4. naloga: Približki in grafična predstavitev funkcij

Približki z primerom Gaussove funkcije

Gaussovo verjetnostno porazdelitev

$$w(x_0, \sigma, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

srečamo v verjetnostnem računu in statistiki zelo pogosto. Običajno potrebujemo verjetnost nad intervalom, ki se izraža z Gaussovim integralom. Uporabili bomo definicijo iz Abramowitza

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2)\, dt.$$

Pri ročnem delu si seveda pomagamo s tablicami, za računalnik pa si je treba pripraviti podprogram. Pregledali bomo naslednje možnosti:

1. potenčna vrsta

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}, \qquad \mathrm{erfc}(z) = 1 - \mathrm{erf}(z);$$

2. asimptotska vrsta

$$z\sqrt{\pi}\, \exp(z^2)\, \mathrm{erfc}(z) \longrightarrow 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(-2z^2)^m};$$

3. racionalna aproksimacija ($z > 0$)

$$\mathrm{erf}(z) = 1 - (a\,t + b\,t^2 + c\,t^3 + d\,t^4 + e\,t^5)\, \exp(-z^2) + \varepsilon(z),$$

$$t = \frac{1}{1+pz}, \qquad \varepsilon(z) < 1.5 \cdot 10^{-7},$$

$p =$ .32759 11, $a =$ .25482 9592, $b = -$.28449 6736,
$c =$ 1.42141 3741, $d = -$1.45315 2027, $e =$ 1.06140 5429.

Naloga: Primerjaj metode po uporabnosti! Če je mogoče, primerjaj tudi potrebne čase! Opazuj konvergenco asimptotske vrste!

Napravi primerjalno tablico $\mathrm{erf}(x)$ za $x = 0$ do 3 v korakih po 0.2 in $\mathrm{erfc}(x)$ za $x = 3$ do 8 v korakih po 0.5 ter pripravi podprogram za izračun erf za poljubne vrednosti (lahko kombiniraš različne metode)!

Ali je numerična integracija primerljiva z izbrano metodo? Ugotovi, kolikšen interval bi moral uporabiti pri Simpsonovi integraciji!

Dodatna naloga: Sestavi algoritem za funkcijo, inverzno k $\mathrm{erf}(z)$! Če imamo učinkovit algoritem za računanje monotone funkcije, je mogoče obratno funkcijo poiskati z bisekcijo ali podobnim postopkom.

Osnove grafičnih upodobitev funkcij

Z grafično upodobitvijo – grafom – funkcije ene neodvisne spremenljivke $y = f(x)$ običajno ni posebnih težav, razen tistih seveda, ki se utegnejo pojaviti ob računanju funkcijskih vrednosti. Ko smo izbrali primerno merilo na obeh oseh, tako da so v sliko vključena in dovolj jasno prikazana zanimiva področja funkcije, je treba presoditi še, kako na gosto bomo morali funkcijo izračunati. Pohlevne in zamudne funkcije računamo redkeje, točke pa povežemo z daljicami, ki "vodijo oko", da se v razmikih med zaporednimi točkami ne izgubimo. Le izjemoma skušamo zelo redke funkcijske točke povezati z interpolacijo višjega reda.

Večjo izbiro grafičnih sredstev in prijemov uporabljamo pri funkciji dveh spremenljivk, $z = z(x, y)$, saj moramo na dvodimenzionalnem papirju predstaviti tri dimenzije. Spremenljivki x in y sta lahko enakovredni, pogosto pa je ena zvezen parameter družine, n.pr. $z = z(x; y)$. V tem primeru izberemo običajen graf z osema z in x, v katerega narišemo nekaj zveznih funkcij za primerne in nepregoste vrednosti parametra y. Če je z pohlevna funkcija obeh spremenljivk, lahko zaporedne grafe družine "perspektivno" premaknemo in pririšemo tretjo os. Kadar hočemo poudariti enakovrednost obeh neodvisnih spremenljivk, lahko točke take sestavljene slike povežemo tudi v smeri y, da dobimo nekakšno mrežo, ki ponazarja zvezno ploskev $z(x, y)$. Pri količkaj razgibanih funkcijah pa obstaja nevarnost, da bo slika s tem postala nepregledna. Moderni risarski programi zmorejo prikazati tako ploskev kot objekt, se pravi z realističnim zveznim senčenjem in izračunom zakrivanja.

Za matematično izobraženega bralca je laže berljiva slika, v kateri uporabimo ravnino papirja kot ravnino x, y, vrednosti funkcije pa predstavimo z drugačnimi sredstvi, na primer z barvo, gostoto senčenja ali šrafure, ali pa najtočneje z izohipsami. Najokornejša in najmanj zahtevna varianta te tehnike izvira iz časov, ko so znali tiskalniki tiskati le alfanumerične znake: vrednosti funkcije, ki jih naračunamo v ne pregosti mreži (n.pr. 30 x 30), razdelimo v deset slojev, in na ustreznem mestu v tabeli odtisnemo številko sloja. Z grafičnim tiskalnikom ali zaslonom lahko odtisnemo ustrezen ton sivine: seveda s tem nismo omejeni na deset slojev. Prikaz s stopnjami sivine je posebej primeren za porazdelitve, saj želimo prikazati gostoto neke fizikalne količine, n.pr. verjetnosti. Če računanje funkcije ni časovno potratno in si lahko privoščimo gosto mrežo točk, lahko sloje prikažemo izmenoma v beli in črni barvi. Meje med njimi potem ustrezajo izohipsam funkcije $z(x, y)$.

Prikaz funkcije s pravimi izohipsami je bržkone najpopolnejši, saj omogoča precej natančno odčitavanje funkcijskih vrednosti, obenem pa podaja globalno sliko. Konstrukcija izohips je programsko dokaj zahtevna, terja pa razmeroma redko mrežo, zato uporabljamo to tehniko pri funkcijah, katerih računanje je zamudno.

Podobno kot lahko prikažemo skalarno polje U z ekvipotencialnimi ploskvami $U = konst.$, upodobimo vektorsko polje s silnicami. To so rešitve sistema diferencialnih enačb

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}, \tag{1}$$

torej krivulje, ki imajo v vsaki točki za tangente vektorje polja. Običajno želimo tudi, da silnice s svojo gostoto prikazujejo jakost polja, da so gostejše v močnejšem polju. Enačbe (1) tega same ne zagotavljajo, treba je poskrbeti za pravilno izbiro začetnih točk. Slika torej ni enolična, kar je drugače kot v primeru skalarnega polja, kjer je slika popolnoma določena z izborom vrednosti potenciala, ki jim ustrezajo narisane ekvipotencialne ploskve.

Zelo lepo pa je mogoče rešiti ravninski problem.

- Potencialna polja lahko izrazimo kot $\boldsymbol{E} = -\nabla\,\varphi$. S pomočjo Cauchy-Riemannovih enačb zamenjamo potencial φ s konjugiranim potencialom ψ, pa se sistem (1) integrira v

$$\psi = konst.. \tag{2}$$

- Solenoidalna polja lahko izrazimo kot $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Za polje v ravnini x-y velja $\boldsymbol{A} = (0, 0, A_z)$. S substitucijo

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}\ , \qquad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}\ ,$$

  lahko sistem (1) spet zintegriramo v

$$A_z = konst.. \tag{3}$$

  V enačbah (2, 3) dobimo z izbiro konstante v enakih razmikih silnice že razmeščene tako, kot ustreza gostoti polja.

Naloga: Izberi primeren prikaz za

1. Planckov zakon za sevanje črnega telesa

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}\nu} = \frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{\exp(h\nu/kT) - 1}$$

   kot funkcijo frekvence in temperature;

2. resonančno krivuljo

$$I = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + 2\alpha^2\Omega^2}}$$

   kot funkcijo brezdimenzijske frekvence $\Omega = \omega/\omega_0$ in relativnega dušenja $\alpha = \beta/\omega_0$.

3. Nariši silnice magnetnega polja v okolici dveh, treh ali več dolgih vzporednih vodnikov, po katerih tečejo električni tokovi v isti (nasprotni) smeri. V mreži točk, ki naj sega približno za dva razmika med žicami v vsako stran, določi vektorski potencial. Razpon dobljenih vrednosti razdeli tako, da bo na sliki 5-8 silnic.