6. naloga: Enačbe hoda

Med najpreprostejše fizikalne modele sodijo enačbe, ki povezujejo vrednosti spremenljivk sistema z njihovimi časovnimi spremembami. Tak primer je enačba za časovno odvisnost temperature majhnega, dobro prevodnega telesa, ko lahko zanemarimo krajevno odvisnost: enačbo hoda dobimo iz energijskega zakona. Vzemimo primer žarilne nitke, ki jo grejemo s tokom, pri čemer bomo uporabili tokovni sunek iz kondenzatorja:

$$mc \cdot \frac{dT}{dt} = RI_0^2 \cdot \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) - \sigma S T^4.$$

Z vpeljavo brezdimenzijskih spremenljivk dobimo enoparametrično enačbo

$$\frac{du}{dx} = a \cdot \exp(-2x) - u^4. \tag{1}$$

Zanemarili smo sevalni tok, ki ga nitka prejema iz okolice, zato se bo temperatura po dovolj dolgem času poljubno približala absolutni ničli: to pomeni, da rešitve ne kaže vleči predolgo. Da se izognemo tudi preračunavanju začetne temperature, nas bodo zanimali samo zelo močni tokovni sunki, ko lahko začetno notranjo energijo nitke zanemarimo. K enačbi (1) sodi torej začetni pogoj $u(x = 0) = 0$.

Preiskali bomo uporabnost različnih metod za reševanje enačbe (1). Sledeč fizikalnemu občutku lahko v najbolj grobi inačici zapišemo (Eulerjeva metoda):

$$u(x + h) = u(x) + h \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_x . \tag{2}$$

Diferencialno enačbo smo prepisali v diferenčno: sistem spremljamo v korakih h. Metoda je vedno stabilna, le groba: za večjo natančnost moramo močno zmanjšati korak. Za red boljša ($\mathcal{O}\left(h^3\right)$) je simetrizirana formula

$$u(x + h) = u(x - h) + 2h \cdot \left.\frac{du}{dx}\right|_x , \tag{3}$$

ki pa je praviloma nestabilna. Želeli bi si pravzaprav nekaj takega

$$u(x + h) = u(x) + \frac{h}{2} \cdot \left[\left.\frac{du}{dx}\right|_x + \left.\frac{du}{dx}\right|_{x+h} \right] ,$$

le da ne poznamo odvoda v končni točki intervala. Pomagamo si lahko z iteracijo.

Zapišimo odvod kot:

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_x = f(x, u)$$

ter

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad u_n = u(x_n)$$

Heunova metoda je približek idealne formule z:

$$\hat{u}_{n+1} = u_n + h \cdot f(x_n, u_n) \tag{4}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, u_n) + f(x_{n+1}, \hat{u}_{n+1})\right] \tag{5}$$

Izvedenka tega je nato Midpoint metoda (natančnos reda h^2).

$$K_1 = h \cdot f(x_n, u_n) \tag{6}$$

$$K_2 = h \cdot f(x_n + \frac{1}{2}h, u_n + \frac{1}{2}K_1) \tag{7}$$

$$u_{n+1} = u_n + K_2 \tag{8}$$

Le-to lahko potem izboljšamo kot modificirano Midpoint metodo itd...

Za splošno rabo in večjo natančnost se uporabljata dva tipa metod: algoritmi *prediktor-korektor* in metode *Runge-Kutta*. Lotimo se jih, če je zahtevana spodobna natančnost (pod 1 %): tedaj tudi ne skoparimo, izberemo večinoma četrti red (globalna natančnost je reda $\mathcal{O}(h^4)$).

Naloga:

- Z reševanjem navadne diferencialne enačbe $dy/dt = y^2 + 2t^2$ primerjaj Eulerjevo metodo, Midpoint metodo, Runge-Kutto 4. reda in metodo s Taylorjevim razvojem. Privzemi, da je ob t=0, y(0)=1. Korak naj bo v vseh uporabljenih metodah enak (po vrsti) h=0.1,0.01 in 0.001.

- za $a = 10$ v enačbi (1) preskusi Eulerjevo, Midpoint, Runge-Kutto 4. reda, Adams-Bashfort-Moultonov prediktor-korektor ter še katero od omenjenih boljših metod. Kakšen korak je potreben? Izberi metodo (in korak) za izračun družine rešitev pri a=2 do a=18 v korakih (vsaj) po 4! *V premislek*: kakšno metodo bi uporabil, če bi posebej natančno želel določiti maksimalne temperature in trenutke, ko nastopijo?