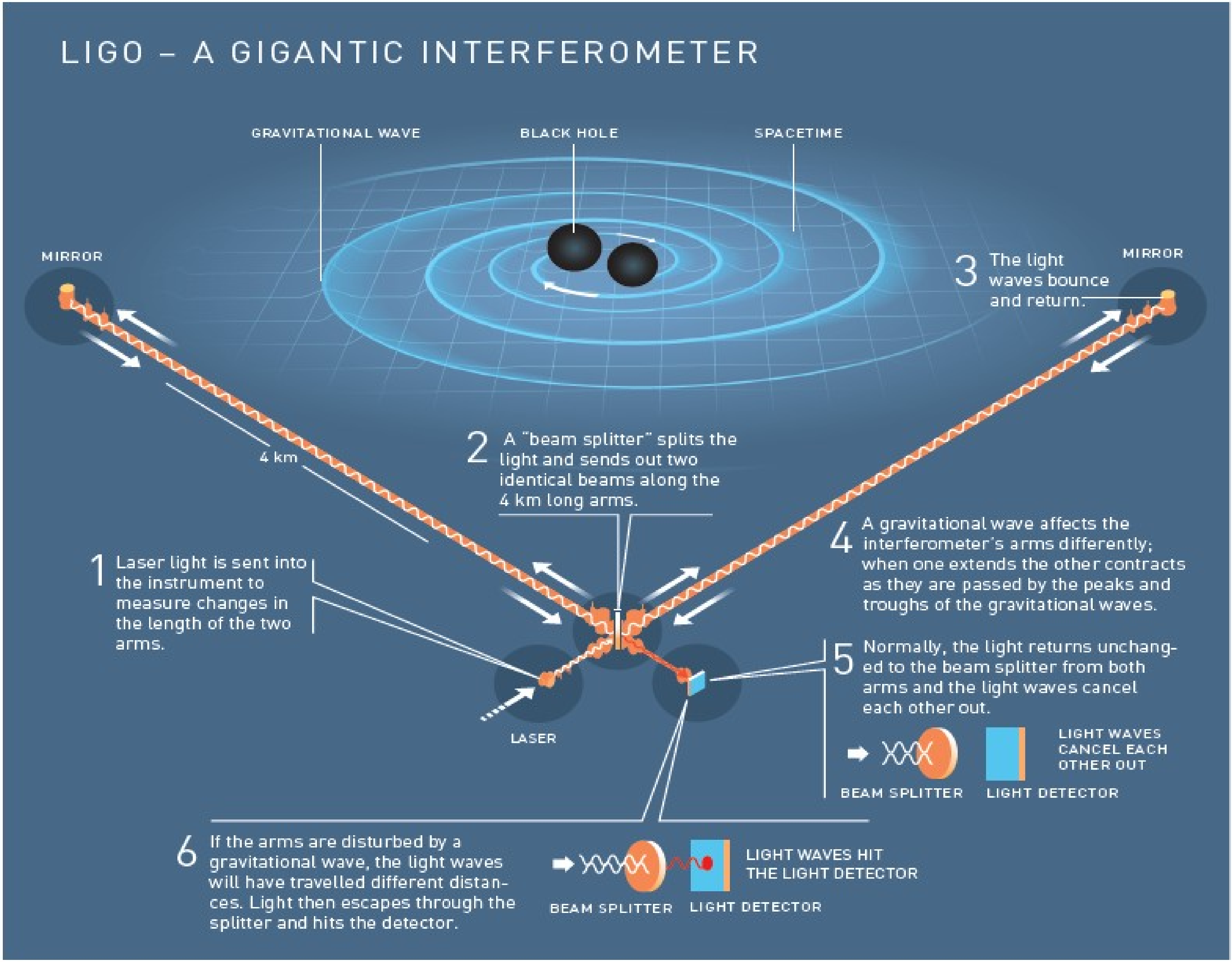


Figure 3. How to catch a gravitational wave. The world's first captured gravitational waves were created in a violent collision between two black holes, 1.3 billion lightyears away. When these waves passed the Earth, 1.3 billion years later, they had weakened considerably: the disturbance in spacetime that LIGO measured was thousands of times smaller than an atomic nucleus.

The Hanford facility is on the steppes of the northwest USA, outside Hanford.

The Livingston facility is in Livingston in the southern swampland of Louisiana.

Courtesy Caltech MIT/Ligo Laboratory

Courtesy Caltech MIT/Ligo Laboratory

Figure 4. LIGO consists of two gigantic identical interferometers. The gravitational wave first hit the interferometer in Livingston and then passed its twin in Hanford, just over 3,000 km away, 7 milliseconds later. The signals were almost identical, and were a good match with the predicted signal for a gravitational wave. Using the signals, an area in the southern skies could also be identified as the area the waves came from.

Elastomehanika

- mehanika trdnih teles, ki se deformirajo

Nateg ali stisk v eni smeri - Hookov zakon

$$\boxed{\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l}}$$

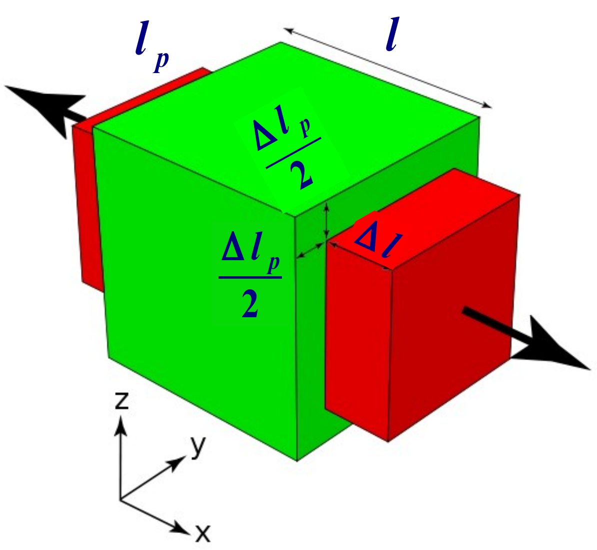
- napetost je sorazmerna z relativnim raztezkom

- prožnostni modul $E\,[N/m^2]$

$$E = \frac{F\,l}{S\,\Delta l}$$

- relativni prečni raztezek - Poissonovo število μ

$$\frac{\Delta l_p}{l_p} = -\mu\frac{\Delta l}{l}$$



Vsestransko stiskanje

- stisljivost $\chi\,[m^2/N]$

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V}=-\chi\frac{F}{S}}$$

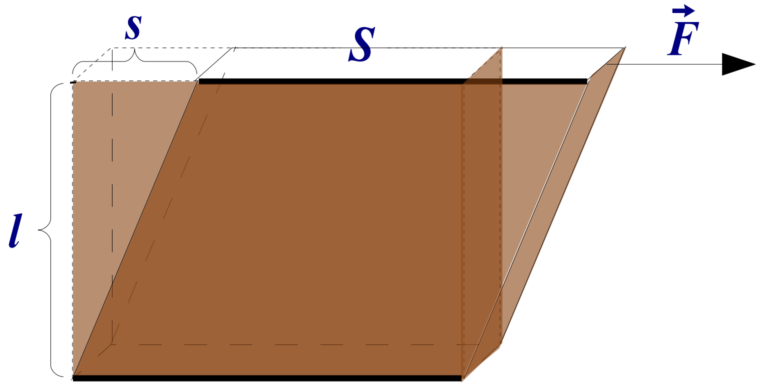
$$\chi=\frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Strižna obremenitev

- strižni modul $G\,[N/m^2]$

$$\boxed{\frac{F}{S}=G\frac{s}{l}}$$

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

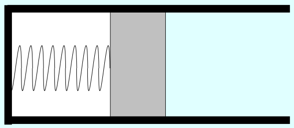


	E (10^{10} N/m²)	G (10^{10} N/m²)	μ	meja pr. (10^{7} N/m²)	meja trd. (10^{7} N/m²)
steklo	5 - 8	2 - 3	0,2 - 0,3	-	7
kavčuk	0,8	0,3	0,46	0,4	2
jeklo	20 - 21	8	0,25 - 0,3	30 - 150	50 - 2500

Tlak

- tlak $p[N/m^2 = Pa]$

$$p = \frac{F}{S}$$



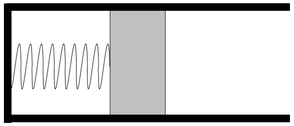
$$p = \frac{k\,\Delta x}{S} = \frac{k}{S}\Delta x$$

- v mirujoči tekočini se tlak spreminja z globino

$$p = p_0 + \rho\, g\, h$$

Merjenje tlaka

- zaprt kapljevinski manometer (živosrebrni manometer)
- odprt kapljevinski manometer
- manometer na bat ...

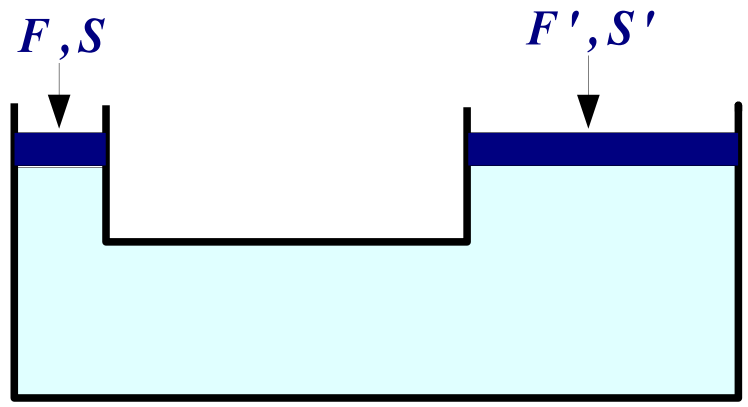


V · T · E	Pascal (Pa)	Bar (bar)	Technical atmosphere (at)	Standard atmosphere (atm)	Torr (Torr)	Pounds per square inch (psi)
1 Pa	$\equiv 1$ N/m^2	10^{-5}	1.0197×10^{-5}	9.8692×10^{-6}	7.5006×10^{-3}	$1.450\,377 \times 10^{-4}$
1 bar	10^5	$\equiv 100$ kPa $\equiv 10^6$ dyn/cm^2	1.0197	0.986 92	750.06	14.503 77
1 at	$9.806\,65 \times 10^4$	0.980 665	$\equiv 1$ kp/cm^2	0.967 8411	735.5592	14.223 34
1 atm	$1.013\,25 \times 10^5$	1.013 25	1.0332	1	$\equiv 760$	14.695 95
1 Torr	133.3224	$1.333\,224 \times 10^{-3}$	$1.359\,551 \times 10^{-3}$	$\equiv 1/760 \approx 1.315\,789 \times 10^{-3}$	$\equiv 1$ Torr ≈ 1 mmHg	$1.933\,678 \times 10^{-2}$
1 psi	6.8948×10^3	6.8948×10^{-2}	$7.030\,69 \times 10^{-2}$	6.8046×10^{-2}	51.714 93	$\equiv 1$ lbf /in^2

Pascalov princip

- zunanji tlak na kapljevino, ki je zaprta v posodi, se prenese po vsej kapljevini in na stene posode
- hidravlična stiskalnica

$$\frac{F}{S}=\frac{F'}{S'}\Rightarrow\frac{F}{F'}=\frac{S}{S'}$$



Vzgon - Arhimedov princip

- sila tekočine na telo, ki je potopljeno v njej, je enaka teži izpodrinjene tekočine

$$\boxed{F_V=\rho_{tekočine}\cdot V_{telesa}\cdot g}$$

Stisljivost

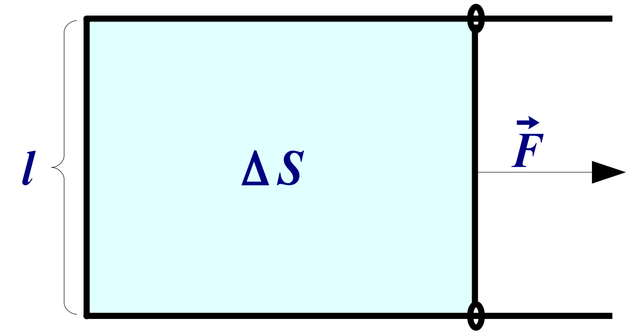
- relativna sprememba volumna tekočine je sorazmerna s spremembo tlaka

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -\chi \Delta p}$$

Površinska napetost

- obstaja samo pri kapljevinah in ne pri plinih

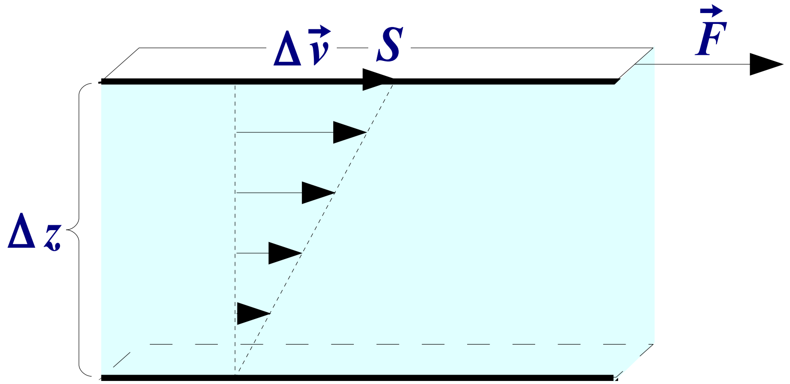
$$\boxed{F = \gamma l} \qquad \boxed{\Delta W_\gamma = \gamma \Delta S}$$



Viskoznost

- če tekočino strižno obremenimo s konstantno silo, se plasti gibljejo s konstantno hitrostjo

$$\boxed{\frac{F}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta z}}$$



Mehanika tekočin – gibanje idealne tekočine

- obravnavamo idealno tekočino (ni stisljiva in ni viskozna)
- laminaren stacionaren tok (tokovnice se s časom ne spreminjajo)

Kontinuitetna enačba

- količina tekočine, ki priteka v nek prostor, je enaka količini, ki iz njega izteka (če je tok stacionaren in v prostoru ni izvirov in ponorov)

$$\Phi_m = \Phi_m'$$

nestisljiva tekočina

$$\Phi_V = \Phi_V' \Rightarrow Sv = S'v'$$

Bernulijeva enačba

- uporabimo izrek o mehanski energiji

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p' + \frac{1}{2}\rho v'^2 + \rho g z'}$$

• zapišemo izrek o ohranitvi mehanske energije pri premiku tekočine po cevi

$$A = \Delta W_m$$

$$p'\Delta V - p\Delta V = \Delta W_K + \Delta W\ p$$

$$p'\Delta V - p\Delta V = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v'^2 + mgz - mgz'$$

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p' + \frac{1}{2}\rho v'^2 + \rho g z'$$

Primeri:

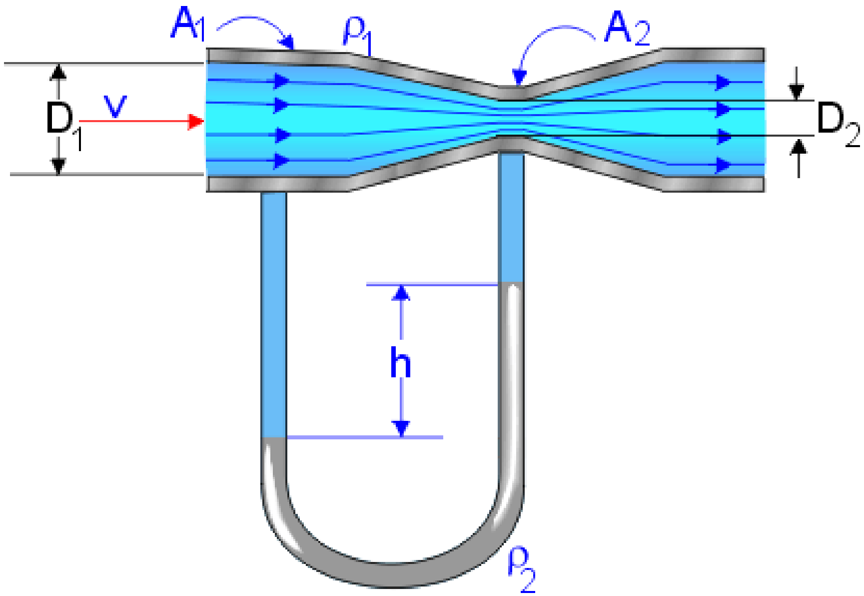
• Mirujoča tekočina

• Vodoravna cev

- Venturijeva cev → merjenje pretoka

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

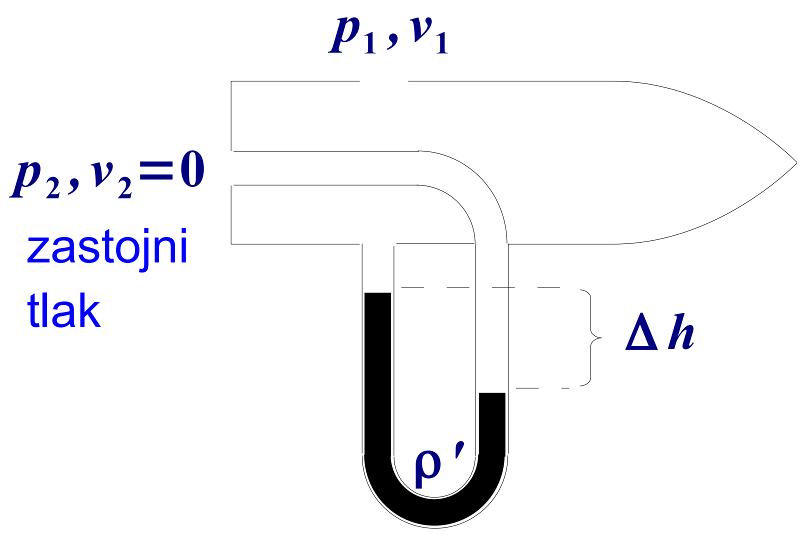


- Pitot-Prandtlova cev → merjenje hitrosti

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

$$v_1^2 = \frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} = \sqrt{\frac{2\rho' g \Delta h}{\rho}}$$



Upor pri gibanju po tekočini

Kvadratni zakon

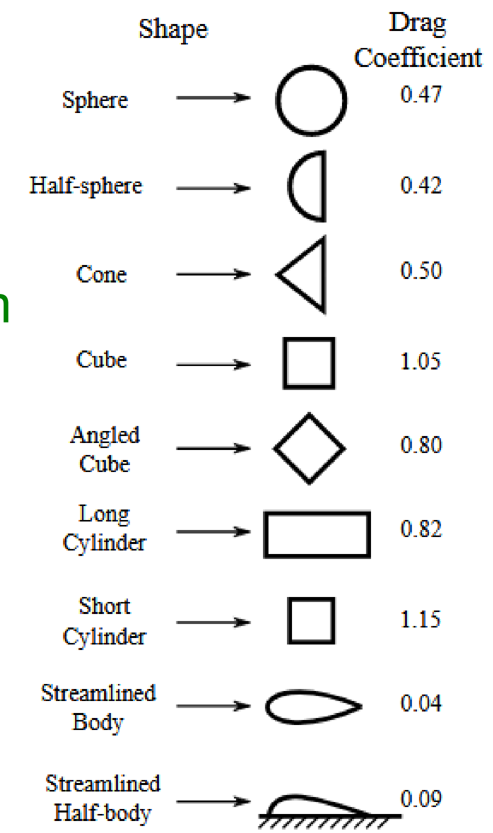
• velja pri relativno veliki hitrosti → sila je sorazmerna s kvadratom hitrosti

$$F_U = \frac{1}{2} C_U \rho v^2 S$$

Lineari zakon

• velja pri relativno majhni hitrosti → sila je sorazmerna s hitrostjo

$$F_U = 6 \pi R \eta v$$ (gibanje krogle)



Measured Drag Coefficients

Reynoldsovo število

• ocena razmerja med kvadratnim in linearnim zakonom → okvirno merilo za območje veljavnosti obeh zakonov

$$R_e = \frac{l \rho v}{\eta}$$

$$F_{kv} \sim \rho v^2 l^2$$

$$F_{lin} \sim l \eta v$$

gibanje krogle

$R_e < 0{,}5$	$R_e > 1000$
linearen	kvadraten

Termodinamika

- opazujemo sistem makroskopsko in se ne zanimamo za njegovo mikroskopsko zgradbo

- stanje sistema opišemo s termodinamičnimi spremenljivkami

  $p\,, V\,, T\,, \rho\,, S\,...$

- obravnavali bomo sisteme z eno snovjo, ki pa je lahko v eni, dveh ali treh fazah

- opazovali bomo sisteme v ravnovesnem stanju, pri katerem se s časom nič ne spreminja

- pri sodelovanju sistema z okolico imamo dve skrajni možnosti:
  - toplotno (adiabatno) izoliran sistem
  - toplotni stik z drugim sistemom

Temperatura

Temperaturi dveh sistemov, ki sta v toplotnem stiku, sta enaki, ko sta sistema v medsebojnem ravnovesju.

Ničti zakon termodinamike

Če sta v ravnovesju prvi in drugi sistem, ko sta v toplotnem stiku in adiabatno izolirana od okolice, in sta v ravnovesju tudi drugi in tretji sistem, ko sta v toplotnem stiku in adiabatno izolirana od okolice, potem sta v ravnovesju tudi prvi in tretji sistem.

Merjenje temperature

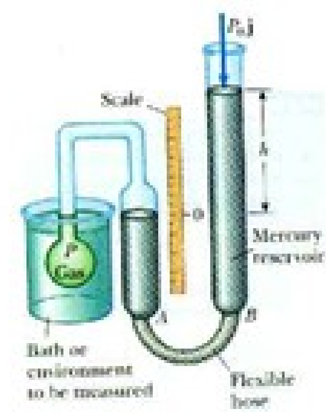
- za standardno temperaturo izberemo temperaturo sistema, v katerem so v ravnovesju vse tri faze vode (led, voda in para)
- temperatura trojne točke vode je (prejšnji sistem enot, do 2018)

$$T_3 = 273{,}16\,K\,(=0{,}01^o C)$$

- kot merilo temperature uporabimo tlak plina v zaprti posodi (plinski termometer s konstantnim volumnom)
- skalo umerimo s pomočjo trojne točke vode

$$T = C\,p$$

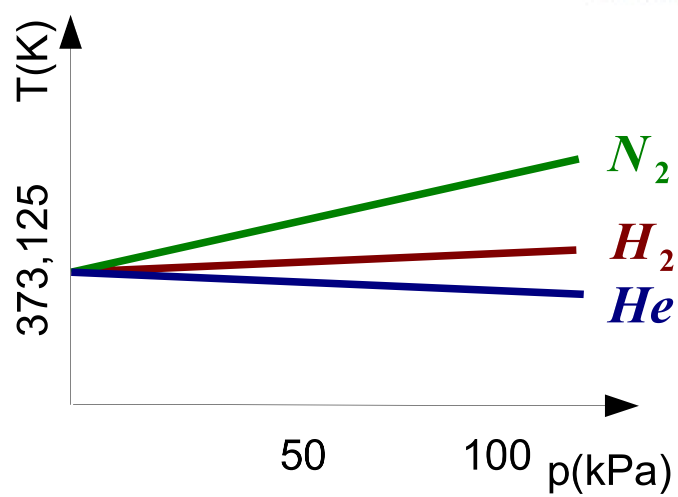
$$T_3 = C\,p_3$$



$$T = T_3 \frac{p}{p_3}$$

- če uporabimo razredčen plin je meritev neodvisna od vrste plina

$$\boxed{T = T_3 \lim_{m \to 0} \frac{p}{p_3}}$$



Mednarodni sistem enot SI

$$s:\Delta\nu_{Cs}=9\,192\,631\,770\,s^{-1}\quad\left({}^{133}Cs\right)$$

$$m:c=299\,792\,458\,m\,s^{-1}\quad(c)$$

$$kg:h=6{,}626\,070\,15\cdot10^{-34}\,kg\,m^{2}\,s^{-1}\quad(h)$$

- Enota za temperaturo K (Kelvin) je določena z dogovorom o vrednosti Boltzmannove konstante

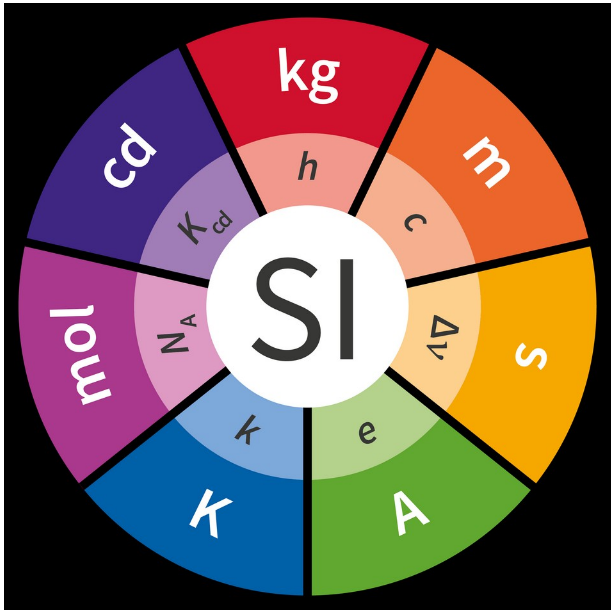
$$\boldsymbol{K:k=1{,}380\,649\cdot10^{-23}\,J\,K^{-1}\quad(k)}$$

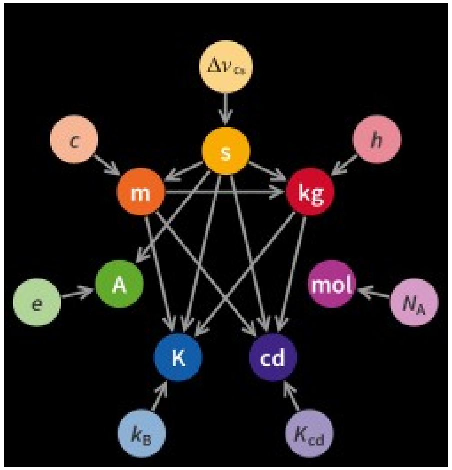
$$\boldsymbol{1\,K=\frac{1{,}380\,649}{k}\cdot10^{-23}\,kg\,m^{2}\,s^{-2}\quad(k)}$$

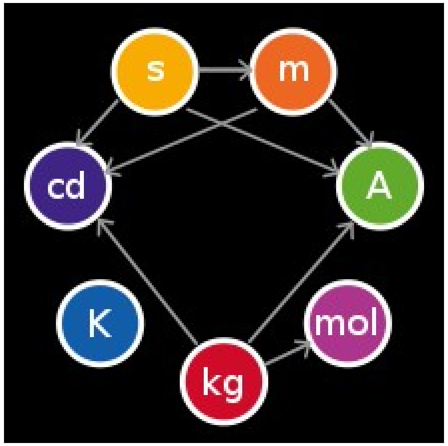
$$A:e_0=1{,}602\,176\,634\cdot10^{-19}\,A\,s\quad(e_0)$$

$$mol:N_A=6{,}022\,140\,76\cdot10^{23}\,mol^{-1}\quad(N_A)$$

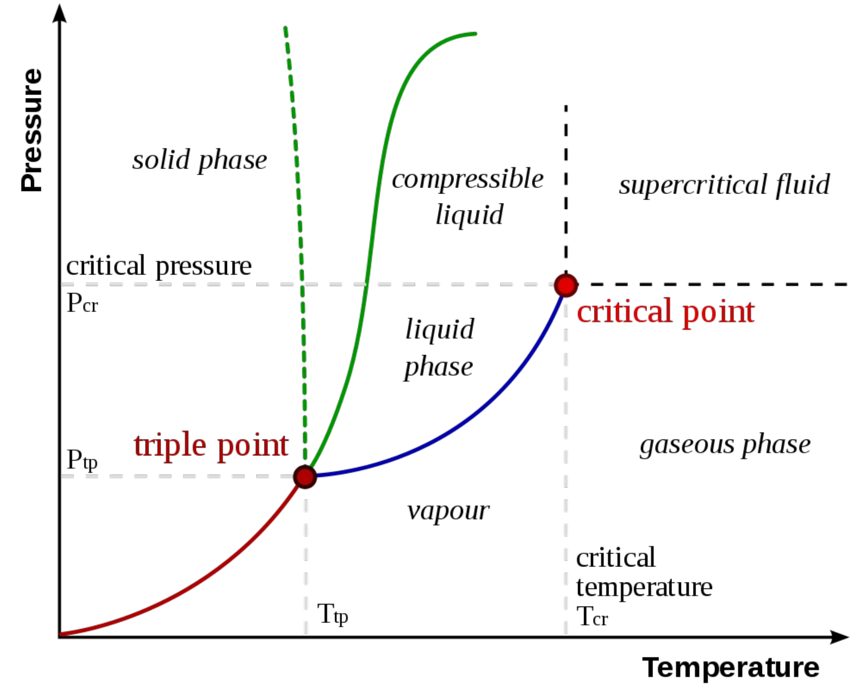
$$cd:\textit{spektralna svetlobna učinkovitist pri}\quad 540\cdot10^{12}\,Hz$$
$$\textit{je}\quad 683\,cd\,sr/W$$







• enota Kelvin je določena z vrednostjo Boltzmanove konstanta $k = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}\, J\, K^{-1}$ (od 20 maja 2019). Vrednost je izbrana tako, da se 1K ujema s prejšnjo definicijo v okviru trenutno dosegljive natančnosti pri meritvah). Temperatura absolutne ničle je natanko 0K.



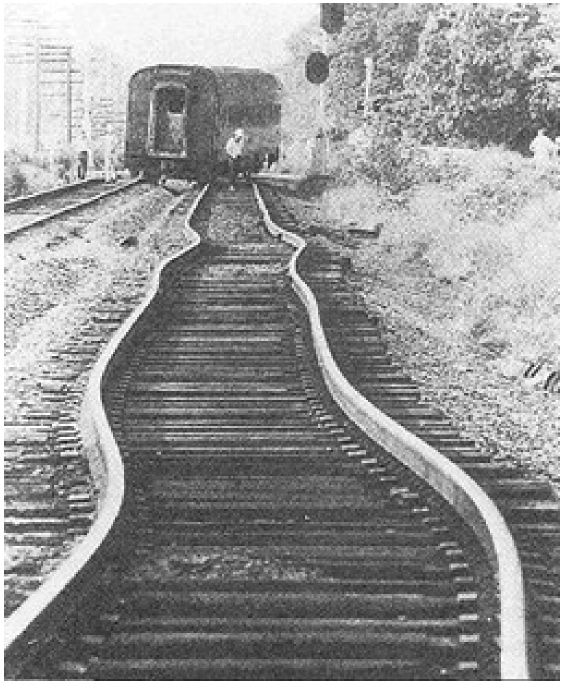
- stopinje Celzija:
  - 0 °C – ledišče vode (1 atm=101,325kPa)
  - 100 °C – vrelišče vode (1 atm=101,325kPa)
- nova definicija:
  - ΔT: 1K =1°C
  - absolutna ničla -273,15 °C

- stopinje Fahrenheit – primerjava s stopinjo Celzija

- ΔT:9 °F = 5 °C

	Kelvin	Celsius	Fahrenheit
Absolutna ničla (dogovor)	0 K	-273,15 °C	-459,67 °F
Vrelišče tekočega dušika	77,4 K	-195,8 °C	-320,4 °F
Sublimacija suhega ledu (Co_2)	195,1 K	-78 °C	-104,4 °F
Skupna točka °C in °F	233,15 K	-40 °C	-40 °F
Tališče vode	273,15 K	0 °C	32 °F
Vrelišče vode (1 atm=101,325kPa)	373,12 K	100 °C	211,9 °F

Temperaturno raztezanje – dolžinski raztezek



• spremeba dolžine predmeta je sorazmerna z njegovo dolžino in spremembo temperature

$$\Delta l = \alpha l \Delta T$$

$$\alpha = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta T}[K^{-1}]$$

temperaturni koeficient dolžinskega raztezka

Temperaturno raztezanje – prostorninski raztezek

• sprememba prostornine predmeta je sorazmerna z njegovo prostornino in spremembo temperature

$$\Delta V = \beta V \Delta T$$

$$\beta = 3\alpha$$

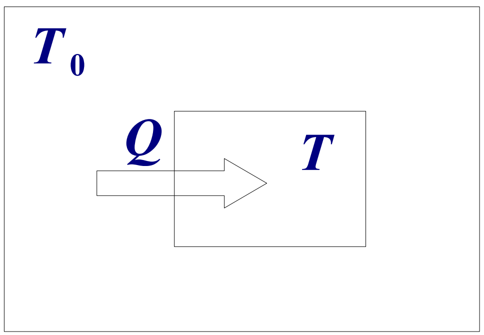
$$\beta = \frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta T}[K^{-1}]$$

temperaturni koeficient prostorninskega raztezka

snov	a [10^{-6} K^{-1}]
led (0°C)	51
Pb	29
Al	23
medenina	19
beton	12
jeklo	11
steklo	9
pyrex	3.2
krem. steklo	0.5

Toplota in absorpcija toplote

- če damo v toplotni stik sistema, ki nista v toplotnem ravnovesju (imata različni temperaturi), se čez čas ustvari medsebojno ravnovesje (njuni temperaturi se izenačita)
- pri tem sistem z višjo temperaturo odda toploto, ki jo prejme sistem z nižjo temperaturo



$$T_0 > T \Rightarrow Q > 0$$

$$T_0 = T \Rightarrow Q = 0$$

$$T_0 < T \Rightarrow Q < 0$$

Energiji, ki se prenese med sistemoma v toplotnem stiku zaradi razlike njunih temperatur, pravimo toplota.

- prvotno je bila enota za toploto 1 cal, ki je enaka količini toplote potrebne za segretje 1g vode od 14,5 °C do 15,5 °C

$$1\,kcal = 4186\,J$$

Toplotna kapaciteta

- količina toplote, ki je potrebna, da nek sistem segrejemo za 1K

$$Q = C\,\Delta T \qquad C = \frac{Q}{\Delta T}\left[\frac{J}{K}\right]$$

toplotna kapaciteta

Specifična toplota

- količina toplote, ki je potrebna, da segrejemo 1kg snovi za 1K

$$Q = m\,c\,\Delta T \qquad c = \frac{Q}{m\,\Delta T}\left[\frac{J}{kgK}\right]$$

specifična toplota

- odvisna od pogojev segrevanja:
  - konstanten tlak c_p
  - konstantna prostornina c_V

snov	c_p [J/kg K]	$c_{p,m}$ [J/mol K]
Pb	128	26.5
W	139	24.8
Ag	236	25.5
Cu	386	24.5
Al	900	24.4

Specifična latentna (utajena) toplota

$$Q = m\,q \qquad q = \frac{Q}{m}\left[\frac{J}{kg}\right]$$

Prenos toplote - prevajanje

- Toplota se prenaša skozi snov – snov miruje

$$Q=\lambda\frac{S\,t\,\Delta T}{d}$$

$$\lambda=\frac{Q\,d}{S\,t\,\Delta T}\left[\frac{J\,m}{m^2\,s\,K}=\frac{W}{mK}\right]$$

toplotna prevodnost snovi

Prenos toplote - konvekcija

- toplota se prenaša s prenosom snovi:
  - snov se ob toplejšem telesu segreje
  - snov preide od toplejšega k hladnejšemu telesu – naravna ali vsiljena konvekcija
  - snov odda toploto hladnejšemu telesu
- prenos toplote odvisen od toplotne kapacitete, masnega toka, temperaturne razlike

Prenos toplote - sevanje

- Toplota se prenaša s sevanjem – lahko tudi skozi prazen prostor

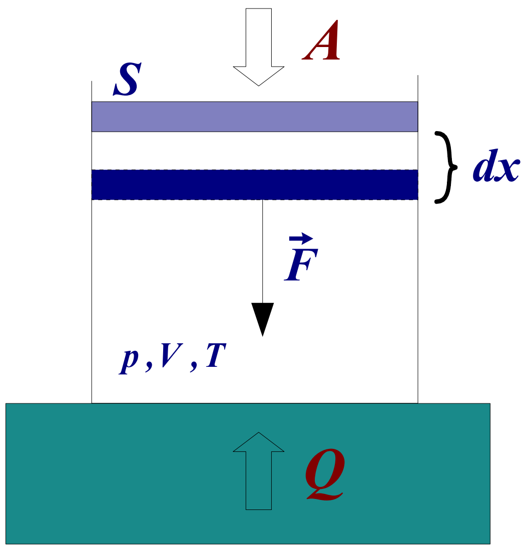
$$j^*=\sigma\,T^4$$

$$\sigma=5.67\cdot10^{-8}\frac{W}{m^2\,K^4}\quad\left(=\frac{2\,\pi^5\,k^4}{15\,c^2\,h^3}\right)$$

Stefanova konstanta

Toplotna in delo

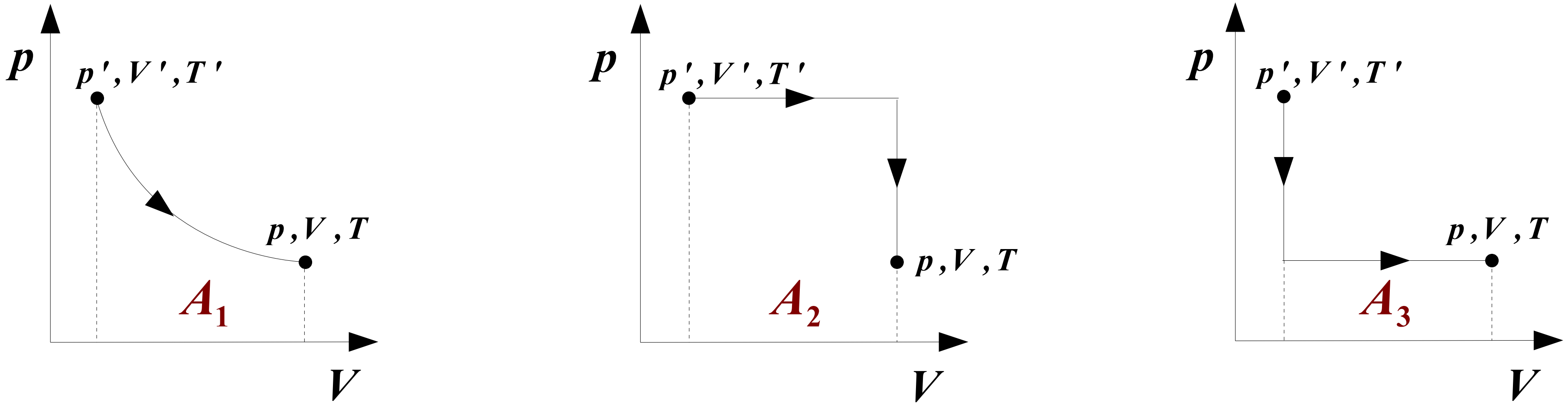
- pri stiskanju sistema opravimo nad njim delo



$$dA = F\,dx = p\,S\,dx = -p\,dV$$

$$\boxed{A = -\int p\,dV}$$

zunanja sila opravi pozitivno delo, ko se volumen zmanjša



- vsota dovedenega dela in dovedene toplote pri prehodu iz istega začetnega stanja v isto končno stanje je neodvisna od načina prehoda

$$A_1 + Q_1 = A_2 + Q_2 = A_3 + Q_3$$

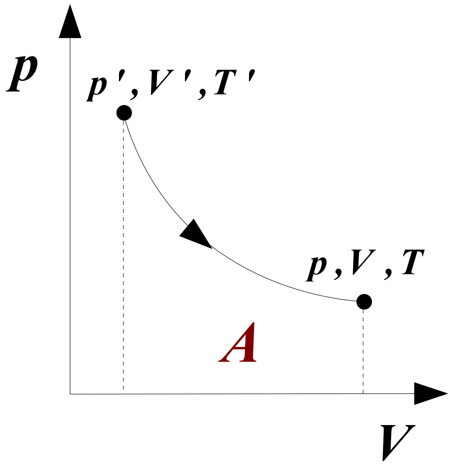
Prvi zakon termodinamike

Vsota dovedenega dela in dovedene toplote je enaka spremembi notranje energije sistema.

$$\boxed{\Delta W_n = W_n - W_n' = Q + A}$$

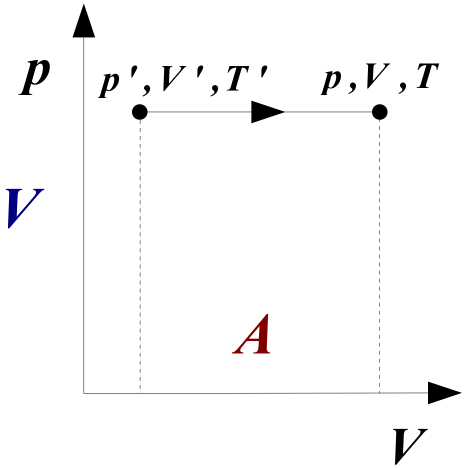
- adiabatski proces

$$Q=0, \quad \Delta W_n = A$$



- izobarni proces

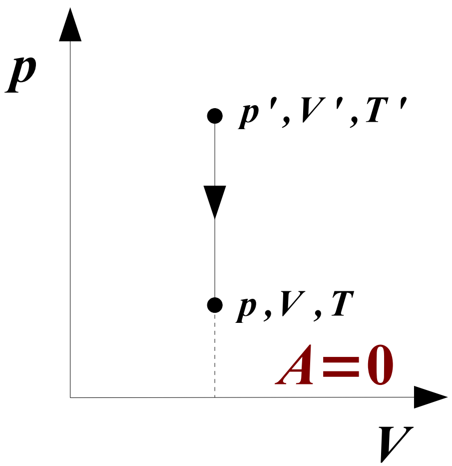
$$\Delta p = 0 \;\Rightarrow\; A = -p\Delta V$$



- izohorni proces

$$\Delta V = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$$

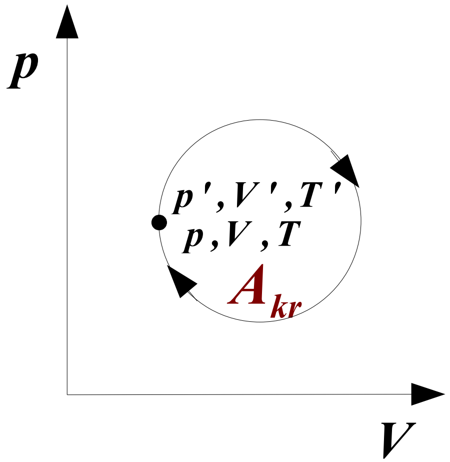
$$\Delta W_n = Q$$



- krožni proces

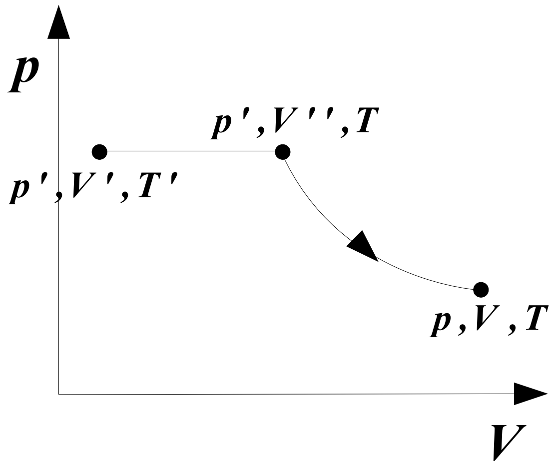
$$\Delta W_n = 0$$

$$A_{kr} = -Q_{kr}$$



Idealni plin

Splošna plinska enačba



- Boyle–Mariottov zakon

$$pV = p'V'$$

- Gay-Lussacov zakon

$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'}$$

- iz stanja p', V', T' preidemo izobarno v stanje p', V'', T in nato izotermno v končno stanje p, V, T

$$\frac{V''}{T} = \frac{V'}{T'}$$

$$pV = p'V''$$

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} = mr$$

r - specifična plinska konstanta (odvisna od vrste plina)

- volumen kilomola plina pri T=273,15K in p=1.01x10^5 Pa : V_{kmol}=22.4 m^3

$$\frac{pV_{kmol}}{T} = Mr = R = 8314 \frac{J}{kmol\,K}$$

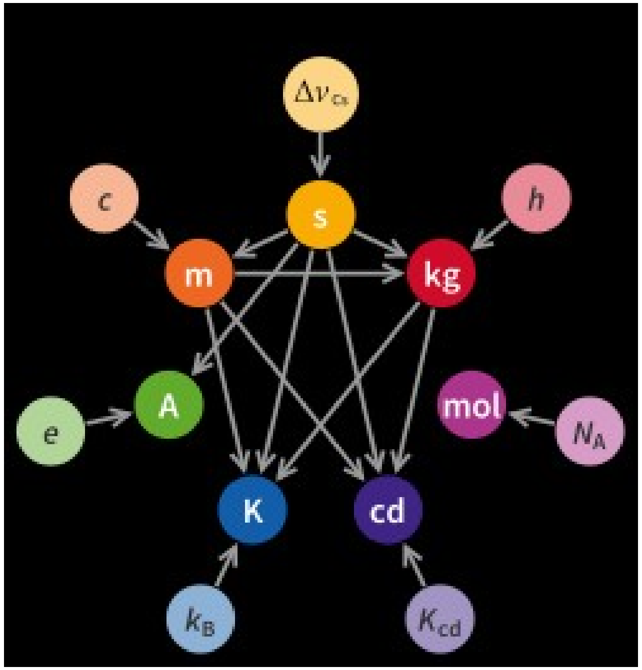
R - splošna plinska konstanta

$$pV = \frac{m}{M} RT \qquad \rho = \frac{pM}{RT}$$

$$p = n\,k\,T \qquad p = \frac{m_0 N}{m_0 N_A V} RT = \frac{N}{V}\frac{R}{N_A} T = n\,k\,T$$

$$k = \frac{R}{N_A} = 1.380649 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$$

- k je Boltzmannova konstanta – splošna plinska konstanta preračunana na en delec. Vrednost je dogovorjena z novim mednarodnim sistemom enot



Mešanica plinov

- plinska enačba vsebuje odvisnost le od števila delcev in ne od vrste plina

$$pV = NkT$$

- če imamo N_1 delcev prvega plina in N_2 delcev drugega velja

$$pV = (N_1 + N_2)kT = N_1 kT + N_2 kT$$

$$p = N_1 \frac{kT}{V} + N_2 \frac{kT}{V} = p_1 + p_2$$ delni tlak $$p_i = N_i \frac{kT}{V} = \frac{m_i}{M_i} \frac{RT}{V}$$

$$V = N_1 \frac{kT}{p} + N_2 \frac{kT}{p} = V_1 + V_2$$ delni volumen $$V_i = N_i \frac{kT}{p} = \frac{m_i}{M_i} \frac{RT}{p}$$

- lahko zapišemo tudi v obliki za 'čisti' plin z efektivno molsko maso

$$pV = N_1 kT + N_2 kT = \frac{m_{01} N_1}{m_{01} N_A} N_A kT + \frac{m_{02} N_2}{m_{02} N_A} N_A kT = \frac{m_1}{M_1} RT + \frac{m_2}{M_2} RT$$

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT = \frac{m}{\overline{M}} RT \qquad \overline{M} = \frac{m}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)}$$

Vlažnost zraka

• absolutna vlažnost je enaka delni gostoti vode v zraku

$$p_v V = \frac{m_v}{M_v} R T \Rightarrow \rho_v = \frac{m_v}{V} = \frac{p_v M_v}{R T}$$

absolutna vlažnost

• nasičena vlažnost pove maksimalno delno gostoto pri danih pogojih

$$\rho_s = \frac{m_s}{V} = \frac{p_s M_v}{R T}$$

nasičena vlažnost

nasičen parni tlak

• relativna vlažnost je razmerje med absolutno in nasičeno vlažnostjo

$$\eta = \frac{\rho_v}{\rho_s} = \frac{p_v}{p_s}$$

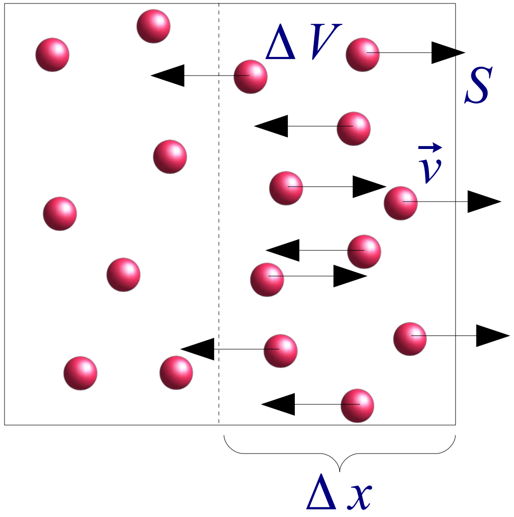
relativna vlažnost

T [°C]	*p_s [hPa]*
0	6,113
5	8,726
10	12,281
15	17,056
20	23,388
25	31,690
30	42,455
35	56,267
40	73,814
45	95,898
50	123,440
55	157,520
60	199,320
65	250,220
70	311,760
75	385,630
80	473,730
85	578,150
90	701,170
95	845,290
100	1013,200

nasičen parni tlak vode

Tlak v idealnem plinu

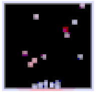
- tlak v plinu je posledica trkov molekul med seboj oziroma steno posode
- pri trkih se molekulam spremeni gibalna količina, za kar je potrebna sila stene



$$F_0 \cdot \Delta t = \Delta G_0 = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2 m_0 v_x$$

$$F \cdot \Delta t = N \Delta G_0 = N 2 m_0 v_x = \frac{n \Delta V}{2} 2 m_0 v_x =$$

$$= \frac{n \Delta x S}{2} 2 m_0 v_x = \frac{n v \Delta t S}{2} 2 m_0 v_x$$



$$\frac{F}{S} = p = 2n \frac{m_0 v_x^2}{2}$$

$$\mathbf{p = 2n \frac{\langle W_k \rangle}{3} = nkT}$$

$$\mathbf{\langle W_k \rangle = \frac{3}{2} kT}$$

Notranja energija idealnega plina

- notranjo energijo plina sestavljajo: lastna energija molekul, kinetična energija molekul in njihove medsebojne potencialne energije
- Lastne energije se ne spreminjajo in medsebojne potencialne energije so v idealnem plinu enake 0, spreminja se le kinetična energija

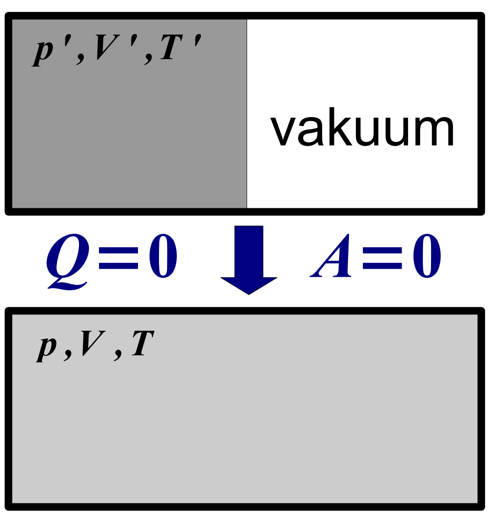
$$W_N = W_0^{(1)} + \ldots + W_0^{(N)} + \ldots + W_K^{(1)} + \ldots + W_K^{(N)} + \sum_{i<j} W_p^{(i,j)}$$

$$W_N = W_K^{(1)} + \ldots + W_K^{(N)} + konst. = N \langle W_k \rangle + konst.$$

$$W_N = \frac{3}{2} N k T + konst.$$

$$\boxed{\Delta W_N = \frac{3}{2} N k \Delta T = \frac{3}{2} \frac{R}{M} m \Delta T}$$

- Hirnov poskus
  - toplotno izoliran sistem
  - plin se širi v vakuum → ne opravi dela
- pokaže, da je notranja energija res odvisna le od temperature



meritev: $T = T'$

Specifična toplota idealnega plina

$$Q=\Delta W_n - A=\frac{3}{2}Nk\Delta T+\int p\,dV=\frac{3}{2}\frac{R}{M}m\Delta T+\int p\,dV$$

$$\boxed{c=\frac{Q}{m\Delta T}=\frac{3}{2}\frac{R}{M}+\frac{\int p\,dV}{m\Delta T}}$$

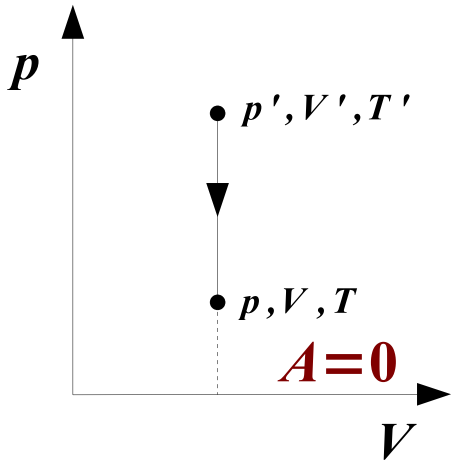
Izohorna sprememba

$$\Delta V=V-V'=0$$

$$\frac{p}{T}=\frac{p'}{T'}$$

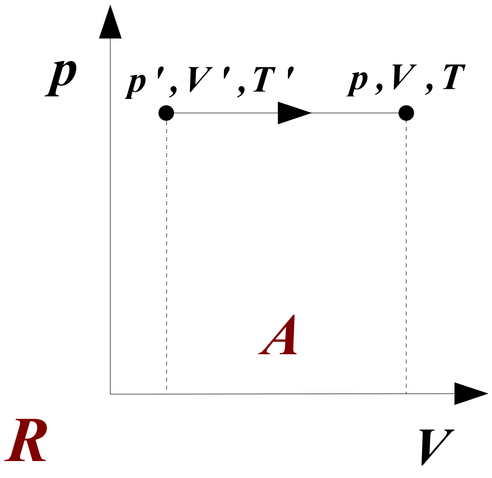
$$A=-\int p\,dV=0 \qquad \Delta W_n=Q=m c_V \Delta T$$

$$c_V=\frac{3}{2}\frac{R}{M}+\frac{\int p\,dV}{m\Delta T}=\frac{3}{2}\frac{R}{M}$$



Izobarna sprememba

$$\Delta p = p - p' = 0$$



$$\frac{V}{T} = \frac{V'}{T'} \qquad A = -\int p\,dV = -p\Delta V \qquad Q = m\,c_p \Delta T$$

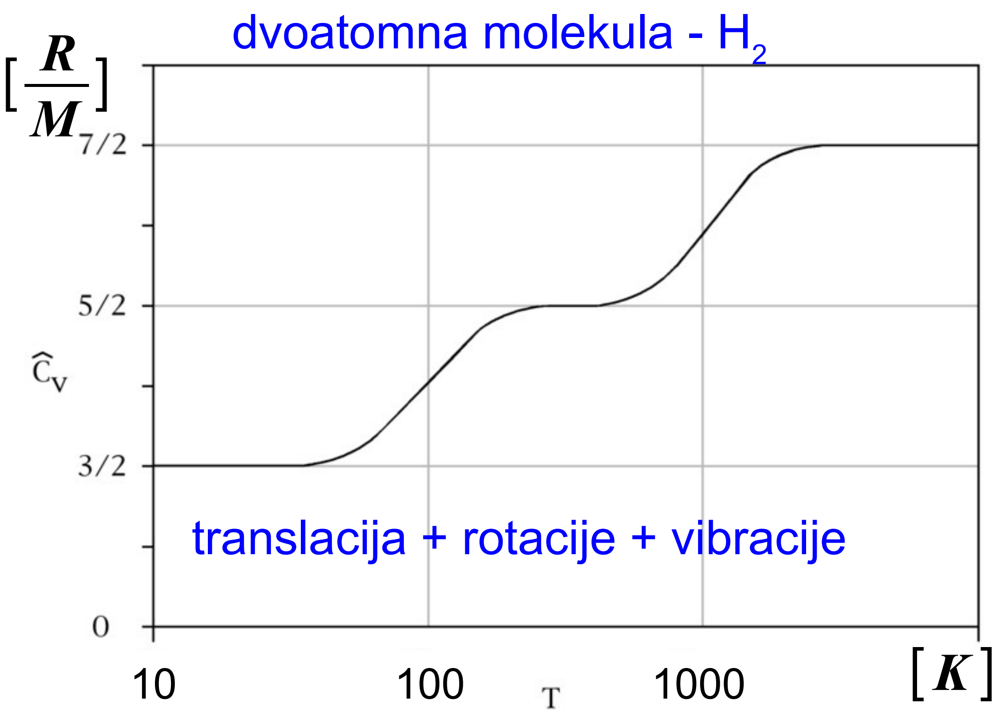
$$c_p = \frac{3}{2}\frac{R}{M} + \frac{\int p\,dV}{m\Delta T} = \frac{3}{2}\frac{R}{M} + \frac{p\Delta V}{m\Delta T} = \frac{3}{2}\frac{R}{M} + \frac{\cancel{m} R \cancel{\Delta T}}{M\ \cancel{m}\cancel{\Delta T}} = \frac{5}{2}\frac{R}{M}$$

- realni plini – pri večatomnih molekulah k spremembi notranje energije prispevajo tudi rotacije in vibracije molekul

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}$$

$$\kappa = \frac{c_p}{c_V}$$

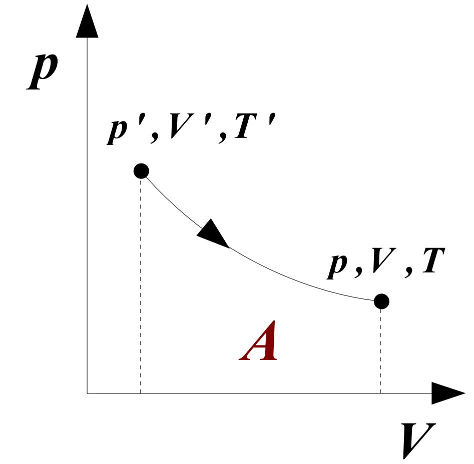
~ 300 K	κ
1 at.	1,67
2 at.	1,4
več at.	1,33



Izotermna sprememba

$$\Delta T = T - T' = 0$$

$$pV = p'V' \qquad \Delta W_n = 0 \qquad Q = -A$$



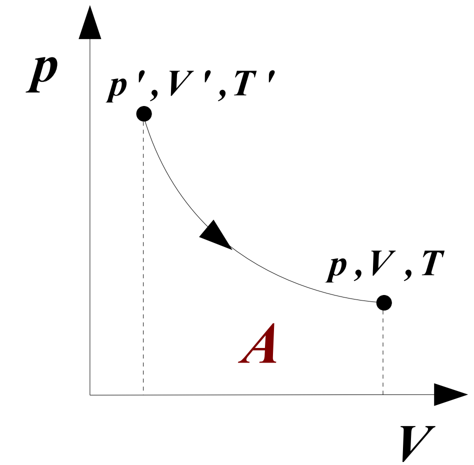
$$A = -\int_{V'}^{V} p\,dV = -p'V'\int_{V'}^{V}\frac{1}{V}\,dV = -p'V'\ln\frac{V}{V'}$$

$$A = -\frac{m}{M}RT\ln\frac{V}{V'}$$

Adiabatna sprememba

$$Q = 0 \quad \left(reverzibilna: \Delta S = S - S' = 0\right)$$

$$Q = 0 \qquad A = \Delta W_n = m c_V \Delta T$$



$$-p\,dV = m c_V\,dT \quad \Rightarrow \quad -\frac{\cancel{m}RT}{MV}dV = \cancel{m}c_V\,dT$$

$$-\frac{c_p - c_V}{c_V}\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad -(\kappa - 1)\int\frac{dV}{V} = \int\frac{dT}{T}$$

$$TV^{\kappa-1} = T'V'^{\kappa-1} \qquad pV^{\kappa} = p'V'^{\kappa} \qquad \frac{p^{\kappa-1}}{T^{\kappa}} = \frac{p'^{\kappa-1}}{T'^{\kappa}}$$

$$\frac{PV}{T}=\frac{P'V'}{T'}\,;\; pV=\frac{m}{M}RT=NkT\,;\; p=nkT \qquad \Delta W_n=m c_V \Delta T\,;\; \Delta W_n=Q+A\,;\; A=-\int p\,dV$$

izohorna

$$\Delta V=V-V'=0$$

$$\frac{p}{T}=\frac{p'}{T'}$$

$$A=0$$

$$\Delta W_n=Q=m c_V \Delta T$$

izobarna

$$\Delta p=p-p'=0$$

$$\frac{V}{T}=\frac{V'}{T'}$$

$$A=-p\Delta V$$

$$Q=m c_p \Delta T$$

izotermna

$$\Delta T=T-T'=0$$

$$pV=p'V'$$

$$\Delta W_n=0$$

$$A=-p'V'\ln\frac{V}{V'}$$

$$A=-\frac{m}{M}RT\ln\frac{V}{V'}$$

$$Q=-A=p'V'\ln\frac{V}{V'}$$

adiabatna

$$Q=0\,;(\Delta S=0)$$

$$pV^{\kappa}=p'V'^{\kappa}$$

$$TV^{\kappa-1}=T'V'^{\kappa-1}\,;\;\frac{T^{\kappa}}{p^{\kappa-1}}=\frac{T'^{\kappa}}{p'^{\kappa-1}}$$

$$Q=0$$

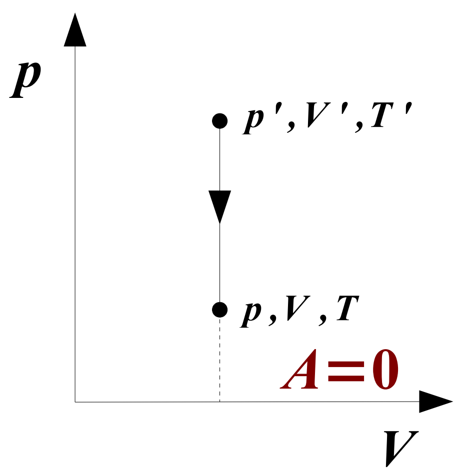
$$A=\Delta W_n=m c_V \Delta T=$$

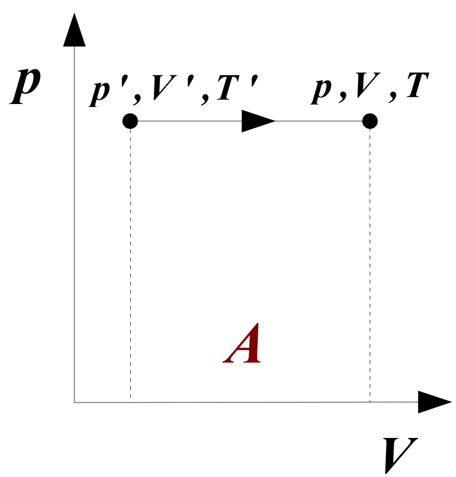
$$=\frac{1}{\kappa-1}\frac{m}{M}R\Delta T=$$

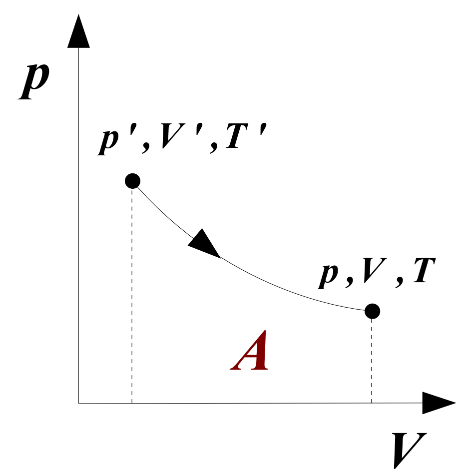
$$=\frac{1}{\kappa-1}(pV-p'V')$$

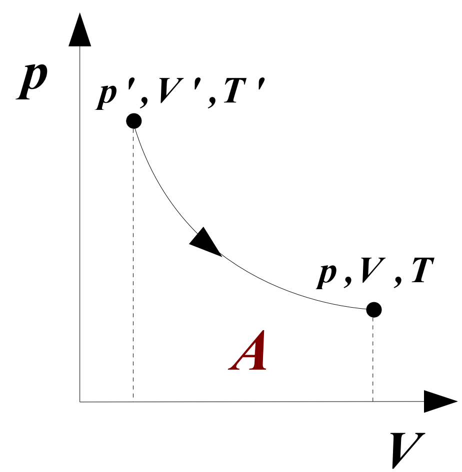
$$c_p-c_V=\frac{R}{M} \qquad c_V=\frac{1}{\kappa-1}\frac{R}{M}$$

$$\frac{c_p}{c_V}=\kappa \qquad c_p=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{R}{M}$$









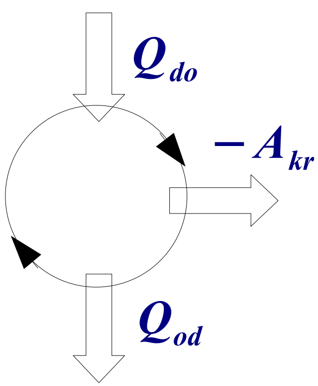
Entropijski zakon - II. zakon termodinamike

Ni možna krožna sprememba, pri kateri bi se prenesla toplota s telesa z nižjo temperaturo na telo z višjo temperaturo, če se pri tem ne spremeni nič drugega v okolici.

(Toplota prehaja 'sama od sebe' le s telesa z višjo temperaturo na telo z nižjo.)

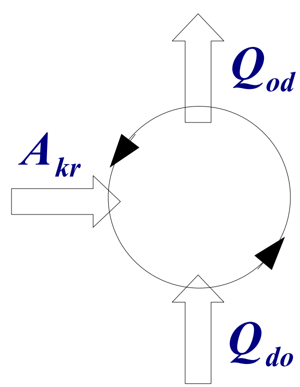
- reverzibilni - obrnljivi procesi
- ireverzibilni - neobrnljivi procesi

- toplotni stroj, izkoristek



$$\eta = \frac{-A_{kr}}{Q_{do}}$$

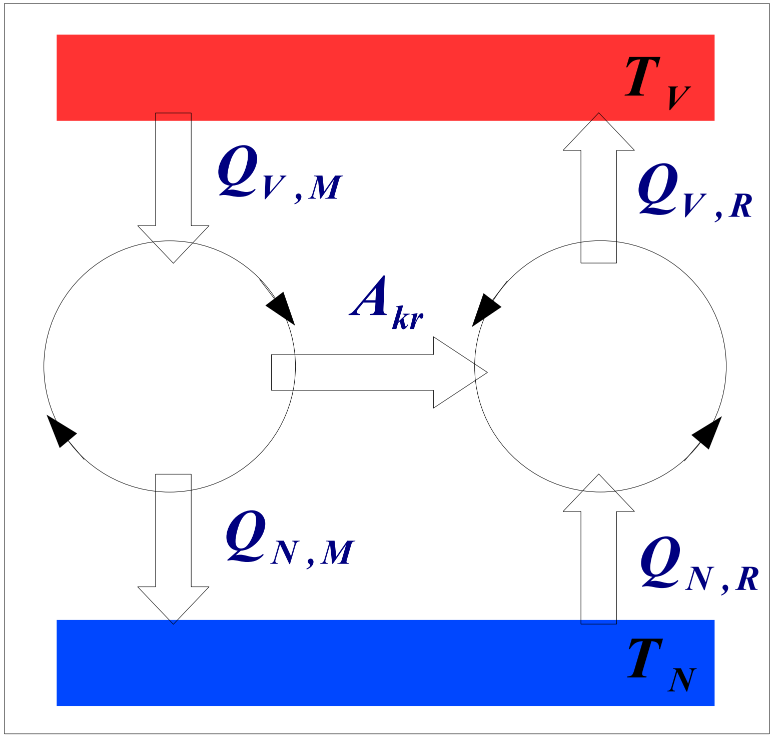
- obratna smer procesa – toplotna črpalka



$$\Delta W_n = Q + A = Q_{do} - Q_{od} + A_{kr} = 0 \;\Rightarrow\; -A_{kr} = Q_{do} - Q_{od}$$

$$\eta = \frac{-A_{kr}}{Q_{do}} = \frac{Q_{do} - Q_{od}}{Q_{do}} = 1 - \frac{Q_{od}}{Q_{do}}$$

- toplotni stroj z največjim izkoristkom?



Predpostavimo:

$$\frac{A_{kr}}{Q_{V,M}} = \eta_M > \eta_R = \frac{A_{kr}}{Q_{V,R}}$$

$$Q_{V,R} > Q_{V,M} \Rightarrow Q_{V,R} - Q_{V,M} > 0$$

$$Q_{V,M} - Q_{N,M} - A_{kr} = 0$$

$$-Q_{V,R} + Q_{N,R} + A_{kr} = 0$$

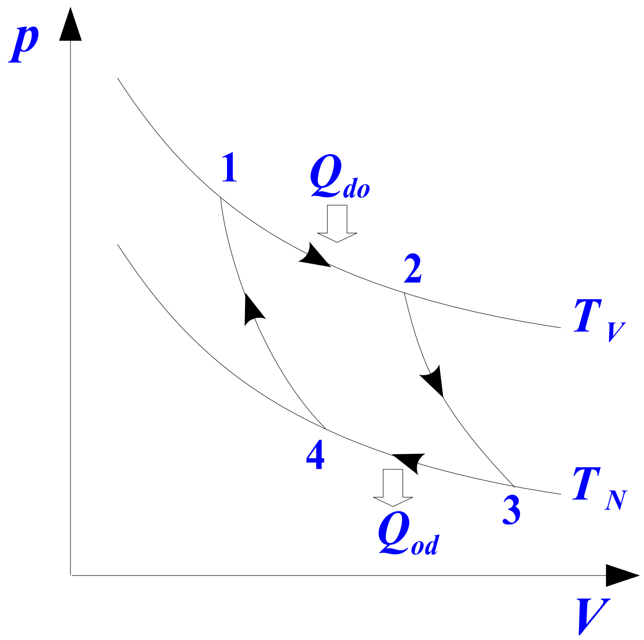
$$Q_{V,M} - Q_{V,R} - Q_{N,M} + Q_{N,R} = 0$$

$$Q_V = Q_{V,R} - Q_{V,M} = Q_{N,R} - Q_{N,M} = -Q_N > 0$$

Toplota bi prehajala iz rezervoarja z nižjo temp. v rezervoar z višjo temp.!

Noben stroj ne more imeti večjega izkoristka kot reverzibilen stroj!

- idealni toplotni stroj – Carnotova krožna sprememba



$$2-3:\quad T_V V_2^{\kappa-1} = T_N V_3^{\kappa-1}$$

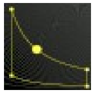
$$4-1:\quad T_V V_1^{\kappa-1} = T_N V_4^{\kappa-1}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$1-2:\quad Q_{do} = Q_{1-2} = -A_{1-2} = \frac{m}{M} R T_V \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$3-4:\quad Q_{od} = -Q_{3-4} = A_{3-4} = -\frac{m}{M} R T_N \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) = \frac{m}{M} R T_N \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)$$

$$\boxed{\frac{Q_{do}}{Q_{od}} = \frac{T_V}{T_N}} \Rightarrow \eta = 1 - \frac{Q_{od}}{Q_{do}} = 1 - \frac{T_N}{T_V}$$



- hladilni stroj, učinek

$$\eta=\frac{Q_{do}}{A_{kr}}=\frac{Q_{do}}{Q_{od}-Q_{do}}=\left(\frac{Q_{od}}{Q_{do}}-1\right)^{-1}\leq\left(\frac{T_V}{T_N}-1\right)^{-1}$$

- toplotna črpalka, učinek

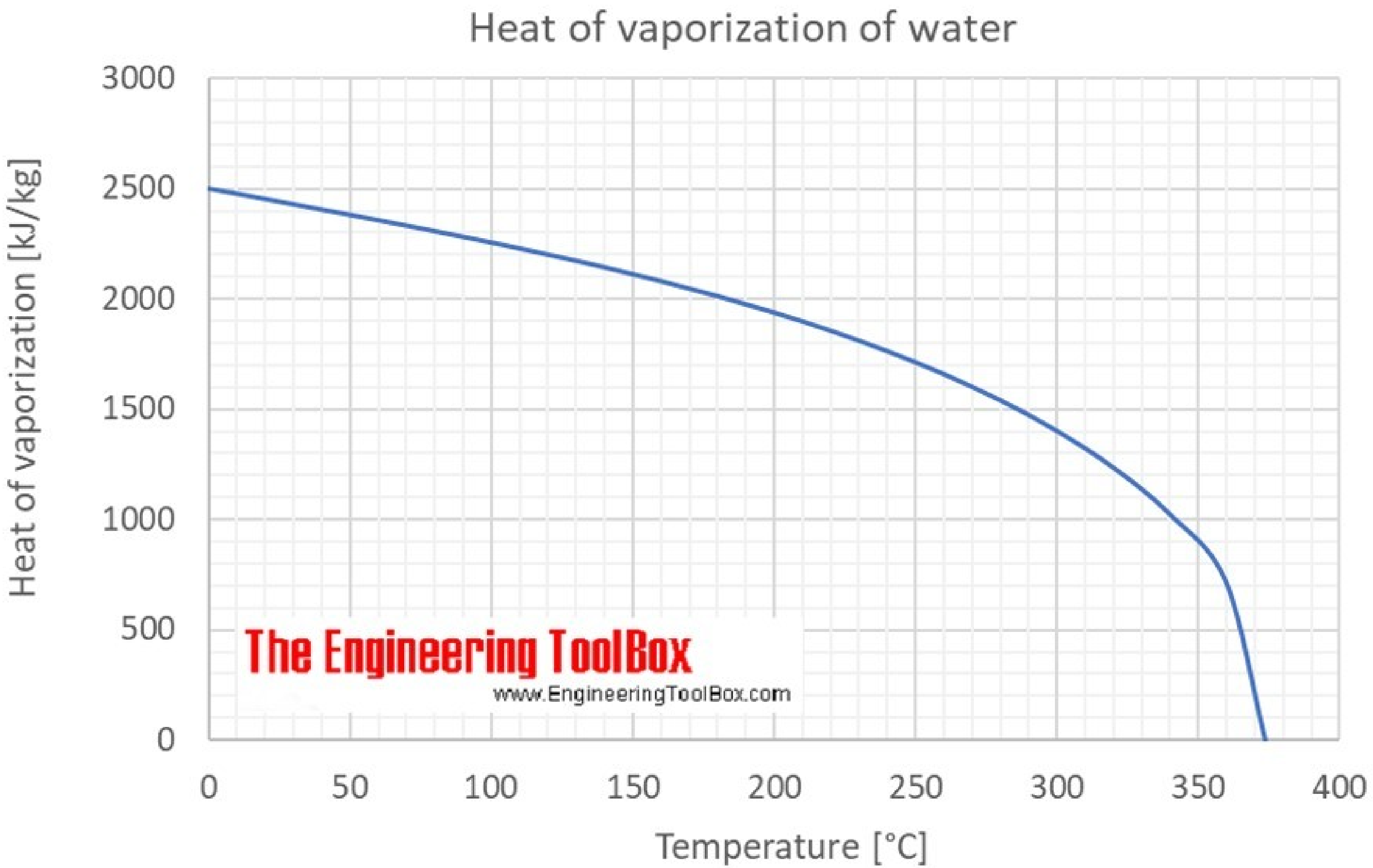
$$\eta=\frac{Q_{od}}{A_{kr}}=\frac{Q_{od}}{Q_{od}-Q_{do}}=\left(1-\frac{Q_{do}}{Q_{od}}\right)^{-1}\leq\left(1-\frac{T_N}{T_V}\right)^{-1}$$

- odvisnost temperature vrelišča (tališča) od tlaka – Clausius-Clapeyron

$$p=p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{M\,q_i}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)},\qquad \Delta p\approx\frac{q_t}{\left(\frac{1}{\rho_{kap}}-\frac{1}{\rho_{trd}}\right)T}\Delta T$$

- Nasičen parni tlak vode pri 0°C
  - p_0=1013 hPa
  - M=18 kg/kmol
  - povprečna q_i=2,4 MJ/kg
  - R=8314 J/kmol/K

$$p = p_0 e^{-\frac{M q_i}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)}$$



WolframAlpha

T [°C]	p_s [hPa]
0	6,113
5	8,726
10	12,281
15	17,056
20	23,388
25	31,690
30	42,455
35	56,267
40	73,814
45	95,898
50	123,440
55	157,520
60	199,320
65	250,220
70	311,760
75	385,630
80	473,730
85	578,150
90	701,170
95	845,290
100	1013,200

Entropija

$$\frac{Q_{do}}{Q_{od}}=\frac{T_V}{T_N} \Rightarrow \frac{Q_{do}}{T_V}=\frac{Q_{od}}{T_N}=|\Delta S|$$

- spremamba entropije pri reverzibilnem procesu

$$\Delta S=\int\frac{dQ}{T}$$

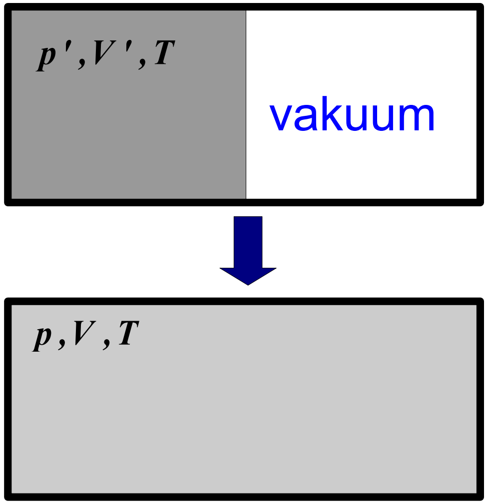
- pri ireverzibilnem procesu velja

$$\int\frac{dQ}{T}<\Delta S$$

ENTROPIJSKI ZAKON – II ZAKON TERMODINAMIKE

$$\boxed{\Delta S\geqslant\int\frac{dQ}{T}}$$

- sprememba entropije – Hirnov poskus,
  iz začetnega v končno stanje lahko pridemo
  z reverzibilnim izotermnim razpenjanjem



$$\Delta S = \frac{Q}{T} = \frac{-A}{T} = \frac{pV \ln \frac{V}{V'}}{T} = \ldots$$

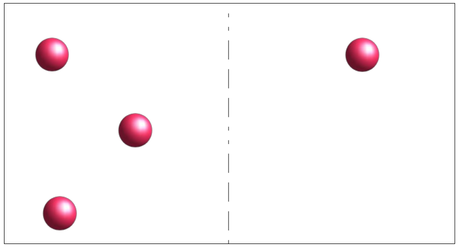
$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln 2 = N k \ln 2$$

- sprememba entropije idealnega plina

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dW_n - dA}{T} = m c_V \frac{dT}{T} + \frac{p\,dV}{T} = \ldots$$

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \left(\frac{1}{\kappa - 1} \ln \frac{T}{T'} + \ln \frac{V}{V'} \right)$$

Termodinamična verjetnost in entropija



a	b	c	d	W_i
L	L	L	L	1
L	L	L	D	4
L	L	D	L	
L	D	L	L	
D	L	L	L	
L	L	D	D	6
L	D	L	D	
D	L	L	D	
L	D	D	L	
D	L	D	L	
D	D	L	L	
L	D	D	D	4
D	L	D	D	
D	D	L	D	
D	D	D	L	
D	D	D	D	1

večkratnost konfiguracije

mikro stanje

konfiguracija vsebuje neločljiva mikro stanja

- vsa mikro stanja so enako verjetna
- termodinamična verjetnost neke konfiguracije je sorazmerna s številom mikro stanj v njej
- čas, ki ga sistem preživi v neki konfiguraciji je sorazmeren z njeno termodinamično verjetnostjo

$$S = k \ln W_i$$

- večkratnost konfiguracije N_L, N
  - na koliko načinov lahko razporedimo N molekul tako, da jih je N_L na levi strani (v N_L predalčkov)

$$N\cdot(N-1)\cdot(N-2)\ldots(N-N_L+1)=\frac{N!}{(N-N_L)!}$$

  - ker vrstni red molekul ni pomemben delimo še z N_L!

$$W_{N_L,N}=\frac{N!}{(N-N_L)!\,N_L!}$$

- Hirnov poskus – sprememba entropije pri prehodu iz kofiguracije N_N,N v konfiguracijo $N_{N/2}$,N

$$\Delta S=k\ln W_{\frac{N}{2},N}-k\ln W_{N,N}$$

$$\Delta S=k\ln\frac{N!}{\frac{N}{2}!\,\frac{N}{2}!}-k\ln\frac{N!}{N!\,0!}=k\left(\ln N!-2\ln\tfrac{N}{2}!\right)\approx N\,k\ln 2$$

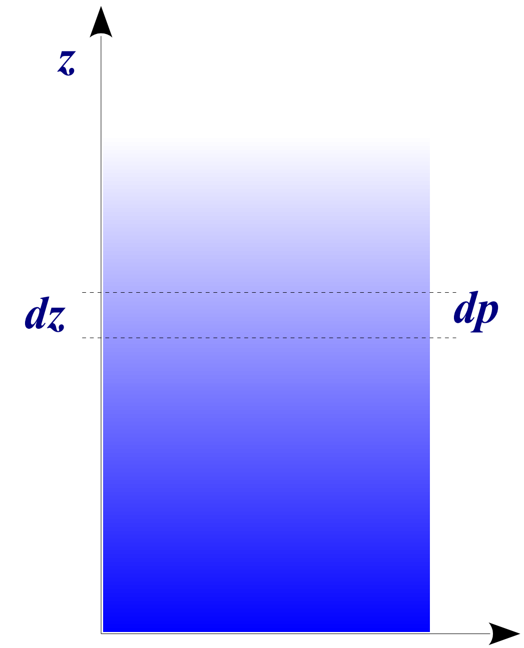
$$\ln N!\approx N\ln N-N$$

Stirlingova aproksimacija

Izotermna atmosfera

- hidrostatični tlak
- idealni plin

$$\underbrace{dp=-\rho\, g\, dz=-m_0\, n\, g\, dz \qquad p=nkT\Rightarrow dp=kT\, dn}_{kT\, dn=-m_0\, n\, g\, dz}$$

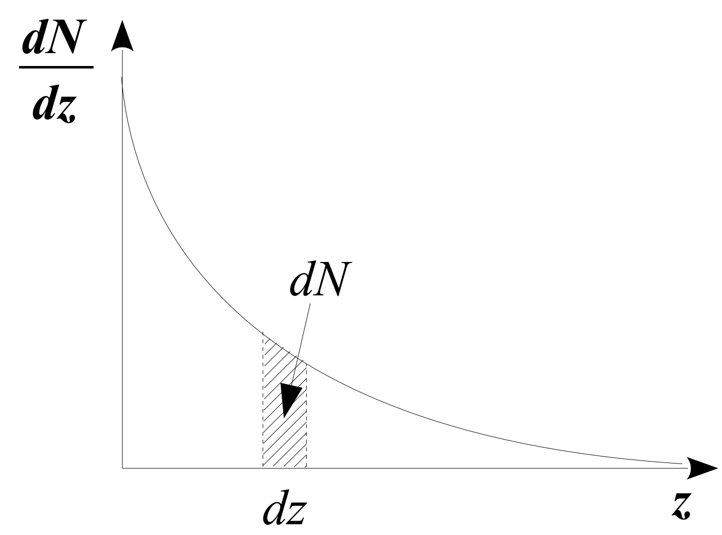


$$\int_{n_0}^{n}\frac{dn}{n}=-\frac{m_0 g}{kT}\int_0^z dz$$

$$\ln\frac{n}{n_0}=-\frac{m_0 g}{kT}z=-\frac{W_p}{kT}\quad\Rightarrow\quad n=n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}}$$

$$n=\frac{dN}{dV}=\frac{dN}{S\,dz}=n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}}=n_0 e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}$$

$$\frac{dN}{dz}=S\,n_0 e^{-\frac{W_p}{kT}}=S\,n_0 e^{-\frac{m_0 gz}{kT}}$$

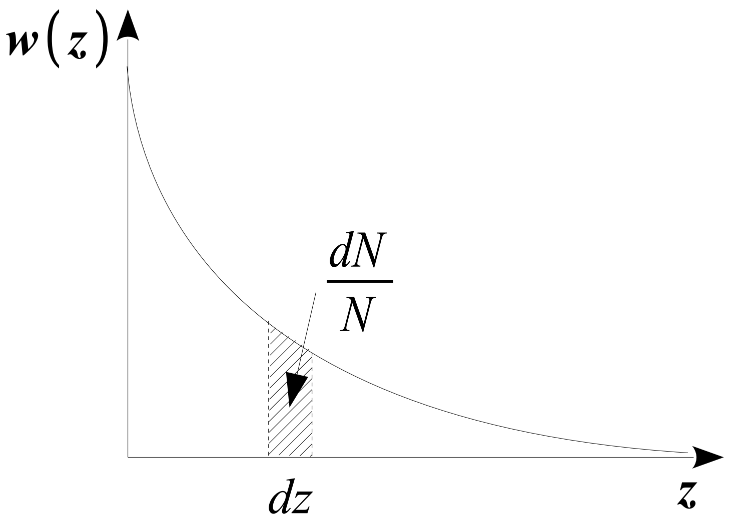


$$N=S\,n_0\int_0^\infty e^{-\frac{m_0 g}{kT}z}dz=S\,n_0\frac{kT}{m_0 g}$$

WolframAlpha

• Povprečna potencialna energija

$$\langle W_p \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N} W_{p,i}}{N}$$



$$N = S n_0 \int_0^\infty e^{-\frac{m_0 g}{kT} z} dz = S n_0 \frac{kT}{m_0 g}$$

$$dN = S n_0 e^{-\frac{m_0 g z}{kT}} dz$$

$$dW_p = W_{p,0}(z) dN = W_{p,0}(z) S n_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z} dz$$

$$\langle W_{p,0} \rangle = \int_0^\infty W_{p,0}(z) \frac{S n_0 e^{-\frac{m_0 g}{kT} z}}{N} dz = \int_0^\infty W_{p,0}(z) w(z) dz$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} w(z) dz$$

$$w(z) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dz} = \frac{m_0 g}{kT} e^{-\frac{m_0 g z}{kT}}$$

$$\langle z \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} z\, w(z) dz$$

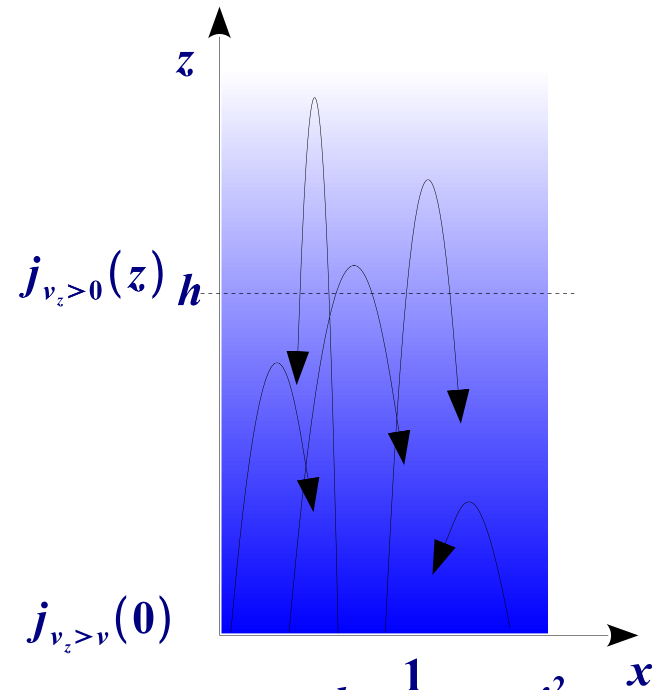
$$\langle W_{p,0} \rangle = \int_0^\infty m_0 g z \frac{m_0 g}{kT} e^{-\frac{m_0 g}{kT} z} dz = k T \int_0^\infty u e^{-u} du = kT$$

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) w(z) dz$$

WolframAlpha

Hitrostna porazdelitev molekul v idealnem plinu

$$\frac{j_{v_z>v_z'}(0)}{j_{v_z>0}(0)}=\frac{j_{v_z>0}(h)}{j_{v_z>0}(0)}=\frac{n(h)}{n(0)}=\mathrm{e}^{-\frac{m_0 g h}{kT}}=\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_z'^2}{2kT}}$$



$$m_0 g h=\frac{1}{2}m_0 v_z'^2$$

$$j_{v_z>v_z'}(0)=n_0\int_{v_z'}^{\infty} v_z\, w(v_z)\, dv_z \;\propto\; \mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_z'^2}{2kT}}$$

$$w(v_z)\;\propto\;\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_z^2}{2\mathrm{kT}}}\;\Rightarrow\; w(v_z)=\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_z^2}{2\mathrm{kT}}}$$

$$w(v_x,v_y,v_z)\;\propto\;\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_x^2}{2\mathrm{kT}}}\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_y^2}{2\mathrm{kT}}}\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v_z^2}{2\mathrm{kT}}}=\mathrm{e}^{-\frac{W_k}{kT}}$$

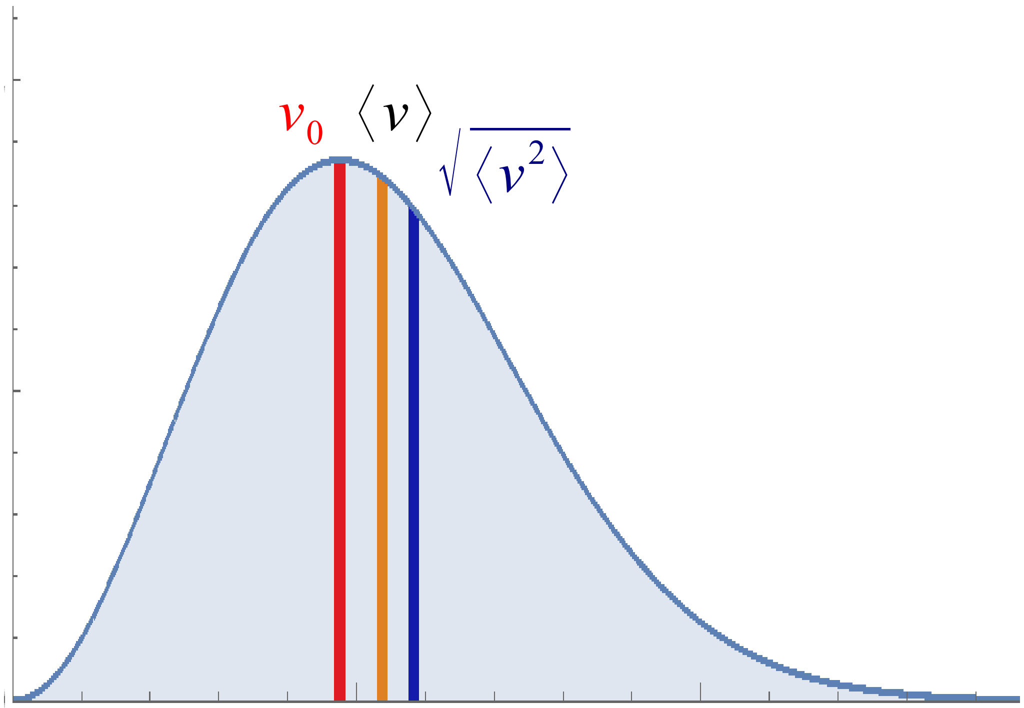
$$w(v)\;\propto\; v^2\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2\mathrm{kT}}}\;\Rightarrow\; w(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}v^2\mathrm{e}^{-\frac{m_0 v^2}{2\mathrm{kT}}}$$

Maxwellova hitrostna porazdelitev

- porazdelitev molekul idealnega plina po velikosti hitrosti

$$w(v)=4\pi\left(\frac{m_0}{\pi 2kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

WolframAlpha



- najverjetnejša velikost hitrosti

$$\frac{dw}{dv}(v_0)=0 \Rightarrow v_0=\sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$$

WolframAlpha

- povprečna velikost hitrosti

$$\bar{v}=\langle v \rangle=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}}$$

WolframAlpha

- Koren povprečja kvadrata hitrosti (RMS - Root Mean Square)

$$v_{rms}=\sqrt{\langle v^2 \rangle}=\sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

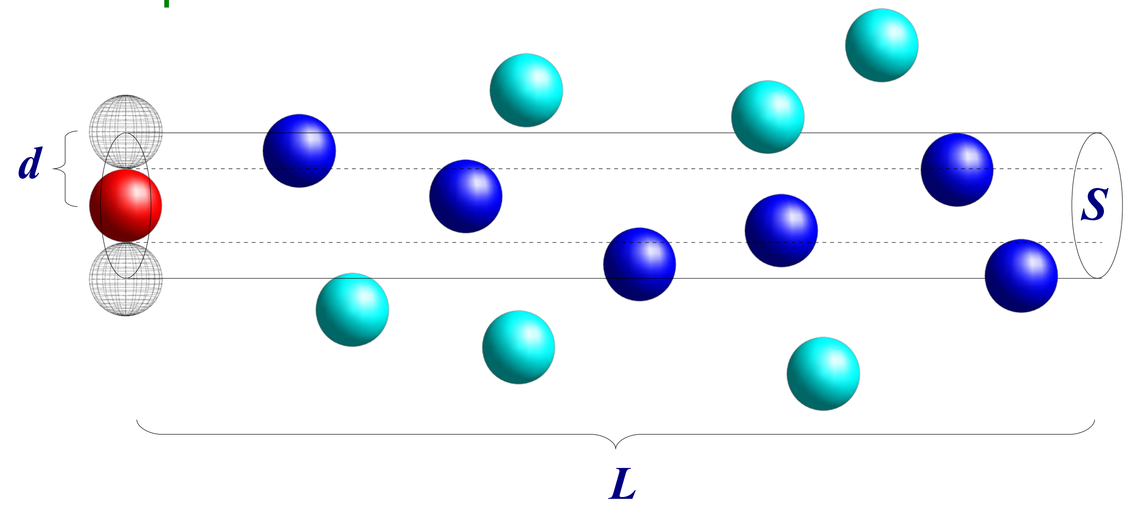
WolframAlpha

Povprečna prosta pot

- povprečna dolžina poti delca med dvema zaporednima trkoma

$$<l> = \frac{L}{N} = \frac{L}{nV} = \frac{L}{nSL}$$

$$<l> = \frac{1}{n\pi d^2} = \frac{1}{n\sigma}$$

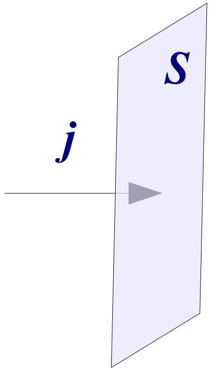


- pri izračuni smo privzeli, da ostali delci mirujejo, z upoštevanjem gibanja vseh delcev dobimo:

$$\boxed{<l> = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\sigma}}$$

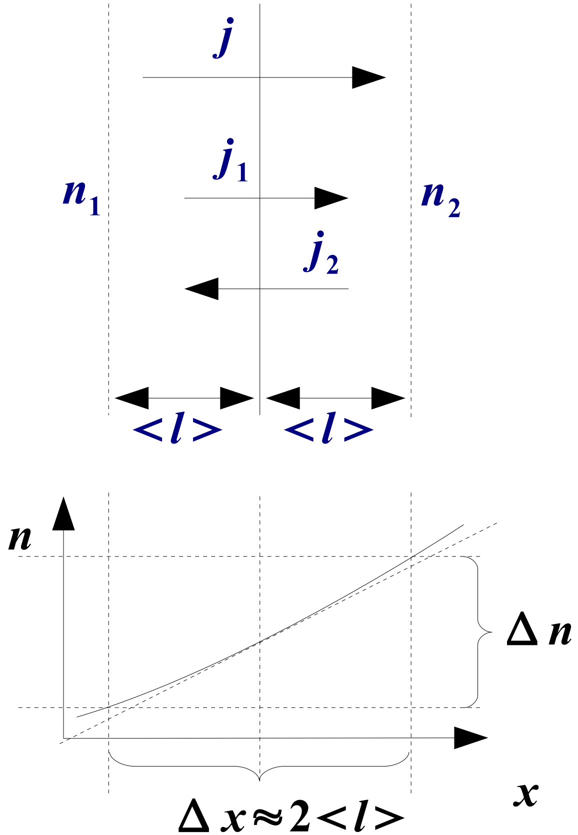
Transportni pojavi v idealnem plinu

- gostoto toka delcev v plinu skozi ploskev v eni smeri lahko ocenimo tako, da privzamemo, da se 1/6 molekul giblje v vsako smer (pravilni račun da 1/4 namesto 1/6)



$$j \approx \frac{1}{6} n \langle v \rangle$$

- difuzija v plinu



$$j = j_1 - j_2 \approx \frac{1}{6} \langle v \rangle (n_1 - n_2)$$

$$j \approx -\frac{1}{6} \langle v \rangle \Delta n \approx -\frac{1}{6} \langle v \rangle \frac{dn}{dx} \Delta x$$

$$j = -\frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle \frac{dn}{dx}$$

$$\boxed{j_m = -D \frac{d\rho}{dx} \quad ; \quad D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle}$$

• viskoznost plina

$$\boxed{\frac{F}{S}=\eta\frac{\Delta v}{\Delta z} \qquad \eta=\frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle}$$

• toplotna prevodnost plina

$$j_Q=\frac{3}{2}kT_1 j-\frac{3}{2}kT_2 j\approx\frac{1}{6}\langle v\rangle n\frac{3}{2}k(T_1-T_2)$$

$$j\approx-\frac{1}{6}\langle v\rangle n\frac{3}{2}k\Delta T\approx-\frac{1}{6}\langle v\rangle n\frac{3}{2}k\frac{dT}{dx}\Delta x$$

$$j\approx-\frac{1}{6}\langle v\rangle\frac{3}{2}nk\frac{dT}{dx}2\langle l\rangle=-\frac{1}{3}\rho c_V\langle v\rangle\langle l\rangle\frac{dT}{dx}$$

$$\boxed{j_Q=-\lambda\frac{\Delta T}{\Delta x} \qquad \lambda=\frac{1}{3}\rho c_V\langle v\rangle\langle l\rangle}$$