Prehod nabitih delcev in fotonov skozi snov

EFJOD, 13.+20. 10. 2026

Osnovni procesi

Pri prehodu nabitih delcev skozi snov obravnavamo predvsem težke delce, $M \gg m_e$, deloma pa tudi elektrone in pozitrone e±.

Delci pri prehodu skozi snov:

- izgubljajo energijo E,
- spreminjajo smer.

Gre za stohastične procese.

Vzroki so predvsem:

- neprožni trki z elektroni e^- v snovi,
- prožni trki z jedri v snovi,
- sevanje,
- jedrska sipanja,
- jedrske reakcije.

Bohrov klasični izračun energijskih izgub v snovi

Predpostavke

- elektroni e^- v snovi so sprva v mirovanju,
- interakcija traja kratek čas,
- smer gibanja vpadnega delca se bistveno ne spremeni, ker velja $M \gg m_e$.

Obravnavamo delec z nabojem ze, ki se giblje s hitrostjo v, in elektron na pravokotni oddaljenosti b od njegove poti. Parameter b imenujemo parameter trka.

Sprememba gibalne količine elektrona

Prečna sprememba gibalne količine elektrona je

$$\Delta p = \int F_\perp \, dt = e \int E_\perp \, dt.$$

Ker velja

$$dx = v \, dt,$$

dobimo

$$\Delta p = (e/v) \int E_\perp \, dx.$$

Longitudinalna komponenta električnega polja se pri integraciji izniči.

Iz Gaussovega zakona

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q/\varepsilon_0$$

sledi

$$\int E_\perp \, 2\pi b \, dx = ze/\varepsilon_0,$$

zato

$$\int E_\perp \, dx = ze/(2\pi\varepsilon_0 b).$$

Tako dobimo

$$\Delta p = ze^2/(2\pi\varepsilon_0 v b).$$

Energija, ki jo prejme elektron

Sprememba energije elektrona je

$$\Delta E(b) = (\Delta p)^2/(2m_e).$$

Po vstavitvi izraza za Δp:

$$\Delta E(b) = z^2 e^4/(8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 m_e v^2 b^2).$$

Torej velja pomembna odvisnost

$$\Delta E \propto 1/b^2.$$

Manjši parameter trka b pomeni večji prenos energije.

Če je gostota elektronov v snovi n_e, potem delec zaradi interakcij z elektroni med b in b + db izgubi energijo

$$dE = -\Delta E \, n_e \, dV.$$

Za cilindrično prostornino

$$dV = 2\pi b \, db \, dx$$

dobimo

$$dE = -\Delta E \, n_e \, 2\pi b \, db \, dx.$$

Specifične ionizacijske izgube

Iz prejšnjega izraza sledi

$$-dE/dx = [z^2 e^4 n_e/(4\pi\varepsilon_0{}^2 m_e v^2)] \cdot db/b.$$

Integrirati moramo po vseh možnih parametrih trka:

$$b_{min} \leq b \leq b_{max}.$$

Zato dobimo

$$-dE/dx = [z^2 e^4 n_e/(4\pi\varepsilon_0{}^2 m_e v^2)] \ln(b_{max}/b_{min}).$$

Preostane še izbira za b_{min} in b_{max}.

Minimalni parameter trka b_{min}

Najmanjši b ustreza približno čelnemu trku, pri katerem je prenos energije največji.

$$\Delta E \propto 1/b^2,$$

zato

$$\Delta E_{max} \propto 1/b_{min}{}^2.$$

Pri čelnem trku uporabimo ohranitev gibalne količine in energije:

$$Mv = Mv_M + m_e v_e,$$

$$Mv^2 = Mv_M{}^2 + m_e v_e{}^2.$$

Iz tega sledi

$$v_e = [2M/(M + m_e)]v.$$

Ker je $M \gg m_e$, dobimo približno

$$v_e \simeq 2v.$$

Maksimalna prenesena energija je zato

$$\Delta E_{max} = \tfrac{1}{2} m_e (2v)^2.$$

V nadaljevanju približno upoštevamo relativistični popravek z zamenjavo

$$v \to \gamma v.$$

Tako je

$$\tfrac{1}{2} m_e (2\gamma v)^2 = [z^2 e^4/(8\pi^2 \varepsilon_0{}^2 m_e v^2)] \cdot 1/b_{min}{}^2.$$

Od tod

$$b_{min} = ze^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e v^2 \gamma).$$

Maksimalni parameter trka b_{max}

Za b_{max} uporabimo pogoj, da mora biti čas trajanja interakcije dovolj kratek.

Elektroni so vezani v atomih z značilno vezavno energijo

$$W_vez = \hbar\omega.$$

Značilni čas je zato približno

$$\tau \simeq 1/\omega.$$

Čas trajanja interakcije ocenimo kot

$$t \simeq b/v.$$

Zahtevamo

$$t < \tau.$$

Relativistični popravek je

$$t \to t/\gamma.$$

Zato

$$b/(\gamma v) < 1/\omega.$$

Od tod dobimo

$$b_{max} \sim \gamma v/\omega.$$

Ker je povprečna vezavna energija $W_{vez} = \hbar\omega$, sledi

$$b_{max} \sim \gamma\hbar v/W_{vez}.$$

Specifične ionizacijske izgube

Po vstavitvi b_{min} in b_{max} dobimo končni izraz za specifične ionizacijske izgube.

$$-dE/dx = [z^2e^4n_e/(4\pi\varepsilon_0{}^2m_ev^2)]\ \ln((4\pi\varepsilon_0m_ev^3\gamma^2)/(ze^2W_{ve})).$$

Gostota elektronov v snovi se zapiše kot

$$n_e = dN_e/dV = Z_A\, dn_a/dV = Z_A\, \rho_A\, N_A/M_A.$$

Tu je dn_a/dV številska gostota atomov.

Klasični radij elektrona

Definiramo klasični radij elektrona r_e:

$$m_e c^2 = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_e).$$

Zato

$$r_e = e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e c^2)$$

in uvedemo

$$\beta = v/c.$$

S tem lahko izraz za energijske izgube zapišemo v kompaktnejši obliki. Izraz razdeli na del, povezan s projektilom, in del, povezan s snovjo:

$$-dE/dx = [z^2 e^2 r_e/(\beta^2\varepsilon_0)]\ [Z_A\ \rho_A\ N_A/M_A]\ \ \ln((4\pi\varepsilon_0 m_e v^3\gamma^2)/(ze^2 W_{ve})).$$

Po združitvi konstant je splošna oblika

$$-dE/dx = (a'/\beta^2)\ \ln(a''\gamma\beta^3),$$

kjer je

$$a' = (z^2 e^2/\varepsilon_0)\ r_e\ Z_A\ \rho_A\ N_A/M_A.$$

Minimum ionizacijskih izgub — MIP

Graf $-dE/dx$ v odvisnosti od hitrosti delca najprej pada, doseže minimum in nato ponovno počasi narašča. Minimum je pri $\beta \simeq 0{,}96$ in $\beta\gamma \simeq 4$. Delec v območju minimuma imenujemo $\mathrm{MIP} = \mathrm{Minimum\ Ionizing\ Particle}$.

Ionizacijske izgube elektronov in pozitronov

Predhodna izpeljava velja predvsem za težke delce $M \gg m_e$. Za elektrone in pozitrone je treba obravnavo ustrezno spremeniti oziroma vključiti dodatne relativistične popravke – obravnavamo kasneje.

Doseg delca v snovi

Doseg označimo z R. To je razdalja v snovi, pri kateri se delec skinetično energijo T ustavi, $R(T) = \int_0^T (dE/dx)^{-1}\ dT'$

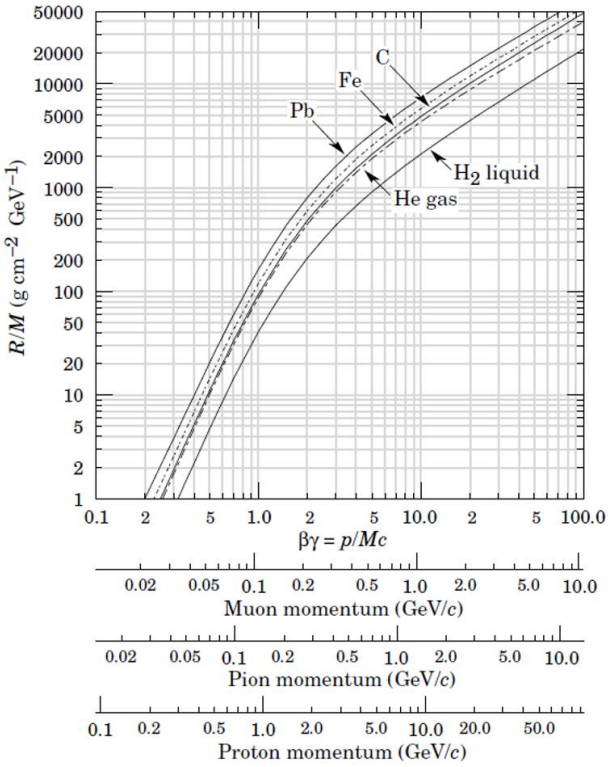


Figure 27.4: Range of heavy charged particles in liquid (bubble chamber hydrogen, helium gas, carbon, iron, and lead. For example: For a K^+ who momentum is 700 MeV/c, $\beta\gamma = 1.42$. For lead we read $R/M \approx 396$, and so range is 195 g cm^{-2}.

Za nerelativistične delce je približna odvisnost $-\mathrm{dE/dx} \propto 1/\beta^2$.

Kinetična energija delca je $\mathrm{T} = (\gamma - 1)\mathrm{Mc}^2$.

Pri $\beta \ll 1$ lahko uporabimo zvezo $(\gamma - 1) = 1/\sqrt{(1-\beta^2)} - 1 \simeq \beta^2/2$.

Torej $\mathrm{T} \propto \beta^2$.

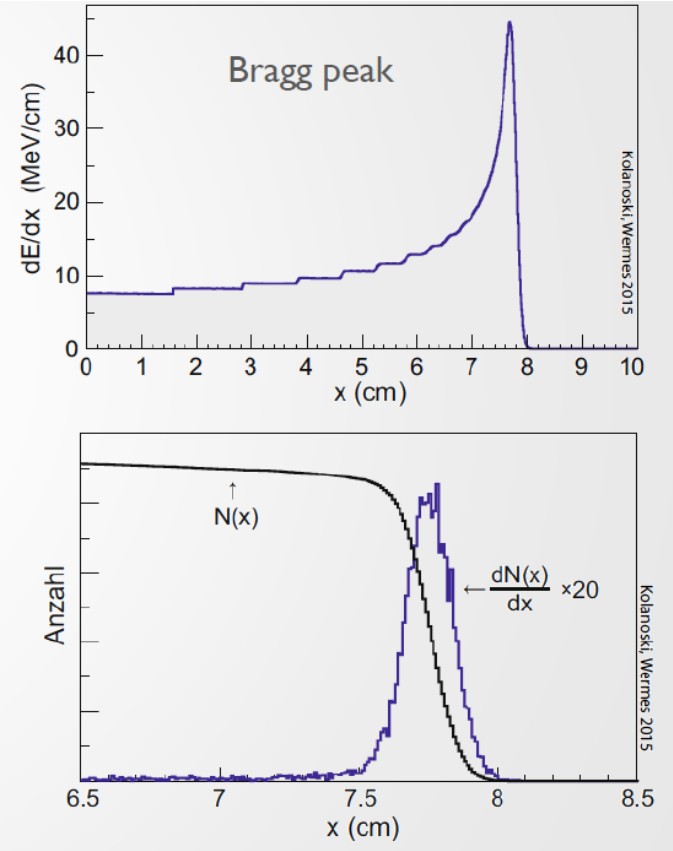
Posledično $-\mathrm{dE/dx} \propto 1/\beta^2 \propto 1/\mathrm{T}$.

Doseg delca je $\mathrm{R(T)} = \int_0^{\mathrm{T}} (\mathrm{dE/dx})^{-1}\, \mathrm{dT}'$ je zato približno $\mathrm{R(T)} \propto \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{T}'\, \mathrm{dT}' \propto \mathrm{T}^2$.

Braggova krivulja

Braggova krivulja: energijske izgube −dE/dx kot funkcija dolžine poti delca v snovi proti koncu poti delca močno narastejo, nato pa ob koncu dosega padejo na nič.

To je povezano z odvisnostjo $-\mathrm{dE/dx} \propto 1/\beta^2$: ko se delec upočasnjuje, njegove specifične energijske



izgube naraščajo.

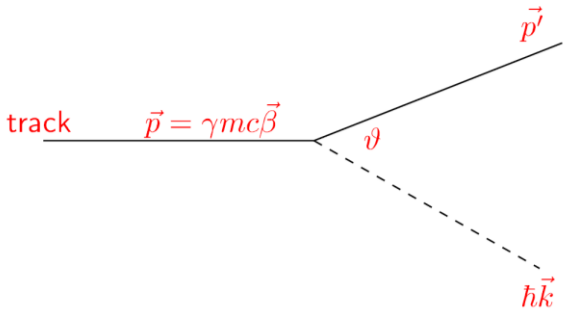
Stohastičnost ionizacijskih izgub

Ionizacijske izgube so stohastični proces.

Zato delci z enako začetno energijo nimajo nujno popolnoma enakega dosega v snovi.

Dosegi so porazdeljeni okoli neke povprečne vrednosti R. Ta pojav imenujemo stresanje (straggling)

Kvantnomehanska obravnava: sevanje nabitega delca



Vpadni delec z gibalno količino p, izhodni delec s p′ in izsevani foton. Kot med smerema delca pred sevanjem in po njem je α; foton je izsevan pod kotom ϑ glede na začetno smer.

Za četverce gibalne količine velja:

$$p = p' + p_\gamma, p = \left(E, c\vec{p}\right), p_\gamma = \left(\hbar\omega, c\hbar\vec{k}\right).$$

Ohranitev gibalne količine in energije zapišemo kot

$$\vec{p} = \vec{p}' + \hbar\vec{k}, E = E' + \hbar\omega.$$

Zanimajo nas majhni prenosi gibalne količine in energije:

$$\hbar k \ll p, \hbar\omega \ll E.$$

Iz zveze za energijo delca sledi

$$E^2 = c^2p^2 + m^2c^4, EdE = c^2pdp, \frac{pc^2}{E} = v,$$

$$\hbar\omega = \Delta E = \frac{pc^2}{E}\Delta p = v\Delta p.$$

Razliko vektorskih gibalnih količin skalarno pomnožimo s hitrostjo. Za α ≪ 1 je

$$\left(\vec{p} - \vec{p}'\right) \cdot \vec{v} = pv - p'v\cos\alpha \simeq v\Delta p.$$

Zato velja

$$\hbar\vec{k} \cdot \vec{v} = v\Delta p = \hbar\omega,$$

$$\hbar kv\cos\vartheta = \hbar\omega \Rightarrow \omega = kv\cos\vartheta. (1)$$

Disperzijska relacija v snovi

Dielektrična funkcija je kompleksna:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega), \omega^2 = \frac{k^2c^2}{\varepsilon}. (2)$$

Iz enačb (1) in (2) dobimo

$$\frac{k^2c^2}{\varepsilon} = k^2v^2\cos^2\vartheta \Rightarrow \sqrt{\varepsilon}\frac{v}{c}\cos\vartheta = 1.$$

Območja dielektričnega odziva

a) Optično območje: $\varepsilon_2 = 0$ in $\varepsilon_1 > 1$, pri energijah $\hbar\omega \lesssim 10$ eV. Če je izpolnjen pogoj

$$v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}},$$

je kot ϑ realen: nastane sevanje Čerenkova.

b) Absorptivno območje: $\varepsilon_2 > 0$ in $\varepsilon_1 \lesssim 1$, pri približno 10 eV $\lesssim \hbar\omega \lesssim$ 5 keV. V tem območju gre za absorpcijo virtualnih fotonov, ki vodi v ionizacijo in vzbujanje.

c) Rentgensko območje: $\varepsilon_2 \ll 1$ in $\varepsilon_1 \lesssim 1$, pri $\hbar\omega > 5$ keV. V tem območju gre za ionizacije in sevanje pri prehodu meje – prehodno sevanje.

Prečna odvisnost polja

Delec se premika po osi x s hitrostjo v = (v, 0). Naj bo točka (x, y) zunaj njegove poti. Iz enačb (1) in (2) sledi

$$vk_x = \omega, k^2 = {k_x}^2 + {k_y}^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2},$$

$$k_y = \sqrt{k^2 - {k_x}^2} = \frac{\omega}{v}\sqrt{\left(\frac{v}{c}\right)^2\varepsilon\text{-}1}.$$

Če je $(v/c)^2\varepsilon > 1$, je k_y realen; izraz $e^{i(kr-\omega t)}$ opisuje sevanje. Če je $(v/c)^2\varepsilon < 1$, je k_y imaginaren in nastopi eksponentno pojemanje v prečni smeri:

$$e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = e^{i\omega(x/v-t)}e^{-y/y_0},$$

$$y_0 = \frac{v}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2\varepsilon}} = \frac{1}{\omega\sqrt{1/v^2 - \varepsilon/c^2}}.$$

Dolžina y_0 raste s hitrostjo v. Delec zato interagira z več elektroni; to je kvalitativna razlaga za logaritemsko naraščanje $-dE/dx$ pri višjih $\beta\gamma$.

Bethe–Blochova enačba

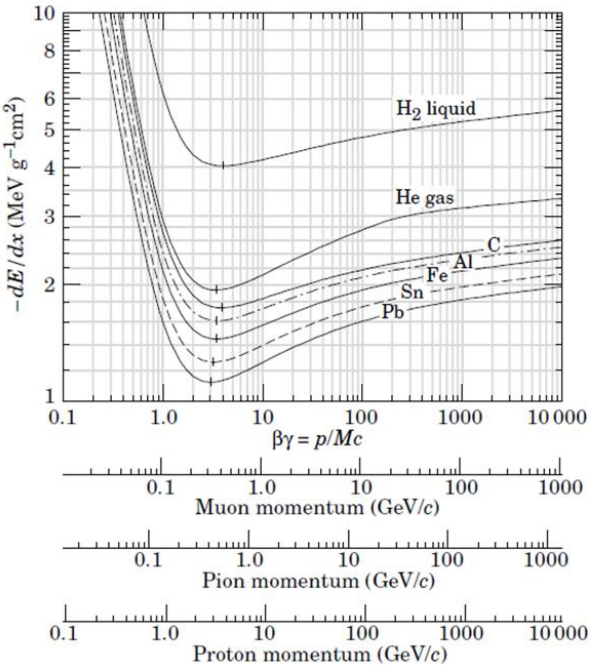
Za prehod delcev skozi snov dobimo iz kvantnomehanske obravnave enačbo Betheja in Blocha,

$$-\frac{dE}{dx} = Kz_p{}^2\frac{\rho Z}{A}\frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{2m_ec^2\beta^2\gamma^2T_{\max}}{I^2} - \beta^2 - \frac{\delta}{2}\right].$$

Konstanta K je

$$K = 4\pi N_A{r_e}^2m_ec^2 = \frac{0{,}307MeVcm^2}{g}.$$

δ označuje efekt gostote oziroma senčenje polja. I je povprečni ionizacijski potencial; v rokopisu je navedena ocena

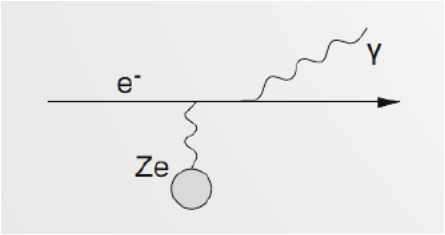


$$\frac{I}{Z} \sim 10eV.$$

Največji prenos energije je

$$T_{\max} = \frac{2\gamma^2 m_e c^2 \beta^2}{1 + 2\gamma m_e/M + (m_e/M)^2}.$$

Izkaže se, da se enačba Betheja in Blocha presenteljivo dobro ujema z izrazom, ki smo ga izpeljali z Bohrovim klasičnim računom.



Energijske izgube elektronov in pozitronov

Ionizacijske izgube

Pri uporabi Bethe–Blochove obravnave je treba pri elektronih in pozitronih upoštevati velik odklon in identičnost delcev. V tem primeru je $T_{\max} = \frac{T}{2}$.

Zavorno sevanje

Pri višjih energijah vpadnega elektrona postane pomembno (in nato tudi dominantno) zavorno sevanje. Elektron v bližini jedra z nabojem Z spremeni smer in izseva foton zavornega sevanja. Za oceno verjetnosti W uporabimo kar klasično odvisnost (kjer je p_e električni dipolni moment):

$$(\frac{d^2}{dt^2}(p_e))^2 \propto a^2 \propto (\frac{Z}{M})^2$$

Za μ je zavorno sevanje v razmerju kvadrativ mas, torej $4 \cdot 10^4$-krat, manjše kot za e^-.

Energija elektrona se z globino x zmanjšuje eksponentno

$$E = E_0 e^{-x/X_0}.$$

X_o je radiacijska dolžina. Njena odvisnost od snovi je zapisana kot

$$X_0 \propto \frac{A}{\rho Z^2}.$$

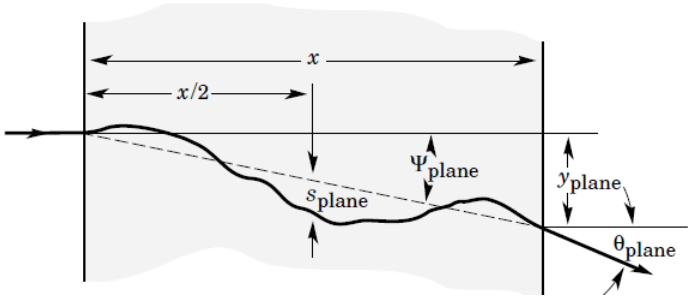
Primeri: C – 18,8 cm; Pb – 0,56 cm; W – 0,35 cm.

Kritična energija

Pri kritični energiji sta prispevka trkov in zavornega sevanja enaka:

$$\left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{trki}} = \left(\frac{dE}{dx}\right)_{\text{zavorno sevanje}}, \quad E_c \sim \frac{800MeV}{Z + 1{,}2}.$$

Večkratno Coulombsko sipanje



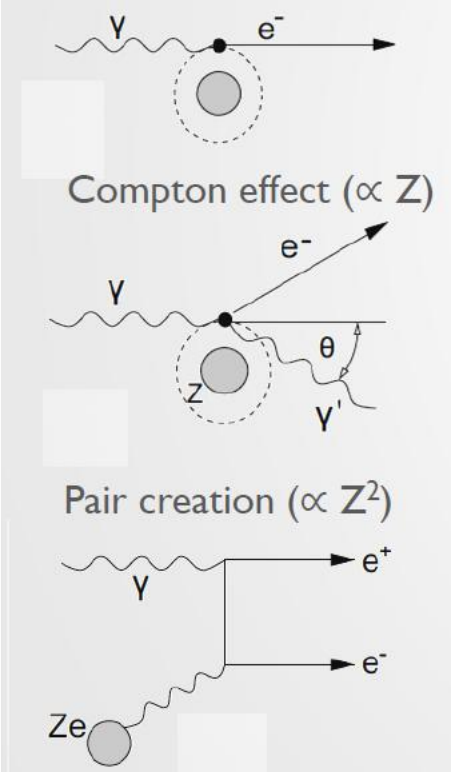
Nabit delev v snovi tudi spremeni smer. V tem primeru je pomembno Coulombsko sipanje na jedrih, za katera velja $M_j \gg M$. Rutherfordova odvisnost preseka je za posamezno sipanje $\propto \frac{1}{\sin^4(\vartheta/2)}$. Za veliko število sipanj je porazdelitev po kontu konvolucija porazdelitev po kotu pri posameznem sipanju → dobimo osrednjo Gaussovo sredico z dogimi repi (nekaj procento delcev se močno siplje).

Skica kaže več zaporednih majhnih odklonov delca na dolžini L. Začetna smer določa os z, prečni odmik je v smeri x, izhodni projekcijski kot pa je ϑ_x.

Jedro porazdelitve kotov je Gaussova sredica:

$$P(\vartheta_x)d\vartheta_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\vartheta_0'} e^{-\frac{\vartheta_x^2}{2\vartheta_0'^2}} d\vartheta_x,$$

$$\vartheta_0' = z_p \frac{15MeV}{p\beta c} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \left(1 + \frac{1}{9}\log_{10}\frac{L}{X_0}\right).$$



Prehod fotonov skozi snov

Glavni obravnavani procesi so fotoefekt, Comptonsko sipanje in tvorba parov.

Za razliko od predhodne obravnave nabitih delcev foton pri interakciji izgine iz obravnavanega toka.
Zmanjšuje se tok fotonov *I*, $dI = -\mu\, I\, dx$:

$$I = I_0 e^{-\mu x}.$$

Verjetnost interakcije in oslabitev toka

Foton vstopa v valj snovi s prečnim presekom dS in dolžino dx. Verjetnost interakcije enega fotona na dolžini dx je

$$dp_{int} = \sigma \frac{dn_e}{dS}, [\sigma] = m^2.$$

Število elektronov na prečno ploskev izrazimo z gostoto snovi:

$$\frac{dn_e}{dS} = dx \frac{dn_e}{dV} = dx Z_A \frac{dn_a}{dV} = dx Z_A \rho_A \frac{N_A}{M_A}.$$

Za N fotonov je število interakcij

$$dN_{int} = N dp_{int} = N \mu dx,$$

$$N = N_0 e^{-\mu x}, \;\; \mu = \sigma Z_A \rho_A \frac{N_A}{M_A}.$$

Fotoefekt

Fotoefekt poteka na vezanem elektronu v atomu. Skica kaže absorpcijo vpadnega fotona, izstop elektrona in interakcijo z atomom oziroma jedrom z oznako Z. Energija elektrona je zapisana kot

$$E_e = E_\gamma - E_v.$$

Verjetnost je velika, ko je energija fotona Eγ enaka vezavni energiji E_v elektrona v lupini K – to je rob K.

Za presek imamo naslednji odvisnosti

$$\sigma \propto \frac{Z^5}{{E_\gamma}^n}, n = \frac{7}{2}, E_K < E_\gamma \ll m_e c^2,$$

$$\sigma \propto \frac{Z^5}{E_\gamma}, E_\gamma \gg m_e c^2.$$

Graf za Pb prikazuje presek σ v odvisnosti od energije E v MeV. Krivulja z naraščajočo energijo pada; v območju nizkih energij so narisani skoki ob vezavnih energijah. Na vodoravni osi so označene energije približno 0,01, 1 in 100 MeV, na navpični pa vrednosti preseka od 1 do 10^4.

Comptonsko sipanje

Comptonsko sipanje poteka na približno prostem elektronu. Skica prikazuje vpadni foton γ, sipani foton γ′ pod kotom ϑ in odrinjeni elektron pod kotom ϕ, s kinetično energijo T.

Energija sipanega fotona je

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_e c^2}(1 - \cos\vartheta)}.$$

Kinetična energija elektrona je

$$T_e = E_\gamma \frac{E_\gamma(1 - \cos\vartheta)}{m_e c^2 + E_\gamma(1 - \cos\vartheta)},$$

$$T_{e\max} = E_\gamma \frac{1}{1 + \frac{m_e c^2}{2E_\gamma}}.$$

Graf $d\sigma/dT_e$ v odvisnosti od energije elektrona kaže sprva rahlo padajočo krivuljo, nato porast do ostrega roba pri T_e max. Ta je Comptonski rob; na osi je desno označena tudi energija Eγ.

Diferencialni presek dσ/dΩ opisuje Klein–Nishinova formula (izpeljava v okviru kvantne elektrodinamike, QED).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{{r_e}^2}{2}\left(\frac{{E_\gamma}'}{E_\gamma}\right)^2\left(\frac{{E_\gamma}'}{E_\gamma} + \frac{E_\gamma}{{E_\gamma}'} - \sin^2\vartheta\right).$$

Za integralni presek velja (integriran po prostorskem kotu)

$$\sigma \propto \frac{1}{E_\gamma}\,\text{na elektron}, \sigma \propto \frac{Z_A}{E_\gamma}\,\text{na atom}.$$

Tvorba parov

Tvorba parov pri sipanju na jedrih. Skica prikazuje vpadni foton γ, nastanek elektrona e^- in pozitrona e^+ ter povezavo z jedrom Z.

Pri visokih energijah je presek približno konstanten:

$$E_\gamma \gg m_e c^2, \sigma_p \propto Z^2.$$

Skupni prikaz presekov

Na zadnji strani je priložen logaritemski graf preseka na atom v odvisnosti od energije fotona za ogljik in svinec. Pri nizkih energijah so označeni robovi L in rob K.

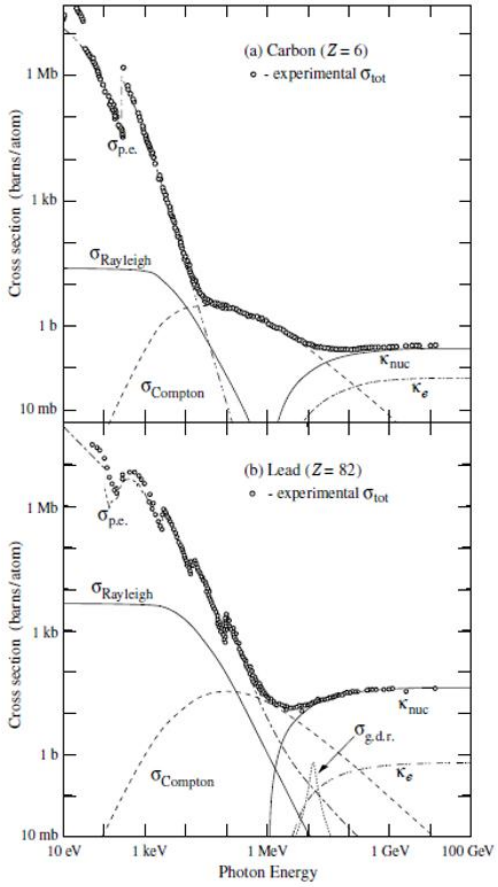


Figure 27.14: Photon total cross sections as a function of energy in carbon and lead, showing the contributions of different processes:

$\sigma_{\text{p.e.}}$ = Atomic photoelectric effect (electron ejection, photon absorption)

σ_{Rayleigh} = Rayleigh (coherent) scattering–atom neither ionized nor excited

σ_{Compton} = Incoherent scattering (Compton scattering off an electron)

κ_{nuc} = Pair production, nuclear field

κ_e = Pair production, electron field

$\sigma_{\text{g.d.r.}}$ = Photonuclear interactions, most notably the Giant Dipole Resonance [46]. In these interactions, the target nucleus is broken up.