

JEDRSKA FIZIKA

Mitja Rosina

Ljubljana, maj 2005

PREGOVOR

Skripta JEDRSKA FIZIKA so nastajala od leta 1963 dalje kot zapis predavanj za slušatelje 4. letnika. Predavanja so dala splošno izobrazbo o dogajanjih in problemih pri atomskem jedru, obenem pa so služila kot uvodno predavanje tistim, ki so se posvetili fiziki jedra in osnovnih delcev. Pri izbiri snovi je odločala zlasti nazornost pojavov in njihova pedagoška pripravnost za opis osnovnih konceptov. Poseben pomen je imela (in še vedno ima) jedrska fizika kot zgled za razumevanje in uporabo kvantne mehanike, zlasti problema več teles. Ker je bila svojčas kvantna mehanika šele v 4. letniku, so nekatere izpeljave napol klasične (z recepti za kvantizacijo), kar pa nudi pogled z malo drugega zornega kota. Nekaj kvantnomehanskih izpeljav pa je dodanih, da so poglavja bolj samostojna.

Skripta so doživela tri izdaje (1969, 1977 in 1981). Sklenil sem, da jih popolnoma obnovim kot moderen učbenik jedrske fizike. Ali se res izplača pisati učbenik v slovenščini? Da. Tuji učbeniki so zelo obširni, dolgovezni, enciklopedični. Domači učbenik pa si lahko privoščimo kratek in koncizen. Vseboval naj bi le nekaj izbranih konceptov, pojavov in zgledov; kdor potrebuje podrobnosti, jih bo pa poiskal drugje. Izpustil bom nekatera manj aktualna poglavja in obdržal tista, ki bistrijo možgane. Učbenik bo kratek tudi zato, ker je danes odmerjenih jedrski fiziki le malo ur predavanj, za „kuštranje možganov“ dandanes odlično služi tudi hadronska fizika in fizika osnovnih delcev. Razumevanje *jedrske fizike* pa je važno tudi iz praktičnih razlogov, saj na lastnostih jeder in pojavih v jedrih temeljijo mnoga moderna fizikalna merjenja od atomske fizike do medicine in se spodobi, da fizik *razume*, kaj mu nudi narava in tehnika.

Delo bo gotovo v prihodnjem šolskem letu. Zato sem kot vmesno etapo obnovil obstoječa skripta, le nekoliko sem jih izpopolnil. V tej obliki bodo na voljo študentom na mreži FMF in kot CD diski. Morda bodo prišle nekatere podrobne izpeljave in razlage prav tudi kot DODATEK k bodočemu učbeniku. Obdržal sem preproste skice, ki jih je nekoč narisal Davorin Tomažič, ljubim preprostost. Martinu Zemljiču pa se zahvaljujem za prvo iteracijo obdelave v TEXu.

Najbrž se je pri predelavi besedila prikradlo kar nekaj napak. Hvaležen bom za opozorila.

Ljubljana, maj 2005

Mitja Rosina

Kazalo

1	Uvod	5
1.1	Osnovni pojmi; pregled snovi; količine in enote	5
2	Osnove jedrske fizike	9
2.1	Statične količine jedra	9
2.1.1	Naboj	9
2.1.2	Masa jedra	10
2.1.3	Velikost jedra	13
2.1.4	Lastnosti vrtilne količine in magnetnega dipolnega momenta	18
2.1.5	Merjenje vrtilne količine	23
2.1.6	Merjenje magnetnega dipolnega momenta	27
2.1.7	Električni kvadrupolni moment	32
2.1.8	Parnost	37
2.2	Dinamične količine jedra	40
2.2.1	Razpadna in reakcijska energija	40
2.2.2	Razpadni čas	42
2.2.3	Reakcijski presek	47
2.3	Sestavni deli jedra	49
2.3.1	Sestavni deli jedra	49
2.4	Jedrska sila	52
2.4.1	Vezavna energija devterona	52
2.4.2	Sipanje nevtronov na protonih pri nizkih energijah	56
2.4.3	Merjenje sipalnih dolžin s koherentnim sipanjem	63
2.4.4	Podatki o obliki jedrskega potenciala in o zamenjalnih silah iz sipanja pri visokih energijah	68
2.4.5	Sipanje protonov na protonih	74
2.4.6	Enakost jedrskih sil za oba nukleona; izobarni spin	78
2.4.7	Magnetni dipolni moment in električni kvadrupolni moment devterona — necentralne sile	84

3	Zgradba jedra	89
3.1	Osnovno stanje – model jedrske snovi	89
3.1.1	Sistematika vezavnih energij	89
3.1.2	Kapljični model — fenomenološki opis	94
3.1.3	Kapljični model — mikroskopski opis	98
3.2	Osnovno stanje — lupinski model	104
3.2.1	Lupinske lastnosti jedra	104
3.2.2	Oblika povprečnega jedrskega potenciala in enodelčnih valovnih funkcij	107
3.2.3	Valovna funkcija jedra; pojem konfiguracije	110
3.2.4	Hartree-Fockova metoda za določitev osnovnega stanja	114
3.2.5	Parjenje v jedru	118
3.2.6	Deformacija jedra	122
3.3	Vzbujena stanja	125
3.3.1	Vrste vzbujenih stanj	125
3.3.2	Enodelčna vzbujena stanja	127
3.3.3	Rotacija	130
3.3.4	Vibracija	136
4	JEDRSKI RAZPADI IN REAKCIJE	141
4.1	Razpad alfa	141
4.1.1	Prepustnost elektrostatske ograje	141
4.1.2	Razpad alfa	144
4.2	Razcep	148
4.2.1	Razcep	148
4.2.2	Princip reaktorja	153
4.3	Razpad gama	162
4.3.1	Multipolnost prehodov; matrični elementi; izbirna prav- ila	162
4.3.2	Eksperimentalno določanje multipolnosti	165
4.4	Razpad beta	172
4.4.1	Nevtrino	172
4.4.2	Oblika spektra; reducirani razpolovni čas	179
4.4.3	Lastnosti šibke sile; matrični elementi	183
4.4.4	Multipolni razvoj in izbirna pravila	189
4.4.5	Vijačnost nevtrina; neohranitev parnosti	193
4.5	Jedrske reakcije	200
4.5.1	Vrste reakcij	200
4.5.2	Razlika med direktnimi in resonančnimi reakcijami	203
4.5.3	Splošna formula za reakcijski presek	205
4.5.4	Resonančne reakcije; Breit-Wignerjeva formula	208

5	Dodatki	213
5.1	ZBIRKA NALOG	213
5.1.1	Statične količine	213
5.1.2	Dinamične količine	215
5.1.3	Jedrske sile	216
5.1.4	Kapljični model; masna formula	219
5.1.5	Model plinskega mehurčka	220
5.1.6	Lupinski model	220
5.1.7	Kolektivni model	222
5.1.8	Razpad alfa	223
5.1.9	Razcep	223
5.1.10	Razpad gama	224
5.1.11	Razpad beta	225
5.1.12	Jedrske reakcije	227

Poglavje 1

Uvod

1.1 Osnovni pojmi; pregled snovi; količine in enote

V uvodu bomo ponovili nekaj osnovnih pojmov, ki jih poznate že iz fizike II. Obenem si bomo ogledali program, ki nas čaka pri jedrski fiziki. Zaenkrat vam bom naštel vse kot gotova dejstva; pot, po kateri so do teh dejstev prišli, pa boste videli pozneje, sproti pri vsakem poglavju.

Jedra so sestavljena iz protonov in nevtronov, ki jih držijo skupaj jedrske sile. Jedro je definirano, če povemo število protonov Z in število nevtronov N . Protone in nevtrone imenujemo s skupnim imenom nukleone; celotno število nukleonov zaznamujemo z $A = Z + N$. Običajno označimo jedro s kemijskim simbolom; Z zapišemo kot levi spodnji indeks; A kot levi zgornji indeks. Ker pomenita Z in kemijski simbol isto, Z često izpustimo. Desni spodnji indeks je za kemike (število atomov v molekuli), desno zgoraj pa lahko označimo, če je atom ioniziran (z znaki $+$ ali $-$) ali če je jedro v vzbujenem stanju (z zvezdico $*$).

Vsa jedra z istim Z imenujemo izotope; vsa jedra z istim A pa imenujemo izobare.

Naša prva naloga bo, da ugotovimo, katere količine se dajo pri jedru izmeriti. Jedro ima smisel gledati le iz zornega kota merljivih količin. Če se med meritvijo neke količine jedro ne spremeni, jo imenujemo *statična količina*. Ker vplivajo statične količine jedra vsaj nekoliko na lastnosti atoma, jih lahko izmerimo s študijem atoma (npr. optičnega spektra), ne da bi posegli v jedro.

Ena od njih je **naboj**. Ker imajo protoni pozitivni osnovni naboj, nevtroni so pa nevtralni, je naboj jedra Ze_0 .

Kot enoto, v kateri povemo maso jedra, so izbrali $1/12$ mase ogljika ^{12}C .

Ker sta masi protona in nevtrona približno 1 masna enota ($1m_0$), je masa jedra približno $m \approx Am_0$. Od celega števila se razlikuje kvečjemu za nekaj tisočink masne enote. Natančna vrednost nas zanima zato, ker pri jedrskih razpadih in reakcijah iz spremembe mase lahko izračunamo sproščeno energijo Q . Po Einsteinovi relativnostni teoriji se namreč sprosti toliko energije, za kolikor se zmanjša masa: $Q = \Delta mc^2$. Zato je včasih ugodneje izraziti maso jeder kar v energijski skali ($1m_0c^2 = 931 \text{ MeV}$). Natančna vrednost mase nam pove tudi vezavno energijo jedra: $W_{\text{vez}} = (m_j - Zm_p - Nm_n)c^2$; to je energija, ki se sprosti, ko jedro sestavimo iz njegovih sestavnih delov in ki je po definiciji negativna.

V tabelah pravzaprav ni podana masa golega jedra, ampak nevtralnega atoma, ker je ta bliže podatkom iz meritev (običajno "tehtamo" enkrat ionizirane atome, ne pa gola jedra). Mase delcev in golih jeder bomo pisali z malim m , mase nevtralnih atomov (tabelirane) pa z velikim M : $M = m + Zm_e + W_e/c^2$. Na maso elektronov ($m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$) ne smemo pozabiti, medtem ko vezavno energijo elektronov W_e v okviru natančnosti masnih meritev skoraj vedno lahko zanemarimo:

H: $W_e = 13 \text{ eV} \dots W_e/c^2 = 1.5 \cdot 10^{-8} m_0$, masa pa je znana na 6 decimalk;
 U: $10^5 \text{ eV} \dots 10^{-4} m_0$, masa pa je znana na 4 decimalke.

Velikost jedra. Polmer jedra je desettisočkrat do stotisočkrat manjši od polmera atoma. Za naše predstave je torej skoraj ves prostor v atomu prazen (oz. ga izpolnjuje oblak elektronov). Meritve so pokazale, da je prostornina jedra skoraj natančno sorazmerna s številom nukleonov; kot da bi bilo jedro konglomerat togih kroglic ali kaplja nestisljive tekočine: $V \propto A$, torej je $r \propto A^{1/3}$.

Vrtilna količina je v kvantni mehaniki celoštevilčni ali polovični mnogokratnik Planckove konstante \hbar . Nukleoni imajo spin $\frac{1}{2}$ in celoštevilčno tirno vrtilno količino. Zato je rezultanta (vrtilna količina celega jedra) pri jedrih s sodim A celoštevilčni, pri jedrih z lihim številom nukleonov A pa polovični mnogokratnik \hbar .

Magnetni dipolni moment. Tirna vrtilna količina protonov nakazuje, da krožijo. Imamo torej tokovne zanke in zato tudi magnetni moment (klasično $\mu = IS$). Poleg tega imajo nukleoni še dodatni magnetni moment zaradi spina — kot permanentni magnetki. Magnetni moment jedra je dosti manjši od elektronskega. Elektronski je reda velikosti Bohrovega magnetona ($\mu_B = e_0 \hbar / 2m_e$, pri jedrih pa je reda velikosti jedrskega magnetona $\mu_j = e_0 \hbar / 2m_p = \mu_B / 1830$).

Električni kvadrupolni moment q pove nekaj o obliki jedra, o tem ali je jedro okroglo ali deformirano v elipsoid. Lahko bi uvedli še višje multipole in bi zvedeli še več o obliki jedra, toda višjih multipolov še ne moremo meriti.

Statične količine delimo na dva tipa: konstante gibanja in povprečne količine. Konstante gibanja ali dobra kvantna števila (npr. naboj, mirovalna energija oz. masa, vrtilna količina) so *lastne vrednosti* operatorjev, ki karakterizirajo lastna stanja jedra. Povprečne količine (npr. radij, magnetni dipolni moment, električni kvadrupolni moment) pa so samo *pričakovane vrednosti* ustreznih operatorjev. Te količine se klasično spreminjajo s časom; klasičnemu časovnemu povprečju nekako ustreza v kvantni mehaniki pričakovana vrednost.

Poleg statičnih količin nas zanimajo tudi *dinamične količine*, s katerimi karakteriziramo razpade in reakcije. Jedra se namreč lahko spremenijo, bodisi da razpadejo sama od sebe bodisi po obstreljevanju z drugimi jedri. Če pogledamo v tabelo jeder, vidimo, da je le malo jeder stabilnih, večina je nestabilnih (radioaktivnih).

Poleg tega moramo upoštevati, da so jedra lahko v osnovnem stanju ali pa v *vzbujenih stanjih*. Vzbujeno stanje definiramo z energijo; povemo, za koliko ima višjo energijo od osnovnega stanja. Vsa vzbujena stanja so nestabilna in hitro razpadejo tako, da oddajo odvišno energijo v obliki fotona (*žarka gama*). Lahko pa tudi razpadejo drugače, s tem da oddajo kak delec. Dolgoživa vzbujena stanja (z razpolovnim časom nekaj sekund do nekaj let) imenujemo izomere k osnovnemu stanju. Kadar ne bom posebej poudaril, da imamo opravka z vzbujenim stanjem, bo vedno mišljeno osnovno stanje.

Običajni razpadi so poleg razpada gama še *razpad alfa*, pri katerem odleti delec alfa (helijevo jedro). Pri *razpadu beta* se izvrši sprememba nukleona: nevtron se spremeni v proton ali obratno. Odvišno energijo in naboj odnese elektron in antinevtrino (oziroma pozitron in nevtrino). Namesto da izleti pozitron, lahko jedro ujame tudi bližnji elektron iz atoma (ujetje elektrona). Pri *razcepu* pa se jedro razcepi približno na dve polovici in še nekaj manjših delov. Razcep povzročijo odbojne elektrostatske sile med protoni, ki so pri najtežjih jedrih že dovolj močne, da jedro raztrgajo. Poleg spontanega razpada lahko opazujemo jedrske spremembe tudi z *jedrskimi reakcijami*, ki jih sprožimo z obstreljevanjem jeder z lahkimi delci ali jedri.

Pri razpadih in reakcijah nas zanimata dve količini: *razpadna (oz. reakcijska) energija Q* ter *verjetnost za proces*. Verjetnost za razpad izrazimo z *razpolovnim časom*, verjetnost za reakcijo pa z *reakcijskim presekom*.

Ko bomo končali z revijo statičnih in dinamičnih količin jedra, se bomo prepričali, da so sestavni deli jedra res protoni in nevtroni in spoznali bomo sile med njimi. S tem znanjem se bomo lahko lotili teoretične razlage *zgradbe jeder* ter mehanizma *jedrskih procesov*.

Na koncu uvodnega predavanja si napravimo še pregled tipičnih dimenzij

in enot v jedrski fiziki. Če bomo uporabljali prikladne enote in spretno pisali formule, nam bodo zadoščale naslednje osnovne konstante:

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

$$e_0^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137, \text{ ali } e_0^2/4\pi\epsilon_0 = 1.44 \text{ MeV fm}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ fm/s}$$

$$m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

$$m_0 c^2 \equiv 1u = 931 \text{ MeV (masna enota).}$$

Tipične **dolžine** so reda velikosti $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ (fermi ali femtometer), ki ga bomo izbrali za enoto.

Za enoto **časa** bomo kar obdržali sekundo, ker imamo razpolovne čase od 10^{-23} s pa tja do 10^{20} let (meja merljivosti). Tipičen najkrajši čas, da se v jedru kaj zgodi, je čas preleta $t = 2r/v = 3 \text{ fm}/3 \cdot 10^{23} \text{ fm s}^{-1} = 10^{-23} \text{ s}$, če vzamemo $v = c$, $2r = 3 \text{ fm}$. Torej so časi npr. 10^{-16} s dolgi s stališča jedra.

Za enoto **energije** bomo vzeli MeV, ker je to tipična energija za jedro.

Masa: mc^2 v MeV ali masa v masnih enotah m_0 .

Gibalna količina: pc v MeV, da ne rabimo novih enot, saj lahko lepo izrazimo npr. $W = (pc)^2/2mc^2$ (vse v MeV!).

Hitrost: v/c . $W = \frac{1}{2}mc^2(v/c)^2(1 + \frac{3}{4}(v/c)^2 + \dots)$.

Relativistični popravek znaša pri $v/c = 0,1$ ($W = 5 \text{ MeV}$) manj kot 1% pri $v/c = 0,2$ ($W = 20 \text{ MeV}$) pa kake 3%. Ker so tipične kinetične energije nukleonov v jedru okrog 20 MeV, smemo relativistični popravek ravno še zanemariti in računati *nerelativistično*.

Vrtilno količino Γ izražamo kot mnogokratnik naravne enote \hbar .

Naboj e izražamo kot mnogokratnik naravne enote e_0 (osnovni naboj).

De Brogliejeva valovna dolžina nukleonov $\lambda = \hbar/mv = \hbar c/mc^2(v/c) \approx 197 \text{ MeV fm}/938 \text{ MeV} \cdot 0,2 = 1,0 \text{ fm}$ je istega reda velikosti kot radij jedra. Ta kriterij nam pove, da moramo računati *kvantnomehnično*.

Poglavje 2

Osnove jedrske fizike

2.1 Statične količine jedra

2.1.1 Naboj

Naboj jedra nas zanima, ker nam pove število protonov. Ker naboj jedra od vseh jedrskih količin zdaleč najbolj vpliva na lastnosti atoma, ga zlahka razberemo iz lastnosti atoma.

Prvi način je, da *preštejemo elektrone*. V nevtralnem atomu je namreč enako negativnih elektronov, kot je pozitivni naboj jedra. Pri zelo lahkih atomih lahko elektrone preštejemo direktno, s tem da ugotovimo, kolikokrat se da atom maksimalno ionizirati. Pri težjih atomih pa sklepamo na število elektronov z uporabo atomskega modela (npr. lupinskega modela), ki nam da dobro ujemanje izračunanih optičnih spektrov in drugih lastnosti atoma z eksperimentom. Izkaže se, da je vrstno število v Mendelejevem periodnem sistemu ravno enako številu elektronov. Zato imenujemo naboj jedra Z kar vrstno število.

Drugi način je, da izmerimo *elektrostatsko polje* v bližini jedra, kar nam pove naboj „točkastega izvora“. Kot sondo uporabimo elektron v najnižji lupini (K). Izmerjeni rob karakterističnega absorpcijskega rentgenskega spektra nam dá energijo elektrona K, ki je po Balmerjevi formuli enaka $W_K = -\frac{1}{2}m_e c^2 \cdot (Z/137)^2$. Ta način ima zgodovinski pomen (Moseley), ker so z njim neodvisno preverili, da pomeni vrstno število v periodnem sistemu elementov res naboj jedra (in s tem število elektronov).

Tretji način je *dinamičen*. Izkoristimo dejstvo, da se naboj ohranja. Vse količine, za katere velja ohranitveni zakon, lahko merimo tudi dinamično. Če pri razpadu $A \rightarrow B + b$ poznamo naboja nastalih delcev B in b, lahko iz ohranitve naboja sklepamo na naboj nestabilnega jedra A. Tak dinamični način določanja statičnih količin je važen zlasti, kadar je jedro A tako kratkoživo,

da za statične metode nimamo dovolj časa. Večino nestabilnih jeder proizvajamo z reakcijami in nam lahko tudi ohranitev naboja pri reakciji služi za določitev naboja nastalega jedra, če poznamo vse ostale naboje.

2.1.2 Masa jedra

Masa jedra da dva važna podatka. Masa zaokrožena na celoštevilčni mnogokratnik masne enote (= masno število A) pove število nukleonov. Precizna vrednost mase pa pove vezavno energijo jedra:

$$W_{\text{vez}} = (m - Zm_p - Nm_n)c^2.$$

Zato razlikujemo dve vrsti masnih spektroskopov.

Prvi imajo slabo ločljivost, a dober izkoristek. Služijo za določitev A (identifikacijo jeder, kar je važno zlasti za produkte reakcij);

- določitev pogostosti izotopov v dani mešanici;
- separacijo izotopov (v nekaterih posebnih primerih konkurirajo difuzijskim in kemičnim metodam);
- razklonitev ionskega curka za izbiro določenih ionov.

V teh primerih zadošča ločljivost $\pm \frac{1}{2}m_0$, tako da zanesljivo določimo A , ne pa tudi M .

S precizijskimi masnimi spektroskopi pa lahko merimo M z natančnostjo 10^{-6} . Za takšno natančnost seveda potrebujemo primerjalne meritve. Izmerimo samo razlike mas med ioni, ki imajo vsi isto masno število Σ_A (masni multiplieti). Zato potrebujemo primerjalni standard za vsak A . To dosežemo tako: za $A = 12$, že imamo primerjalni standard — ^{12}C ima po definiciji $M = 12,000000 m_0$. Nato „umerimo“ devterij z meritvijo masnega dubleta $^2\text{H}_3^+ \dots ^{12}\text{C}^{++}$; dvakrat nabiti C se namreč v električnem in magnetnem polju enako odkloni kot enkrat nabiti ion s pol manjšo maso (molekula $^2\text{H}_3$). Nato umerimo še vodik z masnim dubletom $^1\text{H}_2^+ \dots ^2\text{H}^+$. Sedaj pa lahko vzamemo za primerjalne standarde ogljikovodike, saj lahko sestavimo iz ogljika in vodika molekule s poljubnim A in lahko pokrijemo z njimi cel periodni sistem. CH_4^+ uporabimo npr. za meritve $^{16}\text{O}^+$ ali $^{32}\text{S}^{++}$, s težkimi ogljikovodiki pa pridemo do masnega števila najtežjih jeder. Iz tega je razvidno, zakaj so definirali masno enoto z ogljikom.

Statično merimo atomsko maso z odklonom ionskega curka v električnem in magnetnem polju (*masni spektroskop*). Pri dinamični meritvi pa izmerimo kinetično energijo delcev, ki nastanejo pri razpadu ali reakciji. Po Einsteinovi relativnostni teoriji se namreč vsota $mc^2 + W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$ ohranja in lahko z

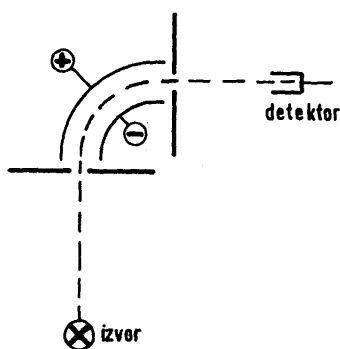
ohranitvenim zakonom določimo eno nastopajočo maso, če poznamo ostale mase. Pri razpadu $A \rightarrow B + b$ je npr. $M_A = M_B + M_b + Q/c^2$, kjer je Q sproščena kinetična energija. Dinamična meritev je pomembna zato, ker z njo lahko določimo tudi mase nestabilnih (zlasti kratkoživih) jedr. Za mnoga jedra so izmerili maso na oba načina. Ujemanje je odlično, kar prepričljivo potrjuje Einsteinovo relativnostno teorijo.

Opis masnega spektroskopa

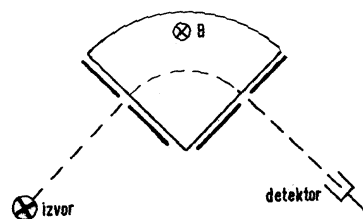
Ionski izvor. Snov, za katero želimo izmeriti atomsko maso, moramo dobiti v obliki ionskega curka. Ioniziramo jo lahko s prevajanjem skozi plin (iskra ali lok), pri čemer je merjenec bodisi v plinu bodisi na elektrodi. Drug način je ionizacija z visokofrekventnim poljem ali pa streljamo iz vroče katode elektrone v plin. Dobljeni ioni se precej razlikujejo po energiji zaradi termičnega gibanja, zaradi kinetične energije pridobljene pri trkih z elektroni in zaradi električnega polja v samem izvoru (ioni, ki nastanejo na mestu z višjim potencialom imajo višjo energijo). Ker pa želimo čimbolj monoenergetske ione, jih pospešimo z napetostjo več sto ali več tisoč voltov, tako da so začetne energijske razlike majhne proti pridobljeni energiji $n e_0 U_0$. Z n označimo, kolikokrat je ion ioniziran, U_0 pa je pospeševalna napetost.

Odklon v električnem polju:

Pripraven je valjast kondenzator. Skozi režo pridejo le ioni s pravo energijo. Masa \times centripetalni pospešek = elektrostatska sila:



Slika 2.1: Odklon ionskega curka v električnem polju



Slika 2.2: Odklon ionskega curka v magnetnem polju

$$mv^2/r = ne_0E$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ne_0Er$$

Na desni strani enačbe so izmerjene količine. Torej merimo z odklonom v električnem polju *energijo* delca. Da dobimo maso, moramo še neodvisno izmeriti v ali p . Podatek U_0 nam nič ne pomaga, ker tudi pove energijo.

Odklon v magnetnem polju Pripraven je segment s skoraj homogenim poljem.

$$\begin{aligned}mv^2/r &= ne_0Bv \\mv &= ne_0Br\end{aligned}$$

Z odklonom v magnetnem polju merimo torej *gibalno količino*. S kombinacijo električnega in magnetnega polja izmerimo maso.

Imamo dve možnosti: lahko spreminjamo polje (*masni spektrometer*) ali pa r (tako da postavimo namesto izhodne reže fotografsko ploščo — masni spektroskop). Skupno ime za oba je masni spektroskop. Za precizijske (primerjalne) meritve je boljši drugi.

Masna disperzija $\frac{dx}{dm/x}$ pove, za koliko sta razmaknjeni sledi dveh ionov, ki se razlikujeta po masi za dm . *Ločljivost* $\Delta m/m = \Delta x/\text{disperzija}$ pa pove, za koliko se smeta razlikovati dve masi, da ju še ločimo. Za dobro ločljivost moramo paziti pri konstrukciji masnega spektroskopa, da bo sled Δx čim ostrejša in disperzija čim večja. Ostro sled dobimo z dobro fokusacijo po smereh in po hitrostih. Ionski curek je namreč vedno rahlo divergenten in ni čisto monoenergetski.

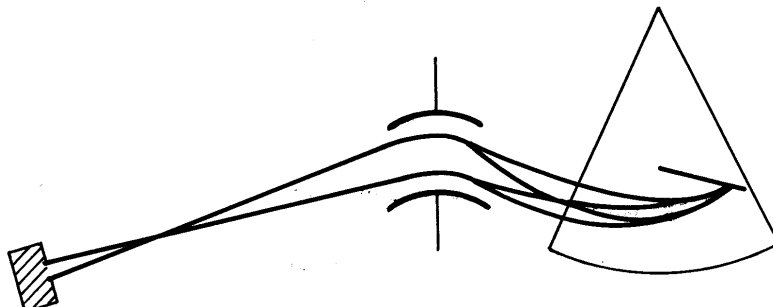
Fokusacijo po smereh dosežemo s primernim oblikovanjem električnega in magnetnega polja (*ionska optika*), ki „Preslika“ izvor v detektor. Fokusacijo po hitrostih pa nam da primerna kombinacija električnega in magnetnega polja (podobno kot napravimo ahromatske leče s kombinacijo raznih vrst stekel). To je vpeljal Aston, pionir precizne masne spektroskopije. V električnem polju je odklon odvisen od energije, $x_e = x_e(\frac{1}{2}mv^2)$, v magnetnem polju pa od gibalne količine, $x_m = x_m(mv)$. Če se m in v malo razlikujeta od srednje vrednosti, se odklona spremenita za:

$$dx_e = a d(\frac{1}{2}mv^2)/\frac{1}{2}mv^2 = a dm/m + 2a dv/v$$

$$dx_m = b d(mv)/mv = b dm/m + b dv/v$$

$$\text{skupni odklon } dx = (a + b)dm/m + (2a + b)dv/v$$

Če izberemo $b = -2a$, nam masna disperzija ostane, hitrosti se pa v prvem približku sfokusirajo. Na tem principu je zgrajen npr. Mattauchov masni spektroskop.

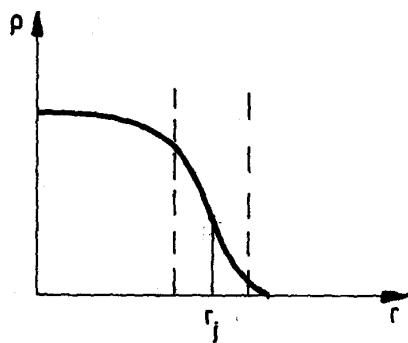


Slika 2.3: Princip Mattauchovega masnega spektrografa

2.1.3 Velikost jedra

Zanima nas porazdelitev nukleonov v jedru. Opišemo jo kot gostoto snovi v odvisnosti od razdalje od središča. Izkaže se, da je gostota snovi v notranjosti jedra skoraj konstantna, potem pa v ozkem intervalu (~ 1 fm) pade na nič. Jedro si torej smemo predstavljati kot skoraj homogeno kroglico z neostro površino.

Pri zahtevnejših meritvah izmerimo celo porazdelitev $\rho(r)$, pri manj zahtevnih meritvah pa se zadovoljimo s povprečnim radijem te porazdelitve. Ker je površina jedra razmeroma ostra, pade povprečni radij nekje v sredo površinske plasti in ga imenujemo „radij jedra“.



Slika 2.4: Porazdelitev snovi v jedru

Prvi je radij jedra izmeril Rutherford s sipanjem delcev alfa. Opazil je, da se večina delcev alfa siplje kot na elektrostatskem polju točkastega naboja.

Maloštevilni, ki so prodrli do jedra, pa so se močneje odklonili. Iz njihovega deleža je sklepal na radij jedra. Ugotovil je, da je radij jedra nekaj fm in da volumen jedra narašča linearno s številom nukleonov.

Poznejše meritve so potrdile, da je $r_j = r_0 A^{1/3}$, kjer je $r_0 = 1,2$ fm. Volumen jedra je torej sorazmeren s številom nukleonov, gostota je pri vseh jedrih ista. Radij jedra lahko merimo z naslednjimi metodami:

- a) **Sipanje nevtronov.** Nevtroni morajo imeti dovolj energije, da je njihova de Brogliejeva valovna dolžina primerno kratka. Ločljivost vsakega „mikroskopa“ je namreč odvisna od valovne dolžine „svetlobe“, s katero opazujemo. Visoke energije so zaželjene tudi zato, ker je sipanje hitrih nevtronov dosti manj občutljivo na podrobno gibanje nukleonov v jedru. Počasni nevtroni se ujamejo v razna resonančna nihanja, medtem ko vidijo hitri nevtroni jedro kot enakomerno razmazano snov. Previsokih energij pa spet ne smemo vzeti, ker je za prehitre nevtrone jedro preveč prozorno. Optimalno kompromisno področje je okrog 20 MeV.

Če bi bilo jedro „črno“, bi bil absorpcijski presek pri visokih energijah kar enak geometrijskemu: $\sigma = \pi(r_j + r_n)^2$. Dejansko pa moramo upoštevati še prozornost jedra, ki se dá teoretično oceniti. V območju, kjer je jedro precej črno (okrog 20 MeV), ta popravek ni hud in rezultat ni močno odvisen od teoretičnih predpostavk.

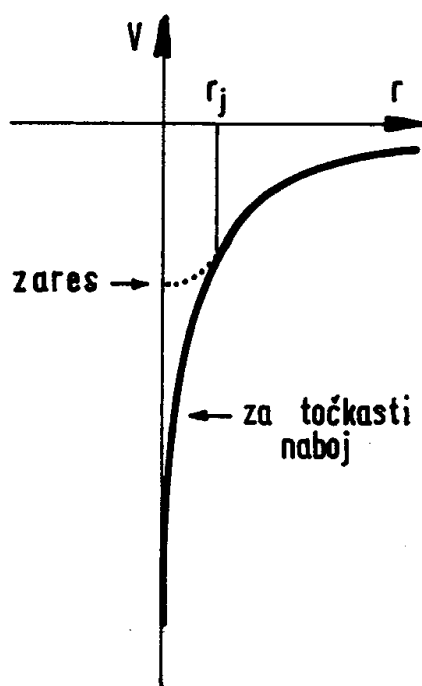
Sipanje nevtronov je ugodnejše kot sipanje protonov ali delcev alfa, ker nas ne moti elektrostatsko polje zunaj jedra. Protoni se namreč večinoma sipljejo na zunanjem elektrostatskem polju. Le malo jih prodre v jedro in nam da informacijo o porazdelitvi snovi v jedru.

- b) **Sipanje elektronov.** Z elektroni z energijo nekaj GeV dosežemo odlično ločljivost (de Brogliejeva valovna dolžina je ~ 1 fm). Edino s to metodo lahko merimo tudi porazdelitev naboja v jedru, vse ostale metode nam dajo le radij jedra.

Ker elektroni ne občutijo jedrskih sil, ne rabimo nobenih predpostavk o jedrskih silah. Z elektroni direktno izmerimo elektrostatsko polje in s tem porazdelitev naboja v jedru. Ker ne rabimo teoretičnih predpostavk, je meritev direktnejša kot pri sipanju nevtronov, kjer je treba ocenjevati prozornost jedra.

Za razliko od nevtronov dajo elektroni le porazdelitev naboja (protonov). Nevtroni pa se sipljejo na vseh nukleonih in dajo radij jedra glede na obojne nukleone. V tem smislu se obe meritvi dopolnjujeta. Radija se le malo razlikujeta, protoni in nevtroni so precej enakomerno pomešani.

- c) **Premik spektralnih črt.** Namesto, da bi streljali na jedro z elektroni visokih energij, lahko opazujemo vezane stacionarne elektrone. Njihove energije so izračunane s predpostavko, da je naboj jedra točkast. Razmazanost naboja znotraj radija jedra prinese majhen popravek, ki je merilo za radij jedra. Ocenimo ta popravek, da bomo videli, v kakšnih okoliščinah je merljiv.



Slika 2.5: Elektrostatski potencial jedra

Elektron $1s$ ima po Bohrovi formuli energijo $W = -\frac{1}{2}Ze_0^2/4\pi\epsilon_0r_{el}$, kjer je $r_{el} = r_B/Z$ (Bohrov radij $r_B = 50\,000$ fm). Pri tem je r_{el} povprečni radij elektronskega oblaka, gostota elektronov na mestu jedra pa je reda velikosti $3/4\pi r_{el}^3$. Zaradi razmazanega naboja elektrostatski potencial nima singularnosti v izhodišču, temveč se v jedru gladko zaokroži. Je manj negativen. Prizadeta je le potencialna energija tistega dela elektronskega oblaka, ki je znotraj jedra. Ocenimo popravek:

$$\Delta W \cong \rho_{el} \int_0^{r_j} [-Ze_0/4\pi\epsilon_0r_j + Ze_0/4\pi\epsilon_0r] 4\pi r^2 dr$$

$$\cong -(3/4\pi r_{el}^3) \cdot 2W(r_{el}/r_j) \cdot r_j^3 \int_0^1 (1 - 1/x) 4\pi x^2 dx$$

$$\Delta W/W \cong (r_j/r_{el})^2$$

Pri vodiku je popravek z $r_{el} = 50\,000$ fm, $r_j = 1$ fm ... $\Delta W/W \sim 10^{-9}$ nemerljiv!

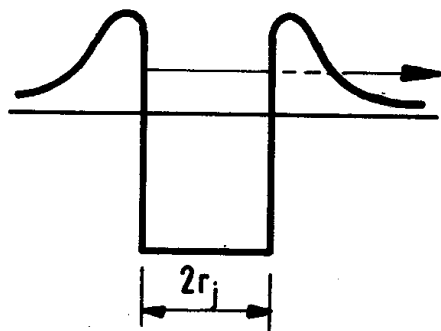
Pri uranu je popravek z $r_{el} = 50\,000$ fm/92 = 550 fm, $r_j = 8$ fm ... $\Delta W/W \sim 10^{-4}$... komaj merljiv.

Ugodnejša sonda kot elektroni so mioni, ki so jih odkrili v kozmičnih žarkih in ki jih lahko pridobivamo s pospeševalniki kot razpadne produkte mezonov pi: $p + n \rightarrow p + p + \pi^-$, $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$.

Mion je zelo podoben elektronu, prav tako jo fermion, ima spin $\frac{1}{2}$, naboj + ali - ter deluje le z elektromagnetnimi silami (ne z jedrskimi). Od elektrona se razlikuje po masi; je 200 krat težji. Zato je njegov radij, če se ujame v atom, 200 krat manjši kot elektronov. Jedru se torej mnogo bolj približa in „otiplje“ njegov naboj. Pri uranu je npr. $r_\mu = r_{el}/200 = 3$ fm in je torej manjši od $r_j = 8$ fm. Pri 100% popravku seveda prejšnja groba ocena z Bohrovo formulo ne velja več, radunati moramo vseskozi v dejanskem zaokroženem elektrostatskem potencialu. Energija miona v atomu je torej pri težkih jedrih občutljivo merilo za radij jedra. Celo pri srednjih jedrih je popravek zlahka merljiv.

Meritev poteka takole. Curek negativnih mionov se ustavi v snovi zaradi ionizacije. Ko se mion ustavi, skače iz višjih v nižje Bohrove tire vse do najnižjega tira. Pri tem seva svetlobo (v rentgenskem območju, do nekaj MeV). Iz značilnih spektralnih črt razberemo energijo miona na raznih Bohrovih tirih in iz nje sklepamo na radij jedra.

- d) **Razpad alfa.** Pri jedrih z radioaktivnostjo alfa ima delec alfa dovolj energije, da izleti iz jedra. Vendar ne izleti takoj, ker ga zadržuje elektrostatska ograja. Znotraj jedra je delec alfa v potencialni jami zaradi privlačnih jedrskih sil. Zunaj pa deluje samo odbojni (pozitivni) elektrostatski potencial, skozi katerega more priti delec alfa le s tunelskim efektom. Verjetnost za tunelski efekt je močno odvisna od debeline ograje; debelino ograje pa določa radij jedra. *Razpolovni čas* pri razpadu alfa je torej merilo za radij jedra. Rezultat je nekoliko odvisen od predpostavk o podrobnem mehanizmu razpada alfa in od razmazanosti jedrske površine.
- e) **Zrcalna jedra.** Jedri, ki imata zamenjano število protonov in nevtronov, imenujemo zrcalni. Primer: ${}^{17}_8\text{O}_9$ in ${}^{17}_9\text{F}_8$. Ker so jedrske sile iste za



Slika 2.6: Elektrostatska ograja pri razpadu alfa

nevrone in protone, taka zamenjava protonov in nevtronov jedrske energije nič ne prizadene. Vezavni energiji zrcalnih jeder se razlikujeta le po elektrostatski energiji. Tisto z večjim Z ima bolj pozitivno elektrostatsko energijo in je zato nekoliko manj vezano.

Meritev: masna razlika zrcalnih jeder (ali energija, ki se sprosti pri razpadu beta iz enega v drugo zrcalno jedro).

Predpostavke: Vezavni energiji se razlikujeta le za elektrostatsko energijo enakomerno nabite kroglice.

Iz tega lahko izračunamo radij jedra.

Pregled rezultatov meritev ($r_j = r_0 A^{1/3}$)

Metoda	območje A	r_0
sipanje nevtronov	7–238	1,4 fm
sipanje elektronov	1–200	1,1
premik spektr. črt elektroni	87–207	1,1
mioni	40–210	1,2
razpad alfa	206–242	1,4
zrcalna jedra	3–41	1,2

Rezultati se razlikujejo do 20%, ker pri različnih metodah radij različno povprečimo in ker potrebujemo pri različnih metodah različne teoretične predpostavke. Te pa prinesejo nekaj negotovosti.

2.1.4 Lastnosti vrtilne količine in magnetnega dipolnega momenta

V klasični mehaniki je vrtilna količina konstanta gibanja, kadar na sistem ne delujejo zunanji navori. Če je magnetno polje elektronov na mestu jedra enako nič, smemo vzeti, da je jedro izoliran sistem in je njegova vrtilna količina konstanta gibanja. (Če pa magnetno polje elektronov ni enako nič, predstavlja majhno motnjo — navor, smer vrtilne količine precesira, njena velikost pa je še vedno konstantna.)

Tudi v kvantni mehaniki je vrtilna količina izoliranega sistema konstanta gibanja, vendar sta točno določeni le velikost vrtilne količine in njena komponenta v izbrani smeri (običajno vzamemo smer z). Konstante gibanja, ki so točno določene, imenujemo dobra kvantna števila. Ostali dve komponenti vrtilne količine (x in y) pa sta po principu nedoločenosti popolnoma nedoločeni in imata pričakovano vrednost nič. Lahko si mislimo, da je smer vrtilne količine razmazana po plašču nekega stožca s simetrijsko osjo v smeri z , tako da je komponenta z vedno ista. Smer vrtilne količine ne precesira po tem stožcu, saj so za precesijo potrebni zunanji navori, temveč je po tem stožcu razmazana. To je čisto kvantnomehanski pojav.

Ker je komponenta vrtilne količine cel ali polovičen mnogokratnik Planckove konstante \hbar navadno izražamo vrtilno količino kar v enoti \hbar .

Za vrtilno količino so v rabi naslednji simboli:

jedro	$\vec{\Gamma} = \vec{I} \hbar$
elektroni v atomu	$\vec{\Gamma} = \vec{J} \hbar$
cel atom	$\vec{\Gamma} = \vec{K} \hbar, \vec{K} = \vec{I} + \vec{J}$
posamezen delec:	
tirna	$\vec{\Gamma} = \vec{l} \hbar$
spinska	$\vec{\Gamma} = \vec{s} \hbar$
celotna	$\vec{\Gamma} = \vec{j} \hbar, \vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$

Vrtilno količino bi morali vseskozi obravnavati kvantno, saj je kvantizirana in kaže izrazite kvantne pojave. Kljub temu bomo računali samo semikvantno. Izpeljave bomo napravili klasično in rezultate v primernem štadiju kvantizirali z „recepti za kvantizacijo”. Tak način obravnave je nazornejši in zahteva manjše znanje kvantne mehanike. Seveda nam bo jamčil za pravilnost rezultatov nekdo drug, ki je dobil iste rezultate s korektno kvantnomehansko izpeljavo.

Recepti za kvantizacijo vrtilne količine

- (i) Velikost vrtilne količine ima lahko samo vrednosti $\sqrt{I(I+1)}\hbar$, kjer je I celo ali polovično število. Često imenujejo količino I kar velikost, kar ni prav. Da ne bo zmede, bomo velikost (brezdimenzijske) vrtilne količine označili z $|\vec{I}|$, količino I pa bomo imenovali maksimalna projekcija ali „velikost“ z narekovaji.
- (ii) Tretja komponenta vrtilne količine $\Gamma_3 = M\hbar$ ima lahko ali samo cele ali samo polovične vrednosti med $-I \leq M \leq I$.
- (iii) Smer vrtilne količine se stalno spreminja po stožcu s kotom $a \cos \vartheta = M/\sqrt{I(I+1)}$, tako da je vrednost komponent I_x in I_y v povprečju nič.
- (iv) Smer kake druge vektorske količine, ki se tiče jedra, se zaradi tega tudi stalno spreminja. Vektor \vec{A} npr. najprej rotira okrog smeri vrtilne količine, nato pa še vse skupaj pleše po zgoraj omenjenem stožcu okrog osi z . Vektor \vec{A} moramo torej najprej povprečiti glede na os \vec{I} potem pa še glede na os z :

$$\begin{aligned}\langle \vec{A} \rangle &= \langle \vec{A}\vec{I} \rangle / |\vec{I}| \\ \langle A_z \rangle &= (\langle \vec{A}\vec{I} \rangle / |\vec{I}|) \cdot M / |\vec{I}| \\ &= \langle \vec{A}\vec{I} \rangle M / I(I+1)\end{aligned}$$

Če je $I = 0$, ni nobene privilegirane osi v sistemu, vse smeri so za \vec{A} enako verjetne in $\langle \vec{A} \rangle$ ter $\langle \vec{I} \rangle$ sta v povprečju nič.

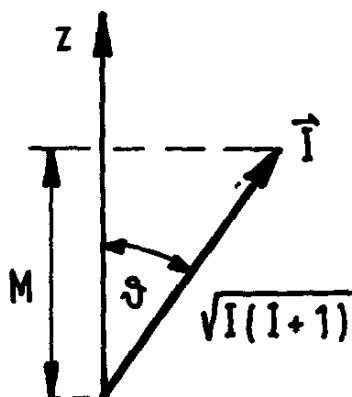
- (v) Vrtilne količine se seštevajo vektorsko: $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$. Pri tem zavzame tretja komponenta rezultante vrednost $M = m_1 + m_2$. „Velikost“ rezultante pa je lahko katerokoli celo (oz. polovično) število med $|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2$, odvisno pač od tega, kako sta med seboj orientirani \vec{l}_1 in \vec{l}_2 .

Magnetni dipolni moment

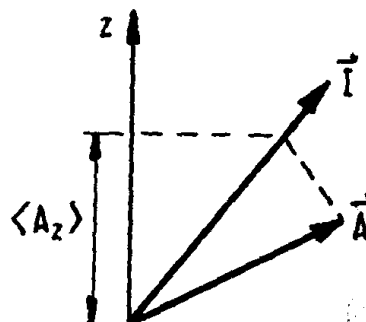
Tudi klasično bi pričakovali, da imajo jedra magnetni moment. Vrtilna količina jedra namreč pomeni, da delci v njem krožijo, krožeč naboj (tokovna zanka) pa ima magnetni moment. Poleg tega prispeva zraven še magnetni moment „permanentnih magnetkov“ — protonov in nevtronov samih.

Magnetni moment krožečega naboja je klasično

$$\mu = JS = \frac{e}{t} \pi r^2 = e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} = \frac{e}{2m} \Gamma$$



Slika 2.7: Velikost in tretja komponenta vrtilne količine I



Slika 2.8: Povprečna vrednost vektorske količine \vec{A}

Kvantno dobimo v bistvu isti rezultat:

$$\vec{\mu} = \frac{e\hbar}{2\tilde{m}} \vec{l}, \quad \mu_z = \frac{e\hbar}{2\tilde{m}} m$$

Po dogovoru pišemo z μ maksimalno projekcijo μ (ta je tudi tabelirana):

$$\mu = \langle \mu_z \rangle_{\max} = \frac{e\hbar}{2\tilde{m}} l, \quad \langle \mu_z \rangle = \mu \cdot m/l.$$

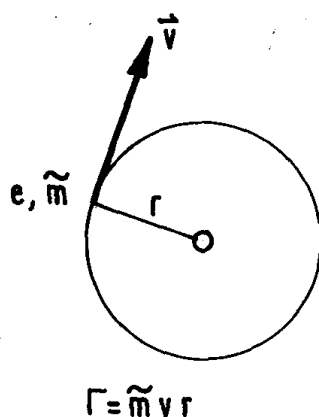
Pripravna enota za magnetni moment je jedrski magneton

$$1\mu_j = e_0\hbar/2m_p = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ eV/T}.$$

Ker je masa protona m_p 1840 krat večja od mase elektrona, je jedrski magneton 1840 krat manjši od Bohrovega magnetona, ki izraža red velikosti magnetnega momenta v atomu. Magnetni moment jedra je torej mnogo manjši kot magnetni moment atoma. Energija jedra v magnetnem polju 100 T (močno lokalno polje v snovi) je komaj $\sim 10^{-6}$ eV. Celo medsebojna magnetna energija nukleonov v jedru je majhna. Za točkasta dipola v razdalji r velja

$$W \sim (\mu_0/4\pi) \cdot \mu_1\mu_2/r^3 \sim e_0^2\hbar^2/4\pi\epsilon_0c^2 \cdot 4m_p^2r_0^3 = 0,01 \text{ MeV}.$$

Morda preseneča, da se za tako majhne energije v jedrski fiziki sploh zanimamo, saj smo vajeni energij več MeV. Razlog je naslednji. Magnetni moment zaradi šibkosti magnetnih sil sicer ni *vzrok*, ki bi vplival na gibanje



Slika 2.9: Magnetni moment krožečega naboja

nukleonov, pač pa je *posledica* gibanja nukleonov in če ga znamo izmeriti, nam nudi informacijo o gibanju nukleonov.

K *tirnemu magnetnemu momentu* prispevajo le nabiti delci — protoni. K *spinskemu magnetnemu momentu* pa prispevajo protoni in nevtroni. Ta prispevek je bolj kompliciran.

Če ima delec preprosto strukturo, tako da porazdelitev naboja sovpada s porazdelitvijo mase, klasično še vedno velja izraz $\vec{\mu} = \frac{e}{2m} \vec{\Gamma}$

Vsak košček snovi prispeva svoj delež k spinu in k magnetnemu momentu. Razmerje prispevkov k μ in k Γ je za vsak košček snovi enako $e/2\tilde{m}$, torej sta tudi celotni $\vec{\mu}$ in $\vec{\Gamma}$ v istem razmerju.

Za relativistične delce s preprosto strukturo pa se izkaže, da velja za spinski magnetni moment $\mu = 2 \cdot \frac{e}{2\tilde{m}} \Gamma$. Delec s spinom $\frac{1}{2}\hbar$ ima namreč tako veliko kotno hitrost, da ga je treba obravnavati relativistično. Elektron s spinom $s = \frac{1}{2}$ ima npr. magnetni moment $1\mu_B$.

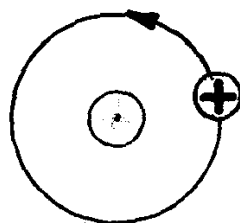
Podobno bi pričakovali, da bo imel proton spinski magnetni moment $1\mu_j$, nevtron pa nič. V resnici pa pokaže eksperiment za proton

$$\begin{aligned} \text{za proton } \mu &= 2,79268\mu_j \\ \text{in za nevtron } \mu &= -1,91354\mu_j. \end{aligned}$$

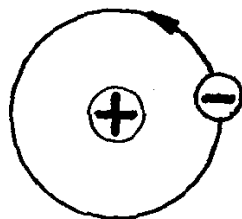
Iz tega sklepamo, da nukleona nimata preproste strukture. Svojčas so pripisali anomalni magnetni moment mezonskemu oblaku okrog nukleona. Pri protonu kroži lahek pozitiven oblak iz mezonov pi okrog teške sredice, ki skoraj miruje. Krožeči oblak predstavlja tokovno zanko, ki veliko prispeva k magnetnemu momentu. Prispevek k giromagnetnemu razmerju $\mu/\Gamma = e'/2m'$ je namreč odvisen od naboja e' in mase m' mezona pi. Ker je mezon

pi zelo lahek, je njegov prispevek velik. Podobno si lahko predstavljamo pri nevtronu, da kroži lahek negativen oblak okrog težke pozitivne sredice. Tako ima lahko tudi nevtron kljub svoji nevtralnosti notranji magnetni moment.

Danes vemo, da je to le delni prispevek k magnetnemu momentu nukleona. Nukleon je zgrajen iz treh kvarkov, ki jim v enostavnem kvarkovem modelu pripišemo tretjino nukleonove mase (prispevka kinetične in potencialne energije k masi nukleona pa se v enostavnem modelu pokrajšata). Zato ima magnetni moment protona velikost „kvarkovega magnetona” $\mu_q = e_0\hbar/2m_q \approx 3\mu_j$, magnetni moment nevtrona pa $\approx -2\mu_j$ (oboje boste z nekaj truda pri seštevanju nabojev in spinov kvarkov preverili pri hadronski fiziki, ki presega program te knjige).



proton



nevtron

Slika 2.10: Razlaga anomalnega magnetnega momenta nukleonov s kroženjem različno nabitih plasti

Magnetni moment celotnega jedra je potem

$$\vec{\mu} = \left(\sum_{i=1}^A g_{li} \vec{l}_i + g_{si} \vec{s}_i \right) \mu_j$$

Pri tem je za proton $g_l = 1$, $g_s = 5,58$
in za nevtron $g_l = 0$, $g_s = -3,82$

Posamezne prispevke moramo vektorsko sešteti po receptih za kvantizacijo. Za ilustracijo si pogledjmo, kolikšen je celotni magnetni moment (tirni+spinski) za en delec. Po receptu (iv) za vektorske količine dobimo:

$$\mu = \langle \mu_z \rangle_{\max} = \langle \vec{\mu} \vec{j} \rangle \cdot j / j(j+1) = (g_l \langle \vec{l} \vec{j} \rangle + g_s \langle \vec{s} \vec{j} \rangle) \mu_j (j+1)$$

Skalarni produkt $\vec{l} \vec{j}$ izračunamo takole:

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{j} - \vec{l} / \text{kvadriramo} \\ |\vec{s}|^2 &= |\vec{j}|^2 = |\vec{l}|^2 - 2\vec{j} \vec{l} \\ 2\vec{j} \vec{l} &= j(j+1)l(l+1) - s(s+1) \end{aligned}$$

Podobno dobimo

$$2\vec{j} \vec{s} = j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)$$

Magnetni moment enega delca je potem

$$\mu = \left\{ g_l [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] + g_s [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \right\} \mu_j / 2(j+1)$$

2.1.5 Merjenje vrtilne količine

a) **Hiperfina struktura** optičnih in mikrovalovnih spektrov

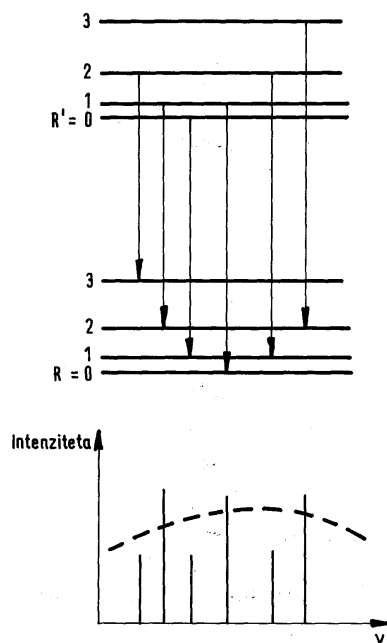
Vrtilna količina jedra \vec{I} ter vrtilna količina elektronov \vec{J} se sklopita v celotno vrtilno količino $\vec{K} = \vec{I} + \vec{J}$. K ima vrednosti med $I+J \geq K \geq |I-J|$, torej ima $\begin{cases} 2I+1 & \text{vrednosti, če je } I < J \\ 2J+1 & \text{vrednosti, če je } I > J. \end{cases}$

Vsa ta stanja se rahlo razlikujejo po energiji zaradi različne medsebojne orientacije elektronskega in jedrskega magnetnega momenta. Zato se optične spektralne črte razcepijo na $2I+1$ (oz. $2J+1$) črt. I torej lahko določimo zgolj s štetjem črt v hiperfinski strukturi.

Pravzaprav se razcepijo na $2I+1$ črt posamezni termi. Pri prehodu sta razcepljena v splošnem začetni in končni term. Kljub temu dobimo običajno enostavno sliko ($2I+1$ črt v spektru), ker je običajno eden od termov zanemarljivo malo razcepljen v primeri z drugim. Pri izbiri spektralnih črt moramo paziti tudi na to, da ima „razcepljeno“ stanje dovolj visok J ($J > I$), da štejemo $2I+1$ in ne $2J+1$.

Spektri dvoatomnih molekul

S to metodo določimo hkrati vrtilno količino jedra in statistiko, ki jo uboga jedro. Pri tem opazujemo intenziteto črt v rotacijskih trakovih trakastih



Slika 2.11: Shema rotacijskega pasu v spektru dvoatomne molekule

spektrov dvoatomnih molekul z dvema enakima atomoma. Pričakovali bi, da se intenziteta od črte do črte počasi (zvezno) spreminja. Izkaže pa se, da intenziteta alternira, vsaka druga črta je močna, vsaka druga pa šibka. Statistika in I jedra opremita namreč črte z različnimi statističnimi utežmi.

Statistika pove, kako se obnaša valovna funkcija, če zamenjamo dva enaka delca med seboj. Za bozone velja $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = +\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$,
za fermione pa $\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = -\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$,

Elektron, proton, nevtron so fermioni, foton pa je bozon. Sistem z lihim številom fermionov se kot celota obnaša kot fermion; sistem s sodim številom fermionov pa se kot celota obnaša kot bozon. Oboje velja le, če sistem ne izmenjuje delcev z drugim sistemom (jedri v molekuli si zares ne izmenjujeta nukleonov). Meritve, ki jih bomo v kratkem razložili, so pokazale, da so jedra s sodim A ... bozoni,
z lihim A ... fermioni.

To je v skladu z našo slikov da je jedro sestavljeno iz A fermionov (nukleonov).

Valovno funkcijo dvoatomne molekule lahko zapišemo kot:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_i) = \psi_e(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \vec{r}_i) \psi_{\text{vib}}(r_{12}) \psi_{\text{rot}}(\Theta, \Phi) \psi_{\vec{I}}(\vec{I}_1, \vec{I}_2)$$

elektronska.vibracijska.rotacijska.orientacijska

Pri tem sta \vec{r}_1 in \vec{r}_2 koordinati jeder, \vec{r}_i so koordinate elektronov, r_{12} je razdalja med jedroma, kota Θ in Φ pa povesta orientacijo molekule (definirajo os, ki veže jedri).

ψ_e je valovna funkcija elektronov v vrtečem se koordinatnem sistemu, ki je vezan na jedri (v katerem jedri mirujeta). $\psi_{\vec{I}}$ pa pove, kako sta sklopljeni vrtilni količini jeder med seboj. Pri tem je \vec{I} rezultanta. Druge lastnosti jedra ne vplivajo na optični spekter in jih zato nismo vključili v valovno funkcijo.

Izvršimo sedaj zamenjavo \vec{r}_1 in \vec{r}_2 !

$$\Psi \begin{cases} \text{se ne spremeni, če je jedro bozon} \\ \text{spremeni predznak, če je jedro fermion} \end{cases}$$

$\psi_e \dots$ Zamenjava jeder pomeni zrcaljenje (inverzijo) internega koordinatnega sistema. Pri inverziji koordinatnega sistema pa elektronska valovna funkcija bodisi ostane nespremenjena (če ima pozitivno parnost) bodisi spremeni predznak (če ima negativno parnost). Zaradi izbirnih pravil imata začetno in končno stanje nasprotno parnost. Vzemimo primer, da ima začetno (vzbujeno) stanje negativno parnost, končno (osnovno) stanje pa pozitivno parnost.

$\psi_{\text{vib}} \dots$ se ne spremeni, ker je odvisna le od razdalje med jedroma, ne pa od njune lege.

$\psi_{\text{rot}} \dots$ ima obliko krogelne funkcije $Y_{R,M}(\Theta, \Phi)$

$$\begin{cases} \text{se ne spremeni, če je rotacijsko kvantno število } R \text{ sodo,} \\ \text{spremeni predznak, če je } R \text{ lih.} \end{cases}$$

To je lastnost krogelnih funkcij glede na inverzijo smeri Θ, Φ , ki jo povzroči zamenjava jeder.

$\psi_{\vec{I}} \dots$ nima več svobode. Njena simetrija je določena s simetrijo ostalih delov valovne funkcije. Oglejmo si situacijo za končno (osnovno) stanje atoma.

$\Psi =$	ψ_e	$\cdot\psi_{\text{vib}}$	$\cdot\psi_{\text{rot}}$	$\cdot\psi_{\vec{I}}$
bozon: +	+	+	sod R : +	\oplus
bozon: +	+	+	lih R : -	\ominus
fermion: -	+	+	sod R : +	\ominus
fermion: -	+	+	lih R : -	\oplus

Če ima končna elektronska valovna funkcija negativno parnost, je seveda situacija obratna.

Da dobimo statistično utež posameznih črt, moramo prešteti, na koliko načinov se vrtilni količini jeder lahko sklopita simetrično in na koliko načinov antisimetrično. Orientacija jeder je definirana, če povemo tretjo komponento vrtilne količine za prvo jedro (M_1) in za drugo jedro (M_2). Vsaka

od njiju lahko zavzame $2I + 1$ vrednosti, skupno imamo torej $(2I + 1)^2$ možnih stanj. Ponazorimo si jih z razpredelnico, v kateri vrstice pomenijo M_1 , stolpci pa M_2 . Stanja na diagonali so simetrična na zamenjavo delcev: $\psi_{M_1}(1)\psi_{M_2=M_1}(2) = \psi_{M_1}(2)\psi_{M_1}(1)$. Stanja izven diagonale pa nimajo permutacijske simetrije, iz stanja levo od diagonale nastane pri zamenjavi zrcalno stanje desno od diagonale:

$\psi_{M_1}(1)\psi_{M_2}(2) \rightarrow \psi_{M_1}(2)\psi_{M_2}(1)$. Lahko pa tvorimo iz njiju dve linearni kombinaciji, simetrično in antisimetrično. Vstavimo v vse kvadratke levo od diagonale simetrično kombinacijo, desno od diagonale pa ustrezno antisimetrično kombinacijo. Sedaj ni več težko prešteti, koliko je enih in drugih. Simetričnih je $(2I + 1) \cdot (2I + 1 + 1)/2$, antisimetričnih pa $(2I + 1) \cdot (2I + 1 - 1)/2$. Razmerje statističnih uteži je torej enako sim : antisim = $(I + 1) : I$. Vrtilno količino jedra torej lahko določimo zgolj iz razmerja intenzitet med močnejšimi ter šibkejšimi črtami.

	$M_2 = I$	$M_2 = I - 1 \dots$	$M_2 = -I + 1$	$M_2 = -I$
$M_1 = I$	+	-	-	-
$M_1 = I - 1$	+	+	-	-
$M_1 = -I + 1$	+	+	+	-
$M_1 = -I$	+	+	+	+

Slika 2.12: Število simetričnih in antisimetričnih stanj pri kombinaciji dveh vrtilnih količin

Če hočemo ugotoviti še, ali je jedro bozon ali fermion, moramo vedeti tudi to, kakšno rotacijsko kvantno število R imajo močnejše oz. šibkejše črte, za kar moramo poznati podrobnosti o stanju atoma. Iz prejšnjih izvajanj je razvidno, kaj pomeni, če imajo močnejše črte sod R ali lih R . Povzetek je podan v naslednji tabeli.

elektroni	parnost = +1	parnost = -1	parnost = +1	parnost = -1
	$R = \text{sod}$	$R = \text{lih}$	$R = \text{sod}$	$R = \text{lih}$
bozon:	$I + 1$	I	I	$I + 1$
fermion:	I	$I + 1$	$I + 1$	I

Jedrski razpadi in reakcije

Vrtilna količina je konstanta gibanja in se ohranja tudi pri razpadih in reakcijah. Torej lahko merimo vrtilno količino tudi dinamično, pri čemer se jedro med meritvijo spremeni. Če izmerimo vrtilne količine vseh razpadnih ali reakcijskih produktov in jih vektorsko seštejemo, lahko zaradi ohranitvenega zakona sklepamo na vrtilno količino začetnega stanja.

Pri razpadu $A \rightarrow B + b$ npr. velja $\vec{I}_A = \vec{I}_B + \vec{I}_b + \vec{I}_{Bb}$. Pri tem je \vec{I}_{Bb} vrtilna količina relativnega gibanja med delcema B in b ter jo lahko določimo s podrobnejšim študijem razpada (npr. z opazovanjem kotnih porazdelitev). Več o tem boste slišali pri poglavjih o jedrskih razpadih in reakcijah. Če poznamo še vrtilni količini (spina) delcev B in b samih, lahko določimo I_A . Zaradi vektorskega seštevanja velikost rezultante ni enolično določena in dobimo za I_A včasih več možnosti. Neustrezne možnosti eliminiramo s primerjavo več neodvisnih procesov.

Dinamično lahko merimo vse tiste statične lastnosti, ki se ohranjajo. Za magnetne momente pa to ne gre. Iz vsote magnetnih momentov končnih delcev ne moremo ničesar sklepati o začetnem magnetnem momentu, saj se pri procesu ni ohranil.

Dinamična metoda se uporablja zlasti za vzbujena in kratkoživa jedra, kjer statične metode niso izvedljive. Kratkoživa jedra namrež ne „počakajo“, da bi izmerili optični spekter. Razpadejo, preden pridelamo dovolj velik vzorec za optično meritev.

2.1.6 Merjenje magnetnega dipolnega momenta

a) Hiperfina struktura

Iz števila hiperfinih črt v optičnih in mikrovalovnih spektrih dobimo vrtilno količino jedra, iz medsebojnega razmaka pa dobimo magnetni moment.

Energijski nivoji so hiperfino razcepljeni za magnetno energijo $W_m = -\vec{\mu}\vec{B}$. Pravzaprav moramo vzeti povprečje tega izraza. Ker se frekvenci, s katero kroži $\vec{\mu}$ okrog \vec{I} ter \vec{B} okrog \vec{J} , razlikujeta za red velikosti, smemo neodvisno povprečiti $\vec{\mu}$ in \vec{B} vsakega zase.

$$\begin{aligned} W_m &= -\langle \vec{\mu}\vec{B} \rangle \approx \langle \vec{\mu} \rangle \langle \vec{B} \rangle \\ \langle \vec{\mu} \rangle &= \mu \vec{I}/I \\ \langle \vec{B} \rangle &= -b \vec{J}/J \\ W_m &= \mu b \cdot \vec{I}\vec{J}/IJ \end{aligned}$$

Vrtilni količini \vec{I} in \vec{J} sta sklopljeni v rezultanto \vec{K} , torej velja $(\vec{I} + \vec{J})^2 = \vec{K}^2$, $I(I + 1) + 2\vec{I}\vec{J} + J(J + 1) = K(K + 1)$.

Magnetna energija je potem enaka

$$W_m = \mu b \{K(K + 1) - I(I + 1) - J(J + 1)\}/2IJ.$$

Posamezne črte hiperfinega multipleta se razlikujejo med seboj po kvantnem btevilu K . Magnetna energija narašča kvadratično s K , torej naraščajo razmiki med zaporednimi črtami linearno. To je karakteristični razpoznavni

znak, ali je izmerjena hiperfina struktura res posledica magnetne sklopitve, ne pa česa drugega.

Žal poznamo atomsko magnetno polje B (parameter b) dobro samo za vodik. Za ostala jedra lahko izračunamo bQ le na 10% natančno in dobimo zato tudi μ le na 10% natančno.

b) Odklon v nehomogenem magnetnem polju

To je v bistvu Stern-Gerlachov poskus. Vzamemo curek atomov in merimo odklon od ravne poti. Sila v nehomogenem polju je $\vec{F} = (\vec{\mu}\nabla)\vec{B}$. Vzemimo, da imata B in njegov gradient smer osi z

$$F_z = \frac{M}{I}\mu \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Odkloni so majhni in je natančnost te metode le okrog 10%.

Za meritev moramo vzeti nevtralne atome ali molekule. Odklon zaradi naboja bi bil namreč mnogo večji kot odklon zaradi jedrskega magnetnega momenta in bi delal težave. Iz istega razloga je treba izbrati take atome ali molekule, ki imajo elektronski magnetni moment nič. Elektronski magnetni moment je mnogo večji od jedrskega in bi povzročil prevelik odklon, tako da odklona zaradi jedrskega magnetnega momenta ne bi mogli meriti.

c) Jedrska magnetna resonanca

Če damo jedro v močno magnetno polje B_0 , se jedro orientira glede na smer polja tako, da ima komponenta vrtilne količine M določeno vrednost. Njegova magnetna energija je potem $W_m = -\vec{\mu}\vec{B}_0 = -(M/I)\mu B_0$. Pravokotno na \vec{B}_0 damo šibko visokofrekvenčno magnetno polje \vec{B}_1 . Če ima visokofrekvenčno polje ravno frekvenco $\hbar\omega = \mu B_0/I$ ali njen mnogokratnik, lahko jedro preskoči iz enega magnetnega kvantnega stanja v drugo. Fotoni visokofrekvenčnega polja imajo tedaj namreč ravno pravo energijo $\hbar\omega$, ki jo je treba jedru dodati ali odvzeti za preskok. Pri absorpciji fotona se M zmanjša, pri stimulirani emisiji pa se M poveča.

Resonanco lahko dosežemo na dva načina (i) s spreminjanjem B_0 (enostavneje, ker imamo lahko oscilator s fiksno frekvenco) (ii) s spreminjanjem frekvence (precizneje, ker znamo frekvenco natančneje meriti kot magnetno polje). Precizne meritve delamo primerjalno. V istem magnetnem polju merimo dve jedri, od katerih ima eno znan magnetni moment. Potem nam sploh ni treba meriti magnetnega polja, temveč le primerjamo resonančni frakvenci za obe jedri. Natančnost take metode je izredna, skoraj 10^{-6} !

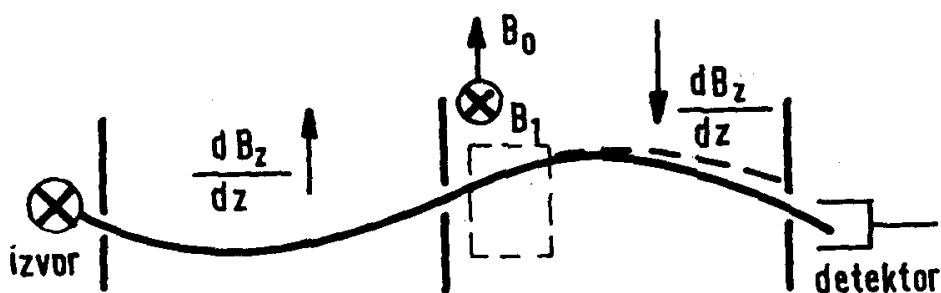
Ekspiriment lahko izvedemo na dva načina:

(i) Curek jeder polariziramo v nehomogenem magnetnem polju. Jedra z različnim M gredo po nekoliko različnih tirih in z zaslonko izberemo zaželjeni M . Nato peljemo ta curek skozi polje B_0 in B_1 . Če ni resonance, ostane M nespremenjen, v resonanci pa se spremeni polarizacija M maksimalnemu

število jeder. Nato curek analiziramo, npr. spet v nehomogenem magnetnem polju. Pri resonančni frekvenci intenziteta pade, ker se delci s spremenjenim M v nehomogenem polju drugače odklonijo in ne pridejo skozi izstopno režo.

Če uporabimo za polarizator in analizator nehomogeno magnetno polje, moramo delati poskus z nevtralnimi delci. Kot izvor za molekulske curke uporabimo peč. Kot detektor pa služi

- vroča žica (ki atome ionizira) + detektor za ione
- Piranijev vakuummeter (ki izmeri količino priteklega plina)
- detektor radioaktivnosti (če imamo v molekulskem curku primešane radioaktivne izotope).



Slika 2.13: Merjenje jedrske magnetne resonance pri molekulskih žarkih in nevtronih

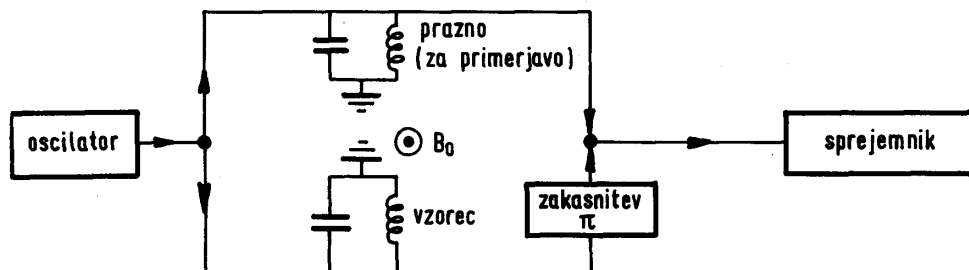
(ii) Merimo absorpcijo elektromagnetnega valovanja, ki je v resonanci največja. Aparatura je v bistvu enostavna, ker pade ω v območje radijskih frekvenc. Merjenec je lahko v obliki trdne snovi ali tekočine. Damo ga v tuljavo nihajnega kroga, kjer povzroči v resonanci dušenje in fazni premik signala. S spreminjanjem B_0 ali ω lahko posnamemo celo resonančno krivuljo.

Lega resonance nam pove μ .

Struktura resonančne krivulje pa nam pove nekaj o lokalnih magnetnih poljih v atomu in je zato važen pripomoček za raziskavo trdnih snovi.

Merjenje B. Če za dano snov že poznamo μ , lahko z merjenjem resonančne frekvence določimo B . To je najpreciznejša merska metoda za magnetno poljsko gostoto (natančnost do 10^{-6}).

V zvezi z absorpcijsko metodo pri jedrski magnetni resonanci se vprašamo, zakaj sploh pride do absorpcije radijskih valov, saj sta absorpcija in



Slika 2.14: Merjenje jedrske magnetne resonance pri trdnem ali tekočem vzorcu

stimulirana emisija enako verjetni. Razlog je v tem, da so v termodinamskem ravnovesju nivoji z nižjo energijo bolj zasedeni $W \propto \exp(-W/kT)$ in pride zato večkrat do absorpcije kot do emisije. Iz tega se tudi vidi, da se izplača delati meritev pri nižjih temperaturah, ker je tam razlika med absorpcijo in emisijo večja.

d) Jedrski paramagnetizem

Paramagnetizem nastane zato, ker se v termodinamskem ravnovesju magnetni dipoli raje orientirajo v smeri polja (nižja energija!) kot v obratni smeri. Na ta način ojačajo prvotno magnetno polje. Magnetna susceptibilnost je sorazmerna s kvadratom magnetnega momenta delcev. Zato je jedrski paramagnetizem $\sim 1000^2$ krat šibkejši od elektronskega in je zaznaven le v dveh primerih:

- (i) Pri zelo nizkih temperaturah (pod 10^{-3} K). Susceptibilnost je namreč (" μ " - 1) $\propto 1/T$, dokler se ne približamo nasičenju. Pri temperaturah pod 10^{-3} K se elektronski magnetni momenti že popolnoma orientirajo in se s temperaturo spreminja le še orientacija jedrskih magnetnih momentov. Pod 10^{-3} K je jedrski paramagnetizem dovolj velik, da nam ohladi snov pri adiabatnem razmagnetanju na že nižje temperature.
- (ii) V resonanci. Spet vzamemo močno magnetno polje B_0 in pravokotno nanj visokofrekvenčno polje B_1 . Pravokotno na obe polji damo zanko in merimo inducirano napetost. Pri nizkih frekvencah magnetizacija snovi toga sledi polju ($\vec{B}_0 + \vec{B}_1$) in se v zanki pravokotni nanj nič ne inducira. Magnetni dipoli sicer precesirajo okrog osi \vec{B}_0 s precesijsko frekvenco

$$\omega_p = \frac{\text{navor}}{\Gamma \sin \theta} = \frac{\mu B_0 \sin \theta}{I \hbar \sin \theta} = \frac{\mu B_0}{I \hbar}$$

Vendar so v povprečju vse smeri enako zasedene in se prispevki med seboj uničijo. V resonanci, ko je $\omega = \omega_p$, se pa smer z ugodno fazo glede na polje \vec{B}_1 , ojači. Magnetizacija kroži okrog osi \vec{B}_0 in inducira napetost tudi v pravokotno stoječi tuljavi.

2.1.7 Električni kvadrupolni moment

Energija točkastega naboja v električnem polju je eU . Če so naboji porazdeljeni po prostoru, je $W = \sum_i e_i U(\vec{r}_i)$. Ker se zunanje električno polje na dimenzijah jedra le malo spremeni, ga smemo razviti v Taylorjevo vrsto:

$$U(\vec{r}) = U(0) + \vec{r} \text{grad} U(0) + (1/2!)(x^2 \partial^2 U / \partial x^2 + 2xy \cdot \partial^2 U / \partial x \partial y + \dots) + \dots$$

S primerno izbiro koordinatnega sistema lahko mešane člene odpravimo.

$$\begin{aligned} W &= \sum_i e U(\vec{r}_i) = ZeU(0) + \left(\sum_i e r_i \right) \text{grad} U \\ &+ (e/2!) \sum_i (x_i^2 \cdot \partial^2 U / \partial x^2 + y_i^2 \cdot \partial^2 U / \partial y^2 + z_i^2 \cdot \partial^2 U / \partial z^2) + \dots \end{aligned}$$

Dipolni člen lahko izpustimo, ker jedra nimajo električnega dipolnega momenta. Razlog ni v tem, da jedro nima negativnih nabojev, saj merimo dipolni moment glede na težišče in če bi bili protoni nagnjeni na eno stran, nevtroni pa na drugo, bi bil dipolni moment različen od nič. Pač pa je razlog v tem, da so jedra centralno simetrična, kot bomo videli pri naslednjem poglavju. Centralno simetrični sistemi pa imajo električni dipolni moment nič, ker sta prispevka z antipodnih točk $e_i \vec{r}_i$ in $e_i(-\vec{r}_i)$ enako močna ter se uničita.

Višje člene od kvadrupolnega smemo zanemariti, ker je njihov efekt premajhen, da bi ga zaznali.

Kvadrupolni člen lahko zapišemo

$$W_q = \frac{e}{2} \sum_i \left[\frac{x_i^2 + y_i^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + \frac{x_i^2 - y_i^2}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) + z_i^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right].$$

Pogosto je polje U na mestu jedra aksialno simetrično, $\partial^2 U / \partial x^2 = \partial^2 U / \partial y^2$, in smemo drugi člen izpustiti. Omejili se bomo na ta primer. Uporabimo še potencialno enačbo $\nabla^2 U = 0$,

$$\begin{aligned} \partial^2 U / \partial x^2 + \partial^2 U / \partial y^2 &= -\partial^2 U / \partial z^2 \\ W_q &= (e/2) \sum_i \left[-\frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2) + z_i^2 \right] \cdot \partial^2 U / \partial z^2 \\ \boxed{W_q} &= (e/4) \cdot q_{33} \cdot \partial^2 U / \partial z^2 \end{aligned}$$

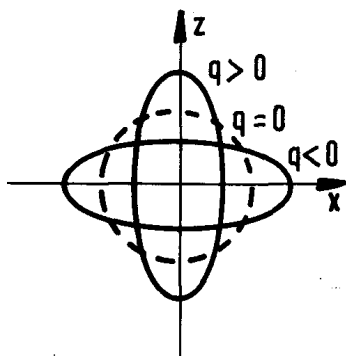
Pri tem smo definirali električni kvadrupolni moment

$$\boxed{q_{33} = \sum_i (3z_i^2 - r_i^2)}$$

Kvadrupolni moment je seveda tenzor in q_{33} je njegova komponenta vzdolž simetrijske osi polja.

Za podolgovato porazdelitev nabojev je $q_{33} > 0$, ker je tedaj tečaj bolj zaseden od ekvatorja in $2z_i^2$ prevlada nad $x_i^2 + y_i^2$. Pri okrogli porazdelitvi so v povprečju x_i^2 , y_i^2 in z_i^2 enaki ter je $q_{33} = 0$. Pri sploščeni porazdelitvi pa je $q_{33} < 0$.

Vrednost q_{33} je odvisna tudi od tega, kako je jedro orientirano (kakšen je M). Če je npr. podolgovato jedro orientirano počez ($M = 0$), je zaradi razmazanosti okrog osi z porazdelitev naboja sploščena. Po dogovoru navajamo v tabelah vrednost $q = q_{33}$ ($M = I$), pri kateri je telesna os jedra orientirana čim bližje osi z .

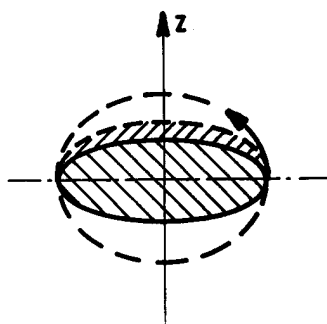


Slika 2.15:

Podolgovata jedra: $q > 0$

Okrogla jedra: $q = 0$

Sploščena jedra: $q < 0$



Slika 2.16: Podolgovato jedro, ki je orientirano prečno na os z , je zaradi nedoločenosti orientacije „razmazano” v povprečju v sploščeno obliko

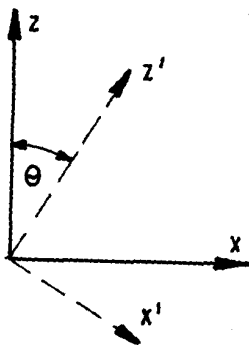
Jedra imajo električni kvadrupolni moment zaradi dveh efektov:

- (i) Pri lihem A so vsi nukleoni razen enega sklopljeni v vrtilno količino 0. Pri okroglih jedrih je vsak tak par krogelno simetričen sistem in nima kvadrupolnega momenta. H q prispeva le zadnji (nesparjeni) nukleon. Če se giblje bližje pola, je $q > 0$, če se giblje bližje ekvatorja, pa je $q < 0$. Red velikosti za q je r_j^2 , ker prispeva le en nukleon.
- (ii) Večinoma so jedra deformirana kot celota. V tem primeru je q mnogo večji ($\sim Zr_j^2$), ker prispevajo vsi protoni. Električni kvadrupolni moment nam da torej zanimiv podatek o jedru, pove nam nekaj o njegovi obliki. Pove nam, ali je jedro približno podolgovat elipsoid, sploščen elipsoid ali je okroglo. Finejših podrobnosti o obliki pa nam ne pove.

Za to bi potrebovali še višje multipolne momente, katerih efekt pa je žal preneznaten, da bi ga opazili.

Poglejmo si, kako se q_{33} transformira pri spremembi orientacije jedra (pri spremembi M). V ta namen transformiramo q_{33} iz notranjega sistema jedra ($x'y'z'$) v fiksni koordinatni sistem (xyz).

$$q_{33} = \langle 2r^2 P_2(\theta) \rangle = \langle 2r^2 \{ P_2(\theta') P_2(\Theta) + \sum_m c_m P_2^m(\theta') P_2^m(\Theta) \underbrace{\cos m(\phi' - \Phi)}_{\text{v povprečju 0}} \} \rangle$$



Slika 2.17: Transformacija električnega kvadrupolnega momenta pri zasuku koordinatnega sistema

Pri tem smo uporabili adicijski teorem za krogelne funkcije. Kvadrupolni moment v lastnem sistemu znaša $\langle 2r^2 P_2(\theta') \rangle = q'$, v laboratorijskem, sistemu pa $q_{33} = q'(3 \cos^2 \Theta - 1)/2$.

Izpeljimo to naprej za dva primera:

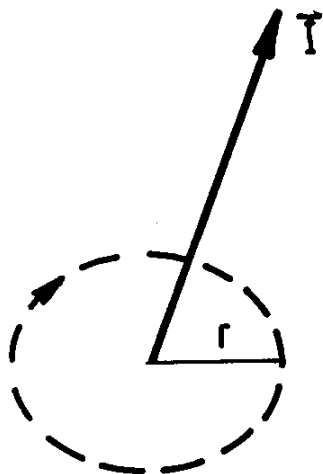
(i) Če prispeva le en delec.

Vzemimo os z' v smeri \vec{I} in si predstavljajmo klasično, da kroži delec po ravnini pravokotni na \vec{I} .

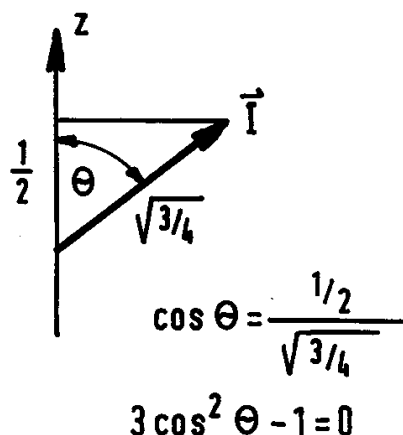
$$\begin{aligned} \cos \Theta &= M / \sqrt{I(I+1)} \\ q_{33} &= q' \{ [3M^2 / I(I+1)] - 1 \} / 2 = q' \cdot \{ 3M^2 - I(I+1) \} / 2I(I+1) \\ q &= q' \{ 3I^2 - I^2 - I \} / 2I(I+1) = q' \cdot (2I-1) / 2(I+1) \\ \boxed{q_{33} &= q \{ 3M^2 - I(I+1) \} / I(2I-1)} \end{aligned}$$

Kot vidimo, je $q_{33}(M)$ odvisen od M^2 in je isti za pozitiven M kot za negativen M . To nas ne preseneča, saj je oblika elipsoida ista, de je obrnjen

navzgor ali navzdol. Če jedro obrnemo počez ($M = 0$), pa ima q_{33} obraten predznak kot q .



Slika 2.18: Klasični tir krožečega delca



Slika 2.19: „Orientacija” jedra z vrtilno količino $\frac{1}{2}$

Pri opisanem primeru velja klasična ocena $q' = -\langle r'^2 \rangle$, saj je za točko $z' = 0$.

(ii) če ima jedro obliko elipsoida. Kvadrupolni moment enakomerno nabitega rotacijskega elipsoida je v lastnem koordinatnem sistemu $q' = (2/5)Z(c^2 - a^2)$, kjer sta c in a polosi. Po principu nedoločenosti simetrijska os elipsoida ne sovpa niti z osjo z niti s smerjo \vec{I} , temveč je okrog obeh razmazana. Kvantnomehanski račun, ki ga tu ne bomo izvajali, dá

$$q = q' \cdot I(2I - 1)/(I + 1)(2I + 3).$$

V zvezi med q in q' je v števcu $I(2I - 1)$. Torej je v primeru $I = 0$ ali $\frac{1}{2}$ kvadrupolni moment $q = 0$, tudi če je jedro deformirano ($q' \neq 0$). Za jedra z $I = 0$ ali $\frac{1}{2}$ torej z merjenjem q ne moremo zvedeti deformacije, ker je pričakovana vrednost $q = 0$.

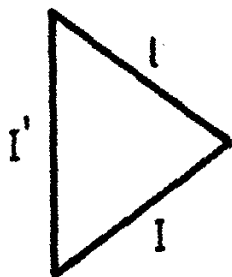
Ta pojav lahko razložimo s principom nedoločenosti. Če je $I = 0$, nima jedro nobene privilegirane smeri. Vse orientacije jedra so enako verjetne in je zato pričakovana vrednost $q = 0$. Če je $I = \frac{1}{2}$ in $M = \pm\frac{1}{2}$, je jedro orientirano postrani. Če bi bilo orientirano navzgor, bi bil $q = q'$, če bi bilo

počez, bi bil $q_{33} = -\frac{1}{2}q'$. Jedro pa je orientirano ravno toliko počez, da je $q = q_{33} = 0$. Drugih orientacij razen $M = \pm\frac{1}{2}$ pa jedro z $I = \frac{1}{2}$ nima.

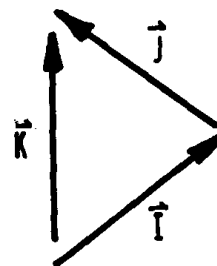
Navedel bom še splošnejši dokaz, da imajo jedra z vrtilno količino 0 ali $\frac{1}{2}$ kvadrupolni moment nič. Podoben dokaz bomo pozneje še večkrat rabili.

Večina operatorjev se pri zasuku koordinatnega sistema transformira na neki določen način. Ta način izrazimo s tako imenovano „multipolnostjo“ operatorja. Skalarji, ki se pri zasuku ne spremenijo, imajo multipolnost 0. Vektorji imajo multipolnost 1, tenzorji pa 2. Operatorji v obliki krogelne funkcije l_m imajo multipolnost l . Če delujemo s takim operatorjem na valovno funkcijo, veljajo podobna pravila kot za sklapljanje dveh vrtilnih količin. Nova valovna funkcija $\Phi = A_{lm}\psi_{IM} = \sum_I c_I \tilde{\psi}_{I'M'}$ vsebuje komponente z različnimi vrtilnimi količinami, pri čemer velja $M' = M + m$; $I + l \geq I' \geq |I - l|$.

Matrični element $\tilde{\psi}_{I'M}$, $|A_{lm}|^2$ je različen od nič samo, če je $M' = M + m$ in $I + l \geq I' \geq |I - l|$. To je tako imenovano trikotniško pravilo, iz vektorjev I, l in I' se mora dati sestaviti trikotnik. Če ta pogoj ni izpolnjen, nima valovna funkcija $A\psi$ nobene komponente z vrtilno količino I' in so zato vse komponente ortogonalne na $\tilde{\psi}_{I'M}$; matrični element je torej nič.



Slika 2.20: Ilustracija trikotniškega pravila



Slika 2.21: Vrtilni količini jedra in sistema elektronov sta sklopljeni v rezultanto K

Kvadrupolni moment ima kot tenzor multipolnost $l = 2$. Matrični element $\langle 0|2|0\rangle$ ali $\langle \frac{1}{2}|2|\frac{1}{2}\rangle$ ne izpolnjuje trikotniškega pravila in je zato nič. Šele jedra z $I \geq 1$ imajo $q = 0$.

Merjenje električnega kvadrupolnega momenta je čisto analogno merjenju magnetnega dipolnega momenta, le da nastopa grad $\vec{\mathcal{E}}$ namesto \vec{B} .

Hiperfina struktura optičnih črt nastane tudi zaradi različne energije jedrskega električnega kvadrupolnega momenta v nehomogenem polju atoma. Energija je odvisna od medsebojne orientacije \vec{I} jedra ter \vec{J} elektronov, torej od kvantnega števila K . Pri hiperfini strukturi zaradi μ so razmiki naraščali linearno s K , tu pa naraščajo s K kot polinom tretje stopnje. S primerjavo razmikov se da torej razbrati izvor hiperfine strukture in določiti ustrezna količina (ali μ ali q). Če sta vpliva μ in q istega reda velikosti, se da z natančno analizo razmikov celo ločiti, koliko prispeva vsak od njiju. Tako lahko v najugodnejših primerih določimo hkrati μ in q .

Resonanca. Z visokofrekvenčnim poljem ustrezne frekvence lahko povzročimo preskoke „kvadrupola“ iz ene orientacije v drugo. Meritev je podobna kot pri jedrski magnetni resonanci, le da nimamo zunanega magnetnega polja B_0 . Gradient zunanega električnega polja bi bil prešibek (nekaj kV/mm²); v poštev pridejo le notranja polja, ki imajo neprimerno močnejše gradiente (nekaj V/Å²).

Notranja (atomska) električna polja pa poznamo žal le na kak % natančno; kar omejuje natančnost metode.

Za ilustracijo pogledajmo še nekaj rezultatov!

$$\begin{array}{ll} {}^2\text{H} & q = 0,273 \text{ fm}^2 \\ {}^{176}_{71}\text{Lu} & q = 800 \text{ fm}^2 \quad (\text{jedro z največjim } q) \\ {}^{127}_{53}\text{I} & q = -50 \text{ fm}^2 \quad (\text{jedro z najbolj negativnim } q) \end{array}$$

2.1.8 Parnost

Naravni zakoni in pojavi so isti, ne glede na to, v katero smer je zasukan sistem. Vse smeri prostora samega so enakovredne. Formalno se to odraža v Hamiltonovem operatorju, ki je skalar (invarianten na zasuk). Zaradi te simetrije se ohranja vrtilna količina. Za izoliran sistem sta velikost in tretja komponenta vrtilne količine dobri kvantni števili.

Podobno je Hamiltonov operator invarianten tudi na inverzijo prostora. V izrazu $H = \sum \vec{p}_i^2/2m_i + \sum V(r_{ij})$ gibalne količine \vec{p}_i pri inverziji sicer spremenijo predznak, toda v kvadratu se to ne pozna. Potencialna energija pa je odvisna le od medsebojnih razdalj delcev, te pa ostanejo pri inverziji nespremenjene. Če gledamo nek pojav v zrcalu, veljajo torej za zrcalno sliko isti zakoni.

Zaradi invariantnosti Hamiltonovega operatorja na inverzijo se ohranja parnost sistema. Parnost imenujemo obnašanje valovne funkcije pri inverziji. Valovna funkcija z določeno parnostjo ostane pri inverziji bodisi nespremenjena ($P = \pm 1$) ali spremeni predznak ($P = -1$): $\psi(-\vec{r}, -\vec{r}_2 - \vec{r}_3 \dots) = \pm \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \dots)$.

Primer: funkcija $\cos x$ ima pozitivno parnost, funkcija $\sin x$ pa negativno parnost. Splošna funkcija, npr. $x + \cos x + \sin x$ sicer nima določene parnosti, saj da inverzija čisto drugo funkcijo $-x + \cos x - \sin x$. Vendar se izkaže, da srečamo v atomski in jedrski fiziki v glavnem le valovne funkcije z določeno parnostjo. Z drugimi besedami, jedra in atomi so centralno simetrični sistema.

Ohranitev parnosti se vidi na naslednji način. Če je Hamiltonov operator invarianten na inverzijo, komutira z operatorjem inverzije \hat{P} . Saj operator \hat{P} Hamiltonovemu operatorju nič ne napravi in je vseeno ali ga pišemo spredaj ali zadaj. Vzemimo, da ima stanje sistema v nekem trenutku določeno parnost, $\hat{P}\psi(t=0) = P\psi(t=0)$. Prirastek k valovni funkciji v času dt znaša po Schrödingerjevi enačbi $d\psi = (-i/\hbar)H\psi dt$. Parnost prirastka $\hat{P}d\psi = (-i/\hbar)\hat{P}H\psi dt = (-i/\hbar)H\hat{P}\psi dt = P \cdot (-i/\hbar)H\psi dt = P d\psi$ je vedno ista kot je bila parnost začetne valovne funkcije. Zato obdrži valovna funkcija $\psi(t=0) + (\partial\psi/\partial t) dt + \dots$ v vseh poznejših časih isto parnost — sistemu se parnost ohranja.

Kdaj je parnost dobro kvantno število?

Če je ψ rešitev Schrödingerjeve enačbe $H\psi = E\psi$, je rešitev tudi $\hat{P}\psi$. To se vidi, če delujemo na Schrödingerjevo enačbo z leve z operatorjem inverzije:

$$\begin{aligned}\hat{P}H\psi &= \hat{P}E\psi \\ H(\hat{P}\psi) &= E(\hat{P}\psi).\end{aligned}$$

Rešitev $\hat{P}\psi$ ima isto lastno energijo E kot rešitev ψ . Torej imamo v splošnem dvakratno degeneracijo, vsakemu energijskemu nivoju pripadata dve medsebojno invertirani stanji. Pri jedrih in atomih pa nimamo take degeneracije, valovni funkciji ψ in $\hat{P}\psi$ pa sta še vedno obe rešitvi Schrödingerjeve enačbe z isto lastno energijo. Torej morata predstavljati isto stanje: $\hat{P}\psi = \alpha\psi$. Ker dá dvakratna inverzija nazaj isto situacijo, mora biti $\hat{P}\hat{P}\psi = \alpha^2\psi = \psi$, $\alpha = \pm 1$, $\hat{P}\psi = \pm\psi$. Nedegenerirana stanja imajo torej določeno parnost.

Degenerirana stanja sicer v splošnem nimajo določene parnosti, toda vedno lahko najdemo taki linearni kombinaciji obeh partnerjev ψ in $\hat{P}\psi$, ki imata določeno parnost (ena pozitivno, druga pa negativno):

$$\begin{aligned}\hat{P}(\psi + \hat{P}\psi) &= \hat{P}\psi + \psi = +(\psi + \hat{P}\psi) \\ \hat{P}(\psi - \hat{P}\psi) &= \hat{P}\psi - \psi = -(\psi - \hat{P}\psi).\end{aligned}$$

Parnost je *multiplikativno* kvantno število, to se pravi, da je parnost sistema enaka produktu parnosti podsistemov.

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) &= \phi_1(\vec{r}_1)\phi_2(\vec{r}_2)\phi_3(\vec{r}_3) \\ \psi_1(-\vec{r}_1) &= P_1\psi_1(\vec{r}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_2(-\vec{r}_2) &= P_2\psi_2(\vec{r}_2) \\ \psi_3(-\vec{r}_3) &= P_3\psi_3(\vec{r}_3) \\ \psi(\vec{r}_1, -\vec{r}_2, -\vec{r}_3) &= P_1P_2P_3\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3).\end{aligned}$$

Če imamo sistem dveh delcev, je parnost $P = P_1P_2P_{12}$ enaka produktu notranje parnosti prvega delca P_1 , notranje parnosti drugega delca P_2 ter parnosti njunega relativnega gibanja P_{12} . Relativno gibanje lahko opišemo z $R(r_{12})Y_{lm}(\theta, \phi)$. Pri tem je R radialno gibanje, r_{12} razdalja med delcema, Y krogelna funkcija za tirno vrtilno količino l , kota θ in ϕ pa kažeta smer zveznice med delcema. Krogelne funkcije Y_{lm} imajo to lastnost, da pri inverziji smeri spremenijo predznak za lih l : $Y_{lm}(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \phi)$. Parnost relativnega gibanja je torej odvisna od vrtilne količine relativnega gibanja: $P_{12} = (-1)^l$.

Parnosti ne znamo meriti statično, ker optični spektri in podobni pojavi niso nič odvisni od parnosti jedra. Parnost merimo lahko samo dinamično z opazovanjem razpadov in reakcij. Pri razpadu $A \rightarrow B + b$ moramo poznati notranji parnosti delcev B in b ter s študijem podrobnosti razpada ugotoviti parnost relativnega gibanja P_{Bb} .

Na koncu naj še omenim, da se pri razpadu beta parnost ne ohranja. Potencial, ki je odgovoren za razpad beta (tako imenovani „šibki potencial“) ni invarianten na inverzijo. Zaradi njegove šibkosti se posledice poznajo le pri razpadu beta.

2.2 Dinamične količine jedra

2.2.1 Razpadna in reakcijska energija

Razpadna energija je definirana kot vsota kinetičnih energij vseh nastalih delcev. Za njeno meritev potrebujemo torej energijske spektrometre. Podobno je definirana tudi reakcijska energija kot razlika med kinetično energijo nastalih delcev ter kinetično energijo projektila.

Če nastaneta pri razpadu ali reakciji dva delca, zadošča, da izmerimo energijo enemu od njiju, na energijo drugega lahko sklepamo iz ohranitve gibalne količine.

Razpadna oz. reakcijska energija Q nista odvisni od mehanizma razpada ali reakcije. Odvisni sta le od tega, za koliko se razlikuje masa končnega sistema od mase začetnega sistema:

$$Q = \Delta mc^2.$$

Merjenje Q je važno torej kot dopolnilna meritev za določanje *mase jeder*, zlasti za nestabilna jedra. Če v razpadu ali reakciji nastopa kako jedro v vzbujenem stanju, lahko z merjenjem Q ugotovimo *ekscitacijsko energijo* tega vzbujenega stanja. Za potek razpada oz. reakcije je Q važen le v toliko, v kolikor določa *kinematiko procesa* (energijo, gibalno količino in smer gibanja prizadetih delcev ter velikost faznega prostora, ki jim je na razpolago).

Reakcije, pri katerih je $Q > 0$, imenujemo eksotermne; če je $Q < 0$, pa endotermne. Pri elastičnem sipanju je $Q = 0$.

Ogledali si bomo samo nekaj osnovnih principov energijskih spektrometrov. Podrobnosti o njih lahko najdete drugje.

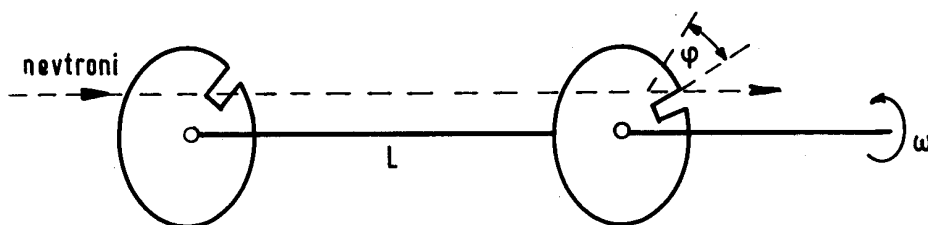
Najlažje in najnatančneje merimo energijo *nabitih delcev*. Pri njih imamo na razpolago dva bistveno različna principa:

- (i) **Magnetni spektrometer.** Z odklonom v magnetnem polju izmerimo pravzaprav gibalno količino delca. Toda ker poznamo njegovo maso, lahko določimo tudi energijo. Natančnost magnetnih spektrometrov je $\sim 1\%$, pri zelo dobri fokusaciji pa tudi 10^{-3} (le da je tedaj izkoristek slabši).
- (ii) **Ionizacijski spektrometer.** Nabit delec ionizira snov na svoji poti. Število ionskih parov je v dani snovi sorazmerno z energijo delca. Navadna ionizacijska celica ne pride v poštev, ker posamezen delec napravi premalo ionskih parov, da bi bil nastali naboj (oz. ustrezni napetostni sunek) merljiv. Pač pa lahko njihov efekt ojačamo v proporcionalnem, scintilacijskem ali polvodniškem števcu. Proporcionalni in scintilacijski

števec imata precej slabšo ločljivost od magnetnega spektrometra, moderni polvodniški števeci ga pa že dosežajo (natančnost $\sim 1\%$).

Za *neutralne delce* opisana principa ne funkcionirata, ker se niti ne odklanjajo v magnetnem polju, niti ne ionizirajo snovi. Zato uporabljamo naslednje metode:

- (i) Merjenje **hitrosti s časom preleta** se uporablja zlasti za počasne nevtrone. Ena možna izvedba ja z vrtečima se koaksialnima kolesoma („chopper“). Kolesi imata reži, premaknjeni med seboj za kot ϕ in



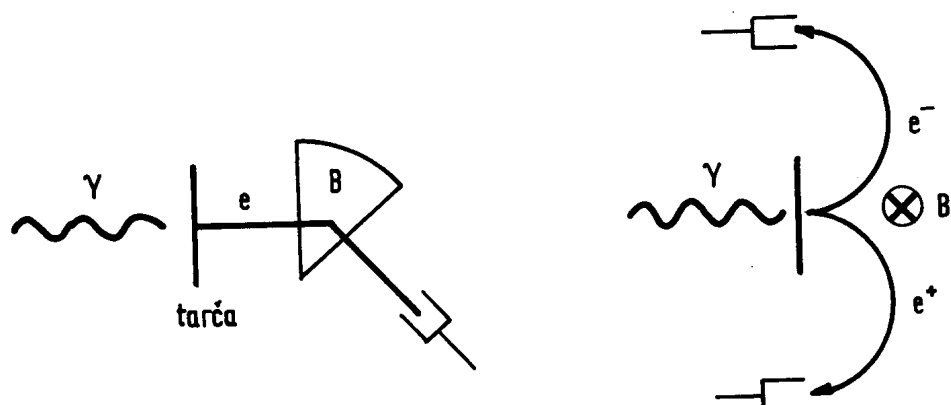
Slika 2.22: Merjenje hitrosti z vrtečima se kolesoma

prepuščata le nevtrone s pravo hitrostjo:

$$t_{\text{preleta}} = L/v = \phi/\omega.$$

- (ii) Merjenje valovne dolžine z uklonom na kristalih. Izmerimo smer θ uklonskih maksimumov, pri čemer uporabimo Braggov pogoj $2D \sin \theta = m\lambda$. Pri tem je D razmik med kristalnimi ravninami. Metoda je uporabna le, če je valovna dolžina delca približno istega reda velikosti kot so razdalje atomov v kristalu (žarki gama pod 0,1 MeV; nevtroni pod 1 eV).
- (iii) **Indirektne meritve (konverzija)** Foton izbije iz tarče elektron s Comptonovim efektom ter mu podeli skoraj vso energijo. Nadalje spektrometriramo elektron (comptonski magnetni spektrometer ali comptonski spektrometer s polvodniškim števcem).

Foton naredi v tarči par elektron-pozitron, ki ju nadalje spektrometriramo (parski magnetni spektrometer ali parski spektrometer s polvodniškim števcem). Neutron pa izbije iz vodikove tarče proton in nadalje spektrometriramo proton.



Slika 2.23: Comptonski magnetni spektrometer in parski magnetni spektrometer

Za manj natančne meritve lahko uporabimo proporcionalni ali scintilacijski števec, ki služi obenem kot konverzijska tarča ter spektrometer za nastale nabite delce.

- (iv) **Jedrske reakcije.** Žarek gama in nevtron lahko sprožita jedrske reakcije in potem spektrometrimo nabite reakcijske produkte. Metoda je ugodna, če je reakcija endotermna. Nastali delec ima tedaj majhno energijo in je absolutna napaka majhna. V primerjavi z energijo prvotnega delca $W_1 = W_2 + (-Q)$ je napaka tudi relativno majhna (če je $(-Q) \gg W_2$).

Ta metoda je pripravna zlasti za kalibracijo drugih spektrometrov. Umerimo jih z energijo pragov za razne reakcije.

2.2.2 Razpadni čas

Jedra razpadajo statistično. Vsako časovno enoto je ista verjetnost, da bo jedro razpadlo, ne glede na to, koliko časa že čaka na razpad. Za n jeder to lahko zapišemo (število razpadov na čas. enoto) $= -dn/dt = wn$. Sorazmernostno konstanto w imenujemo razpadna konstanta ali razpadna verjetnost na časovno enoto.

Če gornjo enačbo integriramo, vidimo, da pojema število jeder eksponentno s časom:

$$n = n_0 e^{-wt}$$

Čas $\tau = 1/w$, v katerem pade število jeder na e -kratno začetno vrednost, imenujemo *razpadni čas* ali povprečni življenjski čas jedra. Razpolovni čas, v katerem pade število jeder na polovico, pa meri $t_{1/2} = \ln 2/w$.

Kadar jedro lahko razpada na dva različna načina, je verjetnost za razpad jedra enaka vsoti verjetnosti, da bo jedro razpadlo na prvi ali na drugi način:

$$w = w_1 + w_2.$$

Razpolovni čas je potem enak

$$t_{1/2} = \ln 2 / (w_1 + w_2) = 1 / (1/t_{\frac{1}{2}1} + 1/t_{\frac{1}{2}2}).$$

Pri tem je $t_{\frac{1}{2}1}$ razpolovni čas za primer, če bi jedro lahko razpadalo samo na prvi način. Delež razpadov prvega tipa je w_1/w , delež razpadov drugega tipa pa w_2/w . Razmerje w_1/w_2 imenujemo razvejitevno razmerje.

Za merjenje razpolovnega časa imamo na razpolago različne metode. Izbira je odvisna od velikostnega območja razpolovnega časa.

(i) $10^{30} \text{ s} > t_{1/2} > 10^8 \text{ s}$

Če je razpolovni čas zelo dolg (več let), eksponentnega pojemanja aktivnosti vzorca v doglednem času ne opazimo. Pač pa lahko uporabimo zvezo $A = -dn/dt = wn$. Poznati moramo število radioaktivnih jeder v vzorcu n in izmeriti moramo aktivnost A . Meritev moramo torej napraviti absolutno, točno moramo poznati izkoristek števca ter prostorski kot, ki ga zajema. Če je razpolovni čas zelo dolg, je aktivnost zelo šibka in jo težko merimo. Za običajne razpade je gornja meja nekako 10^{18} let. Če se pri razpadu sprosti veliko energije (npr. razcep ali razpadi osnovnih delcev), pridemo še više, do $\sim 10^{22}$ let.

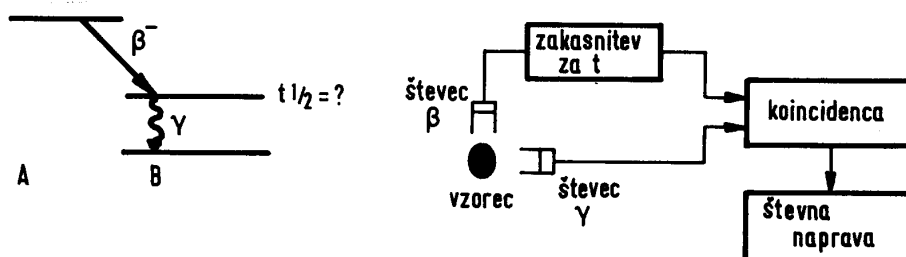
(ii) $10^8 \text{ s} > t_{1/2} > 1 \text{ s}$

Razpolovni čas določimo iz eksponentnega pojemanja aktivnosti $A = A_0 e^{-wt}$. Meritev sme biti relativna, rabimo le razmerje aktivnosti ob raznih časih. To je zelo ugodno, ker nam ni treba vedeti izkoristka ter prostorskega kota števca.

(iii) $1 \text{ s} > t_{1/2} > 10^{-10} \text{ s}$

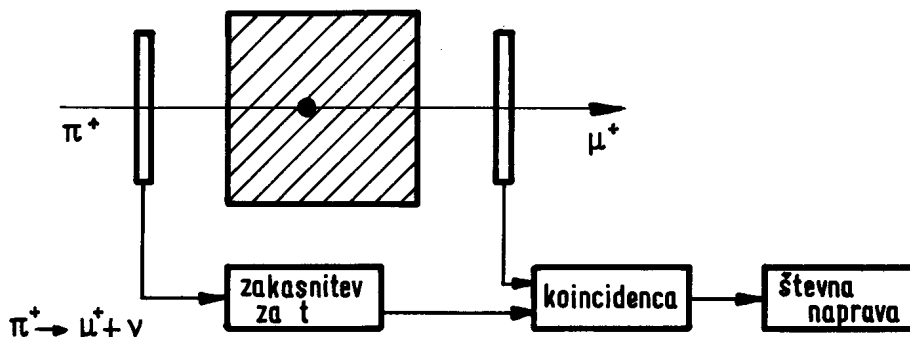
Spet opazujemo eksponentno pojemanje aktivnosti s časom, vendar moramo meriti čase s hitrimi elektronskimi napravami. Elektronska naprava izmeri čas med rojstvom in razpadom jedra in zabeleži porazdelitev, koliko jeder je imelo dan življenjski čas: $n(t) = ne^{-wt}$. Če nastane radioaktivno jedro po nekem predhodnem razpadu, nam da signal za rojstvo ta predhodni razpad. Če pa dobimo radioaktivno jedro z reakcijo, nam da signal za rojstvo prihod projektila (ali pulza projektilov).

Ni nujno, da merimo čas od rojstva do razpada. Enako časovno porazdelitev dobimo tudi, če merimo čas od prihoda delca v aparaturo



Slika 2.24: Merjenje razpolovnega časa z zakasnitvenim vodom in koincidenčno napravo

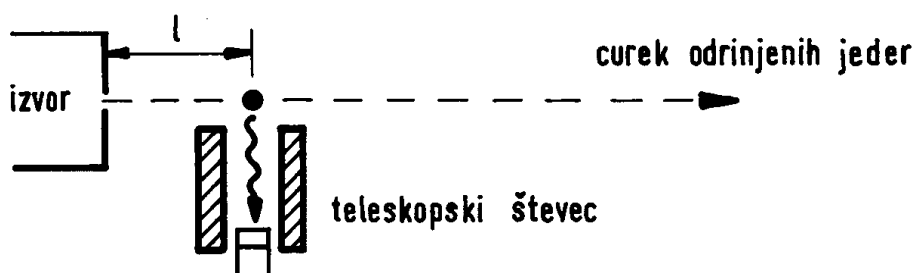
do njegovega razpada. To delamo npr. pri mezonu π^+ in pri delcu μ^\pm . Pri vstopu je tanek števec, kjer da delec signal, da je vstopil. V bloku snovi se zaradi ionizacije ustavi in čaka na razpad. Pri razpadu nastane nov delec, ki sproži drug števec. Števca imata analizator, ki upošteva le sunke pravilne velikosti (ki odgovarjajo hitrosti prizadetega delca). Na ta način izločimo druge slučajne dogodke.



Slika 2.25: Merjenje razpolovnega časa mezona π^+

(iv) $10^{-1} \text{ s} > t_{1/2} > 10^{-16} \text{ s}$

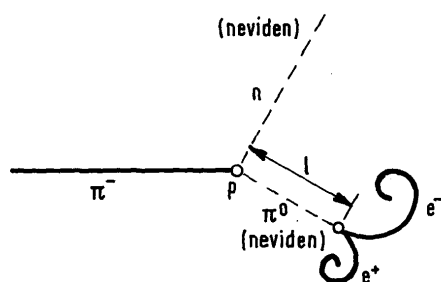
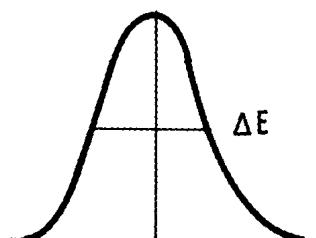
Merimo dolžino preleta. Jedro, ki nastane pri razpadu ali reakciji, dobi določeno hitrost v . V svojem življenjskem času t prepotuje pot $l = vt$. Čas je prekratek, da bi ga lahko merili, pač pa lahko merimo pot. Število jeder pojema z razdaljo, ker spotoma razpadajo: $n = n_0 e^{-wt} = n_0 e^{-(w/v)l}$. Pri časih okrog 10^{-10} s so poti tako velike, da



Slika 2.26: Merjenje razpolovnega časa z dolžino preleta

lahko dejansko premikamo števec. Pri krajših časih lahko vzamemo za števec tanko fotografsko ploščo, ki jo premikamo z mikrometrskim vijakom. Natančnejša pa je meritev z opazovanjem Dopplerjevega efekta. Radioaktivno jedro se giblje v snovi in zgublja energijo z ionizacijo. Če razpade z razpadom gama zgodaj, ima gama zaradi Dopplerjevega efekta nekaj več energije; če razpade že v mirovanju, pa ima gama nižjo energijo. Če žarke gama natančno spektrometriramo, lahko ugotovimo, koliko jeder je razpadlo zgodaj in koliko pozno ter dobimo porazdelitev jeder po njihovi življenjski poti.

Pri časih okrog 10^{-14} s je pot že tako kratka, da jedro prej razpade kot se znatno zavre v snovi. Tedaj merimo dolžino sledi delca v fotografski emulziji. Fotografska emulzija služi obenem kot tarča, v kateri delec nastane in kot detektor za razpad delca.

Slika 2.27: Sledi pri tvorbi in razpadu mezona π^0 v fotografski emulziji

Slika 2.28: Širina spektralne črte

Primer: mezon π^0 . Dobimo ga z reakcijo $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$. Njegov nastanek je karakteriziran s točko, kjer zginе sled mezona π^- . π^0 razpade običajno v dva fotona, vendar raje opazujemo razpade $\pi^0 \rightarrow \gamma + e^+ + e^-$. Fotonov v emulziji namreč ne vidimo, par elektron-pozitron pa je zelo lahko prepoznati, saj se ob prisotnosti magnetnega polja zakrivita vsak v svojo smer.

Razpadni čas mezona π^0 je 10^{-16} s. Povprečna življenjska pot l je kvečjemu $l = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1} \cdot 10^{-16} \text{ s} = 3 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, če je njegova hitrost skoraj svetlobna. Tako kratke poti pa ne moremo meriti, saj fotografska zrnca niso dovolj fina. Tudi če bi bila, bi morali opazovati sliko z elektronskim mikroskopom, saj je omenjena pot manjša od valovne dolžine navadne svetlobe. Kako potem sploh lahko merimo razpolovne čase okrog 10^{-16} s? Pomaga nam relativistično podaljšanje časa. Če vzamemo mezone z energijo stokrat večjo od mirovne, se njihov življenjski čas za laboratorijskega opazovalca stokrat podaljša in napravi stokrat daljšo pot v emulziji. To pa se že da meriti.

$$(v) 10^{-16} \text{ s} > t_{1/2} > 10^{-23} \text{ s}$$

Izmerimo širino spektralne črte delca, ki nastane pri razpadu jedra. Po principu nedoločenosti radioaktivno jedro zaradi kratkega življenjskega časa nima točno določene energije: $\Delta E \approx \hbar/\Delta t \approx \hbar/\tau$.

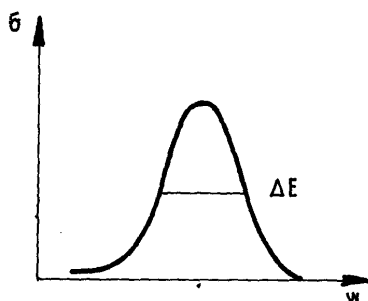
Nastali delci se potem razlikujejo po energiji za ΔE in spektralna črta ima širino $\Delta E \approx \hbar/\tau$. Pri 10^{-16} s je $\Delta E \sim 10$ eV, pri 10^{-22} s pa je $\Delta E \sim 10$ MeV. Torej je lažje meriti zelo kratke razpolovne čase kot 10^{-16} s. Območje okrog 10^{-16} s je sploh najtežavnejše, ker zahteva skrajno preciznost za določevanje dolžine preleta in za določevanje širine spektralne črte.

Namesto energije nastalega delca lahko izmerimo energijo projektila, ki je napravil naše kratkoživno jedro. To je običajno lažje, ker je projektil nabit, nastali delec (gama) pa nevtralen, za nabite delce pa je lažje meriti energijo. Lažje je tudi zato, ker je reakcija običajno eksotermna, projektil ima nižjo energijo in je potrebna manjša relativna natančnost merjenja širine. Meritev izgleda tako, da merimo presek v odvisnosti od energije projektila. Širina dobljene resonančne krivulje nam po principu nedoločenosti pove življenjski čas vmesnega kratkoživnega jedra.

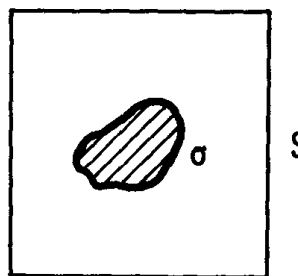
Razpadnih časov krajših od 10^{-22} s pri jedrih ni, ker je čas preleta delca skozi jedro okrog 10^{-22} s. V krajšem času delec sploh še ne pride ven iz jedra. Pri osnovnih delcih je čas preleta 10^{-23} s in je to najkrajši razpadni čas za njih.

2.2.3 Reakcijski presek

Z reakcijskim presekom izrazimo verjetnost za dano reakcijo. Reakcijski presek σ/S je definiran kot verjetnost, da se bo zgodila reakcija, če ustrelimo na jedro s pulzom projektilov, ki imajo gostoto 1 projektil na ploskev S ; ali če ustrelimo z enim projektilom na tarčo, v kateri je po eno jedro na ploskev S . Ime „presek“ je izbrano zaradi nazorne analogije. Če imamo strelsko tarčo z geometrijskim presekom σ vpeto nekje znotraj okvirja S ter streljamo na slepo v ta okvir, je verjetnost zadetka zares σ/S v skladu z zgornjo definicijo.



Slika 2.29: Reakcijski presek za resonančno reakcijo kot funkcija energije projektila



Slika 2.30: Tarča s presekom σ

Za tanko tarčo velja $n = \sigma n_p n_t / S$, pri čemer je n število reakcij, n_p število projektilov, n_t število jeder v tarči in S presek tarče ali curka (kar je pač večje). To lahko pišemo tudi $n = \sigma (n_p / S_p) (n_t / V_t) S x$, pri čemer je n_p / S_p ploskovna gostota projektilov, n_t / V_t gostota jeder v tarči, S presek obsevanega dela tarče in x debelina tarče.

V debeli tarči pa se jedra že deloma skrijejo druga za drugo in zveza ni več linearna. Curek projektilov eksponentno pojema z debelino:

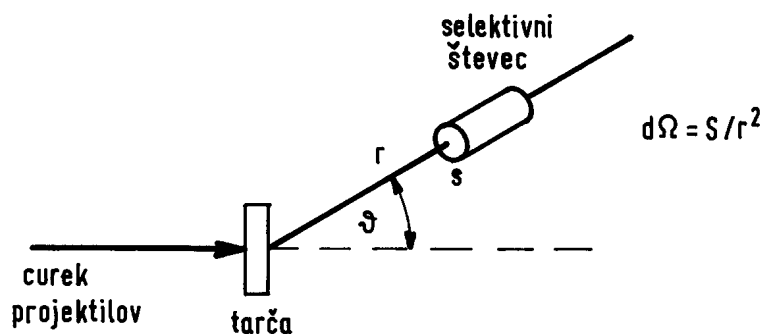
$$\begin{aligned} dn_p &= -\sigma n_p (n_t / V_t) dx \\ n_p &= n_{p0} e^{-\sigma (n_t / V_t) x} \end{aligned}$$

Kadar lahko sproži projektil več različnih reakcij, nas zanimajo parcialni preseki za posamezne reakcije. Verjetnost, da se s projektilom zgodi karkoli, pa izrazimo s *totalnim* presekom, ki je vsota vseh parcialnih reakcijskih presekov in še sipalnega: $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_s + \sum_r \sigma_r$.

Totalni presek lahko merimo direktno z oslabitvijo curka v tarči znane debeline. Za parcialne presake pa moramo poznati fluks projektilov (izvor-

pospeševalnik mora biti umerjen) in zanesljivo moramo detektirati določene reakcijske produkte.

Poleg tega nas često zanima še kotna porazdelitev reakcijskih produktov. Izrazimo jo z *diferencialnim* presekom $d\sigma/d\Omega$, ki je funkcija kota ϑ . Merimo jo tako, da postavimo števec z ozkim prostorskim kotom v razne lege.



Slika 2.31: Merjenje diferencialnega preseka

Integralni presek pa dobimo z integracijo diferencialnega (seštejemo dogodke za vse smeri ϑ) ali pa vzamemo detektor, ki zajame cel prostorski kot.

Reakcije lahko zaznamo na dva načina.

a) z detekcijo lahkega delca, ki običajno zapusti tarčo. Števec je zato zunaj. Če je možnih več reakcij in nas zanima parcialni presek, potrebujemo selektivni števec, ki zazna samo zaželeni delec.

b) Z detekcijo težkega delca (novega jedra) ki običajno obtiči v tarči. Tarčo obsevamo dovolj časa in ugotovimo, koliko novih jeder se je nabralo. V principu bi to lahko napravili s kemično analizo, toda obsevati bi morali predolgo, da bi se nabrala znatna količina. Če so nastala jedra stabilna, lahko njihovo količino ugotovimo z masnim spektroskopom. Laže pa je, da nastane radioaktivno jedro in nam je treba meriti samo, koliko se je aktivirala tarča. Če je možnih več reakcij, razlikujemo različna nastala jedra po njihovih karakterističnih razpadnih spektrih. Ker obtičijo v tarči vsa jedra ne glede na smer, merimo s to metodo integralni presek.

2.3 Sestavni deli jedra

2.3.1 Sestavni deli jedra

Na sestavne dele jedra sklepamo iz treh vrst argumentov:

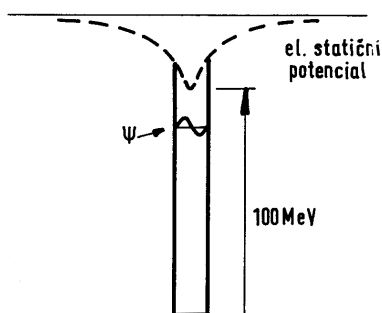
- (i) Meritve so pokazale, da je naboj jedra Z osnovnih nabojev in da je masa približno celoštevilčni mnogokratnik masne enote. Zelo neverjetno je, da bi bil to gol slučaj. Sugerira nam misel, da je jedro sestavljeno iz A sestavnih delov, katerih masa jo približno 1 masna enota. Ko še niso poznali nevtrona, so si predstavljali jedro sestavljeno iz A protonov ter $(A - Z)$ elektronov, tako da ustreza masa in naboj. Danes pa vemo, da je jedro sestavljeno iz Z protonov in $(A - Z)$ nevtronov.

Argument o celoštevilčni masi seveda ne dokazuje še ničesar, temveč lahko pomaga le pri špekulacijah. Podobne špekulacije so delali že v prejšnjem stoletju, češ da so morda vsi atomi sestavljeni iz vodikovih atomov. Toda ker so natančnejše meritve pokazale, da atomske mase niso točni mnogokratniki mase vodika, oz. da pogosto sploh niso mnogokratniki, so take špekulacije zavrgli. Šele sodobna masna spektroskopija je z odkritjem izotopov pokazala, da pri naravnih mešanica atom-ska masa sicer ni cel mnogokratnik masne enote, pri čistih izotopih pa je. Drobnost odstopanje od celega števila pa je razložila relativnostna teorija: zaradi vezavne energije je masa vezanega sistema nekoliko manjša od mase sestavnih delov. Na ta način se je spet vrnilo zaupanje, da celoštevilčna masa res nekaj pomeni.

- (ii) Najprepričljivejše argumente o sestavnih delih dobimo seveda, če sistem „razstavimo“. Pri razpadih letijo iz jedra helijeva jedra, elektroni in žarki gama. Pri reakcijah, ki jih sprožijo projektili z dovolj energije, pa letijo iz jedra tudi protoni, nevtroni in razna lahka jedra. Fotoni — kvanti elektromagnetnega valovanja — ne pridejo v poštev kot gradniki jedra. Rodijo se pri razpadu gama, da odnesejo odvišno energijo pri prehodu jedra iz vzbujenega v nižje ali osnovno stanje. Tudi helijeva jedra (delci alfa) ne pridejo v poštev, pretežka so, saj atomske mase niso mnogokratniki od $4m_0$. Kandidati za gradnike jedra so torej elektron, proton in nevtron. Ko še niso poznali nevtrona, so skušali opisati jedro s protoni in elektroni, kar pa je vodilo do naslednjih nevzdržnih posledic:
- a) *Velikost jedra* je nekaj fm. Istega reda velikosti bi morala biti tudi valovna dolžina valovanja, ki opisuje gibanje elektrona. Robni pogoji zahtevajo, da mora biti vsaj pol valovne dolžine „zaprte“ v jedru. Gibalna količina elektrona bi bila torej $p = \hbar/\lambda$ in kinetična energija

(relativistično!) $W = pc = \hbar c/\lambda \sim 200 \text{ MeV fm}/2 \text{ fm} = 100 \text{ MeV}$. Tako visoke energije so neverjetne, saj so tipične energije delcev v jedru le reda 10 MeV. Da bi tak elektron „zdržal“ v jedru, bi moral biti poleg elektrostatskega potenciala še neki silno globok potencial.

Ta potencial bi moral biti zelo čuden, da bi elektrone sicer uspešno vezal, pri sipanju elektronov na jedru pa ga ne bi čutili. Izkaže se namreč, da čutijo elektroni pri sipanju na jedru le elektrostatski potencial. S tem možnosti vezanih elektronov v jedru sicer nismo izključili, napravili smo jo pa skrajno neverjetno.



Slika 2.32: Potencial, ki bi zadržal elektron v jedru

b) Meritve *vrtilnih količin* so pokazale, da imajo jedra s sodim A celoštevilčno vrtilno količino, jedra z lihim A pa polštevilčno. Ker imajo e , p in n vsi spin $\frac{1}{2}$, jih mora biti sodo število, da lahko sestavimo celoštevilčno rezultanto vrtilne količine. Sod A torej pomeni sodo število gradnikov, lih A pa liho število gradnikov.

Primeri: ${}^2_1\text{H}$ ima $I = 1$; $2p + 1e$ liho gradnikov , narobe!
 $1p + 1n$ sodo , prav.
 ${}^{14}_7\text{N}$ ima $I = 1$; $14p + 7e$ liho gradnikov , narobe!
 $7p + 7n$ sodo , prav.

c) Meritve *statistike* so pokazale, da so jedra s sodim A bozoni, jedra z lihim A pa fermioni. Ker e , p in n vsi ubogajo Fermi-Diracovo statistiko, se obnaša sestavljeni sistem (jedro) s sodim številom gradnikov kot bozon, če ima liho gradnikov pa kot fermion. Primeri kot ${}^2_1\text{H}$ in ${}^{14}_7\text{N}$, ki

sta bozona, nas spet privedejo v protislovje, če jih hočemo razložiti s protoni in elektroni, saj bi jih bilo liho število namesto sodo.

d) *Magnetni momenti* jeder so reda velikosti jedrskega magnetona. Če bi bili v jedru elektroni, bi tudi ti prispevali svoj delež; toda prispevek elektronov je reda velikosti Bohrovega magnetona, ki je 2000 krat večji od jedrskega zaradi tolikokrat manjše mase elektrona. Rezultanta bi bila reda velikosti Bohrovega magnetona, kar pa ni res.

Elektronov torej ni v jedru. Pri razpadu beta se pač v trenutku razpada rodijo, podobno kot fotoni pri razpadu gama. Izhod iz zagate pri razlagi sestave jedra je prineslo odkritje nevtrona. Nevtron torej ni sestavljen iz p in e temveč je skupaj s protonom osnovni gradnik jedra.

- (iii) Argument, da je naša slika o jedru sestavljenem iz protonov in nevtronov pravilna, je tudi lepo ujemanje izračunanih lastnosti jedra z eksperimentom, če računamo s tako predpostavko.

Pripomniti moramo še, da izletijo pri obstreljevanju vodika in težjih jeder tudi drugi delci (mezoni in hiperoni), če uporabimo projekte iz največjih pospeševalnikov (z energijo \sim GeV). Toda ti delci niso gradniki jedra, saj se pojavijo le pri energijah, ki znatno presegajo tipične energije v jedru. To lahko povemo še drugače: „Mikroskop”, pri katerem valovna dolžina ustreza energiji ~ 1 GeV, ima dovolj dobro ločljivost, da take delce „vidi” v posameznih plasteh naboja, iz katerih so sestavljeni nukleoni. Tipična dogajanja v jedru pa so pri nižjih energijah in imajo zato preveliko valovno dolžino, da bi pri njih zaznali take podrobnosti v strukturi nukleonov. Torej je dober približek, v katerem opisujemo jedra kot sisteme samih točkastih protonov in nevtronov in zanemarimo njihovo strukturo, ki morda skriva še druge delce. To je podobna situacija, kot v atomski fiziki, za katero so jedra točkasti osnovni delci brez vidne notranje zgradbe, kajti tam so tipične energije še manjše in ločljivost še slabša.

2.4 Jedrska sila

2.4.1 Vezavna energija devterona

Največ podatkov o jedrski sili nam dasta devteron in sipanje nukleona na nukleonu. To je namreč problem dveh teles, ki ga znamo analitično rešiti; zato lahko iz eksperimenta izvlečemo podatke o jedrski sili brez dodatnih komplikacij. Že pri sistemu treh teles, zlasti pa pri večjih jedrih analitičen račun ni več mogoč in potrebujemo približke in modele. Zato bomo iz težjih jeder izvlekli le nekaj splošnih lastnosti jedrske sile, podrobnosti pa bo dal študij sistema dveh teles.

Težja jedra (od He dalje) nam povedo, da je jedrska sila precej močnejša od elektrostatskih, saj bi se sicer jedro zaradi odbojnih sil med protoni razletelo. Vendar ima jedrska sila v primerjavi z elektrostatskimi zelo kratek doseg, kar se vidi iz dejstva, da zavna energija jeder narašča linearno z A . Če bi se nukleoni privlačevali vsak z vsakim, bi bila privlačna energija sorazmerna s številom vseh dvojic, torej z A^2 . Potemtakem čutijo privlačno silo le najbližji sosedi, ki jih ima vsak nukleon enako, ne glede kako veliko je jedro. Ker so razdalje med nukleoni 1–2 fm, sme biti doseg jedrske sile tudi le okrog 2 fm.

Študij devterona je za jedrsko fiziko analogen, kot je študij vodikovega atoma za atomsko fiziko. Vendar obstajata bistveni razliki:

1. Pri vodikovem atomu so poznali sile, iskali pa so gibalne zakone (kvantno mehaniko). Lepo ujemanje je obenem še potrdilo pravilnost predpostavke, da vlada v atomu ista elektrostatska sila, kot jo poznamo iz makroskopskega sveta. Pri jedru pa prevzamemo zakone gibanja (kvantno mehaniko) — iščemo pa sile.
2. Vodik ima ∞ vezanih stanj, devteron pa eno samo. Zato se moramo pri jedrskem problemu dveh teles poslužiti tudi nevezanih stanj — sipanja nevtronov in protonov na protonih.

Za devteron razpolagamo z naslednjimi eksperimentalnimi podatki:

$$E_d = 2,225 \pm 0,002 \text{ MeV}$$

$$I = 1$$

$$\mu = 0,85647 \mu_j$$

$$q = +0,273 \text{ fm}^2$$

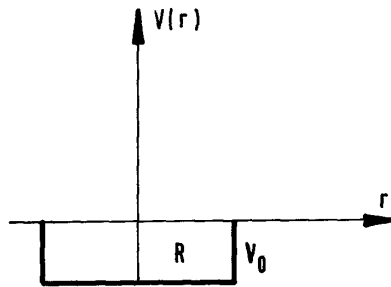
Ker jedrskega potenciala ne poznamo iz mikroskopskega sveta, ne vemo a priori, kakšna naj bi bila njegova oblika (tj. radialna odvisnost). Pri določevanju jakosti in dosega jedrskega potenciala nam bo od devteronovih podatkov zaenkrat neposredno koristila le vezavna energija E_d . Imamo torej

premalo podatkov, da bi ugotovili še obliko potenciala. Zato bomo vzeli za obliko potenciala zaenkrat kar preprost nastavek — pravokotno potencialno jama.

Rešiti moramo Schrödingerjevo enačbo:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_2^2}{2m} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \right) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

To je parcialna diferencialna enačba s šestimi spremenljivkami, kar pred-



Slika 2.33: Pravokotna potencialna jama

stavlja še danes trd oreh kljub sodobnim računalnikom. K sreči se da zapisana diferencialna enačba zelo poenostaviti. Z vpelja novih spremenljivk

$$\begin{aligned} \vec{r}_T &= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)/2 \\ \vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{aligned}$$

ločimo gibanje težišča (\vec{r}_T) od notranjega (relativnega) gibanja (\vec{r}). Obe gibanji sta neodvisni, saj notranje dogajanje (relativno gibanje) ni odvisno od gibanja devterona kot celote (od izbire inercialnega sistema). Zato diferencialna enačba razpade in tudi lastno energijo lahko pišemo $E = E_T + E_d$. Nadaljnjo redukcijo dobimo, če zapišemo \vec{r} v sferičnih koordinatah. Oblika operatorja ∇^2 v sferičnih koordinatah je namreč taka, da v primeru sferno simetričnega potenciala diferencialna enačba nadalje razpade ter ločimo radialno gibanje od kotnega. Prvotno diferencialno enačbo lahko potemtakem rešimo z nastavkom

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = e^{i\vec{k}_T \vec{r}_T} \cdot \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$

Pri tem so Y znane krogelne funkcije in moramo rešiti le še navadno diferencialno enačbo za u :

$$-\frac{\hbar}{2\tilde{m}} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar l(l+1)}{2\tilde{m}r^2} + V(r)u = E_d u.$$

Zanimivo je, da je ta diferencialna enačba čisto podobna tisti za enodimenzionalni problem, le da imamo tu še drugi člen („rotacijsko energijo” $\Gamma^2/2\mathcal{J}$) in da zaradi vpeljave težiščnega sistema nastopa reducirana masa \tilde{m} namesto prave.

Robna pogoja sta $u(0) = 0$ ter $u(\infty) = 0$, da nimamo singularnosti v izhodišču (v nastavku za Ψ je namreč v imenovalcu r) in da je verjetnost nič za veliko oddaljenost med delcema (sistem je vezan!).

Za osnovno stanje predpostavljamo, da je $l = 0$. Drugi člen (“rotacijska energija”) je namreč vedno pozitiven in je tem večji, čim večja je tirna vrtilna količina l . V osnovnem stanju pa mora biti čim manjši, kar dosežemo z $l = 0$. Ta predpostavka ne nasprotuje eksperimentalnemu podatku $I = 1$, proton in nevtron imata pač paralelno orientirana spina in je rezultanta res 1.

Rešitev je sedaj preprosta:

$$\begin{aligned} r < R: & \quad u'' + k_d^2 u = 0, \text{ kjer je } k_d = \sqrt{2\tilde{m}(E_d + V_0)}/\hbar \\ & \quad u_1 = A \sin k_d r \\ r > R: & \quad u'' - \kappa^2 u = 0, \text{ kjer je } \kappa = \sqrt{2m(-E_d)}/\hbar \\ & \quad u_2 = B e^{-\kappa r} \end{aligned}$$

Zadovoljiti moramo mejne pogoje $u_1(R) = u_2(R)$ in $u_1'(R) = u_2'(R)$. Tretjo enačbo za tri neznanke A, B in V_0 pa nam da zahteva, da je u normirana.

$$\begin{aligned} A \sin k_d R &= B e^{-\kappa R} \\ A k_d \cos k_d R &= -B \kappa e^{-\kappa R}, \quad \int_0^\infty u^2 dr = 1 \end{aligned}$$

Če prvi dve enačbi delimo med seboj, eliminiramo A in B , ki nas ne zanimata:

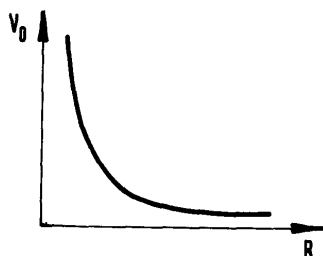
$$\begin{aligned} \frac{1}{k_d} \operatorname{tg} k_d R &= -\frac{1}{\kappa}, \quad \text{ali} \\ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2\tilde{m}(E_d + V_0)}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2\tilde{m}(E_d + V_0)}}{\hbar} R = \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2\tilde{m}(-E_d)}} = \frac{200 \text{ MeV fm}}{\sqrt{1000 \text{ MeV} \cdot 2,2 \text{ MeV}}} = 4,31 \text{ fm}. \end{aligned}$$

Eksperiment nam torej ne pove globine ali dosega potenciala, temveč le neko transcendentno zvezo med njima. Devteron nam pač da en sam podatek. Da si bomo to zvezo lažje predstavljali, napravimo grobo oceno! Upoštevajmo informacijo, ki nam jo dajo težja jedra, namreč $R \approx 1 - 2 \text{ fm} \ll 1/\kappa$. Eksponentni rep je torej dolg in položen v primerjavi z R ter ima u na meji

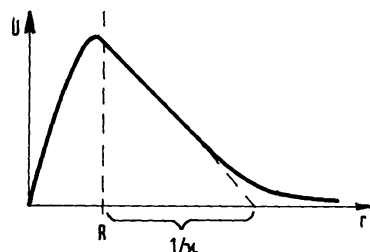
precej vodoravno tangento. V jami je zato približno četrta sinusoide ter velja približna zveza:

$$(E_d + V_0)R^2 \approx \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\tilde{m}} \frac{\pi^2}{4} = \frac{(200 \text{ MeV fm})^2}{1000 \text{ MeV}} \cdot 2,5 = 100 \text{ MeV fm}^2$$

Torej je pri $R = 1 \text{ fm}$ $V_0 = -100 \text{ MeV}$ Jedrski potencial je res mnogo
 $R = 2 \text{ fm}$ $V_0 = -25 \text{ MeV}$.



Slika 2.34: Zveza med globino in dosegom potencialne jame, ki jo dobimo iz vezavne energije devterona



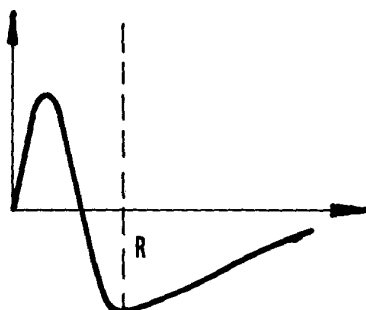
Slika 2.35: Radialna valovna funkcija devterona

globlji od elektrostatskega $e_0^2/4\pi\epsilon_0 R \sim 1,44 \text{ MeV fm}/1 \text{ fm} = 1,44 \text{ MeV}$.

Prepričajmo se še, da je opisano stanje res edino vezano stanje devterona. Stanja z $l > 0$ niso vezana, saj je že stanje z $l = 1$ zaradi rotacijske energije za red velikosti $\hbar \cdot l \cdot 2/2\tilde{m}R^2 \sim (200^2 \cdot 2/1000 \cdot 2^2) \text{ MeV} = 20 \text{ MeV}$ nad osnovnim stanjem. Osnovno stanje pa je vezano le z $-2,2 \text{ MeV}$. Tudi stanja z večjim radialnim kvantnim številom ne morejo biti vezana. Če imamo v jami tričetrta sinusoide, je kinetična energija ogromna:

$$W = \hbar^2 k^2 / 2\tilde{m} \approx (\hbar^2 / 2\tilde{m} R^2) \cdot (3\pi/2)^2 \approx 225 \text{ MeV}.$$

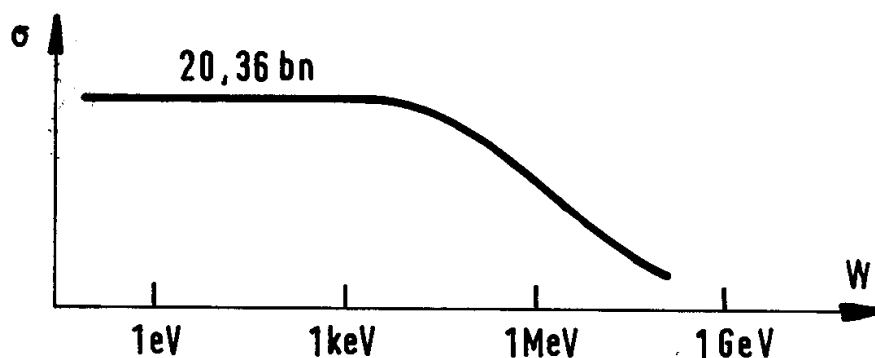
Še na eno vzbujeno stanje moramo pomisliti: vzemimo $l = 0$ in $n_r = 0$, toda proton in nevtron naj bosta sklopljena antiparalelno. Rezultanta bi bila $I = 0$. Ker takega vezanega vzbujenega stanja ni, sklepamo, da je jedrski potencial za antiparalelna nukleona toliko šibkejši, da ju ne more vezati. Jedrske sile so torej odvisne od medsebojne orientacije spinov obeh delcev.



Slika 2.36: Radialna valovna funkcija, ki bi jo imel devteron v vzbujenem stanju z radialnim kvantnim številom 1, če bi eksistiralo

2.4.2 Sipanje nevtronov na protonih pri nizkih energijah

Najprej se bomo omejili na sipanje pri nizkih energijah (pod ~ 1 MeV), ker so tam zelo točni eksperimentalni podatki in enostavni računi.



Slika 2.37: Sipalni presek za sipanje nevtronov na protonih

Sipalni presek ima v zelo širokem intervalu konstantno vrednost $\sigma = 20,36$ b. Za eksperiment je to ugodno; ker ni treba paziti na enobarvnost nevtronov, zato presek tudi tako točno oznamo. Slaba stran pa je, da spet dobimo samo en podatek o potencialu. Toda zdaj imamo dva podatka, vezavno

energijo devterona in sipalni presek pri nizkih energijah, ter lahko izradunamo obe karakteristični količini potenciala – globino in doseg.

Spet bomo računali v težiščnem sistemu, ker v njem potrebujemo le relativne koordinate. Spet velja nastavek $\Psi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$, imamo pa le en robni pogoj: $u(0) = 0$. Opazujemo namreč nevezan sistem in imamo tudi v daljavi končen Ψ – prihajajoče in odhajajoče valove. Zato pa je Schrödingerjeva enačba rešljiva za poljubno pozitivno energijo W in ne le za nekaj diskretnih lastnih energij.

Rešiti moramo diferencialno enačbo za u :

$$-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\tilde{m}r^2} u + V(r) u = W u$$

Opozoriti moram na važno dejstvo; da se pri nizkih energijah sipljejo le nevtroni s tirno vrtilno kolidino nič. To lahko vidimo na tri načine:

1. Po klasični sliki zadenejo tarčo le tisti projektili, ki so bližje osi, kot je radij tarče R . Njihova vrtilna količina je torej $\Gamma = pr \leq pR$. Ker pa je vrtilna količina kvantizirana, zadenejo tarčo pri majhni energiji le projektili z $\Gamma = 0$. Projektili z $l = 1$ se sipljejo po klasični oceni šele pri energiji

$$W = p^2/2m = \Gamma^2/2mr^2 = l \cdot 2 \cdot \hbar^2/20R^2 = 20 \text{ MeV}.$$

Kvantno sicer ni tako ostra meja, toda res postane sipanje nevtronov z $l = 1$ znatno šele v območju okrog 10 MeV, za večje l pa še više.

2. Drugi člen v diferencialni enačbi („rotacijska energija“) ima obliko odbojnega potenciala in mu pravimo včasih „centrifugalni potencial“. Ta prepreči počasnim delcem z $l \geq 1$, da bi prišli v bližino tarče in se sipali.
3. Valovna funkcija ima v potencialni jami obliko $u/r = j_l(kr) \sim (kr)^l$. Za $l \geq 1$ imamo v izhodišču hud voz, tako da pride projektil z majhno verjetnostjo do tarče in se le z majhno verjetnostjo siplje. Verjetnost postane znatna šele, ko je $kr \sim 1$, kar nam da spet isto oceno kot semiklasično razmišljanje.

Na žalost ne moremo pripraviti poskusa tako, da bi pogiljali projekte na tarčo z vseh strani v obliki prihajajočega krogelnega vala. S tem bi opazovali sipanje za vsak izbrani l posebej. Tak poskus lahko napravimo za vodno valovanje v bazenu, ne pa za sipanje nevtronov. Na razpolago imamo le curek nevtronov — ravni val, ki je superpozicija vseh mogočih krogelnih

valov. Vendar nam pomaga kotna porazdelitev sipanega vala; če jo razvijemo po krogelnih funkcijah, pove, koliko sipanja odpade na posamezni krogelni val (tj. na vsak l). Ker se pri nizkih energijah siplje le komponenta z $l = 0$ in ker je ustrezna krogelna funkcija Y_{00} konstanta, je do ~ 10 MeV sipanje izotropno.

Poiščimo sedaj zvezo med potencialom, sipalno amplitudo a in sipalnim presekom σ . V večji razdalji od izhodišča velja asimptotski nastavek:

$$\begin{aligned} \Psi = e^{ikz} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} &= \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) \frac{e^{ikr} - (-1)^l e^{-ikr}}{2ikr} \\ &\quad - a e^{-i\delta} \frac{e^{ikr}}{r} \\ j_1 &= \Psi_1^* \Psi_1 v = v_2 \\ J_2 &= 4\pi r^2 (a/r)^2 v = 4\pi a^2 v \\ J_2 &= j_1 \sigma \quad \longrightarrow \quad \boxed{\sigma = 4\pi a^2} \end{aligned}$$

Fazni premik δ določimo iz zahteve po ohranitvi delcev. Odhajajoči tok mora biti enak prihajajočemu. Ker se ohranja vrtilna količina, velja to za vsak l (za vsak krogelni val) posebej. Mi potrebujemo le val z $l = 0$.

$$\begin{aligned} | - e^{ikr}/2ikr|^2 v &= | e^{ikr}/2ikr - a e^{-i\delta} e^{ikr}/r|^2 \quad \Bigg/ \cdot \frac{2ikr}{\text{(znotraj)}} \\ 1 &= |1 - 2ika e^{-i\delta}|^2 = (1 - 2a \sin\delta)^2 + (2ka \cos\delta)^2 \\ \mathcal{A} &= \mathcal{A} - 4ka \sin\delta + 4k^2 a^2 \\ &\quad \boxed{\sin\delta = ka} \end{aligned}$$

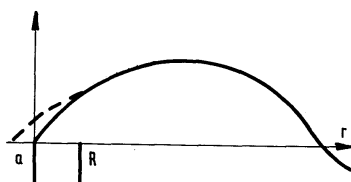
Asimptotska rešitev za $l = 0$ ima po tem obliko:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ikr} \left(e^{ikr} (1 - 2i \sin\delta e^{i\delta}) - e^{-ikr} \right) &= e^{-i\delta} \frac{\sin(kr - \delta)}{kr} \\ u &\propto \sin(kr - \delta) \end{aligned}$$

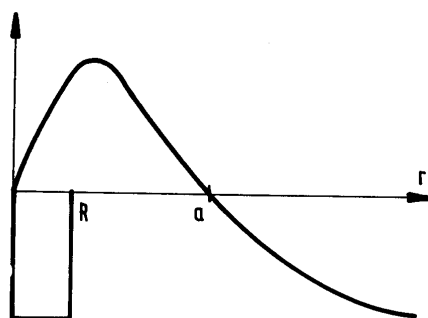
Brez sipanja je rešitev Schrödingerjeve enačbe sinusna krivulja. Če vključimo potencial, dobimo izven dosega potenciala tudi sinusno krivuljo, vendar premaknjeno za fazni premik δ . Da določimo ta fazni premik in z njim presek, moramo rešiti diferencialno enačbo tudi znotraj potenciala. Za potencialno jamo je račun preprost:

$$\begin{aligned} r < R : -(\hbar^2/2\tilde{m})u'' - V_0 u &= W u; \quad u_1 = A \sin Kr; \quad K = \sqrt{2\tilde{m}(W + V_0)}/\hbar \\ r > R : -(\hbar^2/2\tilde{m})u'' &= W u; \quad u_2 = B \sin(kr - \delta); \quad k = \sqrt{2\tilde{m}W}/\hbar \end{aligned}$$

Pri majhni energiji je $\delta \approx \sin \delta = ka$ ter $u_2 \approx Bk(r - a)$. Pri majhnih energijah imenujemo sipalno amplitudo a "sipalna dolžina", ker predstavlja dolžinski premik sinusne krivulje glede na izhodišča. Pri šibkem potencialu je sipalna dolžina negativna, pri močnejšem pa pozitivna. Zapišimo sedaj mejne pogoje $u_1(R) = u_2(R)$ ter $u_1'(R) = u_2'(R)$ in z delitvijo obeh enačb eliminirajmo A in B , ki nas ne zanimata:



Slika 2.38: Sipalna dolžina pri šibkem privlačnem potencialu je negativna



Slika 2.39: Sipalna dolžina pri močnejšem privlačnem potencialu je pozitivna

$$\begin{aligned} A \sin KR &= Bk(R - a) \\ AK \cos KR &= Bk \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{K} \operatorname{tg} KR = -R + a$$

$$-\frac{1}{k_d} \operatorname{tg} k_d R = 1/\kappa = 4,31 \text{ fm}; \quad k_d = \sqrt{2\tilde{m}(E_d + V_0)}\hbar$$

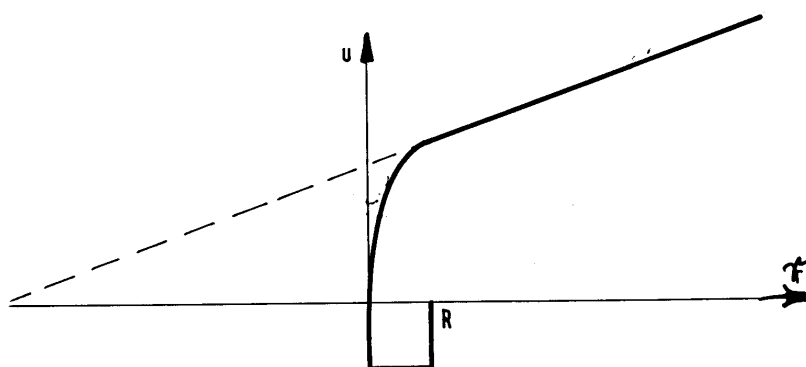
Zraven smo napisali še enačbo devterona, tako da imamo dve enačbi za dve neznanki V_0 in R .

$$a = \sqrt{\sigma/4\pi} = \sqrt{2000/12 \text{ fm}^2} = 12,7 \text{ fm}$$

Rešitev lahko ocenimo, če upoštevamo, da je v mejni točki $r = R$ strmina devteronovega eksponentnega repa približno ista kot strmina sipane sinusne krivulje

$$\begin{aligned} 1/\kappa &\approx -R + a \\ R &\approx 12,7 \text{ fm} - 4,3 \text{ fm} = 8,4 \text{ fm} \end{aligned}$$

To pa je v protislovju s podatki, ki nam jih dajo težja jedra ($R \sim 1-2$ fm). Napraviti smo morali bistveno napako. Po našem računu bi smel biti $a = 4,3$ fm + 2 fm = 6,3 fm ter presek $\sigma \approx 5$ b. V čem je napaka? Nismo upoštevali, da je za antiparalelno orientacijo nukleonov potencial šibkejši, kar smo opazili že pri študiju devterona. Ker imenujemo antiparalelno stanje nukleonov singletno, bomo imenovali tudi ustrezni potencial singletni. Ta je slučajno ravno tolikšen, da je skoraj točno četrt sinusoide v jami in je singletna sipalna dolžina ogromna.



Slika 2.40: Sipalna dolžina pri singletnem sipanju

Singletna sipalna dolžina je negativna, saj bi sicer labko v točki $r = R$ prilepili položen eksponentni rep in bi dobili vezano stanje, ki ga ni.

Ker je 3/4 verjetnosti, da sta delca v tripletnem stanju (rezultanta $I = 1$ ima 3 možne orientacije!) ter 1/4 verjetnosti, da sta v singletnem, je izmerjeni presek naslednje povprečje:

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s = (3,7 + 16,7) \text{ b}; \quad \rightarrow \sigma_s = 67 \text{ b}$$

Izmeriti moramo a_t in a_s , vsako posebej. Meritve dajo

$$\begin{aligned} a_t &= 5,40 \text{ fm} \\ a_s &= -23,67 \text{ fm} \\ 1/\kappa &= 4,31 \text{ fm} \end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo tri neznane parametre: V_t , V_s in R .

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{K_s} \operatorname{tg} K_s R &= -R + a_s \\
-\frac{1}{K_t} \operatorname{tg} K_t R &= -R + a_t & R &= 2,02 \text{ fm} \\
-\frac{1}{k_d} \operatorname{tg} k_d R &= 1/\kappa & V_t &= 36,2 \text{ MeV} \\
&& V_s &= 23,4 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

Jedrski potencial lahko zapišemo v enotni obliki:

$$V = V(r)(\alpha + \beta \vec{s}_1 \vec{s}_2)$$

S tem poudarimo odvisnost od orientacije spinov.

Singletno stanje $S = 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{s}_1^2 + \vec{s}_2^2 + 2\vec{s}_1 \vec{s}_2 &= \vec{S}^2 \\
\vec{s}_1 \vec{s}_2 &= \frac{1}{2}(0 \cdot 1 - 3/4 - 3/4) = -3/4
\end{aligned}$$

Tripletno stanje $S = 1$:

$$\vec{s}_1 \vec{s}_2 = \frac{1}{2}(1 \cdot 2 - 3/4 - 3/4) = 1/4$$

Če vzamemo

$$V(r) = \begin{cases} -36,2 \text{ MeV} & \text{za } r < 2,02 \text{ fm} \\ 0 & \text{za } r > 2,02 \text{ fm} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta/4 &= 1 & \alpha &= 0,91 \\
\text{velja } \alpha - 3\beta/4 &= 23,4/36,2 & \beta &= 0,36
\end{aligned}$$

Alternativna zapisava je:

$$V = V(r)(W + BP_s)$$

Potencial, označen s konstanto W , se imenuje Wignerjev, potencial, označen s konstanto B , pa Bartlettov. P_s je "zamenjalni operator", ki delcema zamenja spina.

Poglejmo si njegovo vrednost!

$$\begin{aligned}
S = 1 : \quad P_s \uparrow\uparrow &= \uparrow\uparrow \\
P_s \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} &= \frac{\downarrow\uparrow + \uparrow\downarrow}{\sqrt{2}} \\
P_s \downarrow\downarrow &= \downarrow\downarrow
\end{aligned}$$

Torej je $P_s = 1$. Nič ne napravi, saj se zamenjava ne pozna.

$$S = 0 : \quad P_s \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}} = \frac{\downarrow\uparrow - \uparrow\downarrow}{\sqrt{2}} = -\frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{\sqrt{2}}$$

Torej je $P_s = -1$.

Če primerjamo ti lastni vrednosti operatorja P_s z vrednostma operatorja $\vec{s}_1\vec{s}_2$, vidimo, da velja zveza $P_s = \frac{1}{2}(1 + 4\vec{s}_1\vec{s}_2)$. Za konstanti W in B velja:

$$\begin{aligned} W + B &= 1 & W &= 0,82 \\ W - B &= 23,4/36,2 & B &= 0,18 \end{aligned}$$

2.4.3 Merjenje sipalnih dolžin s koherentnim sipanjem

a) Sipanje polariziranih nevtronov na polarizirani vodikovi tarči.

Po principu nedoločenosti običajno ne moremo poznati hkrati smeri spina za oba delca ($m_s(1)$ in $m_s(2)$) in še rezultante S . Stanja z določeno smerjo spinov so naslednja (prvi znak se nanaša npr. na nevtron, drugi pa na proton):

$$\uparrow\uparrow, \quad \downarrow\downarrow, \quad \uparrow\downarrow, \quad \downarrow\uparrow .$$

Pri prvih dveh je $M = m(1) + m(2) = 1$ ali -1 , zato je tudi $S = 1$ in ne more biti 0. Tretje in četrto stanje pa se dasta "razstaviti" v dve komponenti z določenim S ($S = 0$ in $S = 1$).

Stanja z določenim S pa zapišemo:

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow \quad S &= 1, M = 1 \\ \downarrow\downarrow \quad S &= 1, M = -1 \\ (\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \quad S &= 1, M = 0 \\ (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)/\sqrt{2} \quad S &= 0, M = 0. \end{aligned}$$

Ko pripravimo poskus, imajo polarizirani nevtroni in polarizirani protoni v tarči vsaki zase določeno smer spina. Trk pa laže opišemo za sistem, ki ima določen S , ker se S pri trku ohranja, $m(1)$ in $m(2)$ pa ne vedno. Zato pri računu trka prvotno stanje nevtron + proton „razstavimo” na komponente z določenim S in proučujemo vsako zase. Potem pa stanja „ S ” spet izrazimo s stanji „ $m(1), m(2)$ ”, ker naš detektor ne zna meriti S , temveč meri orientacijo nevtrona in protona vsakega zase.

$$\begin{aligned} \uparrow\uparrow &\rightarrow a_t \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow &= \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{2} + \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{2} \rightarrow a_t \frac{\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow}{2} + a_s \frac{\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow}{2} \\ &= \frac{a_t + a_s}{2} \uparrow\downarrow + \frac{a_t - a_s}{2} \downarrow\uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\uparrow\uparrow} &= 4\pi a_t^2 = 3,64\text{b} \\ \sigma_{\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow} &= 4\pi \left(\frac{a_t + a_s}{2}\right)^2 = 10,6\text{b} \\ \sigma_{\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow} &= 4\pi \left(\frac{a_t - a_s}{2}\right)^2 = 26,7\text{b} \quad (\text{sipanje s preklopom}) \\ \sigma_{\uparrow\downarrow} &= \sigma_{\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow} + \sigma_{\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow} = 37,3\text{b}. \end{aligned}$$

Preverimo povprečje: $\sigma = \frac{1}{2}(3,6 + 37,3)\text{b} = 20,4\text{b}$.

Če torej merimo sipalni presek za obe različni medsebojni orientaciji nevtrona in protona, dobimo a_t in a_s vsako zase. Princip je preprost, toda

meritev je težavna, ker je težko dobiti dobre polarizirane curke in tarče. Za polarizacijo boljše od 90% se je treba že zelo potruditi, zato dobimo tudi sipalne dolžine komaj na nekaj %. To metodo uporabljamo pri višjih energijah, kjer ni druge izbire. Pri nizkih energijah merimo raje sipalne amplitude z interferenco (s koherentnim sipanjem).

b) Sipanje nevtronov na paravodiku in ortovodiku

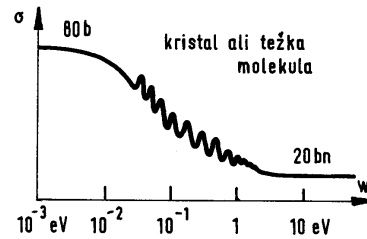
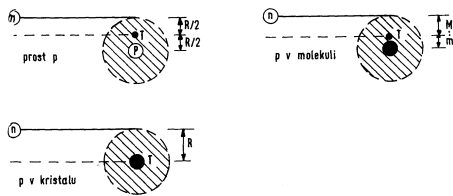
Da dobimo interferenco, mora biti valovna dolžina nevtronov istega reda velikosti ali daljša od medatomske razdalje ($\sim 1\text{\AA}$). Valovni dolžini 1\AA ustreza energija 0,028 eV, ki jo imajo v povprečju termični nevtroni pri temperaturi 200 K, torej potrebujemo za dobre interferenčne poskuse „hladne“ nevtrone. Nizka energija je zaželjena tudi zato, da ne razbijemo ali vzbudimo molekule in je sipanje zares elastično in koherentno.

Najenostavnejši poskus in račun pri molekuli dobimo z zelo počasnimi nevtroni ($\lambda \gg d = 1\text{\AA}$). Z njimi ne dobimo posebnih interferenčnih prog, kajti sipalna centra približno sovpadata. Amplitudi se enostavno seštejeta in dobimo izotropno sipanje v težiščnem sistemu.

Pri tem pa moramo paziti, da je težiščni sistem sedaj tisti, v katerem miruje težišče nevtron-molekula. Pri trku ne prevzame dela gibalne količine le proton, temveč molekula kot celota. Če je molekula zelo težka, težiščni sistem praktično sovpada z laboratorijskim in dobimo izotropno sipanje tudi v laboratorijskem sistemu. Pri sipanju na vezanem protonu se presek štirikrat poveča v primerjavi s sipanjem na prostem protonu. Podroben račun za to je siten, ker imamo problem treh teles, lahko pa si pomagamo z naslednjo nazorno sliko: V težiščnem sistemu nevtron-proton sta nevtron in proton vsak na svoji strani težišča za $\frac{1}{2}r$. Torej sega območje, ki ga „obvlada“ proton z jedrskimi silami, do radija $\frac{1}{2}R$ stran od osi. Če pa je proton fiksiran, „doseže“ v radiju R okrog osi in je torej resek $4\times$ večji. Če molekula ni zelo težka, doseže proton do $\frac{M}{M+m}R$ in znaša presek $\sigma\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\sigma_{\text{vezan}} = 4\left(\frac{M}{M+m}\right)^2\sigma_{\text{prost}}$.

Tak faktor poskusi potrdijo, če je energija precej manjša od vezavne oz. vzbujevalne energije protona v molekuli ali kristalu, tako da je proton res vezan. V območju reda velikosti 1 eV pa dobimo izrazite resonance zaradi vzbujanja molekule ali kristala v vzbujena stanja in zaradi ionizacije. Te resonance niso zanimive za jedrsko fiziko, temveč za proudevanje molekul in trdnih snovi. Pri energijah, ki so dosti večje od ionizacijske, pa smemo vezi zanemariti in računati s protoni kot s prostimi delci. Zares pokaže poskus pri $W > \sim 1$ eV presek za proste protone.

Poglejmo sedaj, kakšno informacijo nam da sipanje počasnih nevtronov na paravodiku. Račun je preprost, sešteti moramo sipalni amplitudi, ki ju prispevata oba protona v molekuli:



Slika 2.41: Skica, ki naj prikaže odvisnost sipalnega preseka od tega, ali je proton v tarči prost ali vezan

Slika 2.42: Sipalni presek za sipanje nevtronov na protonih pri zelo nizkih energijah

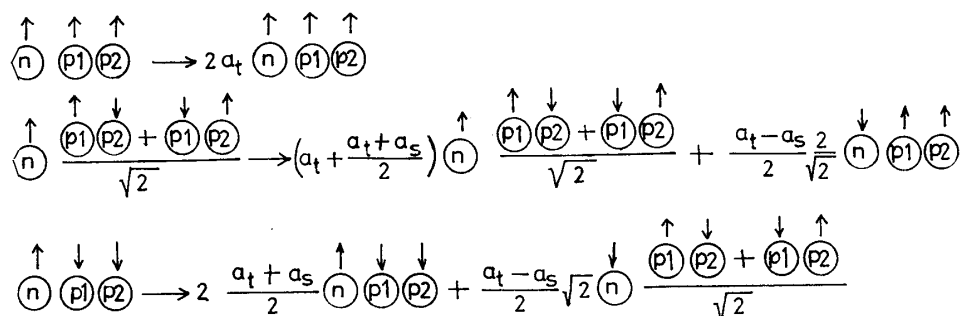
Pri tem smo označili z \textcircled{n} in \textcircled{p} nevtron oz. proton, s puščico pa smo označili smer spina. Za posamezne sipalne amplitude smo uporabili izraz iz prejšnjega poglavja.

$$\begin{aligned}
 & \text{stanje pred sipanjem} && \text{stanje po sipanju} \\
 & \text{nevtron paravodik} && \text{prispevek prvega protona} \\
 & \begin{array}{c} \uparrow \\ \textcircled{n} \end{array} \frac{\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} - \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array}}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_t \begin{array}{c} \uparrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} - \frac{a_t + a_s}{2} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} - \frac{a_t - a_s}{2} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} \right) \\
 & \text{prispevek drugega protona} \\
 & + \frac{a_t + a_s}{2} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} + \frac{a_t - a_s}{2} \begin{array}{c} \downarrow \uparrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} - a_t \begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{n} \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array} = \\
 & = \frac{3a_t + a_s}{2} \begin{array}{c} \uparrow \\ \textcircled{n} \end{array} \left(\frac{\begin{array}{c} \uparrow \downarrow \\ \textcircled{p1} \textcircled{p2} - \textcircled{p1} \textcircled{p2} \end{array}}{\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Slika 2.43: Sipanje nevtrona na paravodiku

Presek je torej $\sigma = 4(2/3)^2 \cdot 4\pi \cdot 4\bar{a}^2 = (256\pi/9)\bar{a}^2$, pri čemer je $\bar{a} = (3a_t + a_s)/4$. Sipanje na prostem vodiku pa nam je dalo $\bar{\sigma} = \pi(3a_t^2 + a_s^2)$. Iz obeh dobro izmerjenih podatkov lahko izračunamo vsako sipalno dolžino zase.

Na paravodiku ne dobimo za počasne nevtrone sipanja s preklpom (pri izpeljavi se nam je ustrezni val „krajšal“). Razlog za to je, da nevtroni nimajo dovolj energije, da bi s preklpom spremenili paravodik v ortovodik. Paravodik ima namreč v najnižjem stanju rotacijsko kvantno število $R = 0$, medtem ko ima ortovodik $R = 1$ in s tem višjo rotacijsko energijo. Drugi



Slika 2.44: Sipanje nevtrona na ortovodiku

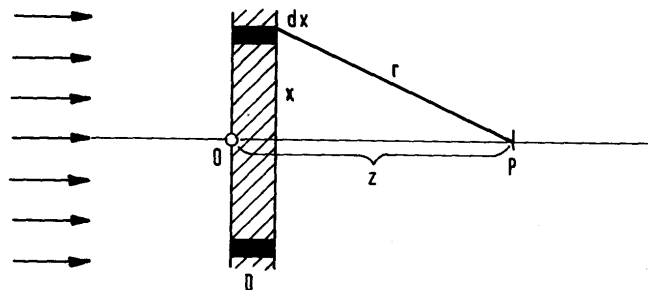
razlog je v tem, da ima ortovodik zaradi $R = 1$ negativno parnost, nevtron bi moral pri trku zaradi ohranitve parnosti tudi spremeniti parnost ($l = 0 \rightarrow l = 1$ ali obratno), vendar pri nizkih energijah $l = 1$ ne pride v poštev.

Sipanje na ortovodiku nam ne da nobenih novih podatkov. Tudi eksperimentalno ni tako ugodno, ker nikoli ne moremo dobiti čistega ortovodika, medtem ko imamo pri zelo nizki temperaturi lahko čist paravodik. Presek bomo izražali za vajo. Tu pa nastopi tudi sipanje s preklopom, ker pri preklopu ni treba spremeniti ortovodika v paravodik, lahko samo zasučemo celotni spin. Račun bomo napravili posebej za vsako orientacijo ortovodika ($S_3 = 1, 0, -1$) in upoštevali, da je za vsako 1/3 verjetnosti.

$$\begin{aligned}
 \text{brez preklopa} &= \frac{16}{9} 4\pi \left(\frac{1}{3} 4a_t^2 + \frac{1}{3} 4\bar{a}^2 + \frac{1}{3} (a_t + a_s)^2 \right) \\
 \text{s preklopom} &= \frac{16}{9} \cdot 4\pi \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) (a_t - a_s)^2 \\
 \text{skupaj} &= \frac{256\pi}{9} \left[\bar{a}^2 + \frac{1}{8} (a_t - a_s)^2 \right].
 \end{aligned}$$

c) Lomni količnik za nevtrone

Sipanje nevtronov pri prehodu skozi snov lahko opišemo z lomom valov, če so sipalni centri dovolj blizu in dovolj enakomerno porazdeljeni v primeri z valovno dolžino nevtronov. Ker enostavno seštevamo amplitude sipanih valov iz blizu ležečih centrov, je vpeljani lomni količnik odvisen od povprečne sipalne dolžine \bar{a} . Zvezo izpeljemo najlažje, če opazujemo sipanje na veliki tanki plošči. Če ima prihajajoči val obliko e^{ikz} , seva vsako jedro krogelni val $-ae^{-i\delta} e^{ik-\mu} r/r$. Pri tem je μ absorpcijski koeficient. Pri majhnem k je fazni premik δ tako majhen, da ga smemo zanemariti. Valovanje, ki pride v točko P, znaša torej:



Slika 2.45: Sipanje na tanki plošči

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{ikz} - \sum_j a_j \cdot e^{(ik-\mu)r_j} / r_j \\ &\approx e^{ikz} - \int_0^\infty (e^{(ik-\mu)r} / r) ND \cdot 2\pi x dx.\end{aligned}$$

Pri tem je D debelina plasti, N pa število jeder na volumsko enoto. Če upoštevamo $x^2 + z^2 = r^2$, $2x dx = 2r dr$, dobimo

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{ikz} - 2\pi ND\bar{a} \int_z^\infty e^{(ik-\mu)r} dr \\ \int_z^\infty e^{ikr-\mu r} dr &= \frac{e^{ikr-\mu r}}{ik-\mu} \Big|_z^\infty = 0 - \frac{e^{ikz-\mu z}}{ik-\mu} \approx ie^{ikz}/k.\end{aligned}$$

Ker je absorpcijski koeficient μ za nevtrone majhen, ga smemo v zadnjem koraku zanemariti. Ne smemo ga pa zanemariti v začetnem izrazu, ker bi sicer dobili integral z nedefinirano vrednostjo.

$$\begin{aligned}\Psi &= e^{ikz}(1 - 2\pi i ND\bar{a}/k) \approx e^{ikz} e^{-2\pi i ND\bar{a}/k} \\ \Psi &= e^{ik(z-D)} e^{ikD(1-2\pi N\bar{a}/k^2)} = e^{ik(z-D)} e^{inkD}\end{aligned}$$

Lomni količnik je torej: $n = 1 - 2\pi N\bar{a}/k^2$. Lomni količnik nevtronov merimo najbolje z merjenjem kota totalnega odboja. Ta kot je zelo majhen, razen če vzamemo zelo počasne nevtrone, saj imamo k^2 v imenovalcu.

d) Sipanje nevtronov na kristalih.

Braggov pogoj nam omogoči, da iz smeri uklonskih maksimov določimo valovno dolžino nevtronov:

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

Iz *intenzitete* uklonskih maksimov pa lahko dobimo posamezne sipalne dolžine:

$$\Psi = e^{i\vec{k}\vec{r}} - \sum_j a_j e^{i\vec{k}\vec{R}_j} e^{ik|\vec{r}-\vec{R}_j|} / |\vec{r} - \vec{R}_j|$$

Razni uklonski maksimi nam dajo razne kombinacije sipalnih dolžin, ki ustrezajo različnim sestavnim atomom. Tako lahko določimo v kristalih iz različnih atomov vsako sipalno dolžino mase.

Če so spini jeder orientirani brez reda, dobimo na ta način povprečno sipalno dolžino \bar{a} . V povprečju se namreč od vsake sipalne amplitude a koherentno sešteje le prispevek \bar{a} . Prispevki $a - \bar{a}$ pa so razmetani brez reda in se v uklonskih maksimih v povprečju uničijo; šesteti jih moramo kot nekoherentne izvore in dajo izotropno ozadje. Vsako jedro je potem izvor dveh valovanj: koherentnega z amplitudo \bar{a} ter zraven še nekoherentnega z jakostjo $\sigma = 4\pi(a - \bar{a})^2$. Podobna delitev na koherentno in nekoherentno sipanje velja tudi, če so v kristalu brez reda razmetani različni izotopi danega atoma.

Sipanje nevtronov na kristalih ni zanimivo samo za jedrsko fiziko (za določevanje sipalnih dolžin nevtronov na raznih jedrih), temveč se je več uporabljala za študij kristalov v fiziki trdnih snovi.

2.4.4 Podatki o obliki jedrskega potenciala in o zamenjalnih silah iz sipanja pri visokih energijah

Študij sipanja pri visokih energijah dá naslednje *nove podatke*

a) Vsak mikroskop ima ločljivost kvečjemu reda velikosti valovne dolžine. Ker imajo visokoenergijski nevtroni de Brogliejevo valovno dolžino krajšo od dosega jedrskih sil, je njihova „ločljivost“ dovolj dobra, da vidijo obliko jedrskega potenciala $V(r)$.

b) Kot smo že ugotovili, se sipljejo pri energijah nad ~ 10 MeV tudi valovi z višjimi vrtilnimi količinami. Zato lahko ugotovimo, kako je potencial odvisen od medsebojne vrtilne količine delcev. Za statičen potencial česa takega ne bi pričakovali, vendar za jedrski potencial ne moremo á priori predpostavljati, da je čisto statičen.

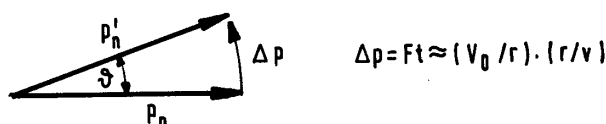
Težava pri analizi eksperimentalnih podatkov je v tem, da ne moremo poslati nevtronov na tarčo v obliki krogelnega vala in študirati potenciala za vsak l posebej. Naš curek nevtronov je raven val in ga lahko izrazimo kot superpozicijo krogelnih valov z vsemi l . Merimo torej sipanje vseh krogelnih valov hkrati, kar zakomplicira sliko. V principu sicer lahko ločimo prispevke posameznih krogelnih valov s tem da analiziramo kotno porazdelitev sipanih

nevtronov. Toda za dobro analizo potrebujemo izredno natančne eksperimentalne podatke. Dodatna težava je v tem, da se pri sipanju lahko nevtronom obrne spin in moramo pri visokih energijah meriti še polarizacijo nevtronov, če hočemo napraviti kompletno analizo sipanja po krogelnih valovih.

Gornja meja energije za smiseln študij jedrskih sil je okrog 200 MeV (v težiščnem sistemu). Nad to energijo nerelativistični statični potencial ni več smiseln. Treba bi ga bilo dopolniti z dodatnimi členi reda velikosti v/c , ki bi bili odvisni od hitrosti in bi samo zakomplicirali sliko. Nad omenjeno energijo imamo tudi še znatno produkcijo mezonov pi, kar spet zakomplicira sliko. Pri 200 MeV je de Brogliejeva valovna dolžina $\bar{\lambda} = \hbar c / \sqrt{2\tilde{m}c^2W} = 200 \text{ MeV fm} / \sqrt{1000 \cdot 200 \text{ MeV}^2} \approx 0,4 \text{ fm}$. Boljše ločljivosti glede oblike jedrskega potenciala torej ne moremo doseči. To ni nič hudega, kajti povprečna kinetična energija nukleonov v jedru je komaj okrog 25 MeV in njihova energijska porazdelitev ne sega čez 200 MeV. Torej tudi nukleonov v jedru ne zanimajo finejše podrobnosti v obliki jedrskega potenciala kot 0,4 fm.

Zamenjalne sile

Pri študiju kotne porazdelitve sipanih nevtronov nam najprej pade v oči dejstvo, da ima kotna porazdelitev izrazit maksimum v smeri naprej in v smeri nazaj (v težiščnem sistemu). To je težko pojasniti, če je potencial plitek v primeri s kinetično energijo projektila ($V_0 = 36 \text{ MeV} \gg W = 100$ ali 200 MeV). Pri takem trku en delec ne more prenesti na drugega poljubne energije, ampak kvečjemu V_0 . Projektilu se zato pri trku le malo spremeni energija in smer. Siplje se v smeri naprej nekako v stožcu s kotom $\vartheta = \Delta p/p \approx (V_0/v)/\tilde{m}v = V_0/2W = 36/400 = 0,1$.

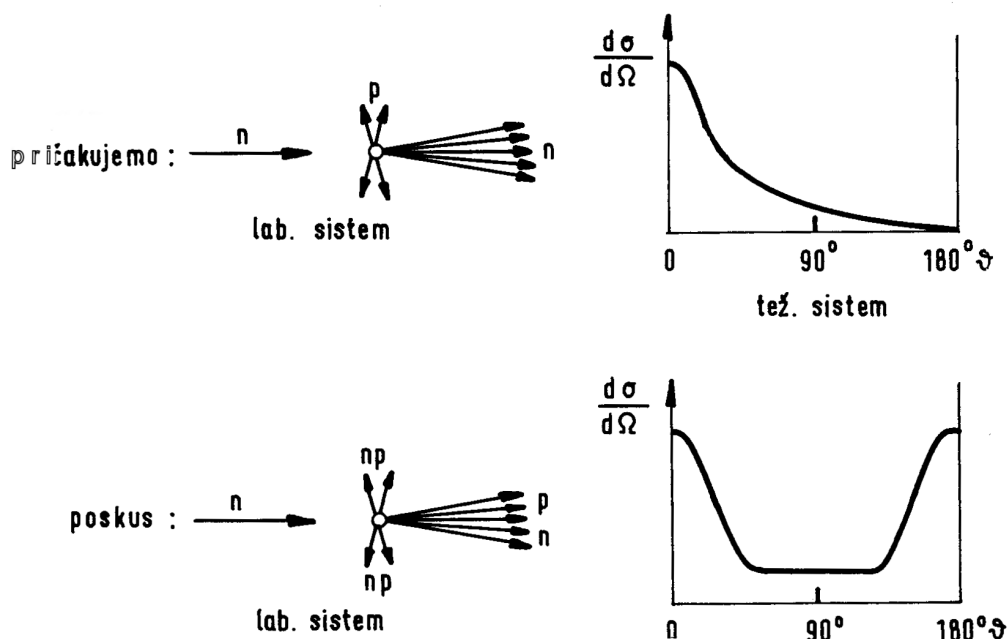


Slika 2.46: Odklon pri sipanju na potencialu s končno globino (oz. višino)

Poskus pa pokaže še enak stožec v smeri nazaj.

Če predpostavimo v sredini potenciala trdo odbojno sredico, si pa delca lahko izmenjata poljubno energijo. Toda tudi to ne razloži poskusa, kajti kotna porazdelitev sipanih biljardnih kroglic je izotropna in nima nikoli maksima v smeri nazaj.

Preostane nam samo še razlaga, da si proton in nevtron pri trku zamenjata identiteto. Projektilu se pri trku v plitkem potencialu le malo spremeni



Slika 2.47: Kotna porazdelitev pri sipanju visokoenergijskih nevtronov na protonih

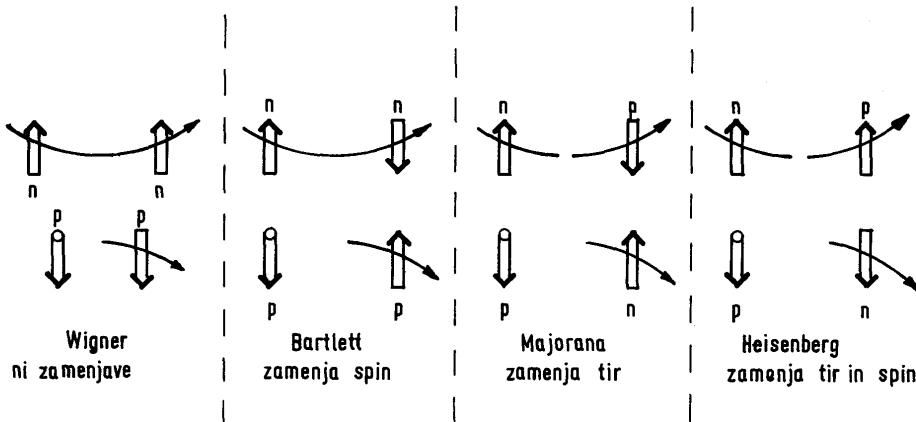
gibalna količina in leti v glavnem v smer naprej. Odrinjena tarča pa odleti v težiščnem sistemu v smer nazaj. Toda projektil — nevtron „ukrade“ pri trku protonu naboj in leti naprej v obliki protona. V smer nazaj torej letijo odrinjeni protoni (oropani naboja), ne pa nevtroni projektili.

Tak potencial, ki zamenja delcema identiteto, imenujemo *zamenjalni potencial*. En tip zamenjalnega potenciala smo že srečali: Bartlettov potencial zamenja pri trku delcema spina. V splošnem pa ima potencial, kot smo videli, tri učinke; delcema lahko pri trku spremeni:

- *smer* (sipanje)
- *spin* (klasična analogija: dva permanentna magnetka lahko zaradi medsebojnega navora drug drugega zasučeta)
- *notranje stanje* (pri tem si lahko delca zamenjata samo tir gibanja ali pa tir in spin — célo identiteto).

Jedrski potencial lahko potem zapišemo kot

$$\begin{aligned}
 V &= W(r) + B(r)P_s + M(r)P_r + H(r)P_rP_s \\
 &\approx V(r) \cdot (W + BP_s + MP_r + HP_rP_s)
 \end{aligned}$$



Slika 2.48: Sipanje brez zamenjave spina in tira ter z zamenjavo

Pri tem so W, B, M in H jakost Wignerjevega, Bartlettovega, Majoraninega in Heisenbergovega potenciala. Pri natančni analizi vzamemo vsakega za neodvisno funkcijo radija, pri približni analizi pa vzamemo za vse isto radialno obliko $V(r)$ in so W, M, B, H konstante. Operator P zamenja delcema spina; videli smo že; da ima v stanju $S = 1$ vrednost $P_s = 1$, v stanju antiparalelnih spinov $S = 0$ pa vrednost $P_s = -1$. Operator P_r zamenja delcema tira:

$$P_r \Psi(\vec{r}_1, s_1; \vec{r}_2, s_2) = \Psi(\vec{r}_2, s_1; \vec{r}_1, s_2)$$

Če gledamo le relativno gibanje, relativna koordinata drugega delca glede na prvega obrne pri zamenjavi smer: $P_r \psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$. Krogelne funkcije imajo to lastnost, da pri obrnitvi smeri za sod l ostanejo nespremenjene, za lih l pa spremenijo predznak:

$$P_r Y_{lm}(\vec{r}/r) = Y_{lm}(-\vec{r}/r) = (-1)^l Y_{lm}(\vec{r}/r)$$

Zato ima pri sodih l operator P_r vrednost $P_r = 1$, pri lih l pa je $P_r = -1$. Jedrski potencial je potem tako odvisen od kvantnih števil prizadetih nukleonov:

$$\begin{aligned}
 S = 1, \quad l = \text{sod}, \quad C &= W + B + M + H \\
 S = 1, \quad l = \text{lih}, \quad C &= W + B - M - H \\
 S = 0, \quad l = \text{sod}, \quad C &= W - B + M - H \\
 S = 0, \quad l = \text{lih}, \quad C &= W - B - M + H
 \end{aligned}$$

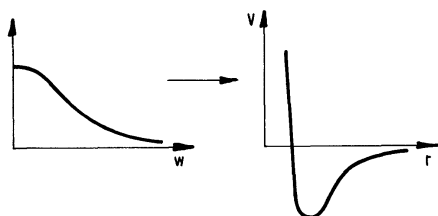
Da smo razložili močno sipanje nazaj, smo torej morali opustiti zahtevo, naj bo jedrski potencial odvisen le od razdalje med delcema ter njunih spinov in naj bo neodvisen od vrtilne količine, kot se za statični potencial spodobi.

Potencial je različen za sode in za lihe vrtilne količine. Še vedno pa lahko obdržimo predpostavko, da je potencial neodvisen od same vrednosti vrtilne količine.

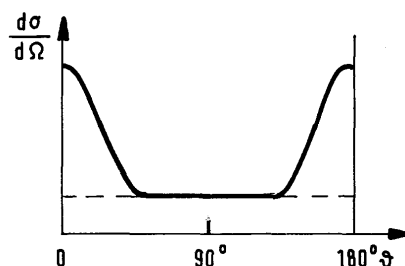
Potencial je enak za $l = 0, 2, 4, \dots$ in drugačen, toda enak za $l = 1, 3, 5, \dots$. Pri večini analiz se držijo te predpostavke, kajti natančnost meritev ni dovolj velika, da bi našli zanesljive razlike med njimi. Edino za razlikovanje med sodimi in lihimi l smo našli drastičen efekt, močno sipanje nazaj.

Radialna oblika potenciala

Eksperimentalno izmerimo sipalni presek kot funkcijo energije in iz te krivulje bi radi dobili drugo krivuljo — potencial kot funkcijo radija. Obratna analiza bi bila lažja. Če bi poznali potencial, bi pri vsaki energiji projektila rešili Schrödingerjevo enačbo in izračunali ustrezen sipalni presek. Tukaj pa moramo ugibati obliko potenciala in poizkušati, kdaj se izračunana krivulja sipalnega preseka bolje ujema z eksperimentom. Rezultat ni čisto enoličen, z nekoliko različnimi oblikami potenciala lahko dobimo enako dobro ujemanje z eksperimentalno krivuljo v okviru eksperimentalnih napak. Ker merimo le do energije $\sim 200\text{MeV}$, je ločljivost le $0,4\text{ fm}$ in so finejše podrobnosti v obliki potenciala tudi nedoločene ter zato poljubne.



Slika 2.49: Na radialno obliko potenciala sklepamo iz energijske odvisnosti preseka

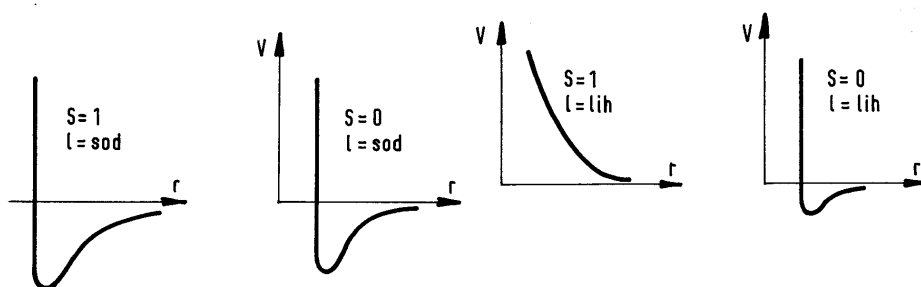


Slika 2.50: Kotna porazdelitev pri sipanju visokoenergijskih nevtronov na protonih kaže na trdo sredico

Meritve kažejo, da ima potencial v sredi do $r \sim 0,4\text{ fm}$ trdo odbojno sredico. To se vidi lepo iz kotne porazdelitve, ki je v širokem kotnem intervalu skoraj izotropna. Izotropna porazdelitev pa pomeni trk na trdi kroglici. Kotna porazdelitev je pravzaprav sestavljena iz treh delov. V smeri naprej prevlada izrazit maksimum zaradi sipanja na mehkem privlačnem potencialu. V smeri nazaj prevlada izrazit maksimum zaradi zamenjalnega sipanja na mehkem privlačnem potencialu. Pri srednjih kotih bi pričakovali $d\sigma/d\Omega$ skoraj nič, toda poskus pokaže znaten izotropni prispevek zaradi trde sredice.

Da je sredica precej trda in ne mehka, se vidi po tem, da njen prispevek k preseku ne pada z energijo. Če bi bila sredica mehka, bi namreč projektil z večjo energijo prodril globlje vanjo in bi opazil manjšo oviro.

Skiciral bom rezultate analize, ki so jo napravili v Yaleu („Yaleski potencial“). Na skici je narisani potencial v odvisnosti od razdalje nad delcema za obe kombinaciji spinov ter posebej za sode in lihe l .



Slika 2.51: „Yaleski potencial“

Približki za jedrski potencial

Nukleoni imajo v jedru povprečno kinetično energijo samo okrog 25 MeV in se le redko srečajo z visokimi energijami. Pri 25 MeV pa je de Broglieva valovna dolžina 1,3 fm in nukleoni ne „vidijo“ posebno natančno oblike potenciala. Zato smemo za marsikatero računo aproksimirati obliko potenciala z enostavnejšo krivuljo. V rabi so naslednje krivulje:

- $V(r) = -V_0$, $r < R$, ($V_0 = 36,2$ MeV, $R = 2,02$ fm),
 $V(r) = 0$, $r > R$
- $V(r) = -V_0 e^{-r/R} / (r/R)$, ($V_0 = 41,5$ MeV, $R = 1,58$ fm),
(To je Yukavin potencial, ki sledi iz mezonske teorije)
- $V(r) = -V_0 e^{-(r/R)^2}$, ($V_0 = 72,5$ MeV, $R = 1,47$ fm),
- $V(r) = +V_1 e^{-(r/R_1)^2} - V_2 e^{-(r/R_2)^2}$.

Pri takih približkih vzamemo isto radialno odvisnost za vse štiri tipe zamenjalnih potencialov. Ker smo za globino potenciala V_0 vzeli vrednost za devteron ($S = 1$, $l = \text{sod}$), moramo parametre posameznih zamenjalnih sil normirati $W + M + B + H = 1$. Te parametre določimo tako, da nam dajo vsaj v povprečju dobro ujemanje z eksperimentom. Včasih jih določimo tako, da nam dajo dobro ujemanje za sipanje (sistem dveh teles). Včasih

pa jih določimo tako, da nam dajo dobre rezultate pri večjih jedrih (sistem več teles). Vrednosti se seveda nekoliko razlikujejo. V drugem primeru so namreč vrednosti prirejene tako, da pavšalno kompenzirajo nekaj napak, ki jih prinesejo približiki v računu z več telesi. Sile, ki jih izpeljemo iz problema dveh teles, imenujemo *fenomenološke sile*, ki so prirejene za račune z več telesi in so dobre le za določeno območje jeder, pa imenujemo *efektivne*.

Pogosto se uporabljajo naslednje vrednosti za jakosti zamenjalnih sil:

Rosenfeldova mešanica:	$W = -0,13$	$M = 0,93$	$B = 0,47$	$H = -0,27$
Soperjeva mešanica:	0,28	0,45	0,30	-0,03

2.4.5 Sipanje protonov na protonih

Doslej smo študirali le silo med nevtronom in protonom. Zanima nas pa tudi sila med dvema protonoma. Ker nimamo vezanega stanja dveh protonov (${}^2\text{He}$), bomo vso informacijo dobili iz sipanja.

Sipanje protonov na protonih se precej razlikuje od sipanja nevtronov na protonih v dveh ozirih:

a) Poleg jedrskega potenciala imamo še odbojni elektrostatski potencial med protonoma. Če streljamo s protonom premajhne energije, ga elektrostatski potencial sploh ne pusti v bližino drugega protona. Proton se potem siplje samo na elektrostatskem potencialu, saj do jedrskega potenciala sploh ne pride. Da pride proton lahko znotraj dosega jedrskega potenciala, mora imeti po klasični oceni vsaj energijo $W \geq e_0^2/4\pi\epsilon_0 R = 1,44 \text{ MeV fm}/2 \text{ fm} = 0,7 \text{ MeV}$.

Informacijo o jedrskih silah nam potem da le sipanje protonov nad 0,7 MeV. S tem izgubimo priložnost za precizne interferenčne meritve pri nizkih energijah.

b) Na sipanje močno vpliva tudi Paulijev princip, kajti sedaj imamo opravke z dvema enakima delcema. Na noben način ne moremo ločiti, kateri se je sipal kot projektil in kateri je bil prej tarča.

Zato štejemo hkrati sipane in odrinjene protone. Klasično bi morali pač sešteti presek za sipani delec $d\sigma(\vartheta)/d\Omega$ in presek za odrinjeni delec

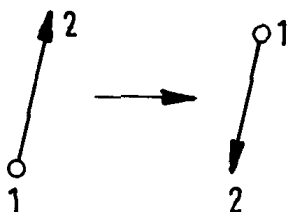
$$d\sigma(\vartheta_2)/d\Omega = d\sigma(\pi - \vartheta)/d\Omega$$

in bi dobili

$$d\sigma/d\Omega = |a(\vartheta)|^2 + |a(\pi - \vartheta)|^2.$$

Kvantnomehansko pa moramo sešteti sipalni amplitudi obeh delcev, kajti delca sta neločljiva. V kvantni mehaniki namreč seštevamo verjetnosti za pojave, ki se vsaj v principu lahko eksperimentalno razlikujejo; za neločljive

pojave pa seštevamo amplitude. Diferencialni presek je potem $d\sigma/d\Omega = |a(\vartheta) \pm a(\pi - \vartheta)|^2$. Znak $+$ ali $-$ je odvisen od medsebojne orientacije spinov. Celotna valovna funkcija mora biti antisimetrična na zamenjavo obeh protonov. Če sta spina paralelna ($S = 1$), je spinski del valovne funkcije simetričen in mora biti prostorski antisimetričen (znak $-$). Če sta spina antiparalelna ($S = 0$), pa je spinski del antisimetričen in mora biti prostorski simetričen (znak $+$).



Slika 2.52: Sprememba relativne koordinate \vec{r} pri zamenjavi delcev

Pri sistemu dveh teles ima zamenjava delcev isti efekt kot inverzija prostora. Pri zamenjavi delcev se namreč relativna koordinata obrne: $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. Po dogovoru namreč kaže relativna koordinata od delca 1 k delcu 2. Šele pri treh ali več delcih sta permutacija in inverzija dve bistveno različni operaciji.

Če je $S = 0$, mora biti prostorska valovna funkcija simetrična na zamenjavo delcev. Radialni del valovne funkcije se pri zamenjavi (in inverziji) ne spremeni, temveč samo kotni del $Y_{lm}(\vartheta, \phi)$. Krogelna funkcija je simetrična za sod l in antisimetrična za lih l . Torej dovoljuje Paulijev princip samo naslednja stanja:

$$S = 0, \quad l = 0, 2, 4, \dots$$

$$S = 1, \quad l = 1, 3, 5, \dots$$

Najprej si bomo ogledali sipanje protonov pri energijah 0,7–10 MeV. V tem območju proton že prodre v jedrski potencial drugega protona, vendar samo če ima tirno vrtilno količino $l = 0$. Če ima višji l , jedrski potencial zgreši in se siplje le na elektrostatskem potencialu. Na elektrostatskem potencialu se torej sipljejo zaradi njegovega dolgega dosega vsi krogelni valovi (vsi l), na jedrskem potencialu pa le $l = 0$. Pripomniti moram, da imamo v tem primeru zaradi Paulijevega principa na jedrskem potencialu le singletno sipanje ($S = 0$) in o tripletnem potencialu ne dobimo nobene informacije.

Sipalna amplitude za sipanje na elektrostatskem polju točkastega naboja je po Rutherfordu enaka $a(\vartheta) = e_0^2/4\pi\epsilon_0 \cdot 4W \sin^2(\vartheta/2)$. Jedrska sipalna amplituda pa je zaradi $l = 0$ izotropna: $a(\vartheta) = -a_0 e^{-i\delta}$. Pri tem je δ fazni premik: $\sin \delta = ka_0$. Diferencialni presek znaša potem:

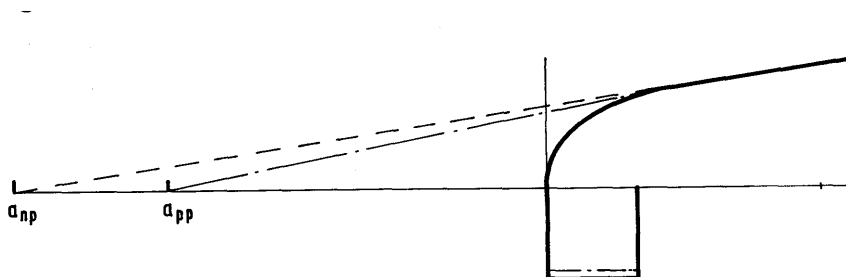
$$\begin{aligned}
S = 0, \quad d\sigma/d\Omega &= \left| \left\{ \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 4W \sin^2 \vartheta/2} - a_0 e^{-i\delta} \right\} + \left\{ \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 W \cos^2 \vartheta/2} - a_0 e^{-i\delta} \right\} \right|^2 \\
&= \left(\frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta/2} + \frac{2}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) \\
&\quad - \frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \frac{4a_0 \cos \delta}{\sin^2 \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2} + 4a_0^2 \\
S = 1, \quad d\sigma/d\Omega &= \left| \frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} - \frac{1}{\cos^2 \vartheta/2} \right) \right|^2 \\
&= \left(\frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \vartheta/2} + \frac{1}{\cos^4 \vartheta/2} - \frac{2}{\sin^2 \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2} \right).
\end{aligned}$$

Običajno sipljemo nepolarizirane protone na nepolariziranih protonih. Tedaj je 3/4 verjetnosti, da se srečata protona v stanju $S = 1$ in 1/4 verjetnosti, da se srečata v stanju $S = 0$. Ker se pojava ločita med sabo (če se potrudimo in uporabljamo analizator), moramo povprečiti verjetnosti in ne amplitude. Povprečni presek je potem

$$\begin{aligned}
d\sigma/d\Omega &= \left(\frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}} + \frac{1}{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} \right) \\
&\quad - \frac{e_0^2}{16\pi\epsilon_0 W} \frac{a_0 \cos \delta}{\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} + a_0^2
\end{aligned}$$

Ker je pri nizkih energijah vpliv jedrske sipalne amplitude zanemarljiv, izgubimo priložnost za interferenčne meritve na kristalih in molekulah. Zato pa imamo tu neko drugo interferenco — interferenco med elektrostatsko in jedrsko sipalno amplitudo, ki se kaže v kotni porazdelitvi. Ta interferenca nam omogoči, da iz kotne porazdelitve lahko razberemo dokaj natančno vrednost za sipalno amplitudo a_0 .

Meritve nam dajo $a_0 = -17,2$ fm. Pri sipanju n-p pa smo imeli za $S = 0$ vrednost $a_0 = -23,7$ fm. Ali to pomeni, da je sila p-p samo 3/4 toliko močna kot sila n-p? Ne, saj sipalna dolžina ni enostavno sorazmerna z globino potenciala. V obeh primerih imamo skoraj natanko četrto sinusoide znotraj potencialne jame. Zato je tangenta na meji zelo položna in je sipalna amplituda zelo velika ter negativna. Že majhna sprememba globine potenciala in s tem strmine tangente zelo močno spremeni sipalno dolžino. V tej situaciji je sipalna dolžina zelo občutljivo merilo za globino potenciala, kar je seveda ugodno. Navedenim vrednostim sipalne dolžine ustreza samo 1%



Slika 2.53: Že majhna razlika v globini singletnih potencialov povzroči veliko razliko sipalnih dolžin

razlike v globini potenciala. Potencial p-p ter p-n sta torej praktično enaka; potencial p-p je samo za 1% šibkejši.

Meritve pri višjih energijah nam povedo tudi potencial za lih l ($S = 1$). Povedo nam tudi nekaj o radialni obliki potenciala. V okviru natančnosti meritev in zanesljivosti analize že vedno lahko predpostavljamo, da se V_{np} in V_{pp} ujemata na 1%.

2.4.6 Enakost jedrskih sil za oba nukleona; izobarni spin

Enakost potenciala proton-proton ter nevtron-proton sugerira misel; da bo enak tudi potencial nevtron-nevtron. Tega pa je težko meriti, ker vezanega stanja dveh nevtronov (dinevtron) ni, sipanje nevtronov na nevtronih je pa težko izvesti. Tarč iz samih nevtronov namreč nimamo, sipanje curka nevtronov na drugem curku nevtronov pa da preslabe intenzitete, ker je gostota nevtronov v curku zelo majhna.

Meritve so napravljene le pri visokih energijah. Za tarčo vzamemo kar težki vodik. Pri visokih energijah smemo namreč vezavno energijo devterija zanemariti in si mislimo, da imamo tarčo iz mešanice prostih protonov in prostih nevtronov. Presek je potem vsota presekov za sipanje n-p ter n-n. Presek za sipanje n-p neodvisno izmerimo s sipanjem nevtronov na navadnem vodiku ter ga odštejemo. Rezultati so zaenkrat še precej nenatančni, vendar niso v nasprotju z domnevo o enakosti sil n-n ter n-p.

Zelo prepričljiv dokaz za enakost jedrskih sil za oba nukleona pa dobimo iz spektrov jeder od litija dalje. Ker nam da sistem dveh teles netočne rezultate, se ozremo k sistemu več teles, ki nam da v tem primeru odlično informacijo.

Poglejmo si najprej *zrcalna jedra*. Račun pokaže, da se izmerjeni vezavni energiji njunih osnovnih stanj razlikujeta le po elektrostatski energiji, ker ima eno več protonov kot drugo. Prispevka jedrske vezavne energije sta praktično enaka. Tudi energije, vrtilne količine in parnosti vzbujenih stanj presenetljivo dobro sovpadajo. Iz tega sklepamo, da je struktura obeh zrcalnih jeder ista, obe imata enako valovno funkcijo, le zamenjati moramo vse nevtrone s protoni in obratno. S tem zamenjamo vezi p-p z vezmi n-n in obratno. Dejstvo, da se s tem energija nič ne spremeni, dokazuje enakost sil p-p in n-n. Zrcalna jedra ne povedo ničesar o sili n-p, saj ostane vez n-p pri zamenjavi protonov z nevtroni nespremenjena in dá itak isti prispevek za obe zrcalni jedri. Vez n-p je namreč isto kot vez p-n.

Ker je analiza sipanja pokazala tudi enakost sil n-p in p-p, sklepamo, da bi morali imeti vsi izobari enake spektre vzbujenih stanj, ne le zrcalna jedra. Če so jedrske sile zares enake za oba nukleona, je za strukturo in energijo jedra čisto vseeno, iz katerih nukleonov je sestavljeno. Moralo bi biti vseeno, ali je malo več protonov ali malo več nevtronov. Pričakovali bi tako sliko:

V resnici pa ima srednji izobar najnižjo vezavno energijo osnovnega stanja. Sosedje imajo višje osnovno stanje, tudi če upoatevamo popravek zaradi razlike v elektrostatski energiji. Srednji izobar ima največ nivojev, pri sosedih pa dobimo viis, kot da nekateri nivoji manjkajo.

Razlog za to je Paulijev princip. Proton in nevtron sta kot različna delca lahko v istem stanju, dva protona ali dva nevtrona pa ne moreta biti. Pri pre-

in obeh sosedih.

Stanja sosednjih izobarov, ki imajo enako valovno funkcijo in energijo, tvorijo tako imenovane *izobarne multiplete*. Zaradi enake valovne funkcije imajo člani istega izobarnega multiplleta ista vsa kvantna števila (npr. vrtilno količino, parnost itd.). Razlikujejo se le po Z (po številu protonov in nevtronov). Stanja jedra lahko karakteriziramo z novim kvantnim številom, ki pove, kakšnemu izobarnemu multipletu to stanje pripada. Novo kvantno število bomo vpeljali po analogiji s spinom. Če so sile neodvisne od orientacije spinov posameznih delcev, je celotni spin S dobro kvantno število. Ker energija sistema ni odvisna od orientacije spina S v prostoru, je stanje sistema $2S+1$ krat degenerirano glede na možne vrednosti magnetnega kvantnega števila $-S \leq S_3 \leq S$. Stanja z istim S in različnimi S_3 tvorijo spinski multiplet. Člani izobarnega multiplleta so tudi med seboj degenerirani glede na možne vrednosti števila protonov Z . Vpeljimo novo kvantno število T tako, da bo degeneracija izobarnega multiplleta $2T + 1$. Izobarnemu singletu pripišemo $T = 0$, izobarnemu dubletu $T = 1/2$, tripletu $T = 1$ itd. Po analogiji s spinom bomo novo kvantno število imenovali *izobarni spin* ali krajše *izospin*. Izospin nam torej pove, pri kolikih sosednjih izobarah dani nivo nastopa in ga na ta način tudi eksperimentalno določimo zgolj s primerjavo energijskih nivojev sosednjih izobarov.

Člani istega izobarnega multiplleta se razlikujejo po Z v celoštevilčnih korakih. Pri tem je $A/2 - T \leq Z \leq A/2 + T$. Zaradi analogije s spinom vpeljimo namesto Z raje $T_3 = Z - A/2$, ki leži v mejah $-T \leq T_3 \leq T$. T_3 seveda ni nobeno novo neodvisno kvantno število, le nadomeščal bo Z v našem formalizmu. Tipični energijski nivoji jeder imajo po tem tako zaporedje:

Degeneracija ni čisto popolna zaradi elektrostatske sile, ki ni neodvisna od vrste nukleona (deluje samo med protonoma) in zaradi $\sim 1\%$ razlike med potenciali p-p, n-p ter n-n. Zaradi elektrostatske energije so nivoji z višjim Z premaknjeni navzgor. To lahko precej dobro korigiramo, če vsem stanjem odštejemo elektrostatsko energijo enakomerno nabite kroglice in opazujemo le „jedrsko energijo“. Toda tudi ta ni čisto ista pri vseh članih izobarnega multiplleta, ker elektrostatska energija in drobne razlike med V_{pp} , V_{np} in V_{nn} za spoznanje spremenijo tudi valovno funkcijo. Tipična odstopanja med „degeneriranimi“ nivoji so 0,1–0,5 MeV.

Za ilustracijo izobarnega spina si pogledjmo še, zakaj je pri sistemu dveh nukleonov vezan le devteron, ne pa dinevtron in ${}^2\text{He}$. Jedrske sile lahko vežejo nukleona le v stanju $l = 0$, $S = 1$. V tem stanju sta prostorska in spinska valovna funkcija simetrični, zato to stanje lahko realiziramo z različnima delcema (devteron), ne pa z enakima (dinevtron, ${}^2\text{He}$). To stanje ima torej izospin 0. Prvo vzbujeno stanje bi imelo $l = 0$, $S = 0$ in bi bilo

antisimetrično. Zato bi lahko nastopalo pri vseh treh jedrih ($T = 1$), vendar ni več vezano.

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{l = 0, S = 0}{\quad} & \frac{l = 0, S = 0}{l = 0, S = 1} & \frac{l = 0, S = 0}{\quad} \\
 \quad {}^2\text{n} & \quad {}^2\text{H} & \quad {}^2\text{He} \\
 T_3 = -1 & T_3 = 0 & T_3 = 1
 \end{array}$$

Formalna vpeljava izobarnega spina

Izospin vpeljemo formalno tako, da vzamemo proton in nevtron kot dve notranji (izospinski) stanji istega delca — nukleona. Kot je nukleon lahko v stanju spin \uparrow ali spin \downarrow , je tudi lahko v stanju izospin \uparrow (proton) ali izospin \downarrow (nevtron). Ker tvorita ti stanji izobarni dublet, jima pripišemo velikost izospina $t = 1/2$ in njegovo tretjo komponento $t_3 = +1/2$ za proton ter $t_3 = -1/2$ za nevtron. Matematična izpeljava je naprej ista kot pri spinu in kot pri katerikoli količini, ki ima samo dve diskretni kvantni stanji. Te izpeljave smo najbolj vajeni pri spinu in se je bomo zato držali.

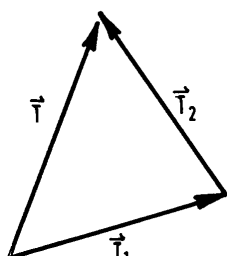
Vpeljimo sedaj še operatorje izospina. Ker imamo samo dve kvantni stanji, so samo štirje linearno neodvisni operatorji, ki napravijo iz poljubnega od dveh začetnih stanj poljubnega od dveh končnih stanj. Običajno vzamemo naslednje štiri operatorje:

$$\begin{array}{llll}
 1|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, & 1|\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle; & 1|p\rangle = |p\rangle, & 1|n\rangle = |n\rangle \\
 s_x|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle, & s_x|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle; & t_x|p\rangle = \frac{1}{2}|n\rangle, & t_x|n\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle \\
 s_y|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}i|\downarrow\rangle, & s_y|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}i|\uparrow\rangle; & t_y|p\rangle = \frac{1}{2}i|n\rangle, & t_y|n\rangle = -\frac{1}{2}i|p\rangle \\
 s_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\downarrow\rangle, & s_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\uparrow\rangle; & t_z|p\rangle = \frac{1}{2}|n\rangle, & t_z|n\rangle = -\frac{1}{2}|p\rangle
 \end{array}$$

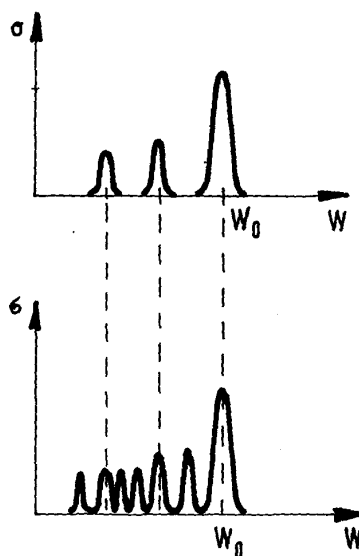
Za primerjavo smo zapisali operatorje za spin in za izospin. Obojniso popolnoma analogni in tvorijo vektor: \vec{s} in \vec{t} . Kot je velikost spina $\vec{s}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$, je tudi $\vec{t}^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$. Izospin ni vektor v navadnem prostoru, temveč v nekem abstraktnem prostoru. Zasuk jedra v navadnem prostoru spremeni tretjo komponento spina. Zasuk jedra v abstraktnem prostoru pa spremeni tretjo komponento izospina. Zasuk jedra v abstraktnem prostoru ima nazoren pomen: nadomeščanje protonov z nevtroni.

Pri sistemu več delcev je izospin vektorska vsota izospinov posameznih delcev: $\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2 + \dots$. Pri tem veljajo enaka pravila za sklapanje kot pri spinu. Komponenta x in komponenta y izospina imata po principu nedoločenosti pričakovano vrednost 0, ker sta „razmazani“ po vseh smereh. Komponenta z zavzame bodisi celoštevilčne bodisi polovične vrednosti. Velikost vektorja izospina zavzame vrednost $|\vec{T}| = \sqrt{T(T+1)}$, kjer je T celo ali polovično število; običajno imenujemo „velikost“ izospina kar količino T . Če

sklopimo dva podsistema ($\vec{T} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$), se komponenti z enostavno seštejeta ($T_z = T_{z1} + T_{z2}$), velikosti pa se seštejeta po trikotniškem pravilu: T lahko zavzame vse vrednosti med $T_1 + T_2 \geq T \geq |T_1 - T_2|$.



Slika 2.55: Sklapanje izobarnih spinov



Slika 2.56: Primerjava vzbujenih stanj ^{12}C , ki jih vzbudimo z neelastičnim sipanjem delcev alfa (zgoraj) oz. protonov (spodaj)

Posplošitev Paulijevega principa

Zaradi enostavnosti se bomo omejili na sistem dveh delcev. S ψ bomo označili prostorsko-spinski del valovne funkcije, s p (oz. n) pa izospinski del. Pri tem pove izospinski del valovne funkcije, ali sta nukleona v stanju „proton“ ali v stanju „nevtron“.

Če imamo dva protona ali dva nevtrona, mora biti po Paulijevem principu prostorsko-spinska valovna funkcija antisimetrična na zamenjavo delcev. Če imamo dva različna delca (proton in nevtron), ni a priori potrebna nobena simetrija. Toda proton in nevtron imata praktično enako maso in nastopata simetrično v potencialu, tako da je Hamiltonov operator simetričen na zamenjavo: $H(1, 2) = H(2, 1)$. Zaradi tega ima tudi v tem primeru prostorsko-spinska valovna funkcija določeno simetrijo. Biti mora bodisi antisimetrična bodi simetrična: $\psi(1, 2) = \pm\psi(2, 1)$. To se vidi na naslednji način:

$$H(1, 2)\psi(1, 2) = E\psi(1, 2),$$

ali če delca zamenjamo $H(2, 1)\psi(2, 1) = E\psi(2, 1)$,

(1,2) in (2,1) sta potem rešitvi istega Hamiltonovega operatorja z isto lastno vrednostjo E . Ker običajno nimamo degeneracije, morata $\psi(1, 2)$ in $\psi(2, 1)$ predstavljati isto stanje in se smeta torej razlikovati kvečjemu po predznaku. Podobno ima tudi prostorsko-spinska valovna funkcija sistema več delcev določeno simetrijo, če je Hamiltonov operator simetričen na zamenjavo vseh delcev. To pa je v jedru izpolnjeno zaradi enakosti jedrskih sil med obema vrstama nukleonov.

Če pišemo še izospinski del valovne funkcije, lahko zapišemo sistem proton-nevtron na dva načina: $\psi(1, 2)p(1)n(2)$ ali $\psi(1, 2)p(2)n(1)$. Oboje predstavlja seveda isto stanje, saj je vseeno, ali imenujemo proton „prvi delec“ in nevtron „drugi delec“ ali obratno. Zaradi enoličnosti zapisave se dogovorimo naslednje: kadar je ψ simetrična, vzemimo za pn antisimetrično kombinacijo; kadar pa je ψ anisimetrična, vzemimo za pn simetrično. Celotna (prostorsko-spinsko-izospinska) valovna funkcija je potem vedno antisimetrična. To je pripraven dogovor, ki formalno razširi Paulijev princip na obe vrsti nukleonov.

Če je ψ_a antisimetrična, lahko to stanje realiziramo z dvema protonoma, dvema nevtronoma ali s protonom in nevtronom. Izospin je torej $T = 1$:

$$T = 1 \begin{cases} T_z = 1 & \psi_a(1, 2)p(1)p(2) \\ T_z = 0 & \psi_a(1, 2)[p(1)n(2) + p(2)n(1)]/\sqrt{2} \\ T_z = -1 & \psi_a(1, 2)n(1)n(2) \end{cases}$$

Če pa je ψ simetrična, lahko to stanje realiziramo le s protonom in nevtronom ($T = 0$)

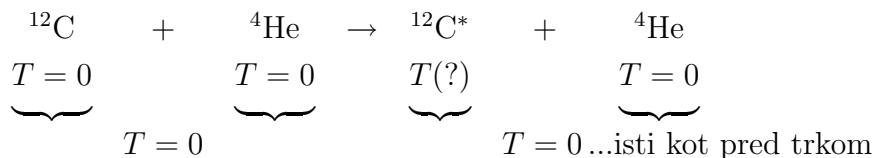
$$T = 0 \quad T_z = 0 \quad \psi_s(1, 2)[p(1)n(2) - p(2)n(1)]/\sqrt{2}$$

Ohranitev izobarnega spina

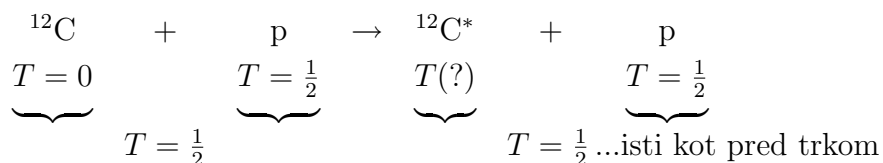
Ker so jedrske sile neodvisne od vrste nukleona, se zamenjava protona z nevtronom v Hamiltonovem operatorju ne pozna. Hamiltonov operator torej komutira z operatorjem izospina, ki zamenjuje protone z nevtroni (ali obratno). Zato je izospin konstanta gibanja. Ohranja se tudi pri jedrskih procesih.

Poglejmo si primer! Jedro ^{12}C lahko vzbujaemo z neelastičnimi trki. Neelastično sipani delec odleti z energijo $W_0 - E$, kjer je W_0 začetna energija projektila, E pa energija vzbujenega stanja ^{12}C . Če vzbujaemo s ^4He , ki ima izospin nič, lahko zaradi ohranitve izospina vzbudimo le tista vzbujana stanja, ki imajo isti T kot osnovno stanje. Če pa vzbujaemo s protonom

($t = \frac{1}{2}$) lahko zaradi vektorskega seštevanja izospinov spremenimo pri trku izospin za 1 in vidimo mnogo več vzbujenih stanj.



Torej mora biti $T(?) = 0$



Torej je lahko $T(?) = 0$ ali 1.

S primerjavo obeh spektrov sipanih delcev lahko torej razpoznamo, katera vzbujena stanja imajo $T = 0$ in katera imajo $T = 1$. To je *dinamični način določanja izobarnega spina*.

2.4.7 Magnetni dipolni moment in električni kvadrupolni moment devterona — necentralne sile

Doslej še nismo izkoristili dveh informacij o jedrskih silah, ki nam jih da devteron: $q = +0,273 \text{ fm}$

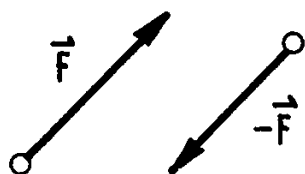
$$\mu = 0,85647\mu_j$$

Preseneča nas dejstvo, da je $q \neq 0$. Če ima devteron v osnovnem stanju res vrtilno količino $l = 0$, bi morala biti porazdelitev delcev izotropna, saj je kotni del valovne funkcije Y_{00} neodvisen od kota. Električni kvadrupolni moment bi moral biti potemtakem nič. Skrajno neverjetno pa je, da je naša predpostavka o $l = 0$ napačna in da je $l = 2$, saj ima stanje $l = 2$ mnogo višjo rotacijsko energijo kot stanje $l = 0$.

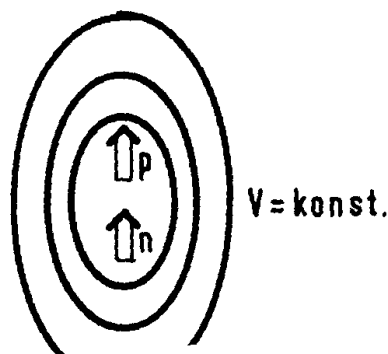
Razlaga je naslednja. Jedrski potencial je nekoliko deformiran, zato se nekoliko deformira tudi porazdelitev nukleonov v devteronu. Jedrske sile so torej *necentralne*, delujejo nekoliko mimobežno. Ekvipotencialne ploskve niso več krogle, temveč ovaloidi. Ker pokaže eksperiment, da je porazdelitev nukleonov v devteronu podolgovata ($q > 0$), sklepamo, da so tudi ekvipotencialne ploskve podolgovati ovali.

Glede na kaj pa se ekvipotencialne ploskve lahko orientirajo, saj so vse smeri v prostoru enakovredne? Orientirajo se lahko glede na rezultanto spina \vec{S} obeh delcev. Ekvipotencialne ploskve so torej podolgovate v smeri \vec{S} . Če pa sta nukleona antiparalelna ($S = 0$), nimamo nobene privilegirane smeri

in tedaj ekvipotencialne ploskve ne morejo biti podolgovate, saj se ne bi imele kam orientirati. Jedrske sile so torej necentralne le v paralelnem stanju nukleonov ($S = 1$), v stanju $S = 0$ pa so centralne. Ker ima devteron $S = 1$, pri njem opazimo necentralnost sil.



Slika 2.57: Necentralne sile



Slika 2.58: Ekvipotencialne ploskve necentralnega potenciala

Jedrski potencial lahko potem zapišemo kot vsoto centralne in necentralne komponente:

$$V = V_c(r) + V_{nc}(r)[(\vec{s}_1\vec{r}/r) \cdot (\vec{s}_2\vec{r}/r) - \vec{s}_1\vec{s}_2/3]$$

Kotna odvisnost necentralnega potenciala ima točno isto obliko kot potencial okrog točkastega električnega ali magnetnega dipola. Izkaže se namreč, da je to edina možna kotna oblika, če imamo na razpolago samo vektorje \vec{s}_1 , \vec{s}_2 in \vec{r} . Iz teh treh vektorjev ne moremo sestaviti nobenega skalarja, ki bi opisoval drugačno kotno odvisnost. (O tem se prepričajte sami!). Potencial pa mora biti skalar, saj ni nobena smer prostora samega privilegirana.

Ker večina pojavov ni močno odvisna od ovalnosti ekvipotencialnih ploskev, ne bom navajal kvantitativnih rezultatov, koliko znaša necentralni del potenciala. Običajno na necentralnost potenciala kar pozabimo. Posledice necentralnih sil si bomo ogledali le na devteronu.

Tirna vrtilna količina je dobro kvantno število le, če je potencial sferno simetričen. V podolgovatem potencialu dobimo za rešitev superpozicijo raznih tirlnih vrtilnih količin. Ker ima devteron celotno vrtilno količino $l = 1$, pridejo v poštev naslednje kombinacije:

$$\begin{aligned} l = 0, & \quad S = 1 \quad \dots \quad I = 1 \\ l = 1, & \quad S = 0 \quad \dots \quad I = 1 \\ l = 1, & \quad S = 1 \quad \dots \quad I = 1 \\ l = 2, & \quad S = 1 \quad \dots \quad I = 1 \\ l = 3, & \quad \dots \quad \text{ne gre več} \end{aligned}$$

Komponenti z $l = 1$ moramo izključiti, ker ima devteron pozitivno parnost, stanja z lihimi l pa imajo negativno parnost. Ker je parnost dobro kvantno število, smemo sestaviti valovno funkcijo samo iz komponent z isto parnostjo. Valovno funkcijo devterona potem lahko zapišemo kot $\psi = a\psi_0 + b\psi_2$, pri čemer je ψ_0 komponenta z $l = 0$ ter ψ_2 komponenta z $l = 2$. Pričakujemo, da je komponenta ψ_0 mnogo močnejša od komponente ψ_2 zaradi nižje rotacijske energije.

Amplitudi a in b lahko določimo iz izmerjenega kvadrupolnega momenta.

$$q = \langle \psi | q | \psi \rangle = a^2 \langle \psi_0 | q | \psi_0 \rangle + ab \langle \psi_0 | q | \psi_2 \rangle + ba \langle \psi_2 | q | \psi_0 \rangle + b^2 \langle \psi_2 | q | \psi_2 \rangle$$

Pri tem je $\langle \psi_0 | q | \psi_0 \rangle = 0$, ker je stanje $l = 0$ krogelno simetrično. Da je ta matrični element 0, se vidi tudi iz trikotniškega pravila (glej poglavje o kvadrupolnem momentu!).

$$\langle \psi_0 | q | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | q | \psi_0 \rangle \approx 0,7 \text{ fm}^2.$$

To vrednost nam da račun, če vzamemo za ψ_0 in ψ_2 rešitvi v pravokotni potencialni jami. Zadnji člen smemo zanemariti, ker je b^2 majhna količina.

$$q = 2ab \cdot 0,7 \text{ fm}^2$$

Če vstavimo eksperimentalni podatek za q in upoštevamo $a^2 + b^2 = 1$, dobimo

$$a = 0,98, \quad b = 0,2.$$

Amplitudi a in b lahko določimo tudi iz magnetnega dipolnega momenta. Če bi bil $l = 0$, bi bil magnetni moment zaradi paralelnosti spinov kar vsota protonovega in nevtronovega:

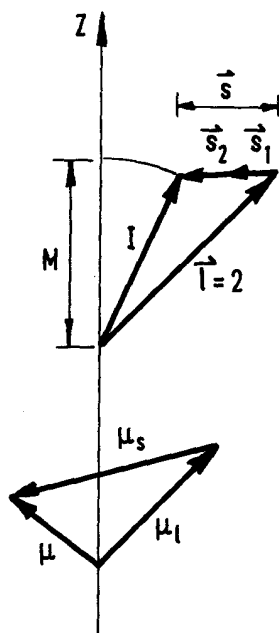
$$\begin{aligned} \mu_p &= +2,79353\mu_j \\ \mu_n &= -1,91354\mu_j \\ \mu_p + \mu_n &= +0,87999\mu_j \\ \text{eksperiment : } \mu_d &= +0,85737\mu_j \\ \text{razlika :} &= -0,02262\mu_j = 3\%. \end{aligned}$$

Razlika je sicer majhna, toda znatno izven okvira napake, saj je meritev izredno precizna. Vzrok za razliko je spet primes stanja z $l = 2$.

$$\mu = \langle \Psi | \mu | \Psi \rangle = a^2 \langle \psi_0 | \mu | \psi_0 \rangle + ab \langle \psi_0 | \mu | \psi_2 \rangle + ba \langle \psi_2 | \mu | \psi_0 \rangle + b^2 \langle \psi_2 | \mu | \psi_2 \rangle.$$

Pri tem je $\langle \psi_0 | \mu | \psi_0 \rangle = \mu_p + \mu_n$, ker sta spina paralelna, medtem ko je $\langle \psi_0 | \mu | \psi_2 \rangle = \langle \psi_2 | \mu | \psi_0 \rangle = 0$ po trikotniškem pravilu; μ kot vektorski operator namreč ne more vezati dveh stanj, katerih l se razlikuje za 2. Zadnji matrični element bomo izračunali po semiklasičnem receptu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_j} &= \langle \psi | \mu | \psi_2 \rangle = (g_l \cdot \vec{l} / |l| + g_s \cdot \vec{S} / |S|) \cdot M / |l| \\ &= g_l \{-S(S+1) + I(I+1) + l(l+1)\} / 2I(I+1) \\ &+ g_s \{-l(l+1) + I(I+1) + S(S+1)\} / 2I(I+1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6/4 + 0,88 \cdot (-6 + 2 + 2)/4 = 0,31 \end{aligned}$$



Slika 2.59: Sklapanje vrtilnih količin in magnetnih momentov

Pri tem smo vzeli za $g_l = \frac{1}{2}$, ker od vrtilne količine l pripada pol protonu, pol nevtronu; k tirnemu magnetnemu momentu pa prispeva le proton. Za g_s pa smo vzeli $\mu_p + \mu_n$, ker sta tudi v stanju $l = 2$ spina obeh delcev med seboj paralelna.

$$\mu - (\mu_p + \mu_n) = (a^2 - 1)(\mu_p + \mu_n) + b^2 \cdot 0,31\mu_j$$

$$\begin{aligned} &= b^2(-\mu_p - \mu_n + 0,31\mu_j) = -0,57\mu_j b^2 \\ &= -0,2262\mu_j \text{ (eksperiment)} \end{aligned}$$

Iz tega dobimo $b^2 = 0,040$, $b = 0,20$. To je isti rezultat, kot nam ga je dal električni kvadrupolni moment. To dodatno argumentira pravilnost naše sedanje slike o devteronu.

Poglavje 3

Zgradba jedra

3.1 Osnovno stanje – model jedrske snovi

3.1.1 Sistematika vezavnih energij

Jedro je sistem več nukleonov, ki jih vežejo jedrske sile. Ker problema več teles ne znamo točno rešiti, potrebujemo modele. V modelu primerjamo jedro z nekim drugim fizikalnim sistemom, ki ga znamo opisati. Jedro ima npr. nekaj podobnosti s kapljico tekočine, mehurčkom plina, atomom itd. in lahko sestavimo ustrezne modele. Vsak model razloži nekaj lastnosti jedra dobro, druge pa slabo. Čim več lastnosti nek model razloži, za tem boljšega ga štejemo.

Sistem več teles imenujemo *snov*, če sta ob danih zunanjih pogojih (npr. temperature in pritisku) volumen in energija sistema sorazmerna s številom delcev. Pri jedru so meritve pokazale, da sta volumen in vezavna energija res približno sorazmerna s številom nukleonov. Zato smemo pričakovati nekaj uspeha od modela, v katerem obravnavamo jedro kot snov.

Zaradi velike gostote — nukleoni so stalno znotraj potenciala svojih sosedov in se stalno prerivajo — najbolj ustreza opisu jedra tekoče agregatno stanje.

Tudi potencial med nukleoni je po obliki podoben Van der Waalsovemu potencialu, ki veže molekule v tekočino. V sredi ima trdo odbojno sredico, nato pa privlačno območje kratkega dosega.

Nekaj uspeha so dosegli tudi s „plinastim jedrom”. Veliki gostoti bi ustrezala tudi trdna snov, vendar zaradi velike de Broglijeve valovne dolžine nukleoni niso kaj prida lokalizirani. Tudi trda sredica jedrskih sil ni dovolj široka, da bi prisilila nukleone k lokalizaciji. Zato je „kristal” zelo nepopoln in le maloštevilne lastnosti uspešno popišemo z modelom kristalčka.

Natančnost modela jedrske snovi je omejena zlasti zato, ker je jedro pre-

majhen košček snovi. V običajni kapljici imamo $\sim 10^{20}$ molekul, v jedrih pa le 1–250 nukleonov. Zakoni velikih števil v jedru ne veljajo dobro. Posamezna jedra se precej razlikujejo med seboj, do izraza pridejo njihove individualne lastnosti. Vezavna energija in druge količine precej skačejo od jedra do jedra. Zaradi majhnega števila so torej fluktuacije znatne. Z modelom jedrske snovi lahko opišemo le tiste lastnosti, ki se gladko spreminjajo od jedra do jedra. Vezavno energijo in druge količine moramo povprečiti preko več sosednjih jeder, da izgledimo fluktuacije. Na ta način se odpovemo opisovanju izrazitih individualnih lastnosti jedra (po čemer se jedro razlikuje od svojih sosedov).

Najprej bomo napravili sistematiko vezavnih energij, ki nam bo dala najznačilnejše lastnosti „jedrske snovi“.

Masa jedra je za toliko nižja od skupne mase sestavnih delov, kolikor znaša vezavna energija. Po definiciji je vezavna energija W vezanega sistema negativna in znaša

$$\begin{aligned} m &= Zm_p + (A - Z)m_n + W/c^2 \\ M &= Zm_p(A - Z)m_n + Zm_e + W/c^2 + \underbrace{W_{el}/c^2}_{\text{zanemarimo}} \\ W &= (M - ZM_H - (A - Z)m_n)c^2 \end{aligned}$$

Pri tem smo pisali z m maso golega jedra, z M pa njegovo atomsko maso.

Merjenje mase jedra je torej važno, ker nam da vezavno energijo jedra. Meritve so pokazale, da je specifična vezavna energija za večino jeder med 7,5 in 8,6 MeV, torej $W/A = -8 \pm 0,6$ MeV. Pri stabilnih jedrih dobimo naslednjo odvisnost specifične vezavne energije od števila nukleonov (slika 3.1).

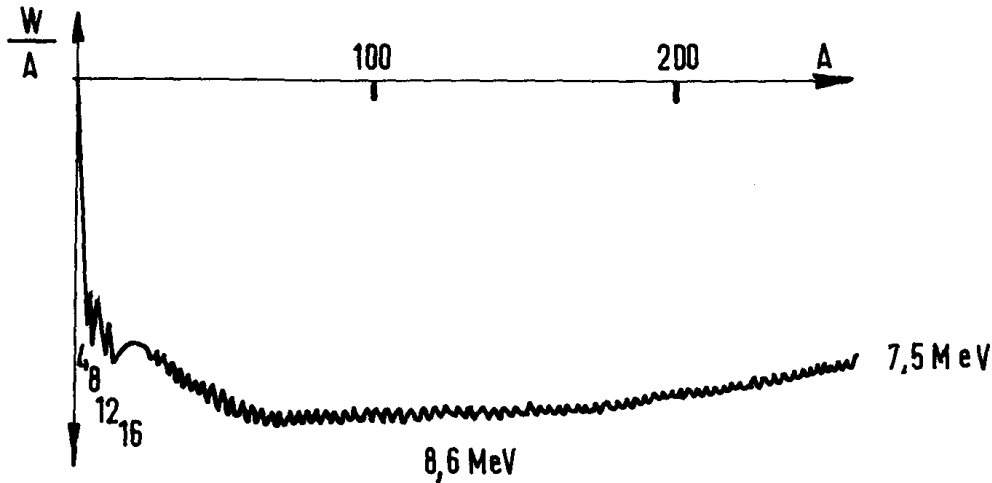
Če sistematsko pregledamo mase (vezavne energije) vseh znanih jeder, opazimo naslednje značilne lastnosti.

(i) $W \propto A$

Specifična vezavna energija je skoraj neodvisna od števila nukleonov. To kaže, da so jedrske sile kratkega dosega (doseg $\ll r_{\text{jedra}}$). Med seboj se privlačijo le sosedje. Ker ima vsak nukleon enako sosedov v velikem ali v majhnem jedru, prispeva enako k vezavni energiji. Pri silah kratkega dosega je $W \propto A$; pri silah dolgega dosega pa bi se privlačil vsak delec z vsakim drugim in bi potencialna energija naraščala s številom parov ($W \propto n(n - 1)/2$).

(ii) Površinska energija

Jedra z majhnim A so nekoliko slabše vezana. Vzrok za to so nukleoni na površini, ki imajo manj sosedov in zato manj prispevajo k negativni potencialni energiji. Ker je takih nukleonov relativno več pri lahkih jedrih, se tam ta efekt najbolj pozna.



Slika 3.1: Specifična vezavna energija stabilnih jeder

(iii) Elektrostatska energija

Tudi pri velikih A začne $|W/A|$ padati. Tega je kriva odbojna elektrostatska energija med protoni. Ker imajo elektrostatske sile dolg doseg, raste $W_{el} \propto Z^2$, kar se pozna zlasti pri težkih jedrih.

(iv) Lastnosti zrcalnih jeder

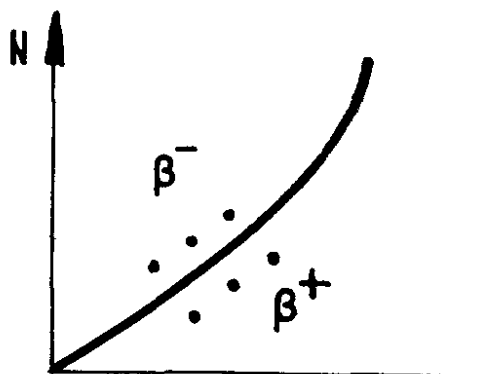
To so taka jedra, ki imajo zamenjano število protonov in število nevtronov, npr. $^{17}_8\text{O}$ in $^{17}_9\text{F}$ sta med seboj zrcalna. Zrcalni jedri imata skoraj isto vezavno energijo in sta tudi po ostalih lastnostih (vrtilna količina, lega vzbujenih stanj) zelo podobni. Razliko v vezavni energiji lahko dokaj točno razložimo z elektrostatsko energijo med protoni, ki je večja za $Z + 1$ protonov kot za Z protonov. Radij jedra, ki ga moramo predpostaviti za račun elektrostatske energije, se lepo sklada z radijem določenim po drugih metodah.

Enakost jedrske vezavne energije pri zrcalnih jedrih kaže, da je sila p-p ista kot sila n-n. Pri zrcaljenju se namreč vse vezi p-p nadomestijo z vezmi n-n in obratno. Pri tem se valovna funkcija in vezavna energija ne bosta spremenili le, če sta sili v obeh primerih enaki.

(v) Krivulja stabilnih jeder

Lahka stabilna jedra imajo enako protonov kot nevtronov. Pri težjih jedrih pa je nekoliko več nevtronov, ker so protoni zaradi odbojnih elektrostatskih sil neprijetni. Razmerje N/Z doseže pri ^{235}U vrednost 1,55.

(vi) Parjenje



Slika 3.2: Krivulja stabilnih jeder

Zelo stabilna in močno vezana so jedra s sodim številom protonov in sodim številom nevtronov. Srednje dobro so vezana sodo-liha jedra, kjer je enih sodo, drugih pa liho. Liho-liha jedra pa so slabše vezana. To lahko še podkrepimo z naslednjo statistiko:

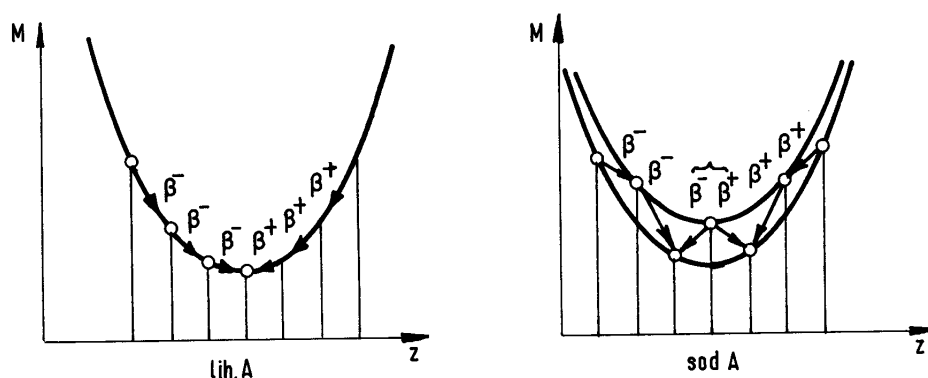
sodo Z - sodo N ...	eksistira	162	stabilnih jeder,
sodo Z - liho N ...		55	
liho Z - sodo N ...		53	
liho Z - liho N ...		4	(${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$, ${}^{14}_7\text{N}$)

Protoni in nevtroni kažejo torej izrazito tendenco, da se vežejo vsaki zase v pare.

(vii) Lastnosti sosednjih izobarov

Vezavne energije sosednjih izobarov letijo precej dobro na paraboli. To ni kakšen poseben fizikalni pojav, saj izgleda vsaka krivulja okrog minima kot parabola. Značilno je le, kako daleč je še podobna paraboli. Ker poznamo le jedra, ki so razmeroma blizu stabilnim izobarom, kaže takšno ujemanje le to, da se vezavna energija jedra kolikor toliko gladko spreminja s spremembo razmerja N/Z . To pa je morda argument za model jedrske snovi.

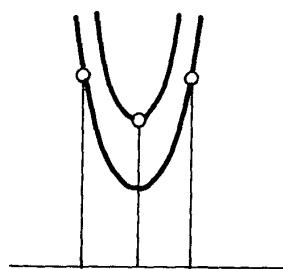
Parabola je pri lahkih jedrih ozka, pri težkih jedrih pa široka. Pri sodem A moramo zaradi parjenja vzeti pravzaprav dve paraboli, eno za sodo-sode, drugo višjo pa za liho-lihe izobare. V diagramu običajno raje narišemo maso kot vezavno energijo, ker je kriterij za stabilno jedro minimalna atomska masa in ne minimalna vezavna energija.



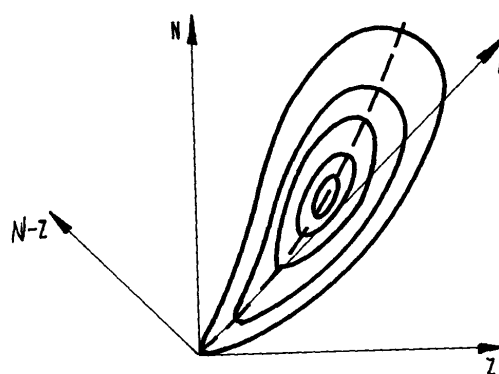
Slika 3.3: Mase sosednjih izobarov

Če pogledamo gornja diagrama, nam ni težko razumeti naslednjih lastnosti:

- Vsa jedra z lihimi A imajo samo en stabilen izobar.
- Jedra s sodnimi A imajo lahko dva ali več stabilnih izobarov.
- Jedro med dvema stabilnima izobaroma lahko razpada z β^+ ali β^- .
- Samo najlažja liho-liha jedra so lahko stabilna, ker je pri njih parabola dovolj ozka.



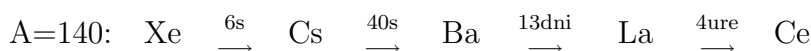
Slika 3.4: Mase sosednjih izobarov pri najlažjih liho-lihih jedrih



Slika 3.5: Masna ploskev (odvisnost masne razlike od števila protonov in nevtronov)

- e) V seriji razpadov beta proti stabilnemu izobaru se pri lihem A razpadna energija stalno manjša in zato razpolovni časi stalno naraščajo. Pri sodem A pa razpadne energije in razpolovni časi alternirajo.

Zgled:



(viii) Individualne lastnosti

Vezavna energija od jedra do jedra precej skače. Nekatera jedra kažejo precej močnejšo vezavno energijo od svojih sosedov (npr. ${}^4\text{He}$, ${}^8\text{Be}$, ${}^{12}\text{C}$, ${}^{16}\text{O}$, ${}^{40}\text{Ca}$, itd.). Gladke krivulje dobimo le, če povprečimo vezavno energijo preko nekaj sosednjih jeder. Kot vidimo, individualne lastnosti jeder včasih prevladajo nad njihovim povprečnim obnašanjem. To je razumljivo, saj je število nukleonov razmeroma majhno in se pozna, če enega dodamo. Običajna snov ima neprimerno večje število delcev, zato se pri njej ne pozna, če še nekaj delcev dodamo.

Narišimo sedaj masno ploskev. To je funkcija $M(Z, N)$. Zaradi lažjega risanja bomo narisali $M - A$, ki ima iste značilnosti. Ploskev ima obliko podolgovate školjke (leščurja). Po sredi gre žleb stabilnih jeder. Robovi pomenijo mejo obstojnih jeder (če ima jedro preveč protonov ali nevtronov, razpade momentano z emisijo delca; najtežja jedra bi razpadla momentano z razpadom alfa ali razcepom). Hrapava površina pomeni fluktuacije (funkcija je „hrapava“). Pravzaprav moramo vzeti tri plasti, vrhnja je za liha-liha jedra, srednja za sodo-liha in spodnja za sodo-soda.

3.1.2 Kapljični model — fenomenološki opis

Jedro bomo skušali opisati kot kapljico tekočine. Kadar nas zanimajo samo makroskopske količine snovi, uporabimo običajno *fenomenološki opis*. Pri tem poiščemo empirično povezave med makroskopskimi količinami, snovne konstante, ki nastopajo v teh povezavah, pa izmerimo. S fenomenološkim modelom lahko potem izračunamo makroskopske lastnosti snovi pri najrazličnejših pogojih, kakor tudi makroskopska gibanja teles (pri čemer uporabimo hidrodinamiko oz. elastomehaniko).

Za ilustracijo naštejmo nekaj „makroskopskih“ količin jedra: množina snovi (število protonov in nevtronov), masa, naboj, velikost, oblika, notranja energija, površinska in elektrostatska energija itd. Za njihov opis bomo vpeljali snovne konstante kot gostoto, specifično notranjo energijo, površinsko napetost itd.

Z *mikroskopskim opisom* pa opišemo podrobno gibanje delcev v snovi. Povezave med makroskopskimi količinami ter snovne konstante izračunamo iz prvih principov (iz lastnosti delcev ter sil med njimi). Na ta način do-gajanje v snovi in vrednost snovnih konstant bolj razumemo in marsik-daj napovemo kakšne nove pojave, ki jih s sistematsko empirično raziskavo nismo zajeli. Ker so računi prekomplicirani, delamo često grobe približke in se rezultati ujemajo le kvalitativno. Ko lastnosti snovnih konstant že razumemo, smemo vzeti merjenje snovnih konstant kot „bližnjico”, po kateri dobimo točne kvantitativne vrednosti z merjenjem namesto s kompliciranim računom.

Zapišimo sedaj energijo kapljice! Vzeti moramo seveda enakomerno nabito kapljico mešanice dveh tekočin (protonske in nevtronske). Posamezne člene bomo zapisali v istem vrstnem redu, kot smo v prejšnjem poglavju naštevali značilne lastnosti vezavne energije, tako da bo vsak člen razložil ustrezno lastnost vezavne energije.

(i) Notranja energija je sorazmerna s številom delcev: $w_n A$. Specifična notranja energija w_n je neodvisna od velikosti kapljice. Ker predstavlja no-tranja energija glavni delež vezavne energije, je tudi specifična vezavna en-ergija kljub drugim efektom približno konstantna.

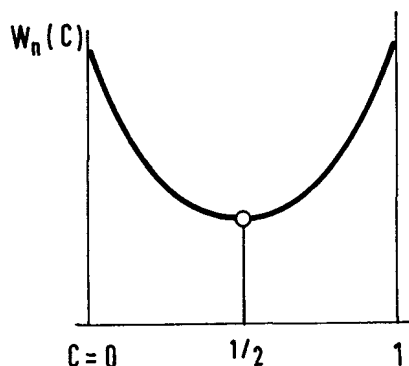
(ii) Površinska energija ima vzrok v tem, da imajo nukleoni na površini manj sosedov in zato manj prispevajo k vezavni energiji. Opišemo jo lahko s površinsko napetostjo: $\sigma \cdot 4\pi r^2$.

(iii) Elektrostatska energija

enakomerno nabite kapljice z nabojem Ze_0 znaša $\frac{3}{5}(Ze_0)^2/4\pi\epsilon_0 r$. Da smemo vzeti kar enakomerno nabito kapljico, se vidi med drugim iz tega, da se zapisani izraz lepo ujema z „izmerjenim” prispevkom elektrostatske energije.

(iv) Mešalna energija

Notranja energija je odvisna od relativne koncentracije protonske in nev-tronske tekočine. Lahka stabilna jedra kažejo tendenco, da je protonov in nevtronov enako. Iz tega sklepamo, da se protonska in nevtronska tekočina radi mešata in da je notranja energija najnižja, če je koncentracija obeh tekočin 50%. Narišimo sedaj odvisnost specifične notranje energije od rel-ativne koncentracije protonske tekočine! Iz dejstva, da se energija *zrcalnih jeder* (točka iv) razlikuje samo za elektrostatsko energijo, sklepamo, da je omenjena krivulja simetrična. Razvijmo jo v Taylorjevo vrsto okrog minima $c = 1/2$. Ker poznamo le ozek pas jeder v bližini stabilnih, zadošča razvoj do kvadratičnega člena: $w_n(c) = w_n(1/2) + w_{meš} \cdot (c - 1/2)^2$. Člen $w_n(1/2)$ smo že vključili v pavšalno notranjo energijo in smo ga pisali kar w_n . Drugi



Slika 3.6: Odvisnost notranje energije od koncentracije protonske (oz. nevtronske) tekočine

člen pa imenujemo (specifična) mešalna energija. Če vstavimo za $c = Z/A$, znaša mešalna energija celotnega jedra $A \cdot w_{\text{meš}} \cdot (2Z - A)^2/4A$. Parabola je res ozka za lahka jedra in široka za težka jedra.

(vi) Paritveno energijo lahko opišemo s fenomenološkim členom $w_{\text{par}}(A) \cdot \delta(A, Z)$. Pri tem je simbol

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} -1 & \text{za sodo-soda jedra,} \\ 0 & \text{za lih } A \\ 1 & \text{za liho-liha jedra} \end{cases}$$

Klasično bi si morda parjenje predstavljali kot vezanje v molekule, češ da je jedrska tekočina sestavljena iz molekul diprotonov in dinevtronov. Lihi osamljeni proton ali nevtron potem res manj prispeva k vezavni energiji, ker mu manjka molekulska vezavna energija. Po tej sliki bi morala biti paritvena energija neodvisna od velikosti jedra, meritve pa pokažejo, da w_{par} pada kot $\sim A^{3/4}$. Iz tega sklepamo, da predstavlja parjenje korelacijo dveh delcev na daljavo, ne pa korelacijo v obliki molekule. Natančneje bomo pojav razložili v enem od poznejših poglavij.

Zapišimo sedaj skupaj vse prispevke:

$$W = w_n A + \sigma \cdot 4\pi r^2 + (3/5)(Ze)^2/4\pi\epsilon_0 r \\ + w_{\text{meš}}(c - 1/2)^2 \cdot A + w_{\text{par}}(A) \cdot \delta(A, Z)$$

To lahko zapišemo v malo drugačni obliki, če upoštevamo zvezo $r = r_0 A^{1/3}$ in če nekoliko drugače definiramo parametre, tako da bodo vsi parametri

pozitivni in brez spremstva numeričnih konstant.

$$W = -w_0A + w_1A^{2/3} + w_2Z^2/A^{1/3} + w_3(A - 2Z)^2/A + w_4A^{-3/4}\delta(A, Z)$$

Ta izraz za vezavno energijo jedra je znan pod imenom *Weizsäckerjeva semiempirična formula*.

S to formulo lahko razložimo tudi *krivuljo stabilnih jeder* (točka (v)). Mešalna energija je najnižja, če je nevtronov enako kot protonov, za elektrostatsko energijo pa je ugodneje, če je manj protonov. Pri lahkih jedrih se elektrostatska energija ne pozna dosti in imajo stabilna jedra enako nevtronov kot protonov. Pri težkih jedrih pa je vpliv elektrostatske energije močan in je protonov raje manj. Kvantitativno zvezo med Z in A za stabilna jedra dobimo iz zahteve, da ima stabilni izobar najnižjo maso: $(\partial M/\partial Z)_{A=\text{konst}} = 0$.

Rezultat je naslednji:

$$\frac{Z}{A} = \frac{1}{2} \frac{1 + (m_n - M_H)c^2/4w_3}{1 + (w_2/4w_3)A^{2/3}}$$

Za numerične podatke $Z/A = 1/(1,98 + 0,015A^{2/3})$ se izračunana krivulja lepo ujema z eksperimentalno. Seveda ne smemo pozabiti, da je izračunana krivulja gladka, eksperimentalna pa nekoliko fluktuirala.

Določitev snovnih konstant

Parametre v Weizsäckerjevi formuli („snovne konstante“) lahko določimo z zahtevo, da se formula v povprečju čimbolje ujema z eksperimentalnimi vezavnimi energijami. Vzamemo vezavne energije vseh znanih jeder in uporabimo metodo najmanjših kvadratov. Možna je še druga pot. Parametre določimo postopoma, tako da razložimo nekaj najznačilnejših lastnosti drugo za drugo. Tako dobljeni parametri bodo dali morda v povprečju nekoliko slabše vrednosti vezavnih energij, za popis izbranih lastnosti bodo pa boljši. Pot bi bila nekako naslednja.

- a) Najprej določimo elektrostatsko energijo (w_2) iz razlike vezavnih energij pri zrealnih jedrih.
- b) Mešalno energijo w_3 določimo iz pogoja za stabilne izobare $(\partial M/\partial Z)_{A=\text{konst}} = 0$. V krivulji stabilnih jeder nastopata le w_2 in w_3 . Ker w_2 že poznamo, lahko določimo w_3 tako, da se krivulja stabilnih jeder čimbolje ujema z eksperimentom.
- c) Paritveno energijo w_4 dobimo s primerjanjem sosednjih sodih-sodih, sodih-lihkih ter lihkih-lihkih jeder.

- d) Ostaneta le parametra w_0 in w_1 , ki ju določimo z metodo najmanjših kvadratov iz vezavnih energij stabilnih jeder.

Sedaj bom navedel še vrednosti „snovnih konstant“.

Vir:	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4
starejši viri	14,04	13,0	0,583	19,5	35,5 MeV
Segre	15,56	17,2	0,698	23,3	33,5 MeV

Uporaba kapljičnega modela

Kapljični model nam da pripravno formulo za vezavno energijo osnovnega stanja. Z njo lahko ocenimo, od katerega jedra dalje je moten razcep ali razpad alfa, katera jedra so neobstojna zaradi razcepa ali emisije nevtrona itd. Dalje lahko ocenimo, kolikšna energija je potrebna, da jedro nekoliko deformiramo ali pa tako močno deformiramo, da se razcepi. Približno lahko napovemo vezavno energijo in razpadno energijo neznanih jeder.

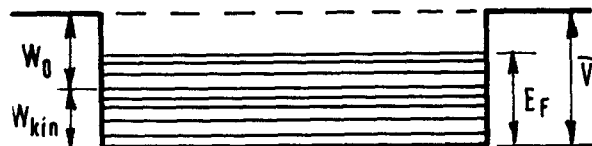
Poleg tega lahko v grobem opišemo tista vzbujena stanja, pri katerih se giblje jedro makroskopsko, npr. rotacijo jedra in površinske vibracije jedra.

3.1.3 Kapljični model — mikroskopski opis

Jedrska tekočina je kvantna tekočina, ker je de Broglijeva valovna dolžina nukleonov večja od njihovih medsebojnih razdalj. V tem oziru je jedrska tekočina podobna tekočemu heliju ${}^3\text{He}$, ki je tudi fermionska kvantna tekočina. Morda preseneča, da jedro v osnovnem stanju (pri „temperaturi absolutna ničla“) ne zmrzne. Razlog je velika de Broglijeva valovna dolžina, zaradi katere nukleoni niso kaj prida lokalizirani in zato kristal ni energijsko ugodnejši od tekočine. Podobno je tudi helij tekoč še pri absolutni ničli.

Teorija tekočin je računsko zelo komplicirana in da zato običajno le kvalitativne rezultate. Včasih smemo uporabiti za opis tekočine *približek s plin-skim mehurčkom*. Na prvi pogled se zdi, da jedra ne bi smeli ponazoriti s plinom, saj so nukleoni stalno v interakciji drug z drugim in stalno trkajo. V plinu pa so delci skoraj neodvisni in imajo prosto pot precej daljšo od medsebojnih razdalj. Pomislek lahko omilimo z naslednjima dvema argumentoma.

a) Okrog vsakega nukleona je veliko nukleonov, ki z njim sodelujejo. Sile gledajo v vse smeri in je zato rezultanta majhna. Delec občuti precej stalen potencial. Pišimo $V = \bar{V} + (V - \bar{V})$. Pri tem je \bar{V} povprečni jedrski potencial in ga občutijo vsi nukleoni, kot da so zaprti v škatlo (potencialno jamo). Na gibanje nukleonov vpliva V le na površini, da jih drži v potencialni jami, vmes pa bi se gibali premočrtno (kot ravni valovi). Odmik od povprečnega potenciala $(V - \bar{V})$, ki povzroča trke, pa je precej manjši od samega V . Zato smemo upati, da se nukleon ne preriva stalno, temveč doživlja posamezne trke.



Slika 3.7: Zasedeni energijski nivoji nukleonov v potencialni jami

b) Število trkov močno zmanjša *Paulijev princip*. Večina stanj, ki bi jih rada zavzela nukleona po trku, je že zasedenih od drugih nukleonov. Večina trkov je torej prepovedanih in le redkokdaj imata nukleona prilikop da najdeta po trku oba novo prosto stanje. Običajno se po trku vrneta v svoje lastno začetno stanje in trk se sploh ne pozna. Trki v „morju” ostalih delcev so torej mnogo manj verjetni kot trki „na prostem”. Zato smemo upati, da je prosta pot dovolj dolga, da je približek s plinskim mehurčkom smiseln.

Za povprečno prosto pot torej ni merodajno razmerje med mednukleonsko razdaljo in dosegom sil, temveč razmerje med mednukleonsko razdaljo in tako imenovano korelacijsko dolžino. Korelacijsko dolžino definiramo nekako kot razdaljo, do katere zmoti trk gibanje delca. Izkaže se, da je v jedru korelacijska razdalja le okrog 0,8 fm, medtem ko je povprečna razdalja med sosedi $2r_0 = 2,4$ fm. Volumsko razmerje je komaj 1 : 27. Zato je približek s plinom dober. Za kvantitativne račune je treba vzeti realni plin. Verjetnost, da sta dva nukleona znotraj korelacijske dolžine, je znatna in močno vpliva na rezultat. Vpliv tretjega nukleona znotraj korelacijske dolžine so že upoštevali kot popravek, četrtega pa so zanemarili.

Kljub uspehu približka s plinskim mehurčkom si jedra ne smemo predstavljati kot plin, saj plin ni vezan sistem in se razbeži. Stena mehurčka je samo računski pripomoček, s katerim nadomestimo povprečni jedrski potencial, ki veže nukleone. Jedro je pad takšna kvantna tekočina, pri kateri imajo delci razmeroma dolgo prosto pot in se gibljejo podobno kot v plinskem mehurčku.

Sedaj si bomo izračunali posamezne prispevke k vezavni energiji jedra. Za naš račun vzamemo kar idealni Fermi-Diracov plin, pri katerem so stanja nukleonov ravni valovi. Za osnovno stanje jedra vzamemo temperaturo nič, pri kateri nukleoni polno zasedajo najnižja kvantna stanja.

Kinetična energija

Število stanj, ki jih imamo na razpolago v intervalu okrog gibalne količine p , je enako $dn = 4 \cdot \mathcal{V} \cdot 4\pi p^2 dp / (2\pi\hbar)^3$. Faktor 4 pride odtod, ker lahko v vsako celico faznega prostora spravimo dva protona (spin \uparrow in \downarrow) ter dva nevtrona. V osnovnem stanju zasedemo po vrsti najnižja stanja do Fermijeve gibalne količine p_F . Potem velja:

$$n = \int_0^{p_F} 4\mathcal{V} \cdot 4\pi p^2 dp / (2\pi\hbar)^3 = 2\mathcal{V}p_F^3 / 3\pi^2\hbar^3$$

$$p_F = \hbar \sqrt[3]{(3\pi^2/2)(n/\mathcal{V})}$$

Gostota nukleonov je pri vseh jedrih ista, saj je radij jedra $r_j = r_0 A^{1/3}$; torej je

$$n/\mathcal{V} = A / (4\pi r_0^3 A/3) = 3/4\pi r_0^3$$

$$E_F = p_F^2/2m = (9\pi)^{2/3} \cdot \hbar^2/8mr_0^2$$

Povprečna kinetična energija je enaka 3/5 maksimalne kinetične energije E_F in znaša

$$\bar{w}_{\text{kin}} = 3(9\pi)^{2/3}\hbar^2/40mr_0^2 = 21 \text{ MeV}$$

S simbolom w_{kin} smo poudarili, da je to povprečna kinetična energija na nukleon, ne pa za celo jedro.

Potencialna energija

Povprečni potencial \bar{V} dobimo, če za dani nukleon seštejemo prispevke vseh njegovih sosedov. Ker delamo v približku idealnega plina, bomo vzeli gostoto nukleonov konstantno tudi v bližini danega nukleona. Za radialno obliko potenciala bomo vzeli kar pravokotno jamo.

$$\bar{V} = \int V(\vec{r})\rho(\vec{r}) d^3r = \bar{V}_0 \cdot (4\pi r_0^3)^{-1} \cdot (4\pi R^3/3)$$

Pri tem je R doseg jedrskega potenciala. K povprečnemu potencialu \bar{V} torej prispeva svojo potencialno energijo V_0 toliko nukleonov, kolikor jih je znotraj krogle dosega R .

Ker je jedrski potencial odvisen od medsebojne spinske in tirne vrtilne količine nukleonov, smo morali jakost potenciala V_0 povprečiti preko vseh možnih stanj. Ocenimo to povprečje.

stanje	verjetnost	\bar{V}_0
$S = 0, T = 0, (l = \text{lih})$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$	majhen ali celo odbojen
$S = 0, T = 1, (l = \text{sod})$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$	-22 MeV
$S = 1, T = 0, (l = \text{sod})$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$	-36 MeV
$S = 1, T = 1, (l = \text{lih})$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	majhen ali celo odbojen

Nukleoni v stanju z lihimi l zaradi šibkega potenciala zelo malo prispevajo. Če je potencial odbojen, bi morali pravzaprav upoštevati, da se nukleoni v odbojnem stanju danemu nukleonu raje ognejo in je tam njihova gostota manjša, kar še zmanjša prispevek. V oceni bomo te prispevke kar izpustili: $\bar{V}_0 \approx (3/16)(-22 - 36) \text{ MeV} = -11 \text{ MeV}$.

Povprečni potencial je potem $\bar{V} = -11 \text{ MeV} \cdot (2,0 \text{ fm}/1, 2 \text{ fm})^3 = -50 \text{ MeV}$. Povprečna potencialna energija na nukleon je samo polovica tega. Pri \bar{V} smo sešteli vse vezi danega nukleona s sosedi. Pri potencialni energiji celega jedra pa moramo paziti, da štejemo vsako vez le enkrat in ne dvakrat. Ista vez namreč prispeva k \bar{V} prvega in k \bar{V} drugega nukleona in moramo vzeti, da pripada v povprečju vsakemu od njiju le pol vezi.

$$w_{\text{pot}} = \bar{V}/2 = -25 \text{ MeV}$$

Notranja energija na nukleon je enaka vsoti kinetične in potencialne energije. $-w_0 = \bar{w}_{\text{kin}} + \bar{w}_{\text{pot}} = 21 \text{ MeV} - 25 \text{ MeV} = -4 \text{ MeV}$

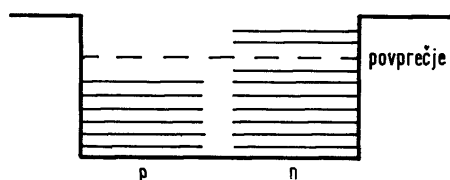
Dobili smo preslabo vezano jedro ($w = 4 \text{ MeV}$ namesto 15 MeV). Razlog za to je približek z idealnim plinom. Valovne funkcije delcev niso čisto ravni valovi, temveč so v bližini drugih delcev modificirane. Zaradi privlačnega potenciala je gostota nukleonov v bližini drugega nukleona večja kot v povprečju, v neposredni bližini pa pade zaradi trde sredice na nič. Ker so nukleoni z večjo verjetnostjo na mestu globljega potenciala kot na mestu plitkega potenciala, je njihova povprečna potencialna energija bolj negativna, kot v naši prejšnji oceni. To je v skladu z eksperimentalno vrednostjo. Komplicirani računi z *realnim plinom* so bili uspešni — dali so dober rezultat za w_0 .

Doslej smo vzeli *gostoto nukleonov* kot eksperimentalen podatek. Ali se da tudi izračunati? Izračunamo jo lahko variacijsko. Za razne gostote

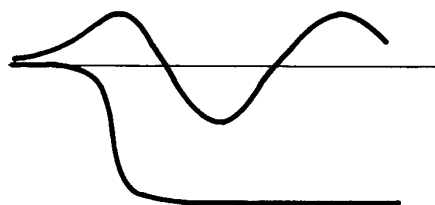
izračunamo ustrezno notranjo energijo; tam, kjer ima notranja energija minimum, imamo ravnotežno gostoto. Računi z idealnim plinom dajo preredko (preveliko) in preslabo vezano jedro. Računi za realni plin pa dajo lep rezultat za r_0 in w_0 .

Mešalna energija

V izrazu za povprečno kinetično energijo smo privzeli, da je protonov in nevtronov enako. Če imamo več nevtronov, jih moramo dati v višje nivoje, kot bi dali dodatne protone, saj so ustrezna nevtronska stanja že zasedena, protonska pa še ne.



Slika 3.8: Zasedeni energijski nivoji nukleonov v potencialni jami, če je presežek nevtronov



Slika 3.9: Valovna funkcija nukleonov na površini jedra

Kinetična energija je v primeru $N \neq Z$ večja kot če je $N = Z$. Če izračunamo kinetično energijo posebej za protone in posebej za nevtrone dobimo

$$W_{\text{kin}} = 2^{2/3} \left[Z(Z/A)^{2/3} + N(N/A)^{2/3} \right] \bar{w}_{\text{kin}}(Z = N)$$

Če razvijemo ta izraz v Taylorjevo vrsto okrog minima $N = Z$, predstavlja kvadratični člen ravno mešalno energijo. In sicer dobimo $w_{3\text{kin}} = 8 \text{ MeV}$. Fenomenološka vrednost pa je $w_3 \approx 20 \text{ MeV}$. Kinetična energija prispeva torej le polovico. Izkaže se, da prispeva drugo polovico potencialna energija.

Če je $N = Z$, smo ocenili, da se srečata nukleona s $3/4$ verjetnosti v stanju $T = 1$ in z $1/4$ verjetnosti v stanju $T = 0$. Če pa je več nevtronov, se poveča možnost, da se srečata dva enaka delca. Stanje $T = 1$ ima zato povečano verjetnost. To je neugodno, ker je potencial v stanju $T = 1$ (22 MeV) šibkejši kot v stanju $T = 0$ (36 MeV). Potencialna energija ima zato tudi minimum pri $N = Z$. Taylorjev razvoj pokaže, da prispeva potencialna energija k mešalni energiji tudi okrog 10 MeV, kot smo pričakovali.

Elektrostatsko energijo smemo izračunati s predpostavko, da je gostota protonov konstantna. Za račun **površinske energije** moramo upoštevati modifikacijo valovne funkcije na površini ter upadanje gostote sosedov na površini (slika 3.9). Rezultati so zadovoljivi.

Vzbujena stanja

Posameznih vzbujenih stanj ne moremo dobiti, saj imajo pri posameznih jedrih preveč individualne lastnosti. Pač pa lahko ocenimo gostoto vzbujenih stanj v odvisnosti od ekscitacijske energije. V ta namen ne vzamemo nekega vzbujenega stanja z določeno energijo, temveč vzamemo ensemble vzbujenih stanj z določeno temperaturo. Povprečna ekscitacijska energija tega ensembla je odvisna od temperature. Dokler je Fermi-Diracov plin še močno degeneriran, velja zveza

$$E = (\pi^2/4)(A/2)^{2/3}(Z^{1/3} + N^{1/3})E_F^{-1} \cdot (kT)^2 = a(kT)^2$$

Entropija sistema znaša $S = 2k(aE)^{1/2}$. Entropija pa je v tesni zvezi z gostoto nivojev: $S = k \ln n$. Pri tem je n neko efektivno število nivojev, preko katerih je ensemble razmazan: $n = \rho \Delta E$, pri čemer je ρ gostota nivojev, širina intervala razmazanosti pa je reda velikosti ekscitacijske energije. Iz zveze $S = 2k(aE)^{1/2} = k \ln(\text{konst} \cdot \rho \cdot E)$ dobimo potem zvezo $\rho(E) = (\text{konst}/E)e^2 \sqrt{aE}$. Ker je sorazmernostno konstanto težko zanesljivo izračunati, običajno primerjamo gostote nivojev pri različnih energijah.

Izhlapevanje nevtronov

Pri visokoenergijskih reakcijah lahko dobimo med končnimi produkti več nevtronov. To si lahko tolmačimo tako, da nastane v vmesnem štadiju visoko vzbujeno (zelo vroče) jedro, ki izhlapeva nevtrone. Spekter „izhlapelih“ nevtronov je res približno Maxwellski. Za grobo oceno števila „izhlapelih“ nevtronov in razpolovnega časa za izhlapevanje pa smemo uporabiti Clausius-Clapeyronovo enačbo.

Tudi pri razcepu nastaneta močno vzbujeni jedri s presežkom nevtronov in izhlapevata nevtrone.

3.2 Osnovno stanje — lupinski model

3.2.1 Lupinske lastnosti jedra

Pri lupinskem modelu si predstavljamo, da se gibljejo nukleoni neodvisno drug od drugega v povprečnem jedrskem potencialu. Dejanski potencial, ki ga občuti dani nukleon zaradi vseh ostalih nukleonov in ki se s časom stalno spreminja, torej nadomestimo z nekakšnim časovnim povprečjem.

Osnovni približek je analogen kot pri modelu plinskega mehurčka. Vendar pomeni lupinski model korak naprej. Pri modelu plinskega mehurčka predpostavljamo veliko število delcev, medtem ko pri lupinskem modelu upoštevamo dejansko majhno število delcev. Povprečni jedrski potencial krajeno ni več konstanten, temveč ima približno obliko porazdelitve nukleonov v jedru. Lastnosti sistema so močno odvisne od števila delcev v takem potencialu, zato lupinski model lahko razloži *individualne lastnosti* jeder.

Po uspehu lupinskega modela v atomski fiziki so pomislili na njegovo uporabo za opis jedra. Vendar v začetku niso imeli zaupanja zaradi dveh hudih pomislekov.

a) V atomu je v sredi mirujoče telko jedro s fiksnim in dobro znanim poljem. Zato je dober približek, če vzamemo za elektrostatsko polje, ki izvira iz elektronov, kar časovno povprečje in še to približno, saj je manjše od polja jedra. V jedru pa nimamo nekega mirujočega močnega polja, ampak samo povprečno polje gibajočih se nukleonov, ki niti ni dobro znano. Časovni odmiki od povprečja so torej mnogo hujši kot v atomu.

b) Sile med nukleoni so zelo močne, razdalje med njimi pa mnogo manjše kot med elektroni v atomu. Zato bi pričakovali, da so trki med nukleoni zelo pogosti in je prosta pot nukleonov kratka. Pričakovali bi, da stalno skačejo iz enega stanja v drugo, medtem ko lupinski model predpostavlja, da so vsak v svojem stacionarnem stanju.

Pogum so dali eksperimentalni podatki, ki so pokazali, da imajo tudi jedra vse značilne lastnosti, ki jih pričakujemo od lupinskega modela. Poglejmo si najprej značilne lupinske lastnosti atomov.

(i) Lastnosti **žlahtnih plinov** ${}^2\text{He}$, ${}^{10}\text{Ne}$, ${}^{18}\text{Ar}$, ${}^{36}\text{Kr}$, ${}^{54}\text{Xe}$, ${}^{86}\text{Rn}$. Energijski nivoji lastnih stanj v povprečnem atomskem potencialu so razporejeni v skupine, ki jih imenujemo lupine. Nivoji v isti lupini so blizu skupaj, med posameznimi lupinami pa so veliki razmiki. V tistih atomih, kjer so vse lupine z vrhno vred ravno napolnjene, so elektroni tako lepo simetrično porazdeljeni, da je vezavna energija izredno velika in vezi med elektroni „nasičene”. Taki atomi so kemično neaktivni in jih imenujemo žlahtne pline. Atomsko števila žlahtnih plinov nam torej povedo, koliko stanj je na razpolago v

posameznih lupinah.

(ii) Žlahtni plini imajo veliko **ionizacijsko energijo**. Veliko energije je namreč potrebno, da dvignemo delce iz zaključene lupine v naslednjo lupino ali celo ven. Alkalne kovine pa imajo majhno ionizacijsko energijo, ker je zadnji elektron že v naslednji lupini in je zelo slabo vezan.

(iii) **Periodni sistem elementov**. Mnoge fizikalne in kemične lastnosti elementov so odvisne v glavnem le od „valenčnih elektronov”, to je elektronov v nezaključeni vrhnji lupini. Zato imajo elementi z istim številom valenčnih elektronov sorodne lastnosti.

Analogne lupinske lastnosti najdemo tudi pri jedrih.

(i) Analogno kot žlahtne pline imamo tudi *magična jedra*. Ta imajo posebno močno vezavno energijo, so zelo stabilna, pogosto nastopajo v naravi in imajo veliko število stabilnih izotopov. Magična števila protonov ali nevtronov so naslednja: 2, 8, 2, 28, 50, 82, 126. Da so magična števila pri jedru drugačna kot pri atomu, nas ne sme presenetiti, saj je oblika povprečnega potenciala v jedru precej drugačna kot v atomu.

Diagrama o nezveznosti vezavne energije pri magičnih številih protonov ali nevtronov ne bom risal, pač pa si oglejmo kot argument za magična števila število stabilnih izotopov (oz. izotonov)

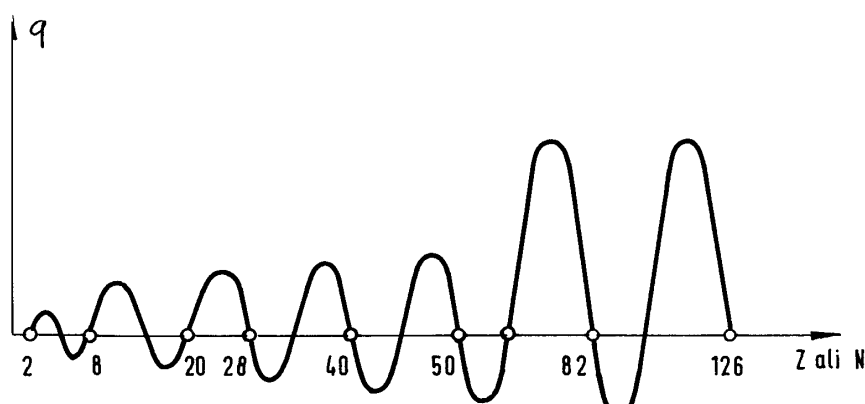
${}_{20}\text{Ca}$ ima	6	izotopov,	$N=20$ imajo	5	izotonov
${}_{28}\text{Ni}$	5		$N=28$	5	
${}_{50}\text{Sn}$	10		$N=50$	6	
${}_{82}\text{Pb}$	3		$N=82$	7	
			$N=126$	2	

Svinec z $Z=82$ je predzadnji stabilni element. Jedri ${}_{82}^{208}\text{Pb}$ in ${}_{83}^{209}\text{Bi}$ z $N=126$ sta zadnji stabilni jedri, za kar se imata zahvaliti magičnemu številu protonov in nevtronov hkrati (dodatni proton pri Bi še ne pokvari stabilnosti).

(ii) Jedra z magičnim številom nevtronov imajo *visok prag* za reakcijo (γ, n) — visoko „ionizacijsko energijo”, za jedra z enim nevtronom več pa je prag nizek. Presek za absorpcijo nevtrona je pri jedrih z magičnim številom nevtronov majhen, ker je nevtronska lupina zaključena in ni interesa za nov nevtron. Pri jedrih z enim nevtronom manj pa jo presek velik, ker manjka ravno še ta nevtron do zaželeno zaključene lupine.

Podobno velja za reakcije s protoni in magično število protonov.

(iii) *Periodni sistem* ni izrazit, ker je v nasprotju z atomom le malo lastnosti jedra odvisnih samo od „valenčnih nukleonov”.



Slika 3.10: Električni kvadrupolni moment jedra v odvisnosti od števila protonov ali nevtronov

Ena taka lastnost je deformacija jedra. Zaključene lupine so rade okrogle, valenčni nukleoni pa težijo vsi na pol ali vsi na ekvator. Zato se deformacija jedra s številom valenčnih nukleonov periodično ponavlja. Merilo za deformacijo je npr. električni kvadrupolni moment. Periode so tu včasih krajše; poleg magičnih števil pridejo namreč včasih do izraza tudi polmagična števila (zaključene podlupine).

Na podlagi evidence o lupinskih lastnostih jedra so začeli z lupinskim modelom tudi računati podrobne lastnosti jeder. Uspehi lupinskega modela pri jedrih kažejo, da pomisleki, ki smo jih imeli v začetku, le niso tako hudi. Opravičilo je naslednje.

a) Kot „stabilizator“ povprečnega jedrskega potenciala služijo namesto težkega fiksnege jedra kar zaključene lupine. Polje zaključenih lupin je namreč zaradi njihove velike simetrije in kompaktnosti dokaj enakomerno in konstantno in odmiki od povprečja niso prehudi.

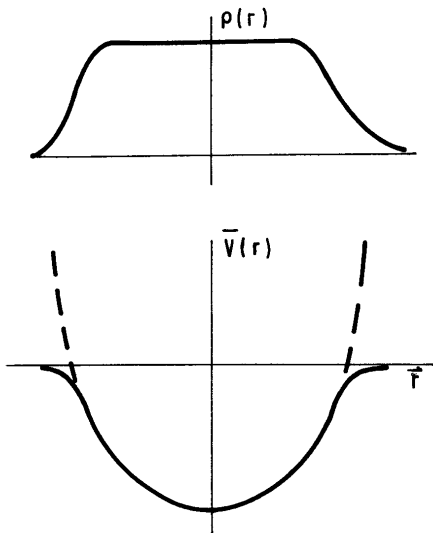
b) Podobno kot pri modelu plinskega mehurčka se nam ni treba bati prepogostih trkov, ker večino trkov prepove Paulijev princip, če so stanja, ki bi nastala po trku, že zasedena. Zlasti v osnovnem stanju in v nizkih vzbujenih stanjih imajo nukleoni redko priliko za dovoljen trk, pri katerem sta še obe končni stanji nezasedeni. Proste poti so dovolj dolge, da smemo vzeti gibanja posameznih nukleonov vsaj v prvem približku za stacionarna.

3.2.2 Oblika povprečnega jedrskega potenciala in enodelčnih valovnih funkcij

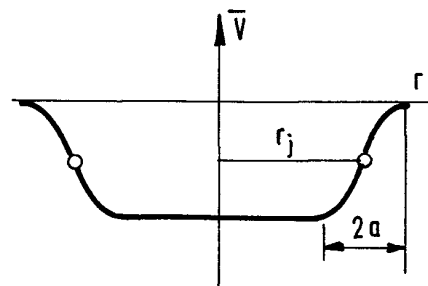
Skušali bomo ugotoviti, kakšne lastnosti mora imeti povprečni jedrski potencial, da dobimo prava magična števila.

Privzemimo, da so nukleoni enakomerno razmazani po jedru in da se gostota te razmazane porazdelitve ne spreminja s časom. Vsaka točka v jedru je potem izvor polja. Povprečni jedrski potencial je vsota vseh prispevkov iz posameznih točk, torej je konvolucija dvodelčnega jedrskega potenciala in gostote nukleonov:

$$\bar{V}(\vec{r}) = \int V(|\vec{r}'|)\rho(\vec{r}')d^3r'.$$



Slika 3.11: Porazdelitev nukleonov v jedru in ustrezna oblika povprečnega jedrskega potenciala (črtkano je označen približek s parabolo)



Slika 3.12: Woods-Saxonova oblika povprečnega jedrskega potenciala

Povprečni jedrski potencial ima torej obliko potencialne jame z zaobljenimi robovi. Običajno ga aproksimiramo kar s parabolo (trodimenzionalni harmonski oscilator). To je na videz napačen približek, saj gre parabola zunaj jedra proti $+\infty$, resnični povprečni jedrski potencial pa proti nič. V resnici pa to ni tako hudo. Glavno je, da povprečni jedrski potencial dobro aproksimiramo znotraj jedra. Na robu in zunaj padejo namreč valovne funkcije zelo hitro proti nič in ne opazijo, da jih „varamo” s parabolo. Edino

pri pojavih, kjer je poremben „rep“ valovne funkcije (razpadi in reakcije), moramo upoštevati pravilnejšo obliko povprečnega jedrskega potenciala. V teh primerih vzamemo pogosto kot aproksimacijo Woods-Saxonovo obliko $\bar{V} = V_0/\{1 + \exp[(r - r_j)/a]\}$. Pri tem je r_j nek povprečni radij jedra, a pa debelina prehodnega območja, na katerem pade V od polne vrednosti na nič.

Poglejmo najprej, kakšna magična števila dá tridimenzionalni harmonični oscilator. Ker veljajo magična števila za protone zase in nevtrone zase, bomo šteli stanja samo za eno vrsto delcev. Stanje delca je karakterizirano z naslednjimi kvantnimi števili:

- n_r : radialno kvantno število (število radialnih vozlov +1)
 - l : tirna vrtilna količina (število azimutalnih vozelnih ploskev)
 - m_l : tretja komponenta tirne vrtilne količine
 - m_s : tretja komponenta spinske vrtilne količine (smer spina)
- Valovno funkcijo delca lahko zapišemo

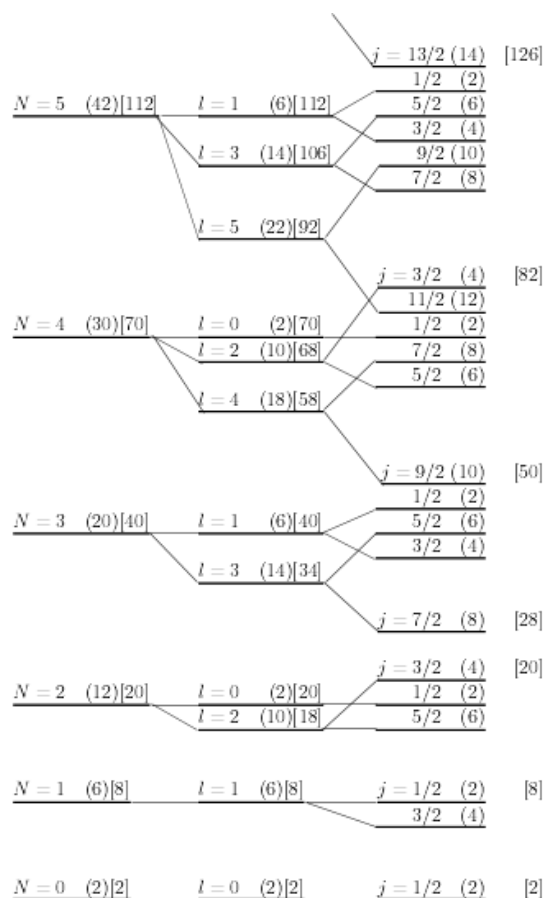
$$\Psi = R_{n_r l}(r) Y_{lm_l}(\vartheta, \phi) \eta_{m_s}(\uparrow, \downarrow)$$

Pri tem je R radialna funkcija trodimenzionalnega harmonskega oscilatorja, Y pa običajna krogelna funkcija.

Energija delca v trodimenzionalnem harmonskem oscilatorju je odvisna samo od „glavnega kvantnega števila“ $N = 2(n_r - 1) + l$, in sicer je $E = (N + 3/2)\hbar\omega$. Vsa stanja z istim N imajo torej isto energijo in tvorijo lupino. Pri danem N imamo lahko različne vrednosti tirne vrtilne količine l (različne podlupine), toda pri harmonskem oscilatorju so te podlupine degenerirane (vse so na isti energiji). Pri danem N nastopajo vsi možni l , ki so v skladu z enačbo $N = 2(n_r - 1) + l$, pri čemer je n_r celo pozitivno število. Ker je prvi sumand zaradi faktorja 2 sod, nastopajo pri sodem N samo sodi ($0 \leq l \leq N$), pri lihem N pa samo lihi l ($1 \leq l \leq N$).

Preštejmo sedaj, koliko delcev spravimo v posamezne lupine. V vsako podlupino gre $2(2l + 1)$ delcev, saj lahko zavzame smer spina 2 smeri, smer tirne vrtilne količine pa $(2l + 1)$ smeri ($-l \leq m_l \leq l$). V spodnji lupini ($N = 0$) imamo samo podlupino $l = 0$, torej lahko spravimo vanjo dva delca. V naslednjo lupino ($N = 1, l = 1$) gre 6 delcev, v naslednjo ($N = 2, l = 0$ ali 2) gre $2 + 10 = 12$ delcev itd. Rezultati so zapisani v tabeli (slika 3.13). Številke v () pomenijo število stanj v dani (pod)lupini, številke v [] pa pomenijo število vseh stanj od dna do vključno te (pod)lupine. Zaradi preglednosti razmiki med nivoji v tabeli niso pravi, temveč shematski.

Harmonični oscilator da prva tri magična števila pravilna, ostala pa napačna: 2, 8, 20, 40, 70, 112. Razveseljivo je, da dobimo že s tako preprostim približkom tri pravilna magična števila, toda očitno smo izpustili nek bistven efekt. Morda je krivo to, da smo vzeli parabolo namesto pravega povprečnega



Slika 3.13: Nivoji nukleonov v lupinskem modelu

jedrskega potenciala? Pa popravimo to! Lupine z danim N se potem razeepijo v podlupine z različnimi l . Čim večji je l , tem nižje leži podlupina glede na vrednost harmonskega oscilatorja. Stanja z večjim l segajo namreč zaradi centrifugalne sile bolj na rob jedra in bolj opazijo, da jih varamo s parabolo. Pri njih je popravek večji, popravek pa potisne stanje navzdol, saj je dejanski potencial zunaj ($V=0$) nižji od parabole ($\rightarrow \infty$). Če so popravki veliki, se bodo morda podlupine grupirale v drugačne lupine. Poglejmo v tabelo. Magična števila za vsako podlupino posebej so naslednja: 2, 8, 18, 20, 34, 40, 58, 68, 70, 92, 106, 112. Nobeno od njih (razen istih treh kot prej) ni pravilno. Tudi če bi vzeli zelo ekstravagantno obliko povprečnega jedrskega potenciala, ki bi temeljito pomešala vse podlupine med seboj, pravih magičnih števil z nobeno kombinacijo ne dobimo.

Oblika potenciala ni kriva, zanemarili smo nekaj bistvenega. Podobno

kot pri elektronih v atomu imamo tudi tu sklopitev med tirno in spinsko vrtilno količino delca. Ta interakcija je pri elektronih v atomu šibka („fina struktura”), pri nukleonih v jedru pa je močna. Pravilna magična števila dobimo, če privzamemo, da leži stanje s paralelnima l in s precej niže kot stanje z antiparalelnima l in s . Zaradi močne sklopitve m_l in m_s nista več vsaka zase dobri kvantni števili, pač pa je dobro kvantno število celotna vrtilna količina delca j in njena tretja komponenta $m = m_l + m_s$. Podlupine bomo torej odslej raje karakterizirali z j kot z l . V vsako podlupino gre potem $2j + 1$ delcev. Podlupina $j = l + 1/2$ leži niže od podlupine $j = l - 1/2$.

Razcep zaradi „fine strukture” narašča z l . Spodnja lupina ($N = 0$) se sploh ne cepi, ker je pri $l = 0$ možna samo ena rezultanta ($j = 7/2$). V lupinah $N = 1$ in $N = 2$ je zaradi majhnega l ($l = 1$ oz. 2) razcep še majhen in ne spremeni magičnih števil. Zato so bila prva tri magična števila že pravilna. Pri lupini $N = 3$ pa pade nivo z največjo vrtilno količino ($j = 7/2$) že tako nizko, da obvisi v sredi med dvema lupinama. Ker je osamljen, lahko rečemo, da tvori svojo lupino z magičnim številom 28. Od $N = 4$ naprej pade zaradi velike vrtilne količine nivo z največjo vrtilno količino tako globoko, da se pridruži nivojem spodnje lupine. Prava magična števila potem dobimo, če prištejemo k magičnim številom harmonskega oscilatorja še največjo podlupino iz naslednje lupine. Preizkusimo: $40 + 10 = 50$, $70 + 12 = 82$, $112 + 14 = 126$.

Povprečni jedrski potencial vsebuje torej poleg navadnega potenciala (parabole ali morda česa natančnejšega) še člen $-2\eta\vec{l}\vec{s}$. Sklopitveno konstanto η določimo empirično, tako da dobimo dobro ujemanje enodelčnih nivojev z eksperimentalnimi. Poskusili so jo tudi izračunati, vendar so računi komplikirani in dajo samo pravilen red velikosti.

Zaradi dodatnega člena se radialni del valovne funkcije ne spremeni. Sprememba valovne funkcije je le v tem, da je treba sklopiti tirni in spinski del v rezultanto j .

3.2.3 Valovna funkcija jedra; pojem konfiguracije

V lupinskem modelu predpostavimo, da se gibljejo nukleoni v prvem približku neodvisno drug od drugega. Vsakega torej vtaknemo v svoje lastno enodelčno stanje. Ker so fermioni, smemo seveda vtakniti v vsako stanje samo po enega. V osnovnem stanju jedra napolnimo enodelčna stanja od dna pa do tam, kjer delcev zmanjka. V vzbujenih stanjih jedra pa pustimo vmes kakšno enodelčno stanje nezasedeno, ustrezni delec pa vtaknemo više.

Stanje jedra karakteriziramo s konfiguracijo nukleonov. Konfiguracijo opišemo, če povemo, koliko nukleonov zasedajo posamezne podlupine. Podlupine označimo s kvantnimi števili n_r , l in j . Za l se običajno uporabljajo

spektroskopske oznake, ki so jih vpeljali v atomski fiziki ($0 = s$, $1 = p$, $2 = d$, $3 = f$, $4 = g$ itd.). Število delcev v dani podlupini pa označimo z desnim zgornjim indeksom. Primer: konfiguracijo kisika ^{16}O v osnovnem stanju zapišemo $(1s_{1/2})^3(1p_{3/2})^8(1p_{1/2})^4$, v nekem vzbujenem stanju pa $(1s_{1/2})^4(1p_{3/2})^8(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^2$.

Ce imamo sistem neodvisnih delcev, je valovna funkcija sistema kar produkt posameznih enodelčnih funkcij:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)\psi_c(\vec{r}_3).$$

Tak nastavek je dober za delce, ki se ločijo med seboj, saj je jasno napisano, da se giblje delec številka 1 v stanju ψ_a , delec številka 2 v stanju ψ_b itd. Nukleoni pa so enaki (neločljivi) delci in po ničemer ne moremo ločiti, katero stanje zaseda kateri nukleon. Nikakor ne moremo ločiti, ali imamo opraviti z zgornjo valovno funkcijo ali morda s $\psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1)\psi_c(\vec{r}_3)$.

Treba je vzeti primerno linearno kombinacijo takih permutiranih valovnih funkcij. Za fermione je treba vzeti tako kombinacijo, da je celotna valovna funkcija antisimetrična na zamenjavo dveh delcev. To dosežemo s tako imenovano *Slaterjevo determinanto*.

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} \psi_a(\vec{r}_1) & \psi_a(\vec{r}_2) & \psi_a(\vec{r}_3) \\ \psi_b(\vec{r}_1) & \psi_b(\vec{r}_2) & \psi_b(\vec{r}_3) \\ \psi_c(\vec{r}_1) & \psi_c(\vec{r}_2) & \psi_c(\vec{r}_3) \end{vmatrix}$$

Zamenjava dveh delcev pomeni namereč zamenjavo dveh stolpcev, pri čemer pa determinanta spremeni predznak.

Konfiguracije z zaključenimi lupinami protonov in nevtronov točno določajo stanje jedra: zasedena so vsa enodelčna stanja do konca vrhnje lupine. Zaradi simetrične zasedbe je rezultanta vrtilne količine $I = 0$. Če sta vrhnji lupini protonov in nevtronov isti, je zaradi simetrične zasedbe tudi $T = 0$.

Ce imamo en delec izven zaključenih lupin, stanje jedra ni čisto določeno, saj konfiguracija ne pove m tega delca. Ker so vsi ostali delci sklopljeni v rezultanto 0, diktira vrtilno količino jedru edini zunanji nukleon: $I = j$, $M = m$. Konfiguracija torej določa I jedra, ne pa tudi njegove orientacije M . Toda to je trivialno, saj orientacija jedra kot celote ne vpliva na njegove notranje lastnosti. Stanja z različnimi M so med seboj degenerirana in predstavljajo isto energijsko stanje jedra. Čisto podobna je situacija, če manjka en delec do zaključene lupine. Tedaj diktira vrtilno količino jedru ta „luknja“.

Kadar pa je več delcev izven zaključenih lupin, lahko sklopimo valenčne nukleone v različne rezultante vrtilne količine in izobarnega spina.

Konfiguracija je torej širši pojem kot Slaterjeva determinanta. Isti konfiguraciji lahko ustreza več Slaterjevih determinant in potrebujemo za karak-

terizacijo stanja jedra poleg konfiguracije še dodatna kvantna števila. V zvezi s tem uporabljamo dva tipa valovne funkcije jedra:

a) Ψ (konfiguracija), $(m_1 t_{z1}, m_2 t_{z2} \dots)$

Ker pri tem točno povemo, kateri m in t_z so zasedeni, opišemo to stanje z eno samo Slaterjevo determinanto. Toda po principu nedoločenosti takšno stanje nima določene rezultante I in T .

b) Ψ (konfiguracija), I, T, α

Vzamemo takšno superpozicijo Slaterjevih determinant, ki ima določen I in T , zato pa ni določena zasedba po m in t_z (nastopajo vse možne kombinacije). Z α so označena dodatna kvantna števila, ki so včasih še potrebna za enolično karakterizacijo stanja. Ker imajo jedra določen I in T , uporabljamo pri točnih računih raje $\psi_{I,T,\alpha}$. Čista Slaterjeva determinanta $\Psi_{(m t_z)}$ pa je enostavnejša in služi kot približek, oziroma nam nudi bazo za razvoj valovne funkcije.

Energija sistema neodvisnih delcev je enaka vsoti enodelčnih energij: $E = \sum_i \epsilon_i$. Ker so enodelčne energije ϵ odvisne samo od kvantnih števil n_r, l in j , je tudi energija celotnega sistema odvisna samo od konfiguracije, ne pa tudi od zasedbe po m -ih. V prvem približku bi bila torej vsa stanja z isto konfiguracijo energijsko degenerirana. To pa pri jedrih niti približno ne drži. Zato moramo upoštevati vsaj še popravek prvega reda s teorijo motenj.

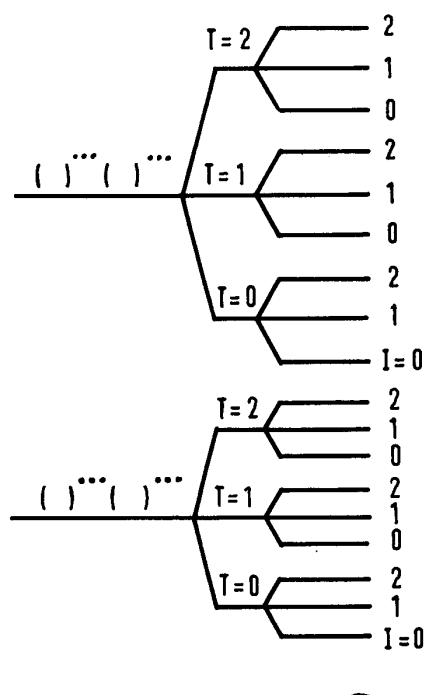
Motnjo — interakcijo med delci — zapišemo kot odmik dejanskega potenciala od povprečja:

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i^2/2m + \sum_{i<j} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \\ &= \sum_i \underbrace{\left\{ p_i^2/2m + \bar{V}(\vec{r}_i) \right\}}_{H_0} + \underbrace{\left\{ \sum_{i<j} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) - \sum_i \bar{V}(\vec{r}_i) \right\}}_{V_{\text{res}}} \end{aligned}$$

Pri tem predstavlja prvi člen (H_0) nemoteni Hamiltonov operator lupinskega modela, drugi člen (tako imenovani *residualni potencial*) pa motnjo. Ker smo iz celotnega potenciala glavnino (\bar{V}) že izvlekli, motnja ni prehuda.

Zaradi motnje (interakcije med delci) odpade degeneracija in je energija nivojev odvisna tudi od načina sklopitve med valenčnimi nukleoni (od I in T). Razcep nivojev z isto konfiguracijo $(\dots)_0 \dots$ je na skici zaradi shematičnosti majhen, v resnici pa je lahko precej večji. Naj spomnim, da je pri konfiguraciji s polnimi lupinami (ali z enim nukleonom več ali manj) stanje točno določeno in takega razcepa nivojev ni.

V prvem redu motnja energijsko razcepi stanja, ki pripadajo isti konfiguraciji, pa se razlikujejo za T ali I . V drugem redu pa motnja povzroči, da



Slika 3.14: Residualni potencial energijsko razcepi stanja, ki pripadajo isti konfiguraciji

se konfiguracije med seboj mešajo. Osnovno stanje in nekatera nizkoležeča stanja jedra lahko kvalitativno prav dobro popišemo s čisto konfiguracijo, zlasti če je število valenčnih nukleonov majhno. Za kvantitativen račun moramo primemaši razmeroma majhno število „nečistoč” (višjih konfiguracij). Za višja vzbujena stanja in za večje število valenčnih nukleonov pa je vpliv „motnje” hud in je treba vzeti superpozicijo velikega števila konfiguracij. V tem primeru zmorejo račune samo veliki računski stroji.

Vrtilna količina osnovnega stanja

V osnovnem stanju imamo najnižjo konfiguracijo, v kateri so po vrsti zasedeni najnižji enodelčni nivoji. Kot smo videli, konfiguracija v splošnem dopušča razne I , toda za osnovno stanje imamo posebno pravilo. Jedra s sodim številom protonov in sodim številom nevtronov imajo v osnovnem stanju vsa $I = 0$. Protoni in nevtroni kažejo torej težnjo, da se vsaki zase vežejo v pare z rezultanto vrtilne količine 0. Težnjo za parjenjem smo spoznali že pri sistematiki vezavne energije, ki je pri sodo-sodih jedrih posebno močna. Iz sistematike vrtilnih količin ($I = 0$ za vsa sodo-soda jedra) pa podrobneje spoznano mehanizem parjenja: nukleoni se paroma sklopijo v vrtilno količino 0 („antiparalelno”).

Pri sodo-lihkih jedrih so vsi nukleoni razen enega sparjeni v rezultanto 0. Torej diktira vrtilno količino jedru zadnji, nesparjeni nukleon, ki ima najvišjo energijo. Da določimo I , moramo torej samo pogledati v tabeli enodelčnih nivojev, do katere podlupine sežejo delci. Če je osamljeni delec v podlupini j , velja $I = j$. Eksperimentalne vrtilne količine jeder v osnovnem stanju lepo potrjujejo to pravilo.

Vrtilne količine zaporednih jeder si sledijo v istem vrstnem redu, kot vrtilne količine j v tabeli podlupin, ki smo jo navedli v prejšnjem poglavju. S tem je obenem potrjeno zaporedje podlupin, ki nam ga je dal lupinski model. Izjema so samo nekatera deformirana jedra. Pri deformiranih jedrih je namreč povprečni jedrski potencial tudi deformiran in je razpored podlupin nekoliko drugačen.

Pri lihk-lihkih jedrih imamo dva osamljena delca, proton in nevtron. Ta dva se običajno ne parita med seboj in ni enostavnega pravila, v kakšno rezultanto se sklopita v osnovnem stanju. Pogosto se sklopita paralelno in ne antiparalelno.

Podobno kot za vrtilno količino bi pri sodo-lihkih jedrih pričakovali tudi za magnetni moment jedra, da je kar enak magnetnemu momentu zadnjega prostega nukleona. Vendar drži to samo približno. Vzrok so primesi višjih konfiguracij. Te nič ne pokvarijo vrtilne količine, saj je vrtilna količina dobro kvantno število in se smejo primešati samo taka višja stanja, ki imajo isto vrtilno količino kot osnovno stanje. Magnetni moment pa ni dobro kvantno število in smejo imeti primešane konfiguracije različne vrednosti magnetnega momenta. Te primest pa magnetni moment osnovne konfiguracije nekoliko pokvarijo.

Diagram, v katerem nanašamo magnetni moment zadnjega nukleona kot funkcijo $I = j$, imenujemo Schmidtove linije. Eksperimentalni magnetni momenti jeder se za $\sim 20\%$ razlikujejo od vrednosti na Schmidtovih linijah.

3.2.4 Hartree-Fockova metoda za določitev osnovnega stanja

Pri lupinskem modelu opišemo jedro kot sistem neodvisnih nukleonov, ki se gibljejo v povprečnem jedrskem potencialu. Povprečni jedrski potencial smo zapisali po klasični analogiji kot $\bar{V}(\vec{r}) = \int V(|\vec{r} - \vec{r}'|) \cdot \rho(\vec{r}') d^3r'$. Nismo se pa prepričali, ali nam da tak potencial res najprimernejše enodelčne valovne funkcije. Zato jih bomo sedaj določili še z variacijskim principom.

Za določitev osnovnega stanja uporabljamo često v kvantni mehaniki variacijski princip („Raileigh-Ritzov princip“). Energija pravega osnovnega stanja E_0 je vedno enaka ali nižja od pričakovane vrednosti energije poljub-

nega stanja. To se hitro vidi, če razvijemo poljubno stanje Φ v vrsto po lastnih stanjih Ψ_i Hamiltonovega operatorja:

$$\begin{aligned}\Phi &= \sum_i c_i \Psi_i \\ \langle \Phi | H | \Phi \rangle &= \sum_i c_i^2 \langle \Psi_i | H | \Psi_i \rangle = \sum_i c_i^2 E_i \geq \left(\sum_i c_i^2 \right) E_0 = E_0\end{aligned}$$

(Mešani členi odpadejo, ker so Ψ_i lastna stanja H). Če izmed vseh možnih stanj izberemo tisto z najmanjšo pričakovano vrednostjo energije, dobimo pravo osnovno stanje. Če pa izbiramo iz omejene zbirke stanj, dobimo z variacijskim principom tisto stanje, ki je pravemu osnovnemu stanju energijsko najbližje. V tem smislu nam da variacijski princip „najboljši približek“ osnovnega stanja v okviru dane zbirke.

Pri Hartree-Fockovi metodi izbiramo „najboljši približek“ osnovnega stanja iz zbirke vseh Slaterjevih determinant. Ker je Slaterjeva determinanta določena z vsemi zasedenimi enodelčnimi valovnimi funkcijami, poiščemo torej z variacijskim principom najustreznejše enodelčne valovne funkcije. Pri tem velja pripomniti, da so te najustreznejše glede energije približnega osnovnega stanja, kakih drugih lastnosti pa morda ne opišejo najbolje.

Izračunajmo pričakovano vrednost energije, ki ustreza Slaterjevi determinanti! Zaradi krajše zapisave bomo valovne funkcije označili le z njihovimi indeksi, namesto prostorske, spinske in izospinske koordinate delca pa bomo zapisali le zaporedno številko delca:

$\psi_a(\vec{r}_i, s_i, t_i) \equiv a(i)$. Sumacije po spinskih in izospinskih koordinatah ne bomo pisali posebej, temveč si jo bomo mislili zraven z integracijo po prostorskih koordinatah. Cel izraz lahko poenostavimo, če upoštevamo, da so posamezni členi v vsotah med seboj enaki zaradi antisimetrije valovne funkcije Φ :

$$\begin{aligned}\langle \Phi | H | \Phi \rangle &= \int \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} a^*(1) & a^*(2) & \dots \\ b^*(1) & b^*(2) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \left\{ \sum_i -\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} + \sum_{i < j} V(i, j) \right\} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{A!}} \begin{vmatrix} a(1) & a(2) & \dots \\ b(1) & b(2) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} d^3 1 d^3 2 \dots \\ &= \frac{1}{A!} \int \begin{vmatrix} a^*(1) & a^*(2) & \dots \\ b^*(1) & b^*(2) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \left\{ A \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} \right) + \frac{A(A-1)}{2} V(1, 2) \right\}.\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a(1), & a(2), & \cdot \\ b(1), & b(2), & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} d^3 1 d^3 2 \dots$$

Izraz za kinetično energijo dobimo, če razvijemo Slaterjevi determinanti po poddeterminantah. Pri integraciji upoštevamo, da sta dve determinanti ortogonalni, če se ne ujemata v vseh zasedenih stanjih.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{(A-1)!} \int \left[\sum_{\alpha} \alpha^*(1) \begin{vmatrix} \beta(2) & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \right] \\ &\quad \cdot \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} \right) \left[\sum_{\alpha'} \alpha'(1) \begin{vmatrix} \beta'(2) & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \right] d^3 1 d^3 2 \dots \\ &= - \sum_{\alpha \alpha'} \int \alpha^*(1) \frac{\hbar^2 \nabla_i^2}{2m} \alpha'(1) d^3 1 \underbrace{\delta_{\beta \beta'} \delta_{\gamma \gamma'} \dots}_{=\delta_{\alpha \alpha'}} = - \sum_{\alpha} \int \alpha^*(1) \frac{\hbar^2 \nabla_2^i}{2m} \alpha(1) d^3 1 \end{aligned}$$

Analogno dobimo izraz za potencialno energijo, če razvijemo Slaterjevi determinanti po poddeterminantah reda 2 ter $(A-2)$. Končen rezultat bom zapisal kar brez izvajanja:

$$\begin{aligned} E = T + V &= \langle \Phi | H | \Phi \rangle = - \sum_{\alpha} \int \alpha^*(1) \frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} \alpha(1) d^3 1 \\ &\quad + \sum_{\alpha < \beta} \int \alpha^*(1) \beta^*(2) V(1, 2) \alpha(1) \beta(2) d^3 1 d^3 2 \\ &\quad - \sum_{\alpha > \beta} \int \alpha^*(1) \beta^*(2) V(1, 2) \alpha(2) \beta(1) d^3 1 d^3 2 \end{aligned}$$

Poiskati moramo takšne ψ ($\equiv \alpha, \beta, \dots$), ki dajo minimum energije E . Dodatni pogoj je, da morajo biti ψ normirane, za kar bomo uporabili metodo Lagrangevih multiplikatorjev ϵ :

$$E - \sum_{\alpha} \int \alpha^*(1) \alpha(1) d^3 1 = \min$$

Variacijske enačbe za ψ dobimo, če odvajamo izračunani funkcional glede na α in α^* . Pravzaprav zadoščajo enačbe, ki jih dobimo z odvajanjem glede na α^* , ker so druge enačbe samo konjugirano kompleksne glede na prve in ne povedo nič novega. Variacijske enačbe imajo obliko enodelčne Schrödingerjeve enačbe in Lagrangevi multiplikatorji nastopajo kot enodelčne energije:

$$-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} \alpha(1) + \left(\int V(1, 2) \sum_{\beta} \beta^*(2) \beta(2) d^3 2 \right) \alpha(1)$$

$$- \int \left(V(1, 2) \sum_{\beta} \beta^*(2) \beta(1) \right) \alpha(2) d^3 2 - \epsilon_{\alpha} \alpha(1) = 0,$$

ali krajše,

$$-\frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} \alpha(1) + U(1) \cdot \alpha(1) - \int W(1, 2) \alpha(2) d^3 2 - \epsilon_{\alpha} \alpha(1) = 0.$$

Prvi člen „povprečnega potenciala” U je kar isti, kot smo ga uganili iz klasične analogije. Vendar dobimo zraven še popravek, tako imenovani „nelokalni povprečni potencial” W . Zaradi tega dobimo integrodiferencialno enačbo in je reševanje težavnejše.

Hartree-Fockova variacijska enačba je kubična glede na neznan ψ in je ne znamo rešiti direktno. Rešujemo jo iteracijsko. Računamo, kot da sta „povprečna potenciala” neodvisna od ψ in rešujemo linearno enačbo. Pri prvem koraku U in W uganemo, pri naslednjih iteracijah pa vzamemo izračunano vrednost iz prejšnje iteracije. Končno vrednost U in W imenujejo v literaturi „samovsklajeni potencial” (self-consistent field), ker da za rešitev ista enodelčna stanja, iz katerih izvira.

Integrodiferencialno enačbo rešujemo tako, da jo prevedemo v sistem navadnih kubičnih enačb, s tem da razvijemo ψ v vrsto po izbranih enodelčnih funkcijah in so nove neznanke koeficienti razvoja. Pri iteracijski metodi dobimo tudi v tem primeru sistem homogenih linearnih enačb („sekularni problem”). Kot bazo za razvoj vzamemo običajno funkcije harmonskega oscilatorja, ker so pripravne za računanje. Obenem so dovolj podobne pravim rešitvam, da shajamo z majhnim številom členov v vrsti. Kljub temu so potrebni veliki računalniki.

Račune s Hartree-Fockovo metodo so napravili za številna lahka jedra. Pri srednjih in težkih jedrih (pa tudi pri večini računov za lahka jedra) ostanemo še vedno pri „prvi iteraciji”: čistih rešitvah harmoničnega potenciala. Pri „standardnem lupinskem modelu” predpostavimo krogelno simetričen harmonični potencial, pri „Nilssonovem modelu” pa deformirani harmonični potencial.

Na koncu naj še pripomnim, da energija osnovnega stanja ni enaka vsoti enodelčnih energij, kot bi to veljalo za sistem res neodvisnih delcev (in kot smo predpostavljali v prejšnjem poglavju). Na ta način bi namreč šteli potencialno energijo dvakrat: pri delcu, ki povprečni potencial povzroča in pri delcu, ki povprečni potencial občuti.

Kratek račun pokaže, da je

$$E = \langle \Phi | H | \Phi \rangle = \sum_{\alpha} \left[\epsilon_{\alpha}(\text{kin}) + \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha}(\text{pot}) \right]$$

pri čemer je

$$\begin{aligned}\epsilon_{\alpha}(\text{kin}) &= - \int \alpha^*(1) \frac{\hbar^2 \nabla_1^2}{2m} \alpha(1) d^3 1; \\ \epsilon_{\alpha}(\text{pot}) &= \int \alpha^*(1) U(1) \alpha(1) d^3 1 - \int \alpha^*(1) W(1, 2) \alpha(2) d^3 1 d^3 2\end{aligned}$$

3.2.5 Parjenje v jedru

Ugotovili smo, da se protoni in nevtroni vsaki zase radi vežejo v pare. To nam kažejo naslednji štirje argumenti (od katerih smo prva dva navedli že prej):

(i) Sistematika vezavnih energij pokaže, da imajo sodo-soda jedra najmočnejšo vezavno energijo, sodo-liha srednjo, liho-liha pa najšibkejšo. To smo opisali pri kapljičnem modelu (v Weizsäckerjevi formuli) s členom

$$35 \text{ MeV} \cdot A^{-3/4} \cdot \delta(A, Z), \quad \delta = \begin{cases} -1, & \text{sodo-sodo} \\ 0, & \text{sodo-liho} \\ 1, & \text{liho-liho} \end{cases}$$

(ii) Sistematika vrtilnih količin pokaže, da imajo vsa sodo-soda jedra $I = 0$, sodo-liha jedra pa $I = j$, kjer je j vrtilna količina zadnjega nukleona. V parih so torej nukleoni sklopljeni antiparalelno (v rezultanto vrtilne količine 0).

(iii) Vrstni red, kako se polnijo podlupine pri večanju števila nukleonov, ni vedno isti, kot je zaporedje podlupin pri lupinskem modelu. Izkaže se, da paritvena sila narašča z vrtilno količino j . Zato osamljeni delec v podlupini z velikim j pritegne partnerja iz nižje podlupine, s čimer se pridobi velika paritvena energija. Iz tega razloga ne srečamo jeder, ki bi imela v osnovnem stanju vrtilno količino $11/2$ ali več, saj ustrezni nukleon vedno pritegne partnerja iz nižje podlupine. $j = 9/2$ pa je nekako kritična, včasih paritvena energija zadošča za pridobitev partnerja, včasih pa ostane nukleon z $j = 9/2$ osamljen.

Pri vrstnem redu polnjenja razlikujemo tri primere. Zaradi preglednosti bomo vzeli majhne vrtilne količine, čeprav so v resnici zanimivejše velike.

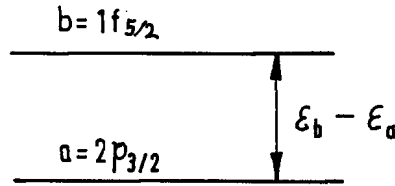
Kot primer vzemimo polnjenje podlupin $2p_{3/2}$ ter $1f_{5/2}$ (jedra od ${}^{63}_{29}\text{Cu}$ do ${}^{87}_{37}\text{Rb}$).

Enodelčno energijo označimo z ϵ , paritveno pa z $-\pi$.

a) $\pi_b - \pi_a < \epsilon_b - \epsilon_a$ (dviganje se ne izplača).

Polnjenje je naslednje:

a	a^2	a^3	a^4	$a^4 b a^4 b^2$	$a^4 b^3$	$a^4 b^4$	$a^4 b^5$	$a^4 b^6$	
$I = 3/2$	0	3/2	0	5/2	0	5/2	0	5/2	0



Slika 3.15: Dva zaporedna enodelčna nivoja

b) $\epsilon_b - \epsilon_a < \pi_b - \pi_a < 2(\epsilon_b - \epsilon_a) \dots$ izplača se dvigniti enega, ne pa oba.

	a	a^2	a^3	a^4	$a^3b^2a^4b^2$	a^3b^4	a^4b^4	a^3b^6	a^4b^6	
$I = 3/2$	0	3/2	0	3/2	0	3/2	0	3/2	0	0

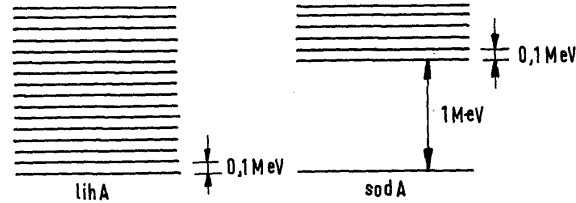
c) $\pi_b - \pi_a > 2(\epsilon_b - \epsilon_a) \dots$ izplača se dvigniti oba

	a	b^2	ab^2	b^4	ab^4	b^6	ab^6	a^2b^6	a^3b^6	a^4b^6
$I = 3/2$	0	3/2	0	3/2	0	3/2	0	3/2	0	0

(iv) Spekter nizkoležečih vzbujenih stanj je bistveno različen pri sodo-sodih jedrih kot pri sodo-lihjih jedrih. Pri lihjem A se vzbujena stanja začnejo takoj nad osnovnim, pri sodo-sodih jedrih pa imamo do prvega vzbujenega stanja velik razmik (pri težjih jedrih ~ 1 MeV), nato pa si sledijo nivoji enako na gosto kot pri sodo-lihem jedru. To lahko razumemo tako, da moramo pri sodo-sodem jedru za vzbuditev razbiti vsaj en par, kar stane 1 MeV ali več. Pri sodo-lihem jedru pa lahko osamljeni nukleon dvigamo v višje podlupine, ne da nam bi bilo treba razbiti kak par.

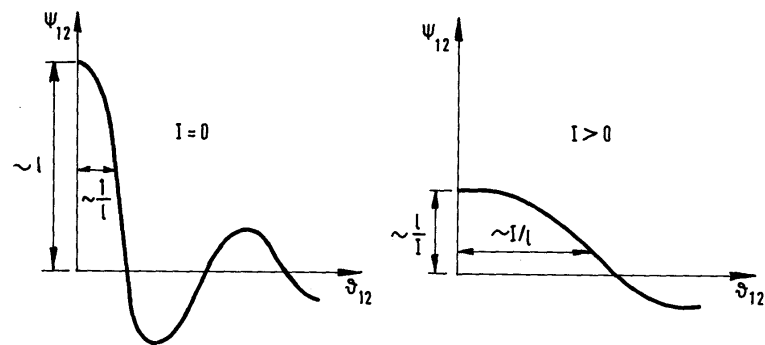
Potem, ko smo si ogledali eksperimentalna dejstva, bomo skušali parjenje razložiti še teoretično. Zaradi enostavnosti bomo delali, kot da imajo nukleoni le tirno vrtilno količino. Argumenti pa bodo veljali tudi za celotno vrtilno količino j .

Oglejmo si najprej razmere v primeru, da imamo dva delca z vrtilno količino 1. Sklopljena sta lahko v rezultanto od $I = 0$ do $I = 2l$. Če sta delca enaka in imata spina antiparalelna, mora biti prostorski del valovne funkcije simetričen in pridejo v poštev samo sodi I . Izkaže se, da sta delca v povprečju najbližje drug drugemu, če sta sklopljena v rezultanto $I = 0$. To se lepo vidi, če narišemo tisti del valovne funkcije, ki opisuje relativno kotno gibanje: $\psi_{12}(\vartheta_{12})$. Pri tem je ϑ_{12} kot, ki ga delca oklepata glede na izhodišče.



Slika 3.16: Lega vzbujenih stanj pri jedrih z lihim in pri jedrih s sodim številom nukleonov

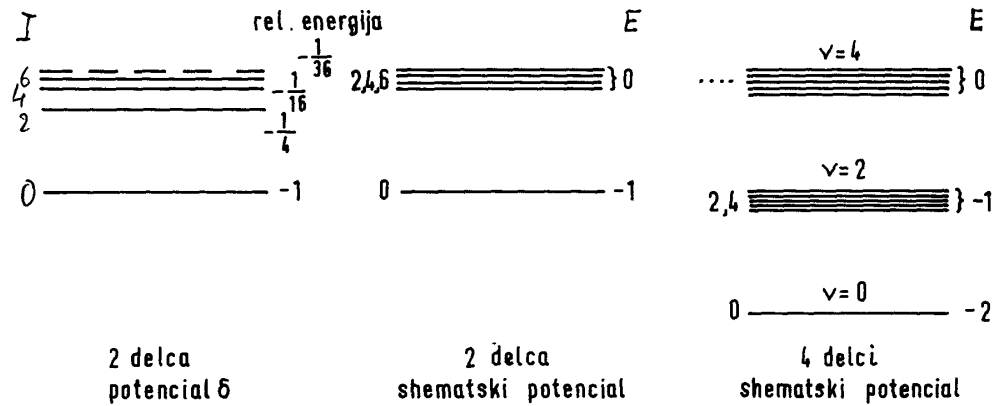
Pri $I = 0$ ima funkcija ψ_{12} izrazit maksimum, kadar sta delca blizu ($\vartheta_{12} = 0$). Pri $I > 0$ je maksimum širši in nižji. Višina maksima je pri $I > 0$ obratno sorazmerna z I ; verjetnost da sta delca blizu, je torej obratno sorazmerna z I^2 .



Slika 3.17: Valovna funkcija relativnega gibanja dveh delcev v odvisnosti od kota, ki ga oklepata glede na izhodišče. Na levi skici sta delca z vrtilno količino sklopljena v rezultanto $I = 0$, na desni skici pa sta sklopljena v rezultanto $I > 0$

Za privlačno silo kratkega dosega je ugodno, če sta delca čim bližje skupaj. Zlasti je to važno, če ima sila zelo kratek doseg. Efekt še pretiramo, če vzamemo kar potencial z obliko funkcije δ . V primeru $I = 0$, ko sta delca blizu z veliko verjetnostjo, tak potencial dobro izkoristita. Stanja $I > 0$ pa tak potencial slabo izkoristijo, in sicer pada pričakovana vrednost potencialne energije kot $\sim (l/I)^2$ (tako kot verjetnost v točki $\vartheta_{12} = 0$). Za potencial δ dobimo torej naslednji spekter (glej sliko 3.18).

Slika za potencial δ je precej podobna, kot če bi vzeli kar shematski paritveni potencial $V = -n_{\text{par}}\pi$, kjer je n_{par} število vezanih parov, π pa



Slika 3.18: Energijski nivoji sistema dveh (oz. štirih) delcev, ki delujejo s kontaktnim potencialom in s shematskim paritvenim potencialom

„paritvena energija”. En nivo (sparjeni) pade namreč zelo nizko, vsi ostali pa ostanejo skoraj neprizadeti blizu energije nič.

Iz maksima v funkciji ψ_{12} je tudi razvidno, zakaj paritvena energija narašča z l , saj je maksimum ožji in višji, če je l velik.

Če imamo več delcev je situacija podobna. V osnovnem stanju bi bili delci radi čim bliže drug drugemu. Vendar se ne morejo vsak z vsakim sklopiti v vrtilno količino 0, kajti vse mogoče rezultante ne morejo biti hkrati dobra kvantna števila. Največ, kar lahko dosežejo, je, da se paroma sklopijo v vrtilno količino 0. Po shematski sliki je energija odvisna od števila vezanih parov. Tak shematski spekter za 4 delce je narisano na skici.

Kot vidimo, lahko v primeru izrazitega parjenja vpeljemo novo kvantno število, *seniornost* v , ki pove, koliko delcev ni vezanih v pare. Energija nivojev je potem v grobem odvisna od seniornosti:

$$E \sim -n_{\text{par}}\pi = -\frac{1}{2}(n_{\text{val}} - v)\pi$$

kjer je n_{val} število valenčnih nukleonov.

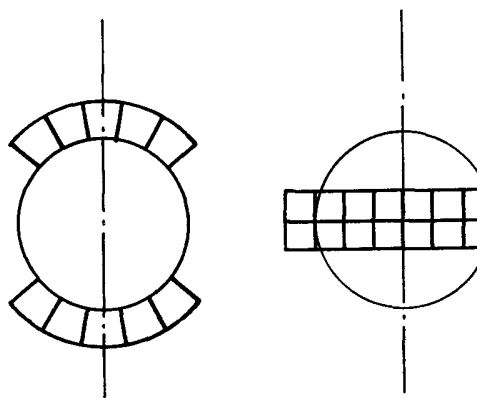
V resnici potencial nima tako kratkega dosega, kot smo predpostavili in so spektri precej manj izraziti. Če hočemo biti shematski, lahko rečemo, da je za parjenje odgovoren tisti del residualnega potenciala, ki ima posebno kratek doseg. Delež z daljšim dosegom pa povzroča drugačne efekte (kot bomo videli v naslednjem poglavju, lahko povzroči deformacijo). Potencial potem lahko razdelimo na tri dele: $V = \bar{V} + V_{\text{par}} + V'_{\text{res}}$. Dodatni residualni potencial V'_{res} je precej šibkejši od celotnega residualnega potenciala, ker

smo že izvzeli paritveni potencial. Zato se izplača posplošiti lupinski model s paritveno shemo, saj je potem preostala „motnja“ V'_{res} precej manjša od cele V_{res} pri čistem lupinskem modelu.

3.2.6 Deformacija jedra

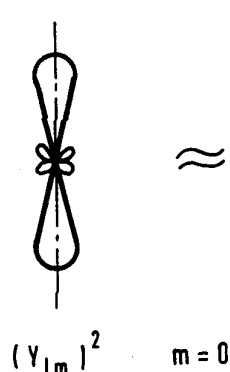
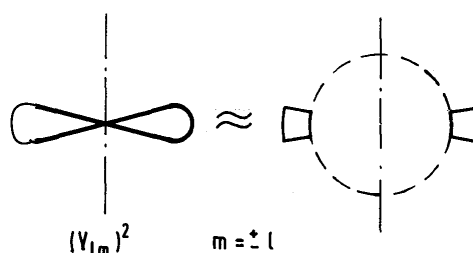
Sistematika električnih kvadrupolnih momentov pokaže, da so jedra v bližini zaključenih lupin okrogla, jedra z večjim številom valenčnih nukleonov pa so deformirana. Lahka jedra so v prvi polovici lupine podolgovata, v drugi polovici pa sploščena. Pri težkih jedrih pa je obratno (slika 3.10).

Po kapljičnem modelu bi zaradi površinske napetosti pričakovali, da bodo vsa jedra okrogla. Težnja k deformaciji torej ni pavšalna lastnost poljubnega jedra, temveč je odvisna od lupinske strukture. Ker je deformacija odvisna od števila valenčnih nukleonov, sklepamo, da so zanjo odgovorni valenčni nukleoni.



Slika 3.19: Porazdelitev valenčnih nukleonov okoli tečaja ali okoli ekvatorja

Valenčni nukleoni bi bili radi čim bliže drug drugemu. To dosežejo lahko na dva načina: ali se sparijo, ali pa da se spravijo v kopico. Če je npr. že nekaj nukleonov na polu, bodo tudi drugi šli najraje čim bliže pola, da bolje izkoristijo privlačne sile. Jedro bo v tem primeru podolgovato. Če pa je že nekaj valenčnih nukleonov na ekvatorju, bodo tudi ostali šli raje na ekvator in bo jedro sploščeno. Območje okrog tečaja je manjše kot območje vzdolž ekvatorja. Pač pa so celice okrog tečaja v povprečju bliže druga drugi. Zato se manjša skupina valenčnih nukleonov raje odloči za tečaj (večja medsebojna bližina), velika skupina pa se raje odloči za ekvator (prostor za več delcev). To nam pri lahkih jedrih pojasni, zakaj so jedra v začetku lupine podolgovata, v drugi polovici lupine pa sploščena.

 $m = 0$  $m = \pm 1$ Slika 3.20: Kotna porazdelitev stanj z $m = 0$ Slika 3.21: Kotna porazdelitev stanj z veliko projekcijo vrtilne količine m

Zakaj pa je pri težjih jedrih obratno? Naš argument se je nanašal le na prostorsko razporeditev in je zanemaril sklopitev $\vec{l}\vec{s}$. Argument bi veljal tudi pri težjih jedrih, če bi smeli silo $\vec{l}\vec{s}$ zanemariti in bi lupine sovpadale z lupinami harmonskega oscilatorja. Sila $\vec{l}\vec{s}$ pa spremeni razporeditev podlupin v lupine in jih „premakne v fazi” glede na lupine harmonskega oscilatorja.

Morda se zdi naša slika preveč naivna, saj smo narisali stanja valenčnih nukleonov kot lokalizirane celice v vrhnji lupini čebule. Vendar je slika kvalitativno v redu. Stanja s tretjo komponento vrtilne količine $m_l \approx 0$ imajo izrazit maksimum verjetnostne porazdelitve na tečaju in v grobem ustrezajo lokaliziranim celicam na tečaju. Stanja z $m_l \approx \pm 1$ pa imajo izrazit maksimum verjetnostne porazdelitve v obroču vzdolž ekvatorja.

Če se razporedijo valenčni nukleoni pretežno na tečaj, s svojimi privlačnimi silami razvlečejo še zaključene lupine. Deformacija se s tem še poveča, jedro je deformirano kot celota. Podobno se jedro z valenčnimi nukleoni na ekvatorju še bolj splošči zaradi sploščitve zaključenih lupin. Deformacija jedra je velika v primerjavi z deformacijo naše zemlje, osi elipsoida se pri jedrih razlikujeta do 30%.

Težnja po deformaciji in težnja po parjenju si do neke mere konkurirata. Pri idealnem parjenju so pari delcev sklopljeni v vrtilno količino nič in zato predstavljajo sferno simetrične tvorbe. Jedro sestavljeno iz samih sferno simetričnih tvorb je seveda tudi kot celota sferno simetrično. Parjenje torej favorizira in stabilizira okroglo obliko jedra. Pri deformiranem jedru pa parjenje ni več tako idealno, deformira se namreč tudi kotna porazdelitev para. Par ni več čisto sferno simetrična tvorba in zato vsebuje poleg vrtilne količine

0 še primesi z višjo rezultanto. Da vrtilna količina para ni več točno določena, je v deformiranem potencialu razumljivo. Vrtilna količina je namreč dobro kvantno število le v sferno simetričnem potencialu.

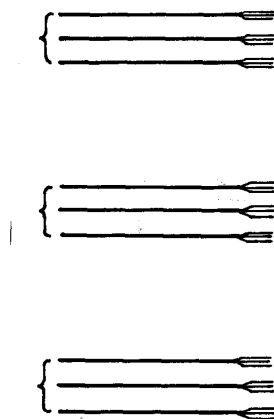
Če jedro deformiramo, torej pridobimo deformacijsko energijo in izgubimo nekoliko paritvene energije. Paritvena energija je približno sorazmerna s številom parov, torej je $\propto n_{\text{val}}$. Pri deformacijski energiji pa so povezani vsi valenčni nukleoni med seboj, zato je deformacijska energija v grobem $\propto n_{\text{val}}^2$. Pri majhnem številu valenčnih nukleonov torej prevlada težnja po parjenju in so taka jedra okrogla. Pri večjem številu valenčnih nukleonov pa prevlada težnja po deformaciji.

Kako lahko deformacijo jedra izračunamo? Prav dobre rezultate nam da *Hartree-Fockova metoda*. Pri iteracijskem računu predpostavimo neko začetno vrednost za deformacijo in izračunamo enodelčne valovne funkcije v deformiranem povprečnem jedrskem potencialu, iz njih pa nazaj boljši približek za povprečni potencial. Ta koraka večkrat ponovimo. Vrednost deformacije na koncu iteracije imenujemo „samovsklajeno deformacijo”. Pri preprostejšem *Nilssonovem modelu* pa ne delamo iteracije, temveč uporabimo enodelčne funkcije vnaprej izbranega deformiranega harmonskega potenciala. Izračunamo energijo osnovnega stanja za razne vrednosti deformacije in izberemo tisto deformacijo, ki da najnižjo energijo.

3.3 Vzbujena stanja

3.3.1 Vrste vzbujenih stanj

Za ilustracijo ponovimo najprej, kakšne tipe vzbujenih stanj poznamo pri molekulah. Na energijo molekule vpliva najbolj, katera enodelčna stanja zasedajo elektroni (elektronska konfiguracija). V osnovnem stanju so elektroni po vrsti v najnižjih tirih (izraz „tir“ bomo uporabljali kot sinonim za „enodelčno valovno funkcijo“). Če dvignemo elektron iz nižjega tira v višjega, dobimo tako imenovana elektronska vzbujena stanja. Poleg tega lahko vzbudimo molekulo tako, da nihajo atomi drug proti drugemu (*vibracijska vzbujena stanja*) ali pa da se vrti molekula kot celota (*rotacijska stanja*). Ti trije tipi vzbujenih stanj se razlikujejo po energiji za nekaj redov velikosti, zato ostanejo spektri pregledni, tudi če imamo vse tri tipe ekscitacij hkrati. Spekter je sestavljen iz „grobih črt“, katerih energije ustrezajo elektronskim vzbujenim stanjem. Vsaka „groba črta“ je sestavljena iz več trakov, ki se razlikujejo med seboj po vibracijski energiji. Ti trakovi pa niso posamezne debele črte, temveč vidimo v njih pri primerni ločljivosti skupine rotacijskih črt. Ker se ti trije tipi prostostnih stopenj zelo razlikujejo po energiji, zelo malo motijo drug drugega in smemo zapisati valovno funkcijo molekule kar kot produkt treh neodvisnih gibanj:



Slika 3.22: Shematski elektronsko-vibracijsko-rotacijski spekter

$$\Psi = \Psi_e(\vec{r}_i)\Psi_{\text{vib}}(r_{ab})\Psi_{\text{rot}}(\vartheta, \phi, \psi).$$

Pri tem so \vec{r}_i koordinate elektronov v vrtečem se koordinatnem sistemu (vezanem na molekulo), r_{ab} so razdalje med jedri in ϑ, ϕ, ψ so Eulerjevi koti za orientacijo molekule v prostoru.

Tabela 3.1: Tipični velikostni red energije (za nizkoležeča stanja):

	molekule	jedra
elektronska (nukleonska) vibracije	2 eV	2 MeV
	0,1 eV	0,5 MeV
rotacije	0,005 eV	0,1 MeV

Tudi jedro lahko vzbudimo na tri načine. Lahko dvignemo enega ali več nukleonov iz nižjih tirov v višje (*nukleonska vzbujena stanja*), lahko zanimamo obliko jedra (površinske in druge *vibracije*), ali pa spremenimo *rotacijo* jedra kot celote. Vendar se energije teh treh prostostnih stopenj ne razlikujejo toliko kot pri molekulah. Zato pričakujemo, da spektri v splošnem niso pregledni. Posamezni trakovi in vibracijski pasovi se med seboj tako prekrivajo, da le s težavo določimo, kam spada kateri nivo. Zaradi bližnjih energij se nekateri nivoji iz različnih pasov morda celo pomešajo med seboj. Taka stanja bi bila linearna superpozicija stanj z različnimi vibracijsko-rotacijskimi karakteristikami in bi se zato vibracijsko-rotacijska slika zbrisala.

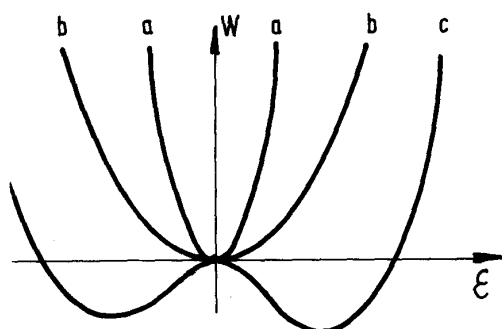
Izkaže pa se, da opisani pomislek marsikdaj ni tako hud, vsaj pri nizkoležečih nivojih ne. Visoki vzbujeni nivoji so pa skoraj vedno komplicirani. Zato se raje omejimo na nizkoležeče nivoje. Slika je preprosta, če pri nizkoležečih nivojih prevlada en sam tip vzbujenih stanj.

Jedra v bližini zaključenih lupin so okrogla (vsaj tedaj, če jih preveč ne vzbudimo). Zato ne rotirajo, podobno kot enoatomne molekule ne rotirajo. To je čisto kvantnomehanski pojav, klasično bi okroglo telo lahko rotiralo. Pri okroglem telesu ne moremo definirati njegove orientacije, zasuk telesa kot celote se v ničemer ne loči od internega zasuka delcev v tem telesu. Zato orientacija okroglega telesa ni nova prostostna stopnja in ne vodi do novih (rotacijskih) vzbujenih stanj. Zaradi tega so pri jedrih v bližini zaključenih lupin rotacijska stanja više v spektru (če jedro dovolj vzbudimo, da se deformira). Tudi vibracijska stanja so pri teh jedrih zaradi velike površinske napetosti precej visoko. Nizkoležeča stanja so torej pretežno *nukleonskega* tipa.

Pri jedrih nekoliko stran od zaključenih lupin učinkovita površinska napetost pojema. Valenčni nukleoni bi šli radi bodisi na tečaj bodisi na ekvator in s tem slabijo vpliv površinske napetosti, ki sili jedro v okroglo obliko. Zaradi zmanjšane učinkovite površinske napetosti so vibracijske frekvence precej nižje. Pri takih jedrih najdemo med nizkoležečimi nivoji značilne *vibraci-*

jske spektre.

Pri jedrih daleč od zaključenih lupin prevlada težnja valenčnih nukleonov po deformaciji nad površinsko napetostjo in ta jedra so trajno deformirana. Zato rotirajo. Med nizkoležečimi nivoji najdemo značilne *rotacijske spektre*. Nad osnovnim rotacijskim trakom običajno lahko razločimo še nekaj višjih rotacijskih trakov, ki ustrezajo vibracijskim in nukleonskim vzbujenim stanjem.



odvisnost energije jedra
od deformacije ϵ

- a) zaklj. lupine, $h\gamma = \text{velik}$
- b) malo val. nukleonov, $h\gamma = \text{majhen}$
- c) veliko val. nukleonov, $h\gamma = \text{velik}$

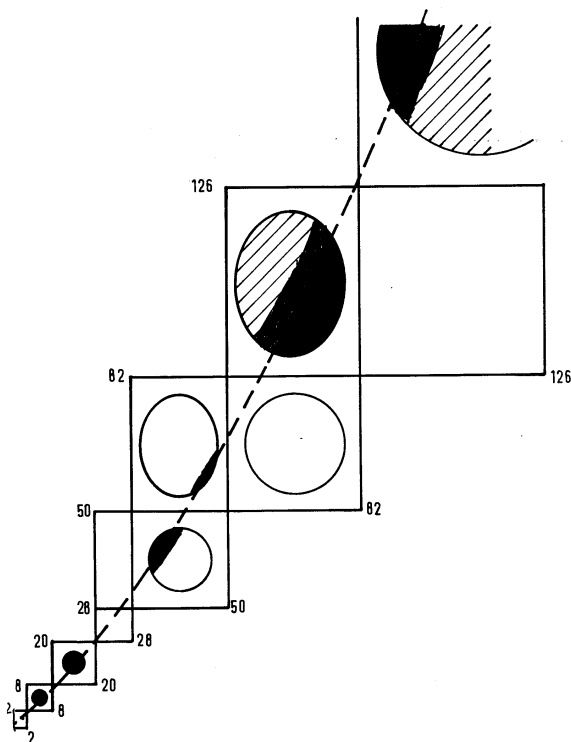
Slika 3.23: Odvisnost energije jedra od deformacije

Napravimo si sedaj pregledno tabelo. V tabelo jeder vrišimo značilna območja. Okoli vozlov črt z magičnimi števili so okrogla jedra z značilnimi nukleonskimi spektri. Daleč od magičnih števil (osenčeni krogi) so deformirana jedra z značilnimi rotacijskimi spektri. Na prehodnem območju pa imajo jedra značilne vibracijske spektre.

3.3.2 Enodelčna vzbujena stanja

Najenostavnejši tip nukleonskih vzbujenih stanj so enodelčna vzbujena stanja, pri katerih dvignemo en sam nukleon iz nižjega tira v višji tir. Ta stanja so najizrazitejša pri jedrih, ki imajo en nukleon več ali manj od zaključenih lupin.

Jedro z enim nukleonom zunaj zaključenih lupin obravnavamo približno kot kompaktno nezmoteno sredico (zaključene lupine) + dodatni nukleon.



Slika 3.24: Področja deformiranih jedr v odvisnosti od števila protonov (vodoravno) in nevtronov (navpično)

Ta nukleon je v osnovnem stanju v najnižji prosti podlupini, v preprostih vzbujenih stanjih pa je v eni od višjih podlupin. Taka vzbujena stanja imajo ista kvantna števila kot dodatni nukleon in njihova energija je približno enaka $E(A + 1, i) = E(A, 0) + \epsilon_i$. Pri tem smo z o označili osnovno stanje, z i pa kvantna števila dodatnega nukleona (oz. jedra $A + 1$). ϵ je enodelčna energija, to je energija posameznega nukleona v povprečnem jedrskem potencialu. V opisanem približku smo zanemarili, da dodatni nukleon nekoliko spremeni tere in energije nukleonom v zaključenih lupinah, skratka da sredico zmoti.

Opisana stanja jedra $A + 1$ so zanimiva zato, ker dajo eksperimentalne podatke za enodelčne energije ϵ , ki jih potrebujemo v lupinskem modelu. Če uporabimo obravnavani približek, moramo samo poznati razliko vezavnih energij (razliko mas) jedra A ter jedra $A + 1$ v osnovnem stanju ter ekscitacijsko energijo stanja i pri jedru $A + 1$ (če $i \neq 0$):

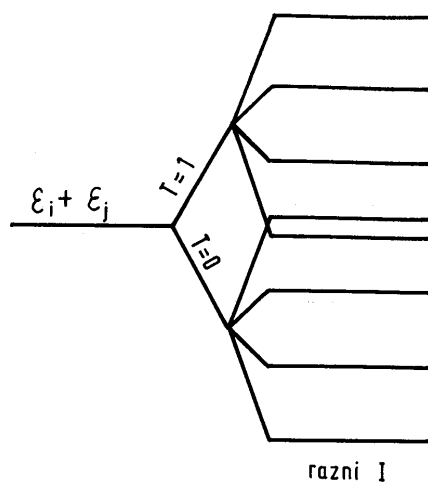
$$\epsilon_i = [E(A + 1, i) - E(A + 1, 0)] + [M(A + 1, 0) - M(A, 0) - M(1)]c^2.$$

Ta približek je dober le, če ima jedro A zaključene lupine. Za silo ga

smemo uporabiti tudi pri jedrih z zaključenimi podlupinami. Jedra z enim nukleonom več od zaključene lupine nam povedo samo enodelčne energije *prostih* podlupin. Sondo (zadnji delec) damo namreč lahko samo v prsto podlupino. Kot sondo za *zasedene* podlupine pa vzamemo luknjo (jedro z enim manjkajočim nukleonom v zaključeni lupini). Kvantna števila preprostih „enolukenjskih“ stanj takega jedra so spet ista kot kvantna števila manjkajočega delca. V istem približku kot prej dobimo enodelčno energijo iz $E(A - 1, i) = E(A, 0) - \epsilon_i$.

Pri iskanju enodelčnih stanj jedra $A \pm 1$, ki ustrezajo tej sliki, moramo seveda paziti, da jih pravilno identificiramo (npr. z ustreznimi kvantnimi števili in verjetnostmi prehodov). V istem energijskem območju je namreč često že precej drugih, kompliciranih, vzbujenih stanj.

Naslednja jedra, ki si jih bomo ogledali, so jedra z dvema nukleonoma več ali manj kot zaključene lupine (dva delca ali dve luknji). Zraven lahko vzamemo še vzbujena stanja jeder z zaključenimi lupinami (delec + luknja). V vseh teh primerih je situacija analogna kot prej, vendar precej bolj komplicirana. Energija teh stanj ni odvisna samo od tega, kakšni stanji ta dva delca (luknji) zasedata, temveč tudi od tega, kako sta sklopljena med seboj. Isti konfiguraciji potem ustreza več nivojev z različnimi vrednostmi rezultante vrtilne količine I ter izobarnega spina T . Energijo lahko potem zapišemo kot vsoto $E(A + 2, ijIT) \approx E(A, 0) + \epsilon_i + \epsilon_j + V_{\text{res}}(ijIT)$. Pri tem je V_{res} interakcijska energija med delcema zaradi residualnega potenciala in je odvisna od sklopitve I in T .



Slika 3.25: Residualni potencial energijsko razcepi stanja, ki pripadajo isti konfiguraciji

Dodatno komplikacijo predstavlja dejstvo, da so mnoga vzbujena stanja

blizu skupaj („približno degenerirana“) in jih lahko residualna sila moč zmeša („odpravi degeneracijo“). Tudi če se omejimo samo na enodelčna stanja (pri katerih dvignemo enega od zunanjih delcev v višji tir ali pa en delec iz zaključene lupine v višjo lupino) moramo običajno vzeti zaradi motnje (residualne sile) linearno superpozicijo več takih stanj. Opraviti imamo torej z mešanimi konfiguracijami.

Pri večjem številu valenčnih nukleonov je slika čedalje bolj komplicirana in potrebujemo za kvantitativne račune velike računske stroje. Pri semikvantitativnih računih pa si lahko pomagamo s tem, da lupinski model razširimo s paritveno shemo. V osnovnem stanju vzamemo, da so vsi nukleoni vezani v pare. Pri nizkih vzbujenih stanjih pa vzamemo, da je razdrt samo en par in v prvem približku obravnavamo samo ta dva „prosta“ nukleona. Liha jedra pa spominjajo na jedra z enim nukleonom zunaj zaključene lupine. Tudi tu igra glavno vlogo zadnji „prosti“ nukleon, preostali pa ostanejo v prvem približku sparjeni.

3.3.3 Rotacija

Deformirana jedra lahko rotirajo. Za popis njihovega rotacijskega stanja potrebujemo tri kvantna števila: vrtilno količino I , njeno projekcijo M na fiksno os z ter njeno projekcijo K na simetrijsko os jedra. Pri tem opisujeta I in M kolektivno gibanje (rotacijo jedra kot celote), K pa je odvisna od notranjega stanja jedra in pove nekaj o njegovi notranji vrtilni količini. Da lahko povemo o notranji vrtilni količini le tretjo komponento K , nas ne preseneča, saj v deformiranem potencialu velikost vrtilne količine ni definirana, temveč le njena tretja komponenta. V osnovnem rotacijskem stanju je $I = K$, v višjih pa je $I > K$. Da I ne more biti manjši od svoje projekcije K , je jasno.

Rotacijski spekter prepoznamo po naslednjih značilnih lastnostih:

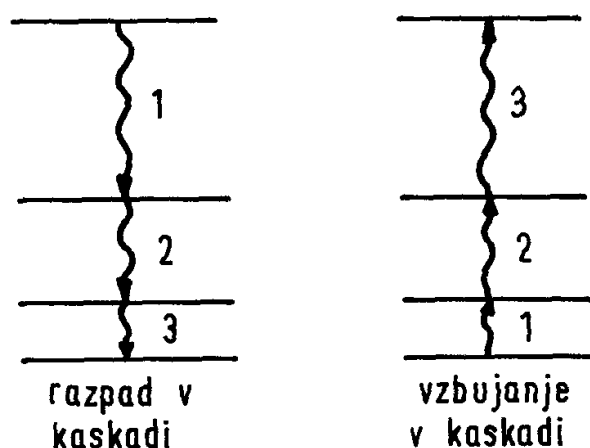
(i) **Zaporedje vrtilnih količin.** Vrtilne količine zaporednih nivojev naraščajo po ena od nekega števila K naprej (npr. $I = 2, 3, 4, 5, \dots$ ali $I = 3/2, 5/2, 7/2, \dots$). Edino če je $K = 0$, naraščajo po dva ($0, 2, 4, 6, \dots$). Jedra s $K = 0$ so namreč popolnoma simetrična glede na vodoravno ravnino (xy) jedra. Zato se zasuk za 180° okrog osi x ne sme nič poznati. Rotacijska valovna funkcija (krogelna funkcija) pa pri lihem I pri takem zasuku spremeni predznak in je zato lih I prepovedan.

(ii) **Energijski razmiki.** Energije zaporednih nivojev si sledijo kot $E = \hbar^2/2J = (\hbar^2/2\mathcal{J}) \cdot I(I + 1)$, podobno kot pri dvoatomni molekuli.

(iii) **Verjetnost prehodov** med zaporednimi rotacijskimi nivoji je do 1000 krat večja kot verjetnost običajnih (enodelčnih) prehodov. Zato je

razpolovni čas rotacijskih nivojev ~ 1000 krat krajši, kot bi pričakovali za preskok posameznega delca. Podobno lahko vzbudimo rotacijske nivoje z veliko verjetnostjo. To dokazuje, da sodeluje pri prehodu več nukleonov koherentno. Tak prehod imenujemo kolektivni prehod. Ker seštevamo zaradi koherence amplitude posameznih sodelujočih nukleonov (ne verjetnosti!), sklepamo, da sodeluje pri težkih jedrih pri takem prehodu koherentno kakih 30 nukleonov. Verjetnost se potem poveča za faktor 30^2 .

Tako povečanje razpadne verjetnosti bi pričakovali tudi klasično. Vrteči se nabiti elipsoid seva kot spremenljiv električni kvadrupol. H kvadrupolnemu momentu prispevajo vsi protoni v kapici elipsoida, ki moli čez kroglo. Kvadrupolni moment je zato velik in energijski tok sevanja je velik.



Slika 3.26: Razpad in vzbujanje rotacijskih stanj v kaskadi

Ker je verjetnost prehoda velika samo med zaporednimi nivoji, razpadajo višja rotacijska stanja v kaskadi, postopoma od enega do drugega zaporednega nivoja. To je lahko kvalitativen argument za veliko verjetnost teh prehodov, kadar ne poznamo razpolovnih časov kvantitativno.

$I = 18^+$	
16^+	
14^+	
$1,100 \text{ MeV}$	12^+
$0,785$	10^+
$0,522$	8^+
$0,309$	6^+
$0,148$	4^+
$0,0447$	2^+
0	0^+

Za ilustracijo pogledajmo tipičen rotacijski spekter ^{238}U . Energijski nivoji se dokaj dobro ujema s formulo $E = (\hbar/2J) \cdot I(I+1)$. Posebno pa nas presenetijo dejstva, da so lahko izmerili rotacijski spekter do tako visokih energij in da je spekter tam še vedno tako izrazit. Pri tem pomagata dva zanimiva efekta.

a) Ker je verjetnost prehoda velika samo med zaporednimi nivoji, je najboljša vzbujanje v kaskadi. S tem vzbudimo z veliko verjetnostjo le rotacijske nivoje danega rotacijskega traku, ostale tuje nivoje pa vzbudimo le z majhno verjetnostjo. S tem precej eliminiramo „ozadje“ mnogih tujih nivojev, ki nam bi napravili sliko nepregledno. Kako pa je mogoče vzbujanje v kaskadi, saj nam vzbujeno jedro že davno razpade, preden ga zadenemo z naslednjim fotonom? Kot projektil vzamemo težek ion. Zaradi velike elektrostatske ograje projektil sploh ne vstopi v jedro, temveč ga vzbuja s svojim elektrostatskim poljem (coulombsko vzbujanje). Ker ima težek ion veliko maso in velik naboj, si lahko mislimo, da ga obdaja velik oblak virtualnih fotonov (nosilcev elektrostatskega polja). Tačas, ko leti projektil mimo jedra, lahko cela serija njegovih virtualnih fotonov pravočasno v kaskadi vzbudi jedro. Če bi bili projektili fotoni, bi le-ti prihajali k jedru posamič in prepozno za kaskado. Težki ion pa nam tako rekoč služi kot „paket fotonov“.

Še en argument govori v prid težkim ionom. Za tvorbo stanj z visoko vrtilno količino mora imeti zaradi ohranitve vrtilne količine projektil visoko tirno vrtilno količino. Če je ročica reda velikosti radija jedra, potrebujemo za

vrtilno količino Γ energijo $W = p^2/2m = (\Gamma/r_j)^2/2m$. Kot vidimo, opravimo najceneje s težkimi ioni (velik m).

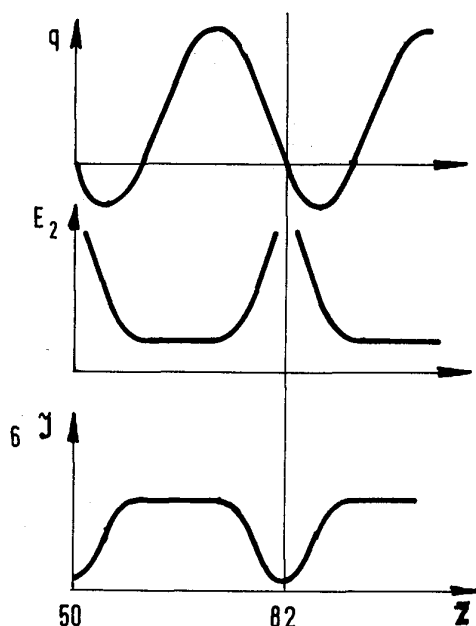
b) Drugi efekt, značilen za visoka rotacijska stanja, je njihova čistoča. Ker so precej visoko v spektru, jih obdaja cela množica kompliciranih tujih stanj. Zato bi pričakovali, da jih residualna sila pomeša z njimi. Dejanska stanja bi bila linearna superpozicija rotacijskih in tujih stanj in bi s tem izgubila značilne lastnosti rotacij. V resnici pa so rotacijski nivoji čisti in tipični do najvišjih izmerjenih vrednosti. Razlog je v tem, da v okolici kljub množici tujih nivojev ni nobenega s tako visoko vrtilno količino. Tako visoke vrtilne količine dobimo zlahka le z rotacijo. Ker je vrtilna količina dobro kvantno število, se mešajo med seboj le stanja z isto vrtilno količino. Visoka rotacijska stanja se nimajo s čim mešati in ostanejo dokaj čista.

Za ilustracijo si oglejmo nekaj jeder, ki imajo v osnovnem stanju $I = 0^+$! Kot hiter preskus, ali so stanja rotacijska, vzamemo razmerje energij med stanjema 4^+ ter 2^+ , ki mora biti $E_4/E_2 = (4 \cdot 5)/(2 \cdot 3) = 3,33$. Kot vidimo, pri težkih deformiranih jedrih to razmerje dobro velja, pri lahkih deformiranih jedrih pa je manj natančno, ker tam rotacija ni tako neodvisna od notranjega gibanja.

	Jedro	E_2	E_4	E_4/E_2	
	${}^8_4\text{Be}$	2,90	11,7	4,0	
	${}^{20}_{10}\text{Ne}$	1,632	4,248	2,6	
Lantanidi	${}^{150}_{62}\text{Sm}$	0,337	0,777	2,3	ni rotacijski!
	${}^{176}_{72}\text{Hf}$	0,089	0,289	3,2	
	${}^{180}_{72}\text{Hf}$	0,093	0,307	3,3	
	${}^{208}_{82}\text{Pb}$	2,614	3,200	1,2	ni rotacijski!
Aktinidi	${}^{226}_{88}\text{Ra}$	0,067	0,217	3,2	
	${}^{228}_{90}\text{Th}$	0,058	0,187	3,2	
	${}^{230}_{90}\text{Th}$	0,050	0,167	3,3	
	${}^{238}_{94}\text{Pu}$	0,043	0,146	3,4	

Ena od zelo zanimivih lastnosti rotacije jedra je odvisnost vztrajnostnega momenta od deformacije. Če pogledamo sistematsko od ene polne lupine do druge, opazimo, da imajo jedra blizu zaključenih lupin majhen kvadrupolni moment (majhno deformacijo) in obenem precej visoko prvo rotacijsko stanje (majhen vztrajnostni moment). Jedra v sredi med zaključenimi lupinami pa imajo velik kvadrupolni moment (so močno deformirana) in imajo rotacijska stanja nizko (velik \mathcal{J}). Vztrajnostni moment torej narašča z deformacijo.

Kakšna je potemtakem limita proti zaključenim (okroglim jedrom)? Ko gre deformacija proti nič, gre tudi vztrajnostni moment proti nič in energija rotacijskih stanj gre v neskončnost. To je druga razlaga, zakaj okrogla jedra

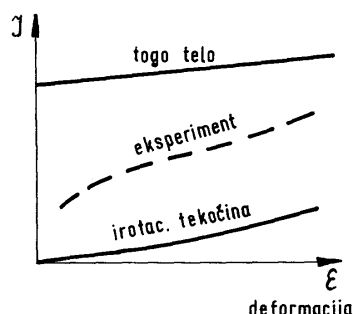


Slika 3.27: Odvisnost deformacije (električnega kvadrupolnega momenta), energije prvega vzbujenega rotacijskega stanja ter vztrajnostnega momenta od števila protonov

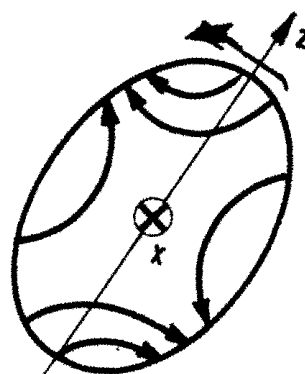
nimajo rotacijskih stanj.

Ali se jedro vrti togo? Vztrajnostni moment za togo telo ima končno vrednost, tudi če je jedro okroglo [$\mathcal{J} = (2/5)mr^2$]. Z deformacijo ta vztrajnostni moment le počasi narašča, ker se jedro relativno malo deformira in dobi relativno malo snovi večjo ročico. To pa je v nasprotju z eksperimentalnim \mathcal{J} , ki je pri okroglem jedru nič, potem pa hitreje narašča in doseže $1/3$ do $1/2$ vrednosti togega telesa. Jedro se torej ne vrti kot togo telo.

Rotacijo nekoliko bolje opišemo z irotacionalnim gibanjem idealne tekočine. Kaplja se vrti tako, da po njej potujeta nekakšna plima in oseka, ki določata deformirano obliko kaplje. Strujanje je pri tem irotacionalno, obliko kaplje pa stabilizira povprečni jedrski potencial, ki deluje kot nekaka vrteča se jajčna lupina. Okrogla kaplja ne more irotacionalno krožiti. Če je kaplja le malo deformirana, morata za doseganje dane vrtilne količine plima in oseka zelo hitro krožiti in je rotacijska energija velika. Z deformacijo potrebna kotna hitrost pada in rotacijske energije so manjše. Hidrodinamski račun pokaže, da je vztrajnostni moment sorazmeren s kvadratom deformacije $(c - a)/a$. Pri vztrajnostnem momentu sodeluje torej v glavnem le tisti del snovi, ki



Slika 3.28: Vztrajnostni moment kot funkcija deformacije za togo telo, dejanska jedra ter irotacionalno gibanje tekočine



Slika 3.29: Irotacionalno kroženje deformirane kapljice okrog osi x

je v plimski kapici izven včrtane krogle. Vse to je kvalitativno v skladu z eksperimentom, vendar dá hidrodinamski model 3 krat premajhno vrednost za J (medtem ko je dal model togega vrtenja 3 krat preveliko!).

Rotacija jedra je torej nekaj vmes med togim in irotacionalnim vrtenjem. Kaj ko bi poskusili z viskozno tekočino? Samo idealna tekočina se giblje irotacionalno, viskozna tekočina pa nekoliko odstopa od tega. Toda rotacija traja dolgo časa in po preteku določenega časa bodo sile trenja potegnile vso tekočino v togo vrtenje. Dobili bi spet vztrajnostni moment togega vrtenja.

Pravilen rezultat dobimo, če vzamemo mešanico navadne in suprafluidne tekočine. Navadna tekočina se vrti precej togo in prispeva k J večji delež. Suprafluidna tekočina pa nima viskoznosti in se giblje irotacionalno in le malo prispeva. Tako lahko dobimo pravilno povprečje med J_{tog} in J_{irot} . Odkod pa imamo v jedru suprafluidno tekočino? Suprafluidno se obnašajo idealno sparjeni nukleoni. Pojav in formalizem je analogen kot pri suprafluidnosti tekočega helija ali supraprevodnosti kovin. Povsod igrajo glavno vlogo korelirani pari delcev, ki jih je težko vzbuditi in zmotiti pri njihovem gibanju (uvesti trenje), ker je za to potrebno precej energije (za raztrgati par). Zaradi te analogije imenujejo nekateri parjenje v jedru kar suprafluidnost ali supraprevodnost jedra. Kot vidimo, moramo pri računih vztrajnostnega momenta vedno upoštevati parjenje.

Določanje deformacije

Deformacija karakterizira notranje stanje jedra. Zato je dobro definirana samo takrat, kadar lahko ločimo notranje gibanje jedra od vrtenja jedra

kot celote. To lahko napravimo npr. pri močno deformiranih jedrih z izrazitim rotacijskim spektrom. V splošnem (zlasti pri lahkih jedrih) pa se tiri posameznih nukleonov tako prepletajo, da je težko definirati orientacijo jedra in s tem ločiti notranje gibanje od kolektivnega. V tem primeru je definicija deformacije odvisna od izbire modela, ali pa deformacija sploh ni definirana.

Deformacijo lahko določimo na naslednje načine:

(i) Najdirektnije dobimo deformacijo in statičnega električnega kvadrupolnega momenta. Žal je pri jedrih z $I = 0$ tudi $q = 0$, čeprav so jedra deformirana. q se namreč nima orieritirati po čem in ima pričakovano vrednost 0. Prav jedra z $I = 0$ pa so v večini in nas tudi najbolj zanimajo. Ker pri njih omenjeni način merjenja deformacije odpade, rabimo druge metode.

(ii) Dinamični električni kvadrupolni moment $\langle \psi_2 | \hat{q} | \psi_1 \rangle$ izraža verjetnost za prehode in je prav tako odvisen od deformacije jedra kot statični. Meriti moramo torej verjetnost za prehod med dvema rotacijskima stanjema (npr. razpolovni čas). Klasično bi rekli, da iz energijskega toka sevanja ugotovimo q vrtečega se kvadrupola.

(iii) Sipanje elektronov na jedru pove nekaj o deformaciji, tudi če je $I = 0$.

(iv) Iz rotacijskega spektra izračunamo \mathcal{J} ter ocenimo ϵ iz empiričnega diagrama $\mathcal{J} = \mathcal{J}(E)$ na sliki 3.28.

3.3.4 Vibracija

Doslej poznamo dve vrsti vibracij:

(i) Pri **površinskih vibracijah** niha oblika jedra. Sila, ki vrača proti ravnotežni obliki in vzdržuje nihanje, je površinska napetost.

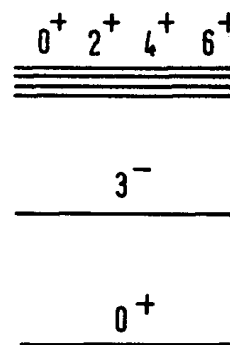
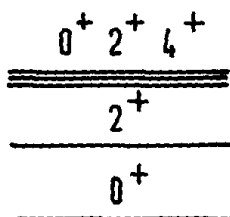
(ii) Pri **koncentracijskih vibracijah** nihajo protoni proti nevtronom. Pri tem nastane izmenoma na eni strani večja koncentracija protonov, na drugi strani pa nevtronov. Sila, ki vrača jedro proti ravnotežni koncentraciji, izvira iz mešalne energije.

Morda bi bili možni še dve vrsti vibracij, vendar še nista dokazani. Pri kompresijski vibraciji bi se krčilo in širilo jedro kot celota, vendar leži verjetno frekvenca (energija) teh vibracij zelo visoko zaradi majhne stisljivosti jedrske tekočine. Pri paritveni vibraciji bi nihala stopnja sparjenosti, k ravnotežnemu parjenju pa bi vračala sila parjenja (morda je nekoliko analogen temu drugi zvok v suprafluidnem heliju). Teh dveh domnevnih vibracij ne bomo več omenjali.

Vibracijske spektre prepoznamo po naslednjih značilnih lastnostih:

(i) **Zaporedje vrtilnih količin**

Če ima osnovno stanje $I = 0^+$, je npr. zaporedje vrtilnih količin pri kvadrupolnih in oktupolnih površinskih vibracijah naslednje:



Slika 3.30: Kvadrupolna vibracija

Slika 3.31: Oktupolna vibracija

1,340 MeV	$I = 4^+$
1,215	2^+
1,122	0^+
0,550	2^+
0	0^+

Slika 3.32: Tipičen vibracijski spekter: ${}^{76}_{34}\text{Se}$

Razložimo to zaporedje za kvadrupolne vibracije. Nihajoča površina ima obliko elipsoida: $r = r_0(1 + \beta Y_{20}(\vartheta, \phi) \sin \omega t)$. Pri tem je β amplituda nihanja deformacije. Krogelna funkcija Y_{20} v izrazu za obliko površine spominja na valovno funkcijo z vrtilno količino 2 in res se da dokazati, da vsak kvant kvadrupolne vibracije („fonon“) nosi vrtilno količino 2 in pozitivno parnost. Zato ima „enofononsko“ stanje vrtilno količino 2^+ , v drugem vzbujenem stanju imamo dva fonona, ki sta lahko sklopljena v rezultanto od 0 do 4. Če ima osnovno stanje vrtilno količino 0^+ , so lihe rezultante dvofononskega stanja spet prepovedane, podobno kot pri rotacijah. Tako jedro je namreč

simetrično glede na ravnino xy in se zasuk za 180° okrog osi x ne sme nič poznati, kar pa bi kršile lihe rezultante. Še nazornejša je razlaga, da sta fonona bozona in ju je treba sklopiti simetrično; Clebsch-Gordanovi koeficienti za sklapljanje vrtilnih količin pa so v tem primeru simetrični le za sode rezultante. Dvofononsko stanje je torej trikrat degenerirano ($I = 0^+, 2^+, 4^+$). Motnje seveda to degeneracijo nekoliko odpravijo. Trofononska in višja stanja so doslej našli le pri redkih jedrih. Pri oktopolnih vibracijah je slika podobna, le da nosijo oktopolni fononi vrtilno količino 3 in negativno parnost.

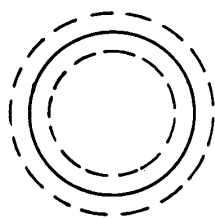
(ii) **Energije vibracijskih stanj** so ekvidistantne. Amplituda vibracij je kvantizirana tako, da nosi vsak kvant (fonon) energijo $h\nu$. Energija nivoja je potem v idealizirani sliki kar sorazmerna s številom fononov: $E = n \cdot h\nu$.

(iii) **Verjetnosti za prehode** so podobno kot pri rotacijah mnogo večje kot verjetnosti za običajne (enodelčne) prehode. Faktor je tu 10–100, kar kaže, da sodeluje pri vibraciji nekako 4–10 nukleonov. Tudi klasično bi pričakovali veliko moč sevanja, saj utripa jedro kot celota iz podolgovate v sploščeno obliko (nihajoči električni kvadrupol). Faktor verjetnosti pri vibracijah je manjši kot pri rotacijah zaradi tega, ker imamo najbolj tipične vibracije pri jedrih s srednje majhnim številom valenčnih nukleonov, tipične rotacije pa pri večjem številu valenčnih nukleonov.

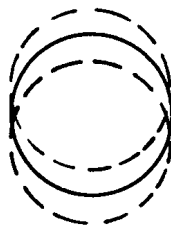
Površinske vibracije lahko opišemo hidrodinamsko kot irotacionalno površinsko nihanje kapljice. Klasičen izraz za frekvenco takih nihanj je $\omega^2 = l(l-1)(l+2)\sigma/\rho r_j^3$, pri čemer je l multipolnost nihanja. Če vzamemo za površinsko napetost σ kar vrednost iz kapljičnega modela (Weizsäckerjeve formule) dobimo pri jedrih blizu zaključenih lupin kar dobro frekvenco, pri tipičnih vibracijskih jedrih pa dobimo previsoko frekvenco. Valenčni nukleoni namreč težijo družno bodisi na tečaj bodisi na ekvator in s tem slabijo vpliv površinske napetosti, ki sili v okroglo obliko. „Efektivna” površinska napetost je zato precej manjša, kar zniža tudi frekvenco nihanja.

Pripomba: Monopolnih površinskih vibracij ($l = 0$) ni, ker pomeni monopolno nihanje površine $r = r_0(1 + \beta Y_{00}(\vartheta, \phi) \sin \omega t)$ širjenje in krčenje jedra („dihanje”). To pa je kompresijska vibracija, ki ima zaradi majhne stisljivosti jedrske tekočine zelo visoko frekvenco in je eksperimentalno dokumentirana kot neizrazita široka resonanca. Tudi dipolne površinske vibracije niso zanimive, ker pomenijo samo premikanje jedra kot celote. Če je jedro izolirano, to ni mogoče (težišče mora mirovati, ne more nihati.). V nihajočem električnem polju težišče sicer lahko niha (Thomsonovo nihanje), vendar je to nihanje jedra kot celote in ni zanimivo, saj se v samem jedru nič ne zgodi. Najnižji red površinskih vibracij so torej kvadrupolne.

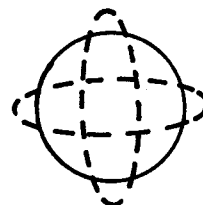
Koncentracijske vibracije



Slika 3.33:
Monopolna površinska vibracija = kompresijska vibracija



Slika 3.34:
Dipolna površinska vibracija = nihanje težišč

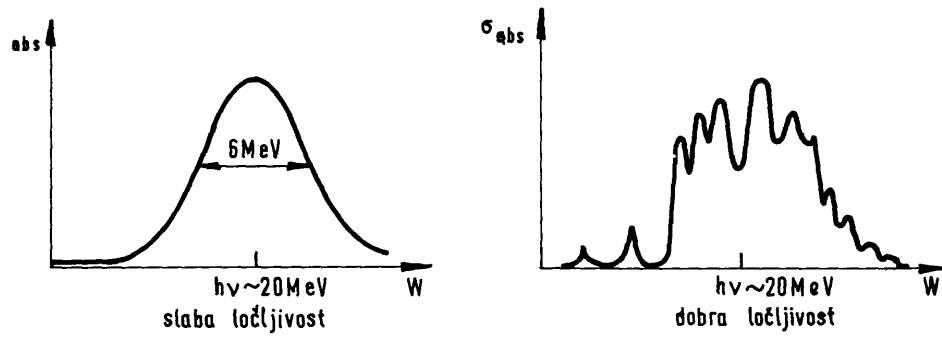


Slika 3.35:
Kvadrupolna površinska vibracija

Poznamo samo dipolne. Pri njih nihajo protoni na eno stran, nevtroni pa na drugo (v nasprotni fazi). Pri tem se niti ne premakne težišče niti se ne spremeni oblika jedra. Niha samo koncentracija protonov oz. nevtronov. Ker je mešalna energija velika, je frekvenca visoka. Po oceni s kapljičim modelom je energija enofononskega stanja $60 \text{ MeV} \cdot a^{-1/3}$, kar se kvalitativno sklada z eksperimentom. Kako pa lahko najdemo tako visoko stanje, saj je tam že cela množica drugih nivojev (hudo „ozadje“)? Dipolno vibracijsko stanje se odlikuje po veliki verjetnosti prehoda. Dipolni prehodi so itak najverjetnejši od vseh, tu pa je prehod že močno ojačen zaradi kolektivnega gibanja.

Dipolno stanje najdemo torej tako, da izmerimo presek za absorpcijo fotonov v odvisnosti od energije. Fotoni zdaleč najraje vzbudijo dipolno stanje, zato ima absorpcijska krivulja pri energiji dipolnega stanja visoko resonanco. Dipolno stanje pa tudi razpada z veliko verjetnostjo (s kratkim razpolovnim časom). Zato ima po principu nedoločenosti zelo razmazano energijo in je resonanca tudi zelo široka. Zaradi velike višine in širine so to resonančno krivuljo (oz. dipolno stanje) imenovali *veleresonanco*.

Eksperimenti z boljšo ločljivostjo so pokazali, da veleresonanca ni gladka resonančna krivulja, temveč ima izrazito strukturo. Dipolno stanje torej ni eno samo čisto stanje, temveč imamo v resnici celo skupino stanj, ki so linearna superpozicija dipolnega stanja z drugimi tujimi bolj kompliciranimi stanji. Skupina kot celota pa še vedno ohrani nekaj karakteristik dipolnega vibracijskega stanja.



Slika 3.36: Presek za vzbujanje dipolne koncentracijske vibracije (veleresonanca)

Poglavje 4

JEDRSKI RAZPADI IN REAKCIJE

4.1 Razpad alfa

4.1.1 Prepustnost elektrostatske ograje

Pri razpadu alfa odleti iz jedra helijevo jedro:

$${}^A_ZJ \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}J + {}^4_2\text{He} + Q, \quad Q = [M(Z, A) - M(Z - 2, A - 4) - M(2, 4)]c^2.$$

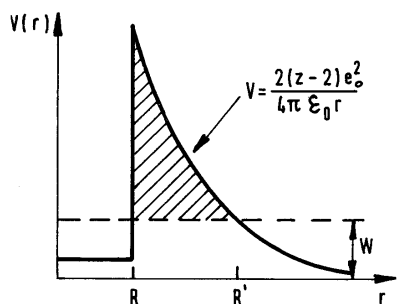
Vzrok za razpad alfa so odbojne elektrostatske sile, ki so pri težkih jedrih že dovolj močne, da izženejo delec alfa iz jedra. Naivno bi pričakovali, da bo tako jedro momentano razpadlo, saj odbojne elektrostatske sile stalno delujejo. V resnici pa deluje odbojni elektrostatski potencial kot ograja, kajti zunaj jedra je pozitiven potencial višji kot kinetična energija delca alfa. Delec alfa je torej ujet v jedrsko potencialno jamo znotraj jedra. Klasično sploh ne bi mogel uiti, kvantno pa pride ven s tunelskim efektom, če ograja ni previsoka.

Ocenimo sedaj prepustnost elektrostatske ograje. Radioaktivno jedro bomo obravnavali kot sistem dveh teles — delca alfa ter preostalega jedra. Edino za sistem dveh teles se da namreč napraviti točen račun.

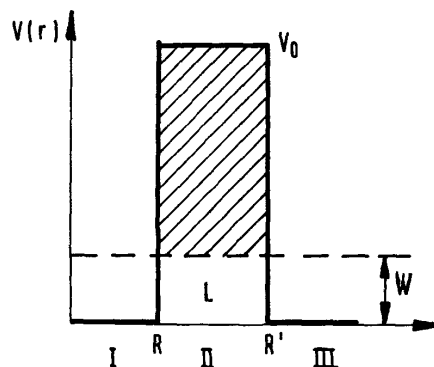
Zunaj radija jedra se obe telesi odbijata s čisto elektrostatsko silo, medtem ko imamo znotraj radija potencialno jamo zaradi jedrskih sil, ki jo bomo aproksimirali kar s pravokotno jamo.

Račun bomo najprej napravili za pravokotno ograjo. Če je potencial krogelno simetričen, lahko ločimo radialno gibanje od kotnega z nastavkom

$$\psi = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\vartheta, \phi).$$



Slika 4.1: Elektrostatska ograja pri razpadu alfa



Slika 4.2: Pravokotna potencialna ograja

Rešiti moramo Schrödingerjevo enačbo za radialni del valovne funkcije:

$$-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\tilde{m}r^2} u + V(r)u = Wu.$$

Pri tem $\tilde{m} = m_{\text{He}}(A-4)/A$ reducirana masa sistema. Prepustnost je največja, če odleti delec alfa s tirno vrtilno količino $l = 0$, kajti drugi člen v Schrödingerjevi enačbi je pozitiven in deluje kot dodatna ograja („centrifugalni potencial“). Zato bomo računali za primer, ko je $l = 0$. Poiščimo rešitev za vsako območje posebej.

$$\begin{aligned} \text{Območje I:} & \quad u'' + k^2 u = 0, & k &= \sqrt{2\tilde{m}W}/\hbar, & u_I &= Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \\ \text{Območje II:} & \quad u'' - \kappa^2 u = 0, & \kappa &= \sqrt{2\tilde{m}(V_0 - W)}/\hbar, & u_{II} &= Ce^{\kappa r} + De^{-\kappa r} \\ \text{Območje III:} & \quad u'' + k^2 u = 0, & k &= \sqrt{2\tilde{m}W}/\hbar, & u_{III} &= Ee^{ikr} \end{aligned}$$

Kot podatek vzamemo amplitudo prihajajočega toka A , zanima nas pa prepuščen tok E . Konstante lahko povežemo med seboj z mejnimi pogoji: na mejah območij morata biti valovna funkcija in njen odvod zvezna. Če vzamemo koordinatni začetek v točki R ($r = R+x$), so mejni pogoji naslednji:

$$\begin{array}{l}
 x=0: \quad A + B = C + D \\
 \quad \quad ik(A - B) = \kappa(C - D) \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2A = C(1 + \kappa/ik) + D(1 - \kappa/ik) \\
 \\
 x=L: \quad Ce^{\kappa L} + De^{-\kappa L} = Ee^{ikL} \\
 \quad \quad \kappa(Ce^{\kappa L} - De^{-\kappa L}) = ikEe^{ikL} \\
 \hline
 \quad \quad \quad 2Ce^{\kappa L} = E(1 + ik/\kappa)e^{ikL} \\
 \quad \quad \quad 2De^{-\kappa L} = E(1 - ik/\kappa)e^{ikL}
 \end{array}$$

Eliminirajmo C in D , ki nas ne zanimata!

$$\begin{aligned}
 4A &= E(1 + ik/\kappa)e^{ikL}e^{-\kappa L}(1 + \kappa/ik) + E(1 - ik/\kappa)e^{ikL}e^{\kappa L}(1 - \kappa/ik) \\
 4A &= Ee^{ikL}[(\kappa + ik)^2e^{-\kappa L} - (\kappa - ik)^2e^{\kappa L}]/\kappa ik \\
 A &= -Ee^{ikL}[(\kappa^2 - k^2)2e \sinh \kappa L - 2ik\kappa 2 \cosh \kappa L]/4\kappa ik
 \end{aligned}$$

Prepustnost definiramo kot razmerje med prepuščenim tokom E^*Ev ter vpadlim tokom A^*Av :

$$pr = \frac{E^*Ev}{A^*Av} = \frac{1}{\cosh^2 \kappa L + [(k^2 - \kappa^2)/2k\kappa]^2 \sinh \kappa L}$$

Če je ograja velika ($\kappa L \gg 1$), lahko to pišemo:

$$\boxed{pr = Ce^{-g}}, \quad \text{kjer je } C = [4k\kappa(k^2 + \kappa^2)]^2 \\
 g = 2\kappa L = 2(\sqrt{2\tilde{m}/\hbar})\sqrt{V_0 - WL}.$$

Količina C je reda velikosti I in se le malo spreminja z energijo delca ali višino ograje. Pač pa je prepustnost hudo (eksponentno) odvisna od količine g , tako da smemo uvesti „učinkovitost“ ograje kot produkt dolžine ograje in korena iz višine ograje.

Če ograja nima pravokotne oblike, je rešitev Schrödingerjeve enačbe bolj komplicirana. Ker nas zanima samo približna vrednost za prepustnost, smemo gornji izraz posplošiti. Ograjo si mislimo razrezano na same tanke pravokotnike, od katerih vsak zmanjša tok delcev za faktor $C_i e^{-g_i}$. Prepustnost spet lahko pišemo kot $pr = Ce^{-g}$, pri čemer je

$$g = \sum g_i = 2 \int_R^{R'} \kappa dr = 2(\sqrt{2\tilde{m}/\hbar}) \int_R^{R'} \sqrt{V(r) - W} dr.$$

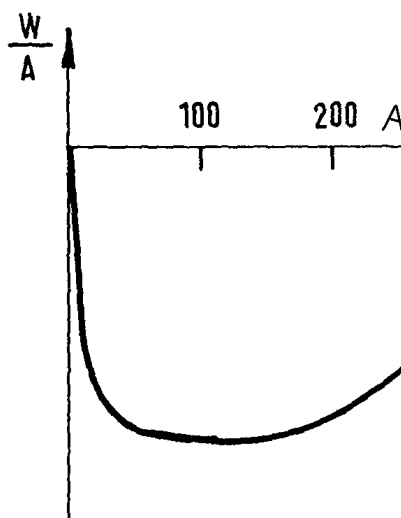
Parametra C ne bomo računali, temveč bomo samo ocenili, da je reda velikosti 1. Rezultat za elektrostatsko ograjo, kakršno smo preje narisali, je naslednji:

$$g = \sqrt{2\tilde{m}\epsilon} R (\pi\sqrt{\epsilon/W} - 4)/\hbar.$$

Pri tem smo višino ograje na konici označili z ϵ , $\epsilon = 2(Z - 2)e_0^2/4\pi\epsilon_0 R$, ter predpostavili, da je $\epsilon \gg W$.

4.1.2 Razpad alfa

Pri težjih jedrih vrednost specifične vezavne energije nukleonov pada. Odbojna elektrostatska energija namreč narašča s kvadratom števila delcev, negativna jedrska energija pa narašča zaradi kratkega dosega le linearno. Če je specifična vezavna energija zadnjih štirih nukleonov že manjša kot v heliju, se izplača delcu alfa odleteti iz jedra. Ocena z Weizsäckerjevo masno formulo pokaže, da je razpad alfa energijsko možen ($Q > 0$) od $A > 133$ naprej. Tudi iz eksperimentalnih vezavnih energij jeder se vidi, da je $Q > 0$ za večino jeder nad $A \geq 140$.



Slika 4.3: Specifična vezavna energija nukleonov v odvisnosti od števila nukleonov

Kljub temu razpada zelo malo jeder v območju $140 < A < 208$ z razpadom alfa. Jedra namreč niso v labilnem, temveč v metastabilnem položaju zaradi elektrostatske ograje. Pri večini jeder do svinca je Q zelo majhen in je zato

ograja tako visoka, da je razpadni čas nemerljivo dolg. Taka jedra štejemo kar za stabilna. Šele od ^{209}Bi naprej, ko je $Q \gg 1 \text{ MeV}$, so vsa jedra alfa-radioaktivna (imajo merljivo dolge ali celo kratke razpolovne čase). ^{208}Pb in ^{209}Bi sta poslednji stabilni jedri.

Razpolovni čas za razpad alfa bomo ocenili z naslednjimi tremi predpostavkami:

1. Razpad alfa bomo obravnavali kot problem dveh teles: delca alfa ter preostalega jedra. Delec alfa s tunelskim efektom uide skozi elektrostatski potencial od preostalega jedra. Opravičilo je naslednje. V jedru se rade tvorijo gruče, v katerih sta dva protona in dva nevtrona povezana v delec alfa. Tak delec alfa seveda ni stalna tvorba, ki bi se gibala po jedru brez spremembe vse do razpada alfa, ampak se gruča v kratkem času spet „raztopi“. Toda tačas so se verjetno že drugi štirje nukleoni sprijeli v gručo — delec alfa, tako da je skoraj vedno prisoten kak delec alfa. Delci alfa so torej „pripravljeni“ v jedru. Naš približek je tedaj v tem, da vzamemo, kot da se giblje vedno isti delec alfa. V resnici pa poizkuša napraviti tunelski efekt vedno druga gruča alfa. Verjetnost za razpad moramo potem seveda pomnožiti z n_α , povprečnim številom gruč alfa, ki se istočasno tvorijo v jedru.

2. Vzeli bomo, da čuti delec alfa pravokotno potencialno jamo v jedru. Tako dobimo ostro konico elektrostatskega potenciala na površini jedra. V resnici zaradi neostre jedrske površine ni take konice; naša ocena nam bo dala nekoliko prenizko verjetnost za razpad alfa.

3. Vzeli bomo krogelno simetričen potencial za delec alfa, čeprav so značilna alfa-aktivna jedra deformirana. Zato bomo spet dobili nekoliko premajhno verjetnost za razpad alfa, saj ima deformirano jedro na izboklini nekoliko manjšo ograjo kot jo bomo vzeli za okroglo jedro.

Prepustnost elektrostatske ograje smo izračunali v prejšnjem poglavju, izračunajmo še razpadno konstanto w !

$$\begin{aligned} -dn/dt &= wn = \text{odhajajoči tok} = 4\pi E^* E v \\ n &= \int (u_I/r)^*(u_I/r) \cdot 4\pi r^2 dr = 4\pi R(A^*A + B^*B) \approx 4\pi R \cdot 2A^*A \\ w &= 4\pi E^* E v / 4\pi R \cdot 2A^*A = (v/2R) \cdot pr. \end{aligned}$$

Ta izraz tolmačimo nazorno: $v/2R$ je število trkov delcev alfa ob steno v sekundi, pri vsakem trku pa je verjetnost za pobeg pr ; v sekundi je torej verjetnost za pobeg $w = (v/2R) \cdot pr$. Da dobimo občutek za red velikosti pri tunelskem efektu, si pogledjmo kak tipičen primer. Pri ^{239}U se delec alfa zale-tava v steno 10^{22} krat v sekundi skozi dobo $10^9 \text{ let} = 10^{17} \text{ sekund}$. Do razpada

se torej zaleti okrog 10^{39} krat v steno (prepustnost ograje za tunelski efekt je le 10^{-39}). To je potrpežljivost! (Toda saj delec alfa nima kaj drugege početi.) Za delce težje od helijevega jedra je potemtakem verjetnost za tunelski efekt skoraj vedno zanemarljiva, saj prepustnost eksponentno pada z maso.

Če pomnožimo gornji izraz še s povprečnim številom prisotnih delcev alfa n_α , dobimo rezultat

$$w = (v/2R) \cdot n_\alpha C e^{-g}, \quad g \approx \sqrt{2\tilde{m}\epsilon} R (\pi \sqrt{\epsilon/W} - 4) / \hbar$$

Rezultat je eksponentno odvisen od parametrov jedra Z in R ter od sproščene energije W . Zato že par procentov napake v teh parametrih spremeni rezultat za velik faktor. Tudi parametra n_α in C , ki sta reda velikosti 1, sta negotova vsak za faktor 10. Zato je rezultat lahko negotov za več redov velikosti. Formula je torej uporabna

a) za kvalitativno sliko, kako je razpadna konstanta odvisna od parametrov jedra. Eksponentna odvisnost je namreč dosti izrazitejša od same negotovosti.

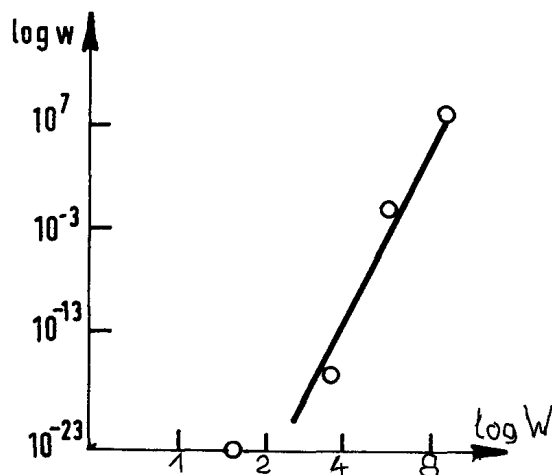
b) za določanje radija jedra. Če eksponentno funkcijo obrnemo, nam namreč že zelo groba vrednost razpadne konstante w ter parametrov n_α in C zelo precizno določi eksponent $-g$, v katerem je skrit radij jedra. Z drugimi besedami, če radij le malo spremenimo, se s tem spremeni velikost ograje, kar eksponentno vpliva na razpadno konstanto in je zato radij jedra občutljivo določen. Zaradi predpostavke o ostri površini in krogelni simetriji jedra bomo dobili nekoliko prevelik radij ($1,4 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$ namesto $1,2 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$), ker da formula prenizko razpadno konstanto in jo umetno povečamo s tem, da zmanjšamo ograjo (vzamemo večji radij jedra).

c) za primerjavo razpadnih časov zelo sorodnih razpadov alfa (isto jedro ali vsaj sosednji izotopi), tako da se negotovi parametri približno krajšajo.

Ilustrirajmo sedaj odvisnost razpadne konstante od energije delcev alfa!

^{144}Nd	$W=1,8 \text{ MeV}$	$t_{1/2} = 2 \cdot 10^{15} \text{ let}$	$w = 1,1 \cdot 10^{-23} \text{ s}^{-1}$
^{238}U	4,18	$4,5 \cdot 10^9 \text{ let}$	$5 \cdot 10^{-18}$
^{216}Po	6,77	0,16 s	4,3
^{212}Po	8,78	$3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$	$2,3 \cdot 10^6$

Energije delcev alfa so torej vedno le v območju 1,5–10 MeV. Če je energija manjša od 1,5 MeV, je razpadni čas nemerljivo dolg, če pa je večja od 10 MeV, je razpadni čas časa nemerljivo kratek. Pri najtežjih jedrih ($Z > 110$), preseže $W > 10 \text{ MeV}$; taka jedra nemerljivo hitro (momentano) razpadejo in jih zato ne moremo umetno zgraditi. Pri $Z = 110$ se torej tabela jeder konča, razen če morda pomagajo lupinski efekti stabilizirati kak otok „supertežkih” jeder. Taka supertežka jedra vneto iščejo.

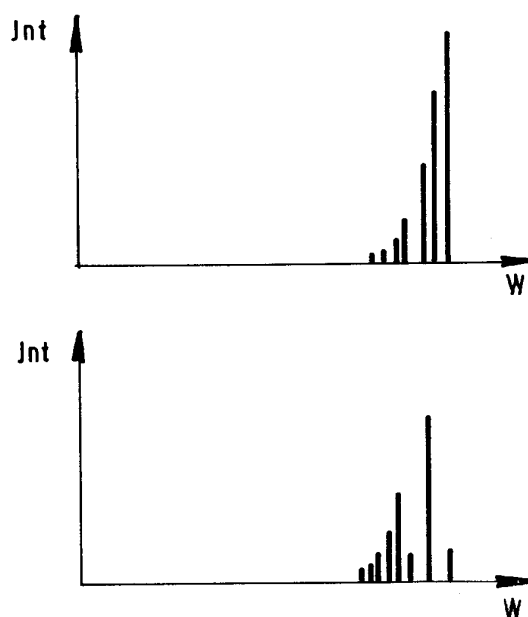


Slika 4.4: Odvisnost razpadne konstante za razpad alfa od razpadne energije (točke — meritev, polna črta — Geiger-Nuttalovo pravilo)

Za jedra z istim (ali podobnim) Z in R je $\log w$ sorazmeren z $-1\sqrt{W}$. Približno premico dobimo tudi, če za absciso vzamemo $\log W$, saj je skala podobna kot za $-1/\sqrt{W}$. Še predno je bila znana teorija razpada alfa, sta Geiger in Nuttal empirično ugotovila, da ležijo razpadi alfa iz iste razpadne družine približno na premici v diagramu $\log w / \log W$; različne družine pa imajo nekoliko različno premico (Geiger-Nuttalovo pravilo).

Včasih pri razpadu alfa ne dobimo enobarvnih delcev alfa, ampak več blizu ležečih črt. Radioaktivno jedro namreč lahko razpade tudi v vzbujena stanja novega jedra. Ker ima delec alfa v tem primeru na razpolago manj energije, je ograja zanj višja in je verjetnost za razpad manjša. Intenzitete črt eksponentno pojemajo. V poštev pridejo torej le najnižja vzbujena stanja.

Včasih pa intenzitete črt ne padajo enakomerno. Na intenziteto (verjetnost prehoda) vpliva namreč tudi sprememba vrtilne količine — dodatna „centrifugalna“ ograja. Lahko se celo zgodi, da je prva črta šibkejga od nekaj naslednjih, če se radioaktivno jedro zelo razlikuje po vrtilni količini od osnovnega stanja nastalega jedra in malo razlikuje od vzbujenih stanj.



Slika 4.5: Intenzitete delcev alfa različnih energij pri razpadu danega jedra
 zgoraj — če se vrtilne količine končnih stanj ne razlikujejo dosti ali če enakomerno rastejo
 spodaj — če so vrtilne količine končnih stanj zelo različne

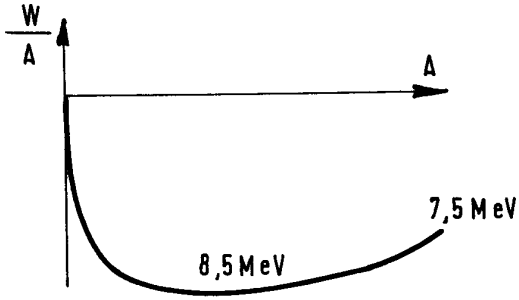
4.2 Razcep

4.2.1 Razcep

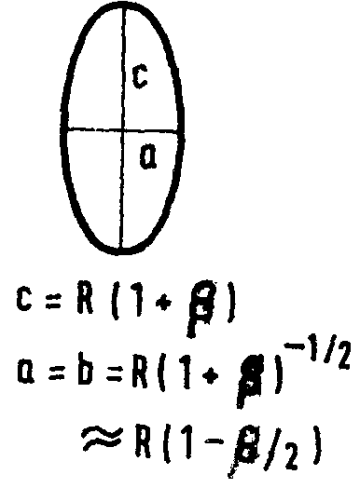
Podobno kot pri razpadu alfa se tudi pri razcepu jedro razleti na dva kosa zaradi odbojnih elektrostatskih sil. Ker narašča odbojna elektrostatska energija s kvadratom števila nukleonov, privlačna jedrska energija pa zaradi kratkega dosega le linearno, je specifična vezavna energija pri težkih jedrih manj negativna kot pri srednjih. Že od srednjih jeter naprej je vezavna energija dveh ločenih polovic močnejša kot za celo jedro. Ocena z Weizsäckerjevo masno formulo pokaže, da je razcep energijsko možen od broma ($Z = 35$) naprej. In vendar že tja do urana jedra ne razpadajo spontano z razcepom. Elektrostatska ograja je pri razcepu namreč še hujša kot pri razpadu alfa iz dveh razlogov:

- a) Ograja je mnogo višja, pri uranu je npr. za razpad alfa

$$\epsilon = Z_1 Z_2 e_0^2 / 4\pi\epsilon_0 r = 2 \cdot 90 \cdot e_0^2 / 4\pi\epsilon_0 r \sim 35 \text{ MeV}$$



Slika 4.6: Specifična vezavna energija nukleonov v odvisnosti od števila nukleonov



Slika 4.7: Definicija parametra deformacije za elipsoid

za razcep pa je

$$\epsilon = 46 \cdot 46 \cdot e_0^2 / 4\pi\epsilon_0^2 / 4\pi\epsilon_0(2r) \sim 240 \text{ MeV}$$

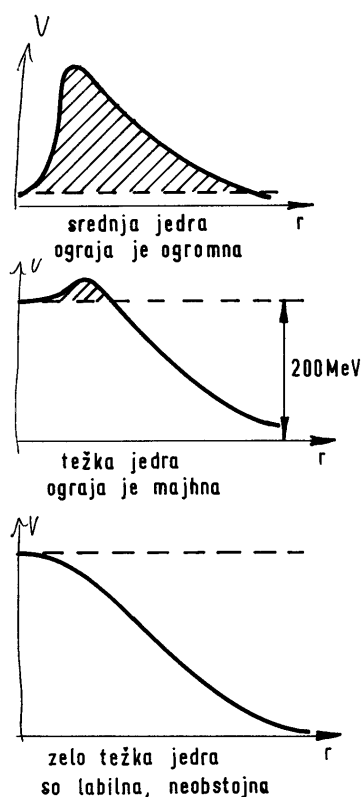
b) razcepna produkta imata dosti večjo maso kot delec alfa. Verjetnost za tunelski efekt pa eksponentno pada z maso:

$$w \sim \exp(-2\sqrt{2\tilde{m}} \int \sqrt{V - W} dr / \hbar).$$

Pri srednjih jedrih se sprosti malo energije; ograja je visoka in je verjetnost za tunelski efekt popolnoma zanemarljiva. Šele od urana naprej, ko je ograja visoka le še nekaj MeV, opazimo spontan razcep. Zelo težka jedra pa nimajo več ograje, so v labilnem položaju, neobstoja in momentano razpadejo, tako da jih sploh ne moremo zgraditi.

Jedro nima ograje za razcep, če je okrogla oblika labilna in energija stalno pada z večanjem deformacije. Z deformacijo odbojna elektrostatska energija pada, ker pridejo protoni bolj daleč narazen, površinska energija pa raste, ker ima elipsoid večjo površino od krogle. Elektrostatska energija enakomerno nabite deformirane kapljice je $W_0 = (3/5)(Z^2 e_0^2 / 4\pi\epsilon_0 R)(1 - \beta^2/5)$, njena površinska energija pa je $W_{\text{pov}} = 4\pi R^2 \sigma(1 + 2\beta^2/5)$. Če to izrazimo s parametri Weizsäckerjeve masne formule, dobimo

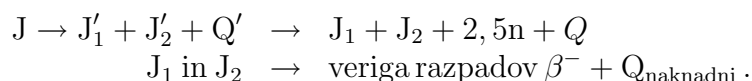
$$W = W(\beta = 0) + (2w_1 A^{2/3}/5 - w_2 Z^2 A^{-1/2}/5)\beta^2.$$



Slika 4.8: Elektrostatska ograja pri razcepu

Po tej oceni prevlada elektrostatski člen nad površinskim pri $Z = 110$, kjer bi se po kapljičnem modelu tabela jeder končala, saj bi bila od tam naprej jedra labilna. Po lupinskem modelu pa pričakujejo, da bi utegnili biti dovolj dolgoživa tudi nekatera še težja jedra, ki bi imela zaključene lupine protonov in nevtronov. Takgna „supertežka jedra” vneto iščejo.

Energijska bilanca razcepa



Jedri, ki nastaneta takoj po razcepu, imata preveč nevtronov. Težka jedra imajo namreč razmeroma več nevtronov (večji N/Z) kot srednja jedra in imata zato nastali srednji jedri presežek nevtronov. Znebata se jih tako, da najprej odletijo („izhlapijo”) 2-3 nevtroni. Ko to ne gre več, sledi še serija razpadov beta minus, dokler ne nastaneta stabilni jedri.

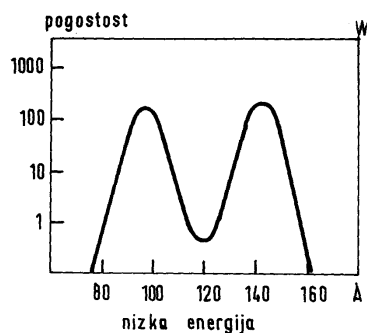
Ker imajo težka jedra specifično vezavno energijo $W/A = -7,5\text{MeV}$, srednja jedra pa $-8,5\text{MeV}$, se pri razcepu sprosti približno 1 MeV na nukleon. Pri ^{235}U je Q torej reda velikosti 235 MeV. Točna energijska bilanca je v povprečju naslednja:

$J_1 + J_2$	168 MeV	}	178 MeV ob samem razcepu
n	5		
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	}	23 MeV pri naknadnih razpadih
γ	5		
β	7	}	
$\bar{\nu}$	10		
γ	6		
skupaj	201 MeV		

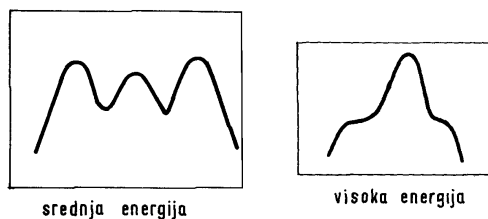
Pri pogonu reaktorja pride torej v poštev v začetku 178 MeV, ko dosežemo stacionarno stanje pa še 13 MeV zraven (nevtrini uidejo in svojih 10 MeV ne pustijo v reaktorju). Ko reaktor izklopimo, se tistih 13 MeV še nekaj časa sprošča.

Pogostost raznih razcepnih produktov

Doslej smo imeli občutek, da se jedro razcepi na dva enaka kosa. V resnici pa lahko nastaneta zelo različni jedri. Verjetnostna porazdelitev (pri razcepu ^{236}U) ima maksimum pri $A = 95$ in $A = 139$ ter minimum pri simetričnem razcepu. Razmerje med maksimumom in minimumom je 1000:1.



Slika 4.9: Pogostost razcepnih produktov z masnim številom A pri razcepu ^{236}U pri nizkih energijah



Slika 4.10: Pogostost razcepnih produktov pri srednjih energijah

Slika 4.11: Pogostost razcepnih produktov pri visokih energijah

Takoj pade v oči, da je krivulja simetrična. Vedno namreč nastane en lažji in en težji kos s skupno maso 234. Zato je verjetnost za A_1 in za $A_2 = 234 - A_1$ ista.

Preseneča nas, da je asimetrični razcep toliko verjetnejši od simetričnega, saj se kapljica laže razcepi na dve enaki polovici. Razloga za asimetrijo sta naslednja:

a) Pri asimetričnem razcepu nastaneta jedri z glavnino nukleonov v zaključenih lupinah:

$$95 = 40 \text{ protonov} + 50 \text{ nevtronov} + \text{ostanek } 5,$$

$$139 = 50 \text{ protonov} + 82 \text{ nevtronov} + \text{ostanek } 7.$$

Število 40 je namreč tudi polmagično. Ostanek nukleonov (12) se naključno porazdeli na oba kosa, zato maksimum ni oster. Pri simetričnem razcepu pa bi morali razbiti zaključene lupine, kar bi bilo energijsko zelo neugodno in bi povečalo ograjo.

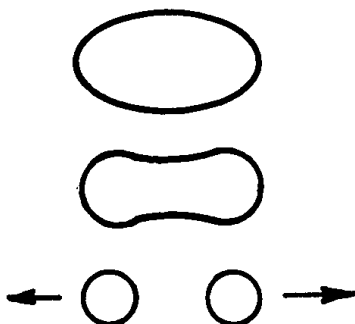
b) V jedru se vedno tvorijo gruče nukleonov. Izkaže se, da je oblika gruč takšna, da favorizira asimetrični razcep. Preprost model, ki to kvalitativno nakaže, je opisan v Obz. mat. fiz.

Če jedro ^{235}U vzbudimo s hitrimi nevtroni, je porazdelitev razcepnih produktov drugačna. Ker ima visoko vzbujeno jedro na razpolago dovolj energije, mu je ni treba štediti in paziti na zaključene lupine ter gruče. Pokažeta se oba tipa razcepa, simetrični in asimetrični. Pri visokih energijah simetrični razcep prevlada.

Vzbujeni razcep

Elektrostatska ograja je pri uranu še visoka okrog 6 MeV, pri težjih jedrih pa pada proti nič. Pri ^{235}U je spontani razcep še redek, $t_{1/2} = 3 \cdot 10^{21}$ let, kar pomeni, da nastane v 1 kg ^{235}U le en razcep na dan. Tako dolg razpolovni čas tu lahko merimo s fotografsko emulzijo, v kateri je primešan ^{235}U . Čez dolgo časa bomo z mikroskopom našli nekaj sledi razcepa, ki so tako značilne, da jih ne moremo zamenjati z ničemer drugim. Vidimo namreč celo zvezdo iz razcepnih produktov. Razcepljeni jedri dasta dve kratki debeli sledi, so pa še sledi ostalih delcev. Pri transuranih elementih pa spontani razcep že konkurira razpadu alfa. Pri najtežjih obstojnih jedrih je razcep glavni razpadni način.

Ker je pri uranu spontani razcep tako redek, pride za poskuse in praktično uporabo v poštev le vzbujeni razcep. Jedro vzbudimo npr. z žarkom gama nad elektrostatsko ograjo, tako da zlahka razpade. Klasično si lahko mislimo, da kapljico tako močno zanihamo, da elektrostatski odboj premaga površinsko napetost. Ker je verjetnost za tunelski efekt eksponentno odvisna od višine ograje, je verjetnost za vzbujeni razcep velika le, če vzbudimo jedro nad ograjo ali vsaj tik pod ograjo. Lahko rečemo, da imajo žarki gama prag za vzbuditev razcepa 6 MeV, kolikor je ograja visoka. Pojem praga smo tu drugače definirali kot običajno. Običajno imenujemo prag tisto energijo, od



Slika 4.12: Razcep nihajoče kapljice

katere navzgor je reakcija energijsko možna. Tu pa imenujemo prag tisto energijo, od koder je verjetnost za reakcijo znatna. Nič namreč ne pomaga, če je razcep energijsko možen, a njegova verjetnost znaša $10^{-10+\dots}$. Nova definicija je na videz neostra, ker je stvar okusa, kaj je znatna verjetnost. Toda zaradi eksponentne odvisnosti tunelskega efekta naraste pri težkih delcih verjetnost od ~ 0 do 1 v tako ozkem intervalu, da je definicija dovolj ostra.

Namesto z žarki gama raje vzbudimo jedra z nevtroni iz dveh razlogov:

a) Presek za reakcijo z nevtronom je dosti večji:

gama	$\sigma \sim$	nekaj	mb
hitri n	$\sigma \sim$	nekaj	b
termični n	$\sigma \sim$	500	b

b) Nevtroni prinesejo s seboj za „doto“ še vezavno energijo in zato rabijo manjšo kinetično energijo:

(sod Z – sod N) + n \rightarrow (sod Z – lih N) ... pridobi 5 MeV; $W_{\text{prag}} = 1$ MeV ;

(sod Z – lih N) + n \rightarrow (sod Z – sod N) ... pridobi 7 MeV; $W_{\text{prag}} = 0$.

Pri tem smo upoštevali, da je ograja visoka 6 MeV in da pri sodo-lihem jedru pridobi nevtron še paritveno energijo. Sodo-liha jedra (^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu) cepijo torej že termični nevtroni, sodo-soda (^{232}Th , ^{238}U) pa le hitri nevtroni (nad 1 MeV).

4.2.2 Princip reaktorja

Uvod

Hahn in Strassmann sta 1939 odkrila, da nastanejo pri razcepu 2–3 nevtroni. To dejstvo ima veliko praktično vrednosti ker omogoča verižno reakcijo. Vsak

nastali nevtron se lahko spet absorbira v novem jedru in ga vzbudi k razcepu. Tako lahko število nevtronov (in sproščena energija) eksponentno narašča — bomba; ali pa jo vzdržujemo na stalnem nivoju — reaktor.

Zakaj potem uran v naravnih ležiščih ne eksplodira, čim zaide vanj kak kozmični nevtron? Verižna reakcija v čistem ^{238}U ni mogoča. Nevtroni se po nekaj trkih z uranom upočasnijo pod prag za razcep (1 MeV). Potem pa niso več sposobni sprožiti razcepa in se nekoristno absorbirajo. Samo kakih 3% nevtronov uspe sprožiti razcep, preden se upočasnijo pod prag. Upočasnjevanje gre v tem energijskem območju namreč zelo hitro zaradi neelastičnih trkov. Pri elastičnem trku s težkim uranom izgubi nevtron sicer samo 1% energije in bi rabil za upočasnitev od 2 do 1 MeV 100 trkov, toda z neelastičnimi trki pride že po nekaj trkih pod 1 MeV. Zato je tako malo upanja, da sproži razcep.

Čist ^{235}U pa cepijo tudi počasni nevtroni in zato dá verižno reakcijo. V naravnem uranu ga je komaj 0,7%, kar je premalo, da bi naravni uran kot tak vzdrževal verižno reakcijo. Če imamo mešanico ^{235}U (naravno ali obogateno), je namreč situacija naslednja:

hitri nevtroni: Preden se upočasnijo pod 1 MeV, jih $\sim 3\%$ cepi naprej.

srednji nevtroni: Vse požre ^{238}U zaradi močne resonančne absorpcije.

termični nevtroni: Če bi jih imeli, bi imel glavno besedo ^{235}U , čeprav ga je malo. ^{235}U ima namreč ogromen presek za razcep s termičnimi nevtroni ($0,007\sigma_{^{235}\text{U}} > 0,993\sigma_{^{238}\text{U}}$).

Poti iz zagate sta dve:

a) *Hitri reaktor* uporablja čist ^{235}U . Cepijo v glavnem že hitri in srednji nevtroni. Njegova dobra stran je, da je majhen in je pripraven za prenos v težko dostopna področja. Druga dobra stran je, da nam da na razpolago veliko nevtronov, saj se nevtroni ne zgublajo v ostalih sestavinah reaktorja. Slaba stran pa je drag material (separacija čistega izotopa ^{235}U je draga) in nevarnost (veliko hitreje in huje eksplodira kot reaktor na uransko mešanico).

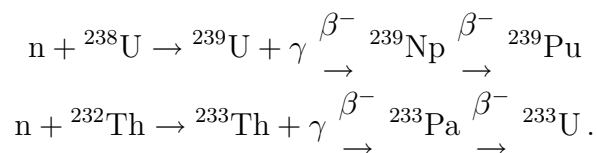
b) *Uporaba moderatorja (termični reaktor).* Nevtrone moramo pripeljati iz hitrega v termično območje mimo ^{238}U . Ne smemo jih upočasnjevati v požrešnem ^{238}U , temveč v snovi s čim manjšim absorpcijskim presekom. Imamo dve varianti termičnega reaktorja: *homogen* (uranova sol raztopljen v vodi kot moderatorju) in *heterogen* (uranove palice v vodi ali grafitnih blokih).

Reaktorski materiali

Goriva:	^{233}U , ^{235}U , ^{239}Pu
Razredčila:	^{232}Th , ^{238}U
Moderator:	H_2O , D_2O , Be, BeO, C
Strukturni elementi:	Al, Zr, nerjaveče jeklo
Hladila:	He, H_2O , D_2O , Na, Bi, Hg
Kontrola:	Cd

Za goriva štejemo jedra, ki jih cepijo že termični nevtroni. Kot smo videli pri opisu razcepa, so to jedra z lihim številom nevtronov. Čista goriva lahko sama vzdržujejo verižno reakcijo.

Razredčila cepijo samo hitri nevtroni. V reaktorju jih imamo bodisi kot balast (^{238}U), ker je predrago separirati čisto gorivo, bodisi jih dodamo namenoma (^{232}Th) za proizvodnjo novega goriva. Iz razredčila namreč nastaja z absorpcijo nevtrona novo gorivo:



V takoimenovanih *oplodnih reaktorjih (breederjih)* ravnamo z nevtroni tako ekonomično, da se od 2,5 nastalih nevtronov porabi eden za naslednji razcep, eden (ali nekoliko več) pa za tvorbo novega goriva iz razredčila. Oplodni reaktor torej sproti proizvaja toliko goriva, kot ga sam porabi in s časom pretvori v gorivo vse razredčilo. To je zelo važno za svetovne zaloge urana. Navadni reaktor kuri le ^{235}U , ki ga je samo 0,7%. Oplodni reaktor pa v principu pokuri ves uran in porabi zato 140 krat manj zalog urana.

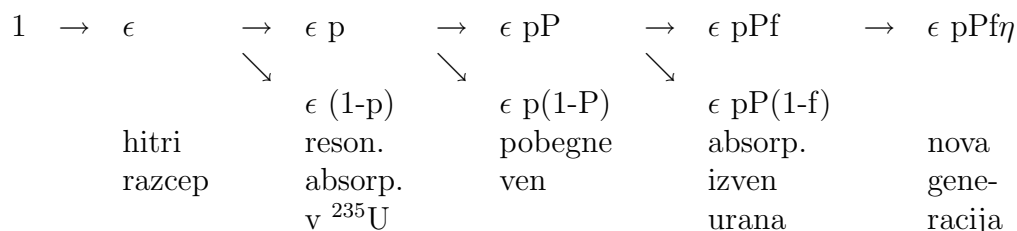
Dober moderator mora imeti čim manjši absorpcijski presek in čim lažji mora biti. Pri trku z lahkim jedrom izgubi namreč nevtron največ energije in se hitro upočasni preko nevarnega območja srednjih nevtronov. Najboljši moderator je devterij (npr. v težki vodi), ker je lahek in skoraj ne absorbira. Vodik je sicer še lažji, toda več absorbira. Jedri C in O nista zelo lahki, toda skoraj ne absorbirata. Imata namreč zaključene (pod)lupine in zato nimata težnje sprejeti dodatnega nevtrona.

Strukturni elementi in hladila morajo tudi čim manj absorbirati nevtrone in imeti morajo dobre mehanske, toplotne in antikorozijske lastnosti.

Za kontrolo imamo v reaktorju kadmijeve palice, ki imajo izredno visok absorpcijski presek za termične nevtrone. Avtomat dviga in spušča kadmijeve palice in s tem regulira fluks nevtronov in moč reaktorja. Namesto eksponentnega naraščanja (eksplozije) ali padanje (ugašanje) dobimo nihanje okrog ravnotežne lege.

Parametri reaktorja

Zgodovina ene generacije nevtronov je taka:



Dokler so nevtroni hitri ($W > 1$ MeV), se s hitrim razcepom pomnožijo za faktor ϵ . Srednjim nevtronom ($1 \text{ eV} < W < 1$ MeV) preti nevarnost resonančne absorpcije v ^{238}U ; p je verjetnost, da se ji ognejo. V času upočasnjevanja in pri termičnih energijah lahko nevtroni pobegnejo iz reaktorja; P je verjetnost, da ostanejo v reaktorju. Termični nevtroni se lahko absorbirajo v uranu (verjetnost f) ali drugje (v moderatorju itd.). Nevtron, ki se absorbira v uranu, rodi v povprečju η novih nevtronov (včasih se absorbira nekoristno, včasih pa z razcepom). Pomnoževalni faktor je torej $k = \epsilon p P f \eta$. Pri stacionarnem delovanju reaktorja mora biti pomnoževalni faktor $k = 1$.

Ocena parametrov reaktorja

η

Nevtron, ki se absorbira v uranu, lahko sproži razcep (σ_f) in rodi ν novih nevtronov; ali pa se ujame (σ_c). Pri tem je celotni absorpcijski presek $\sigma_a = \sigma_f + \sigma_c$. Izkoristek je torej $\eta = \sigma_f \nu / \sigma_a$.

	σ_c	σ_f	ν	η
^{233}U	52 bn	533 bn	2,54	2,31
^{235}U	107	580	2,46	2,08
^{239}Pu	302	702	2,88	2,03

Ker je η večji od 1, je možna verižna reakcija. K sreči je η tudi nekoliko večji od 2, kar omogoča oplodne reaktorje (en nevtron se absorbira, eden pa iz razredčila napravi novo gorivo). Za mešanico urana je izkoristek naslednji:

$$\eta = N_{235} \sigma_{235f} \cdot \nu / N_{235} \sigma_{235a} + N_{238} \sigma_{238a}$$

Pri naravnem uranu je to

$$\eta = 0,007 \cdot 580 \cdot 2,46 / (0,007 \cdot 687 + 0,993 \cdot 2,73) = 1,34$$

Reaktor torej lahko deluje na naravni uran, če skrajno omejimo vse izgube (vzeti moramo težko vodo za moderator, kar je drago; reaktor mora biti velik, da čim manj nevtronov uide). Zato je običajno ugodneje vzeti obogaten uran (2% ^{235}U ima $\eta=1,74$) in za moderator kar navadno vodo ali grafit.

☐ ϵ

Pri enem trku je verjetnost za razcep enaka σ_f/σ_{tot} . Število nevtronov se pomnoži za faktor $(\nu - 1)$; eden se namreč porabi, da se jih rodi ν . Če doživi nevtron od rojstva do energije 1 MeV m_1 trkov, velja približno $\epsilon = m_1(\sigma_f/\sigma_{tot})(\nu - 1)$. ϵ je reda velikosti 1,04; v homogenem reaktorju pa je zaradi prisotnosti moderatorja hitri razcep zanemarljiv in je $\epsilon \approx 1$.

☐ p

Pri enem trku je verjetnost za resonančno absorpcijo enaka σ_c/σ_{tot} . Ostane torej $(1 - \sigma_c/\sigma_{tot})$ nevtronov. Če doživi nevtron v območju srednjih energij m_2 trkov, znaša

$$p = (1 - \sigma_c/\sigma_{tot})^{m_2} \approx \exp\left(-\frac{\sigma_c}{\sigma_{tot}}m_2\right).$$

Ker se presek zelo močno spreminja z energijo, moramo pravzaprav zmnožiti učinke vsakega trka posebej. V eksponentu dobimo potem vsoto, ki jo lahko približno nadomestimo z integralom:

$$p \approx \exp\left(-\int \frac{\sigma_c(w)}{\sigma_{tot}(w)} dm\right) = \exp\left(-\int \frac{\sigma_c(w)}{\sigma_{tot}(w)} \cdot \frac{dm}{dW} dW\right)$$

Število trkov dm potrebnih za upočasnitev za dW pa je enostavno odvisno od razmerja med maso nevtrona in maso sipajočih jeder.

Parameter p je tem večji, čim več je moderatorja v primeri z uranom. Tako ima nevtron pri upočasnjevanju v moderatorju tem manjšo nevarnost, da trči ob ^{238}U . Boljši je heterogen reaktor, ker se nevtron upočasnjuje v čistem moderatorju in le po nesreči zaide v ^{238}U , medtem ko je v homogenem reaktorju uran povsod napoti.

☐ f

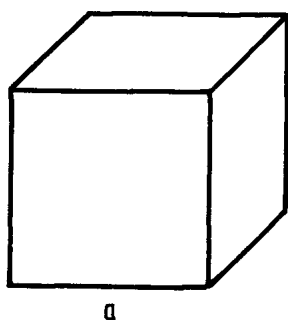
f je verjetnost, da se nevtron absorbira v uranu, ne pa kje drugje. $f = N_U\sigma_{aU}/N_U\sigma_{aU} + N'_a\sigma'_a$. f je tem večji, čim gostejši je uran (čim več je uranovih palic). Zahtevi za dober p in dober f si torej nasprotujeta in je treba najti optimalno razmerje med količino urana ter moderatorja ter optimalno debelino in razporeditev uranovih palic.

Glede parametra P je nekoliko ugodnejši homogen reaktor, ker termični nevtroni lažje najdejo uran v homogenem kot v heterogenem reaktorju. Toda za produkt pf je še vedno znatno boljši heterogen reaktor.

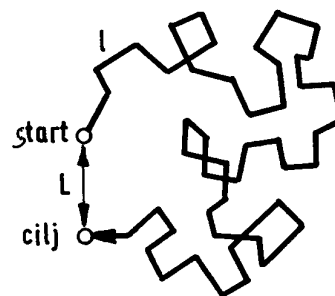
V optimalnih razmerah se da doseči (za D_2O ali C) $p \sim 0,9$ in $f \sim 0,9$.

☐ P

Verjetnost, da nevtroni pobegnejo iz reaktorja, je odvisna od oblike in velikosti reaktorja. Število nastalih nevtronov je namreč sorazmerno z volumnom reaktorja ($\propto a^3$), medtem ko je število pobeglih nevtronov sorazmerno s površino reaktorja ($\propto a^2$). Čim večji je reaktor, tem manjše so relativne izgube ($P \rightarrow 1$). Če dosežemo ostale parametre ($\epsilon p f \eta$) velike, si lahko privoščimo majhen reaktor, če pa so ti parametri majhni, je kritična velikost reaktorja velika (da čimbolj omejimo izgube).



Slika 4.13: Kocka

Slika 4.14: Difuzijska dolžina L

Parameter P grobo ocenimo s predpostavko, da se nevtroni gibljejo po difuzijskem zakonu. To približno velja za termične nevtrone, ne pa za hitre in srednje, ki se poleg difuzije še upočasnjujejo. Predpostavimo tudi, da je difuzijska konstanta za vse hitrosti ista in računajmo kar s povprečno hitrostjo termičnih nevtronov. Nevtron namreč največ časa preživi kot termični nevtron in takrat tudi največ prepotuje. Vpeljimo tri značilne dolžine:

Prosta pot $l = 1/N\sigma_s$ je pot med dvema zaporednima trkoma. Tu je N število jeder na volumno enoto, σ_s je povprečni sipalni, σ_a pa povprečni absorpcijski presek. Prosta pot je v zvezi z difuzijsko konstanta: $D = lv/3$.

Absorpcijska pot $l_a = 1/N\sigma_a$ je celotna pot, ki jo preleti nevtron od nastanka do absorpcije.

Difuzijska dolžina L je efektivna razdalja (zračna črta) med startom in ciljem nevtrona. Projekcija proste poti je v povprečju $\langle l_z^2 \rangle = l^2/3$, kajti $l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = l^2$.

Če predpostavimo, da so orientacije posameznih prostih poti stohastično neodvisne, se seštevajo povprečni kvadrati premikov pri posameznih trkih. Število trkov je $m = l_a/l$, torej je $\langle L^2 \rangle = ml^2/3$, $L = \sqrt{ll_a/3}$.

Red velikosti teh dolžin za čisti moderator je $l \sim 0,1m$, $l_a \sim 10m$, $L \sim 0,5m$. Če je zraven še gorivo, sta l_a in L precej manjši.

Zapišimo sedaj difuzijsko enačbo

$$D\nabla^2 n + \text{izvori} = \partial n / \partial t = 0$$

za stacionarno delovanje.

$$\text{izvori} = -nN\sigma_a v \text{ (se absorbira)} + nN\sigma_a v f\eta p \text{ (nastane novih)} = nN\sigma_a v(1/P - 1).$$

$$\begin{aligned} (lv/3) \nabla^2 n + n(v/l_a)(1/P - 1) &= 0 \\ \nabla^2 n + (1/P - 1)n/L^2 &= 0 \\ \nabla^2 n + K^2 n &= 0. \end{aligned}$$

Rešiti moramo amplitudno enačbo z robnimi pogoji, da gre na robu reaktorja gostota nevtronov r proti nič. To je čisto geometrijski problem, K je geometrijski parameter („zakrivljenost nevtronske gostote“, angleško „buckling“), odvisen od oblike in velikosti reaktorja. Difuzijska dolžina L pa je snovna konstanta.

$$P = 1/(1 + K^2 L^2)$$

Reševanje difuzijske enačbe je enostavno za homogen reaktor, zelo komplicirano pa za heterogen reaktor zaradi mnogih mejnih pogojev med uranovimi palicami in moderatorjem.

Časovne spremembe

Če pomnoževalni faktor ni 1, moč reaktorja eksponentno raste ali pada. V času ene generacije τ se število nevtronov pomnoži

$$\begin{aligned} \tau : \quad & 1 \rightarrow k, \quad n \rightarrow kn, \quad \Delta n = n(k - 1) \\ dt : \quad & \quad \quad \quad dn = n(k - 1)dt/\tau \\ & \boxed{n = n_0 e^{(k-1)t/\tau}} \end{aligned}$$

Hitri reaktor: $\tau \sim l_a/v \sim 0,1 \text{ m}/10^7 \text{ ms}^{-1} \sim 10^{-8} \text{ s}$

Če nam uide tak reaktor za 1 o/oo nad kritično vrednost in če rabijo kontrolne naprave 1 sekundo, da ga zadušijo, naraste moč $n = n_0 e^{0,001 \cdot 10^8} = n_0 e^{100000}$. To je že eksplozija atomske bombe.

Termični reaktor:

$$\tau \sim l_a/v \sim 1 \text{ m}/10^3 \text{ ms}^{-1} \sim 10^{-3} \text{ s}$$

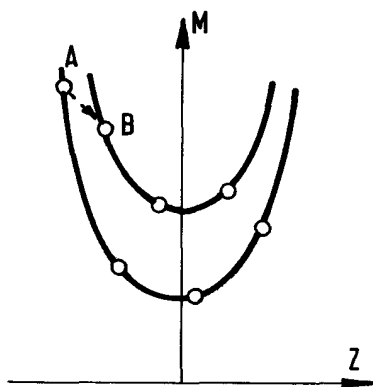
$$n = n_0 e^{10^{-3} \cdot 10^3} = n_0 \cdot e^1$$

Ni eksplozije, če imamo tako zanesljive naprave, da držijo k na promile natančno. Če se k spremeni za 1%, je že majhna eksplozija (ali vsaj voda zavre):

$n = n_0 e^{10^{-2} \cdot 10^3} = n_0 e^{10} = n_0 \cdot 10000$. Delovanje torej še vedno ni posebno varno.

Situacijo rešijo zakasneli nevtroni. Približno 1% nevtronov nastane po razcepu z zamudo ~ 10 s. Če je $k > 1,01$, je reaktor nadkritičen že za takojšnje nevtrone in lahko eksplodira. Če pa držimo $1 < k < 1,01$, česar ni težko doseči, je reaktor popolnoma varen. Vsaka generacija mora namreč čakati še na zakasnele nevtrone. Časovna konstanta reaktorja je zato približno $1\% \cdot 10 \text{ s} = 0,1 \text{ s}$.

$$n = n_0 e^{0,01 \cdot 10} = n_0 e^{0,1} = n_0 \cdot 1,1 \dots \text{varno!}$$



Slika 4.15: Mase sosednjih izobarov; jedro A je že obstojno glede na emisijo nevtrona, liho-liho jedro B pa spet emitira

Zanimiv je mehanizem zakasnelih nevtronov. Če nevtron ni vezan v jedru, takoj odleti. Ne zadržuje ga nobena elektrostatska ograja, ki zadrži npr. delec alfa, dolgo življenjsko dobo v jedru. Pričakovali bi, da bo odletel nevtron iz jedra kvečjemu z zamudo 10^{-16} s, ne pa z zamudo 10 s. Res odleti večina nevtronov takoj po razcepu, toda 1% nevtronov sledi nekemu razpadu beta. Zamuda nevtronov je torej zaradi razpada beta, ne pa zaradi nevtrona samega. Razcepni produkt ima v začetku velik presežek nevtronov in jih izhlapewa. Ko to ne gre več, razpadejo nevtroni z razpadom beta v protone. Včasih se zgodi, da neko sodo-sodo jedro (na sliki: A) zaradi precejšnje vezavne energije ne more več emitirati nevtrona. Z razpadom beta pa nastane

nestabilno liho-liho jedro (na sliki: B), ki spet lahko emitira nevtron. Takih zakasnelih nevtronov je okrog 1%.

Temperaturna regulacija

Če reaktorju naraste moč, se segreje in raztegne. Geometrijski faktor K je obratno sorazmeren z dolžino reaktorja, torej je obratno sorazmeren z linearnim raztezkom α . Prosta pot $l = 1/N\sigma$ in difuzijska dolžina pa je obratno sorazmerna z gostoto in zato narašča z volumskim raztezkom α^3 . Parameter $P = 1/(1 + K^2L^2) \rightarrow 1/(1 + K^2\alpha^{-2}L^2\alpha^6)$ torej z raztezkom (in zato s temperaturo) pada. Če se reaktor segreje, mu pomnoževalni faktor k pade ter postane podkritičen. Zaradi tega efekta reaktor kroti sam sebe. Če termični reaktor nekoliko „uide“, se močno sereje (eventualno zavre voda) in reaktor se sam od sebe ustavi.

Nazorna primerjava: Gozd naj ima določeno število dreves in streljamo na slepo iz sredine ven. če so drevesa bolj razmaknjena, je večja verjetnost, da bomo drevesa zgrešili in bo izstrelek ušel iz gozda.

4.3 Razpad gama

4.3.1 Multipolnost prehodov; matrični elementi; izbirna pravila

Razpad gama je eden od načinov, da se jedro v vzbujenem stanju znebi odvišne energije in se vrne v osnovno stanje ali preskoči v nižje vzbujeno stanje.

Že po klasični sliki bi pričakovali, da jedro seva elektromagnetno valovanje. Protoni v jedru krožijo, zadevajo v druge nukleone, spreminjajo smer in se ob tem pospešujejo. Vsak pospešen naboj pa seva. Kvantna teorija to sliko dopolni: jedro seva elektromagnetno valovanje samo takrat, kadar preskoči iz enega stacionarnega stanja v drugo; izseva ga v obliki kvanta — fotona (žarka gama).

Verjetnost za razpad gama bomo izpeljali semiklasično. Takšna izpeljava je hitrejša in nazornejša, vendar je treba končne rezultate vedno kontrolirati s korektno kvantnomehansko izpeljavo, ki spada v okvir predmeta „kvantna mehanika“.

Poljubno porazdelitev nabojev v sistemu razvijemo po krogelnih funkcijah. Na ta način dobimo krogelno simetrično komponento porazdelitve + dipolno porazdelitev + višje multipolne porazdelitve. Njihove prispevke izrazimo z električnimi multipolnimi momenti. Podobno razvijemo po multipolnosti (po krogelnih funkcijah) sevalno polje okrog sistema gibajočih se nabojev. Pri tem seva nihajoči električni dipolni moment dipolno elektromagnetno valovanje, višji multipoli pa ustrezno multipolno valovanje.

Analogno razvijemo porazdelitev tokov in permanentnih magnetkov po magnetnih multipolih sistema. Vsak nihajoči magnetni multipol spet seva ustrezno multipolno valovanje. Magnetno sevalno polje se razlikuje od električnega le po tem, da sta zamenjani vlogi električne poljske jakosti E in magnetne poljske jakosti H .

Izraz za energijski tok, ki ga seva nihajoči električni dipol, poznate najbrž na pamet:

$$\begin{aligned} P &= \ddot{\vec{p}}_e^2 / 6\pi\epsilon_0 c^3 = \omega^4 \overline{p_e^2} / 6\pi\epsilon_0 c^3 \\ \vec{p}_e &= \vec{p}_{e_0} (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}) = 2\vec{p}_{e_0} \cos \omega t \\ \overline{p_e^2} &= 2\overline{p_{e_0}^2} \\ \overline{P} &= \omega^4 \overline{p_{e_0}^2} / 3\pi\epsilon_0 c^3 \end{aligned}$$

Na sekundo se izseva energija \overline{P} . Ker odnese foton energijo $\hbar\omega$, odleti vsako sekundo $\overline{P}/\hbar\omega$ -ti del fotona. Ker foton ne odhaja zvezno po delih, ampak cel hkrati, lahko tolmačimo $\overline{P}/\hbar\omega$ za verjetnost w , da bo foton v dani

časovni enoti odletel. Verjetnost na časovno enoto za razpad gama je potem enaka

$$w = \bar{P}/\hbar\omega = (k^3/3\pi\epsilon\hbar)p_{e_0}^2$$

Električni dipolni moment je klasično $\vec{p}_e = \int e_0\rho(\vec{r})dV$, pri čemer je ρ gostota nabitih delcev. Kvantno moramo v takih izrazih nadomestiti gostoto s kvadratom valovne funkcije. Velja pravilo: za pričakovano vrednost neke statične količine postavimo v bra in v ket isto valovno funkcijo — valovno funkcijo opazovanega stanja. Matrični element za prehod pa dobimo, če postavimo v ket valovno funkcijo začetnega stanja, v bra pa valovno funkcijo končnega stanja.

Statični električni dipolni moment: $\vec{p}_e = \int \psi^* e_0 \vec{r} \psi dV$

Dinamični električni dipolni moment: $\vec{p}_{e_0} = \int \psi_2^* e_0 \vec{r} \psi_1 dV$

Za sevanje magnetnega dipola (za magnetni dipolni razpad gama) dobimo podoben izraz:

$$\begin{aligned} w_{M1} &= (\mu_0/3\pi\hbar)k^3\vec{p}_{m0}^2, & \text{kjer je} \\ \vec{p}_{m0} &= \mu_j \int \psi_2^* (g_1\vec{L} + g_s\vec{s}) \psi_1 dV \\ & \text{proton: } g_1 = 1, g_s = 5,58 \\ & \text{nevtron: } g_1 = 0, g_s = -3,82 \end{aligned}$$

Samo dipolni moment se da izraziti elegantno v vektorski obliki. Za višje multipole je pripravnejša izražava s krogelnimi funkcijami. Zaradi enotnosti definiramo tudi dipolni moment na novo s krogelnimi funkcijami. Izpeljava za verjetnost višjih multipolnih prehodov je analogna kot za dipolni prehod, zato navedimo le rezultate.

$$\begin{aligned} w_{El} &= \frac{2(l+1)}{l[1 \cdot 3 \cdots (2l+1)]^2} \cdot \frac{k^{2l+1}}{\epsilon_0\hbar} \sum_m |q_{lm}|^2 \\ w_{Ml} &= \frac{2(l+1)}{l[(1 \cdot 3 \cdots (2l+1))]} \cdot \frac{\mu_0}{\hbar} k^{2l+1} \sum |\mu_{lm}|^2 \end{aligned}$$

Pri tem je l multipolnost prehoda, indeks E (oz. M) pove tip prehoda (električni ali magnetni), multipolni momenti pa so definirani takole:

$$\begin{aligned} q_{lm} &= e_0 \int \{P s i_2^* r^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)\} \psi_1 dV \\ \mu_{lm} &= \mu_j \int \psi_2^* \{[g_l \vec{L} \cdot 2/(l+1) + g_s \vec{s}] \text{grad}[r^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi)]\} \psi_1 dV \end{aligned}$$

Izbirna pravila

V kvantni mehaniki velja trikotniško pravilo za matrične elemente: matrični element je od nič različen le, če se dajo vrtilna količina začetnega stanja (keta), multipolnost operatorja ter vrtilna količina končnega stanja (braja) povezati v trikotnik. Pri tem imajo vsi skalarni operatorji multipolnost 0, vektorski operatorji multipolnost 1, krogelne funkcije Y_{lm} multipolnost l itd. Pri električnem prehodu ima operator obliko krogelne funkcije Y_{ml} , torej izbirno pravilo dopušča spremembe vrtilne količine za l . Podobno ima operator pri magnetnem prehodu obliko $\vec{L}\vec{\nabla} \cdot Y_{lm}$. Člen $\vec{L}\vec{\nabla}$ je skalar in ne spremeni kotnih lastnosti člena Y_{lm} . Celotni operator ima zato še vedno multipolnost l in dopušča spremembo vrtilne količine za l .

Pri razpadu gama z dano multipolnostjo l imamo torej naslednje izbirno pravilo za vrtilne količine:

$$\begin{aligned} I_2 + l &\geq I_1 \geq |I_2 - l| \\ I_1 + I_2 &\geq l \geq |I_1 - I_2| \end{aligned}$$

Analogno lahko vidimo že iz oblike matričnega elementa izbirno pravilo za parnost. Razdelimo integral na dva dela, zgornjo in spodnjo polkroglo! Pri električnem prehodu ima operator Y_{lm} v antipodnih točkah za sode l isto vrednost, za lihe l pa nasprotno vrednost, saj velja $Y_{lm}(\vartheta\varphi) = (-1)^l Y(\pi - \vartheta, \varphi + \pi)$. Če hočemo, da se bosta oba integrala seštela, ne pa uničila, mora $\psi_2^* \psi_1$ enako spremeniti predznak kot Y_{lm} :

$$\psi_2^*(-\vec{r})\psi_1(-\vec{r}) = (-1)^l \psi_2^*(\vec{r})\psi_1(\vec{r}).$$

Pri sodem l morata imeti torej ψ_2 in ψ_1 , isto parnost, pri lihem l pa nasprotno parnost.

Hitro se lahko prepričamo, da je izbirno pravilo pri magnetnih prehodih ravno obratno.

Dobili smo torej naslednje izbirno pravilo: pri električnih prehodih se parnost spremeni za faktor $(-1)^l$, pri magnetnih prehodih se parnost spremeni za faktor $-(-1)^l$.

Opisani izbirni pravili lahko nazorno tolmačimo z *ohranitvijo vrtilne količine in parnosti*, če pripišemo fotonu v stanju z multipolnostjo l vrtilno količino l ter parnost $\pm(-1)^l$:

$$\vec{I}_1 = \vec{I}_2 + \vec{l}, \quad P_1 = P_2 \cdot P_{\text{fotona}}$$

Ponovimo:

Pri električnem multipolnem prehodu El odnese foton vrtilno količino l in parnost $(-1)^l$.

Pri magnetnem multipolnem prehodu Ml odnese foton vrtilno količino l in parnost $-(-1)^l$. Beseda multipolnost pomeni torej vrtilno količino fotona. Tip prehoda pa skupaj z l pove parnost fotona.

Verjetnost za razpad gama hitro pada z multipolnim redom l . V atomski fiziki pridejo npr. v poštev le dipolni prehodi; če izbirna pravila ne dovoljujejo dipolnega prehoda, odda vzbujeni atom raje presežno energijo s trkom ob druge atome, kot da bi čakal na višje multipolne prehode. Jedro pa je znotraj atoma osamljeno in nima priložnosti za trk. Zato mu ne preostane drugega, kot da počaka na višji multipolni prehod.

Iz oblike matričnih elementov se vidi, da je verjetnost vsakega naslednjega multipolnega prehoda za faktor $\sim (kr)_2$ manjša od prejšnjega. Pri $E \sim 1$ MeV in $R \sim 2$ fm je to $(E/\hbar c)^2 R^2 = (1 \text{ MeV} \cdot 2 \text{ fm} / 200 \text{ MeVfm})^2 = 10^{-4}$. Multipolna vrsta torej dobro konvergira in smemo vzeti samo najnižji člen, ki ga dopuščajo izbirna pravila.

Najnižji multipolni red pa je:

$$\begin{aligned} l &= I_1 - I_2 \quad , \quad \text{če } I_1 \neq I_2 \\ l &= 1 \quad , \quad \text{če } I_1 = I_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Monopolni prehod ($l = 0$) ne eksistira. Monopolno nihanje namreč pomeni nekakšno „dihanje“ krogelno simetrično porazdeljenih nivojev. Pol periode se porazdelitev širi, pol periode pa krči. Zunaj nabojev je elektrostatski potencial vedno $\phi = Ze_0/4\pi\epsilon_0 r$, ne glede na radij porazdelitve. Zato se zunaj nabojev polje ne spreminja s časom in ni sevanja. Monopolno nihanje ne seva in zato v primeru $I_1 = I_2 = 0$ razpad gama ni mogoč.

4.3.2 Eksperimentalno določanje multipolnosti

(a) velikostni red razpolovnih časov

Če poznamo vrtilno količino in parnost začetnega ter končnega stanja jedra, lahko z izbirnimi pravili določimo tip in multipolnost razpada gama. Običajno pa je obratno. Kvantnih števil vzbujenega stanja še ne poznamo in bi jih radi ugotovili. Tip in multipolnost razpada gama moramo eksperimentalno ugotoviti na kak drug način, potem pa lahko z izbirnimi pravili določimo vrtilno količino in parnost vzbujenega jedra.

To je dinamičen način določanja vrtilne količine in parnosti. Dinamično (= z opazovanjem razpadov in reakcij) lahko merimo tiste statične količine, ki se ohranjajo: E, p, I, P, T, A, Z . Ker se tem količinam ohranja vrednost pri razpadu, je vrednost začetnega stanja kar enaka vsoti izmerjenih vrednosti

za vse končne produkte: $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 + \vec{l}$. Meriti moramo samo lastnosti končnih produktov, kar je neprimerno lažje, kadar je začetno stanje kratkoživo, končno stanje pa stabilno ali dolgoživo. Za kratkoživo stanje sploh ne bi mogli meriti vrtilne količine po statični metodi, saj nam prej razpade, predno lahko izmerimo npr. njegov optični spekter. Analogna meritev magnetnega momenta vzbujenih stanj ni mogoča, ker magnetni moment ni konstanta gibanja in se pri razpadu ne ohranja: $\vec{\mu}_1 \neq \vec{\mu}_2 + \vec{\mu}_3$.

Tip in multipolnost razpada lahko ugotovimo na naslednje načine: (a)upoštevamo velikostni red razpolovih časov, (b)določimo konverzijski koeficient, (c)izmerimo kotno porazdelitev in polarizacijo fotonov. *Razpolovni čas* je močno odvisen

od tipa in multipolnosti. Vsak naslednji red ima za nekaj redov velikosti daljši razpolovni čas. Iz oblike matričnih elementov se vidi tudi, da je magnetni prehod približno stokrat manj verjeten od električnega prehoda z isto multipolnostjo:

$$\frac{w_M}{w_E} \approx \frac{\mu_0}{1/\epsilon_0} \cdot \frac{(\mu_j \langle \text{grad} \rangle)^2}{e_0^2} \approx \frac{\mu + 0(\hbar e_0/m)^2(p/\hbar)^2}{(1/\epsilon_0)e_0^2} = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim \frac{1}{100}$$

Zato običajno lahko že iz samega velikostnega reda razpolovnega časa sklepamo na tip in multipolnost razpada.

Ker je za ugotavljanje tipa in multipolnosti prehoda važen le red velikosti, potrebujemo za verjetnost razpada gama samo grobo oceno. V grobi oceni bomo zanemarili vse podrobnosti dogajanja v jedru (ignorirali bomo valovno funkcijo) in se zanašali le na pavšalne lastnosti jedra.

Ocenimo matrične elemente! Namesto $\psi_2^* \psi_1$ bomo vzeli kar povprečno gostoto nukleona v jedru: $(4\pi R^3/3)^{-1}$

$$\begin{aligned} q_{lm}/e_0 &\sim \int \psi_2 r^l \underbrace{Y_{lm}}_{\sim 1/\sqrt{4\pi}} \psi_1 dV \approx (4\pi)^{-1/2} \sin t \rho(r) r^l dV \\ &\approx (4\pi)^{-1/2} \int (4\pi R^3/3)^{-1} r^l \cdot 4\pi r^2 dr = (4\pi)^{-1/2} [3/(l+3)] R^l \\ \mu_{lm}/\mu_{rmj} &\sim \mu_p \int \psi_2^* \underbrace{2\vec{s}}_1 \text{grad} \left(r^l \underbrace{Y_{lm}}_{1/4\sqrt{4\pi}} \psi_1 \right) dV \approx (4\pi)^{-1/2} \mu_p \int \rho r^{l-1} dV \approx \\ &\approx (4\pi)^{-1/2} [3/(l+2)] \mu_p R^{l-1} \end{aligned}$$

Pri oceni za magnetni matrični element smo vzeli le spinski del, ker je ta običajno precej večji od tirnega (ker je $g_s \gg g_l$). Če vstavimo te ocene v formulo za verjetnost razpada gama, dobimo naslednjo oceno za verjetnost razpada gama:

$$w_{el} \sim \left\{ \frac{2(l+1)}{l[1 \cdot 3 \dots (2l+0)]^2} \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 \cdot \frac{1}{137} \left(\frac{E_0 r_0}{\hbar c}\right)^{2l} \cdot \frac{E_0}{\hbar} \right\} A^{2l/3} \left(\frac{E}{E_0}\right)^{2l+1}$$

$$w_{Ml} \sim \left\{ \frac{2(l+1)}{l[1 \cdot 3 \dots (2l+0)]^2} \left(\frac{3}{l+3}\right)^2 \cdot \frac{1}{137} \left(\frac{\hbar}{mcr_0}\right)^2 \cdot \mu_p^2 \cdot \left(\frac{E_0 r_0}{\hbar c}\right)^{2l} \cdot \frac{E_0}{\hbar} \right\} \cdot A^{2(l-1)/3} (E/E_0)^{2l+1}$$

Pri tem je $r_0 = 1,2$ fm (iz $R = r_0 A^{1/3}$), $E_0 = 1$ MeV pa smo vpeljali zato, da je enačba brezdimenzijska (edino E_0/\hbar ima dimenzijo recipročnega časa).

Za ilustracijo navajamo rezultate v naslednji tabeli za jedra z $A = 100$ in za nekaj razpadnih energij. Pri tem je razpolovni čas $t_{1/2} = \ln 2/w$. V prvi vrstici je številčni del razpolovnih časov (v sekundah — isti za vse energije), v ostalih vrsticah pa so dekadični eksponenti faktorja, ki spada zraven ($10^{\text{eksponent}}$).

E/MeV	E1	M1	E2	M2	E3	M3	E4	M4	E5	M5
	3,1	1,5	2,0	1,1	2,0	1,2	3,0	1,9	5,8	4,1
0,01	-10	-8	-1	+1	+8	+10	+17	+19	+26	+28
0,1	-13	-11	-6	-4	+1	+3	+8	+10	+15	+17
1	-16	-14	-11	-9	-6	-4	-1	+1	+4	+6
10	-19	-17	-16	-14	-13	-11	-10	-8	-7	-5

Ocenjeno verjetnost za razpad gama imenujemo Weisskopfova enota. Dejanska razpadna konstanta je pri večini razpadov približno ena Weisskopfova enota (lahko je večja ali manjša za faktor 10). Ker se zaporedni multipolni prehodi razlikujejo za več velikostnih redov, nas negotovost za faktor 10 običajno ne moti pri določanju tipa in multipolnosti razpada iz razpadnega časa. Kakšne eksperimentalne podatke torej potrebujemo za določitev tipa in multipolnosti? Samo razpolovni čas in razpadno energijo. Včasih pa se razpadna konstanta znatno razlikuje od Weisskopfove enote. Za to sta dva razloga:

a) Kolektivni prehodi. Pri oceni smo predpostavljali, da preskoči pri razpadu gama le en nukleon iz višjega tira v nižji tir. Včasih pa preskoči več nukleonov hkrati (koherentno). Če sodeluje n nukleonov, se multipolni moment poveča za faktor n , verjetnost za n^2 . Tak primer so npr. prehodi med rotacijskimi nivoji jedra. Po klasični sliki predstavlja vrteči se elipsoid močan spremenljivi kvadrupolni moment, jedro seva kot celota (pravzaprav sevajo kapice elipsoida ki segajo čez okroglo obliko). Zato je verjetnost za prehode med rotacijskimi nivoji do ~ 1000 Weisskopfovih enot. Podobno seva

pri površinski vibraciji cel površinski del jedra koherentno in je verjetnost za vibracijske prehode ~ 30 Weisskopfovih enot.

b) Približna izbirna pravila pa po drugi strani lahko znatno zmanjšajo verjetnost za prehod. Če npr. prekršimo ohranitev izobarnega spina, se verjetnost zmanjša za faktor ~ 100 . Pri razpadu gama se sme namreč spremeniti izobarni spin kvečjemu za 1, saj se od ostalega jedra „odklopi“ le en nukleon ($t=1/2$), preskoči v nižji tir in se spet „priklopi“:

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 &= \vec{T}_0 + \frac{\vec{1}}{2}, & T_1 &= T_0 \pm \frac{1}{2} \\ \vec{T}_2 &= \vec{T}_0 + \frac{\vec{1}}{2}, & T_2 &= T_0 \pm \frac{1}{2} = T_1, T_1 \pm 1 \end{aligned}$$

Pri tem jo T_0 izospin preostalega jedra. Tudi iz kakih drugih razlogov sta si začetna in končna valovna funkcija jedra lahko zelo tuji in znaš verjetnost za prehod $\sim 0,01$ Weisskopfovih enot.

Velikostni red razpadne verjetnosti nam torej pove tip in multipolnost razpada, natančnejša vrednost (odstopanje od Weisskopfove enote) pa nam pove, ali je razpad normalen, kolektiven ali oviran. S točno kvantitativno vrednostjo razpadne verjetnosti (=multipolnega momenta) pa lahko preizkusimo kvaliteto modelske valovne funkcije, s katero opisujemo jedro.

(b) Notranja konverzija

Notranja konverzija je konkurenca razpadu gama. Vzbujeno jedro se znebi odvišne energije tako, da jo podeli enemu od atomskih elektronov ter ga izbije iz atoma. Konverzijski elektron odleti z nekoliko nižjo energijo, kot se sprost pri razpadu, kajti premagati mora še privlačne sile, ki ga vežejo v atomu:

$$W_e = W_\gamma + E_{e,vez}, \quad (E_{e,vez} \text{ je negativna.})$$

Podobno kot pri razpadu gama napravimo tudi pri računu notranje konverzije multipolni razvoj. Tudi tu pomeni multipolni red vrtilno količino, ki jo odnese elektron (pravzaprav spremembe med začetno in končno elektronsko vrtilno količino). Tip prehoda pa določa spremembe parnosti: pri električnih prehodih se parnost spremeni za $(-1)^l$, pri magnetnih pa za $-(-1)^l$. Pri električnih prehodih izbije elektron električno polje, pri magnetnih prehodih pa ga izbije magnetno polje nihajočega multipola.

Razmerje med w_e in w_γ imenujemo konverzijski koeficient w_e/w_γ . Ker je verjetnost za notranjo konverzijo w_e sorazmerna s kvadratom ustreznega dinamičnega multipolnega momenta — prav tako kot verjetnost za razpad gama w_γ — se multipolni moment v razmerju krajša. Konverzijski koeficient

zato ni odvisen od multipolnega momenta — torej ni odvisen od podrobnih lastnosti jedra. Konverzijski koeficient je odvisen le od tipa in multipolnosti prehoda, sproščene energije in valovne funkcije elektrona v atomu: $w_e/w_\gamma = f(\text{tip}, l, V, Z)$. Konverzijski koeficienti so torej lastnost atoma, ne pa jedra. Lastnosti atoma znamo dokaj točno izračunati. Za račun konverzijskih koeficientov ni načelnih težav, a računi so zamudni. Račune so že napravili za različne vrednosti parametrov in imamo na razpolago tabele. Konverzijski koeficient je sorazmeren približno z Z^3 , ker „elektronski radij“ pada z Z ; gostota elektronov in s tem verjetnost za proces potem raste z Z^3 . Konverzijski koeficient pada z energijo, ker je pri višjih energijah prekrižanje med začetno in končno elektronovo valovno funkcijo slabše; pri višji energiji ima namreč končna valovna funkcija krajše valove in se prispevki z nasprotnim predznakom v integralu za matrični element huje uničijo.

Ker je konverzijski koeficient močno odvisen od tipa in multipolnosti prehoda, nam da merjenje konverzijskega koeficienta bolj ali manj točno informacijo o tipu in multipolnosti prehoda.

Kakšen je mehanizem notranje konverzije? Ali se najprej izseva žarek gama, ki se potem absorbira v lastnem atomu s fotoefektom (dvostopenjski proces)? Ali električno (oz. magnetno) polje jedra direktno izbije elektron iz atoma? Vprašanje ima smisel, ker se da ločiti eno od drugega. Izbiti elektron je sicer v obeh primerih enak, toda verjetnost za proces je različna.

Primerjajmo razpadno verjetnost za „oblečeno“ jedro in za „slečeno“ jedro brez elektronov! Če je notranja konverzija dvostopenjski proces, bo razpadna verjetnost obakrat ista: $w = w_\gamma$. Jedra pri razpadu namreč nič ne briga, ali bo nastali foton srečno ušel ali se bo absorbiral v lastnem atomu. Če pa je notranja konverzija enostopenjski proces je razpadna verjetnost za oblečeno jedro večja: $w_{\text{golo}} = w_\gamma$, $w_{\text{oblečeno}} = w_\gamma + w_e$. V tem primeru je notranja konverzija dodaten neodvisen način razpada. Poizkus je težak, ker je pri lahkih atomih notranja konverzija malo verjetna, težkih jeder, ki imajo velik konverzijski koeficient, pa ne znamo sleči. Vendar lahko primerjamo razpadno konstanto težkih jeder v različni kemični povezavi. Verjetnost za notranjo konverzijo je odvisna od valovne funkcije elektrona. Če je notranja konverzija neodvisen dodaten način razpada, bo razpadni čas jedra torej vsaj nekoliko odvisen od kemične povezave atoma. Poizkusi in računi so pokazali, da je 99% dogodkov notranja konverzija samostojen (enostopenjski) način razpada, pri $\sim 1\%$ pa predstavlja notranji fotoefekt.

Formalno ločimo oba pojava tako, da si mislimo razdeljeno elektromagnetno polje okrog nihajočega multipola na dva dela. Bližnji del ima obliko statičnega multipolnega polja, hitro pada z razdaljo (E ali $B \propto r^{-(l+2)}$) in skoraj togo, z majhno retardacijo, sledi nihanju multipola. Oddaljeni del pa je sevalno polje (E in $B \propto r^{-1}$). Če ni prisotnih elektronov, odnaša energijo

(=povzročča razpad gama) samo sevalno polje. Če pa so prisotni elektroni, jih lahko pospeši tudi bližnje multipolno polje in predstavlja to dodatne izgube energije za jedro (=dodaten način razpada). Malo verjetno izbitje elektrona s sevalnim poljem imenujemo notranji fotoefekt, izbitje elektrona z bližnjim multipolnim poljem pa notranjo konverzijo. Notranja konverzija je pravzaprav notranji fotoefekt virtualnega fotona. Nosilci bližnjega multipolnega polja, ki ne odnaša energije od izvora, so namreč virtualni fotoni, t.j. taki fotoni, ki se ne morejo oddaljiti od izvora. Pač pa se virtualni fotoni lahko absorbirajo v elektronu in mu posredujejo učinek polja.

Pri prehodih $0^+ \rightarrow 0^+$ (ali $0^- \rightarrow 0^-$) razpad gama ni mogoč, ker nihajoči monopol ne seva. Notranja konverzija pa je možna, saj porazdelitev nabojev, ki „diha“ (ki se širi in krči) lahko izbije elektron, če se nahaja v samem območju dihanja. V samem območju jedra imamo nihajoče polje, zunaj jedra pa je polje konstantno ($\phi = Ze_0/4\pi\epsilon_0 R$). Konverzijski koeficient je v tem primeru ∞ . Če imata osnovno in prvo vzbujeno stanje vrtilno količino 0 in isto parnost, razpada prvo vzbujeno stanje le z notranjo konverzijo.

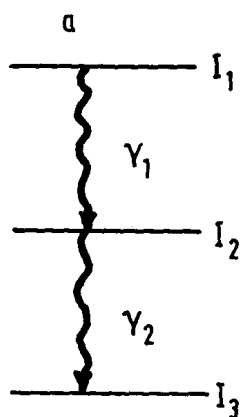
Pri prehodih $0^+ \rightarrow 0^-$ pa tudi notranja konverzija ni mogoča. To bi bil prehod tipa $M0$, magnetni monopoli pa ne eksistirajo. Če tako vzbujeno stanje nima na razpolago nižjih nivojev z drugimi vrtilnimi količinami, na videz sploh ne more razpasti. Vendar pridejo tedaj v poštev taki redki načini razpada, ki so sicer zanemarljivi. Dobimo npr. *notranjo tvorbo parov*, kjer se porabi energija za tvorbo para elektron-pozitron. Če ni dovolj energije za to, je možna *tvorba dveh fotonov hkrati*.

(c) Kotna porazdelitev fotonov

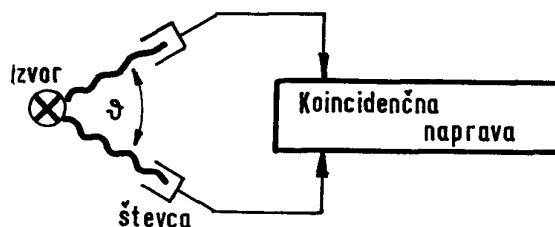
Multipol reda l seva elektromagnetno valovanje, pri katerem imata električna poljska jakost E in magnetna poljska jakost B kotno odvisnost oblike $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. Kotna porazdelitev pri razpadu gama ima torej obliko $|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2$. Pri dipolni anteni ima npr. kotna porazdelitev intenzitete sevanja obliko $|Y_{11}(\vartheta, \varphi)|^2 \propto \sin^2 \vartheta$. Direktna meritev je težavna, ker potrebujemo orientirana jedra. Če so jedra v vzorcu obrnjena v vse smeri, dobimo namreč vsoto različno orientiranih kotnih porazdelitev. To nam da izotropno porazdelitev žarkov gama, iz katere ne izvemo ničesar. Že za stabilna jedra je težko napraviti vzorce iz orientiranih jeder. Za vzbujena stanja, ki nas zanimajo, pa je to praktično nemogoče, razen za redke primere dolgoživih vzbujenih stanj.

Pomagamo si tako, da opazujemo dva zaporedna razpada gama v kaskadi in merimo *kotno korelacijo* med njima. Če poznamo orientacijo vmesnega stanja, lahko izračunamo kotno porazdelitev žarka $\gamma_1 : \Phi(\vartheta, \varphi)$. Obratno lahko sklepamo iz znane smeri žarka γ_1 na verjetnostno porazdelitev, kako je orientirano nastalo vmesno jedro. Verjetnostna porazdelitev za orientacijo

vmesnega jedra je ista, kot je bila v prejšnjem primeru kotna porazdelitev žarkov gama: $\Phi_1(\vartheta, \varphi)$. Za ilustracijo pomislimo na dipolno anteno, ki seva največ v pravokotni smeri in nič v vzdolžni smeri. Če z radijskim teleskopom detektiramo iz dane smeri signale od množice dipolnih anten, lahko sklepamo, da je večina anten, katerih sevanje zaznavamo, obrnjena pravokotno na vpadno smer in zelo malo v vzdolžno smer.



Slika 4.16: Kaskada dveh zaporednih žarkov gama



Slika 4.17: Merjenje kotne korelacije med dvema zaporednima žarkoma gama

Če torej ugotovimo smer žarka γ_1 , je vmesno jedro *delno orientirano* glede na to smer s porazdelitvijo $\Phi_1(\Theta, \varphi)$. Drug žarek gama bi se z orientiranega jedra sipal s porazdelitvijo $\Phi_2(\vartheta, \varphi)$. Ker pa je vmesno jedro le delno orientirano, dobimo konvolucijo obeh porazdelitev: $\Phi(\vec{\vartheta}) = \int \Phi_1(\vec{\vartheta}') \Phi_2(\vec{\vartheta} - \vec{\vartheta}') d\Omega'$. Pri tem je kot $\vec{\vartheta} \equiv (\vartheta, \varphi)$ kot med obema žarkoma gama. Izmeriti moramo torej kotno korelacijo in obrniti konvolucijo, da dobimo porazdelitvi Φ_1 in Φ_2 . Včasih se posreči dobiti obe porazdelitvi, včasih pa je treba eno od njiju poznati, da lahko izračunamo drugo. Porazdelitve pa so enolično odvisne od vrtilnih količin jeder. Na ta način lahko iz izmerjene kotne korelacije določimo eno ali dve neznani vrtilni količini.

Če želimo določiti tudi parnost stanj, moramo poznati tudi tip prehoda. Tega pa lahko določimo z merjenjem *polarizacije žarkov gama*. Za ilustracijo: pri električni dipolni anteni je električna poljska jakost paralelna z anteno, pri magnetni dipolni anteni pa je paralelna z anteno magnetna poljska gostota valov. Merjenje polarizacije žarkov gama je precej težje kot merjenje kotnih korelacij. Žarke gama moramo sipati na elektronih in iz kotne porazdelitve sipanih elektronov ali žarkov gama sklepati o njihovi polarizaciji.

Zaključek

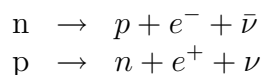
V glavnem smo se omejili na „zunanji“ aspekt razpada gama — na tiste lastnosti, ki so odvisne le od oblike matričnih elementov. Izpeljali smo izbirna pravila in velikostni red razpolovnih časov ter omenili konverzijske koeficiente in kotne korelacije. Te lastnosti praktično uporabljamo za določevanje vrtilnih količin in parnosti vzbujenih stanj jedra.

Še zanimivejši pa je „notranji“ aspekt razpada gama — razlaga točne vrednosti matričnih elementov s strukturo jedra. Valovna funkcija jedra sama po sebi ni merljiva količina — merimo lahko le pričakovane vrednosti nekaterih operatorjev. Vrednost matričnega elementa za razpad gama lahko torej štejemo za enega od podatkov o valovni funkciji, ki ga bodisi vgradimo v modelsko valovno funkcijo, bodisi modelsko valovno funkcijo z njim testiramo. Razpad gama nam torej da važne eksperimentalne podatke o strukturi jedra (o valovni funkciji). Mi smo se tega aspekta le delno dotaknili pri poglavju o strukturi jedra: iz razpada gama smo dobili informacijo, katera vzbujena stanja so kolektivna.

4.4 Razpad beta

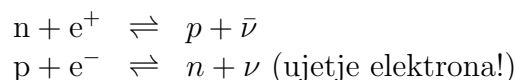
4.4.1 Nevtrino

Podobno kot razpad gama je tudi razpad beta način, da se jedro znebi odvišne energije in preskoči iz višjega kvantnega stanja v nižje. Medtem ko ostane pri razpadu gama število protonov in nevtronov v jedru isto, se pa pri razpadu beta spremeni en nevtron v proton ali obratno. To lahko povemo tudi drugače. Pri razpadu gama preskoči nukleon iz višjega prostorskega stanja v nižje prostorsko stanje in eventualno spremeni še spinsko stanje. Pri razpadu beta pa lahko spremeni nukleon pri preskoku prostorsko, spinsko in še izospinsko stanje. Odvišne energije pri razpadu beta ne odnese foton, temveč par elektron-antinevtrino ali pozitron-nevtrino. Osnovni proces je torej naslednji:

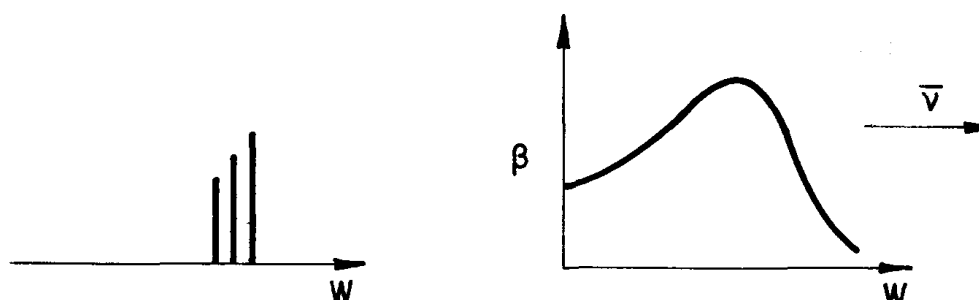


Kot je znano, imajo antidelci natančno isto vrednost statičnih količin kot delci, le predznak je pri nekaterih količinah nasproten (npr. pri naboju). Poskusi kažejo na še eno važno lastnost antidelcev, da imajo procesi enak matrični element, če se delec rodi ali če se antidelec absorbira. S tega vidika

je emisija delca ekvivalentna absorpciji antidelca in obratno. Zato lahko štejemo za osnovne procese tudi naslednje:



Ali sta ν in $\bar{\nu}$ isti delec ali sta različna, ne moremo postulirati a-priori. Oba sta sicer nevtralna, vendar lahko odloči samo eksperiment, ali sta ista ali različna. Ker nastane $\bar{\nu}$ skupaj z elektronom, ν pa skupaj z elektronovim antidelcem pozitronom, predpostavljamo, da sta si tudi ν in $\bar{\nu}$ med seboj antidelca. Katerega od njiju imenujemo nevtrino in katerega antinevtrino, je stvar dogovora. Odločiti se izplača tako, da s tem eksplicitno izrazimo kak nov ohranitveni zakon. Če izberemo tako, da je ν nevtrino, $\bar{\nu}$ pa antinevtrino (antidelec), se pri gornjih procesih ohranja število delcev (fermionov). Antidelec namreč štejemo za -1 delec.



Slika 4.18: Primerjava spektra delcev alfa in beta

Dokler niso poznali nevtrina, so imeli velike težave. Spekter delcev beta se bistveno razlikuje od spektra alfa po tem, da ni diskreten, ampak zvezen. Energija delca je točno enaka razpadni energiji. Če sledi razpadu alfa žarek gama, je energija obeh skupaj točno enaka razpadni energiji. Pri razpadu beta pa se energija na videz ne ohranja. Delec beta lahko odnese vso razpadno energijo, običajno pa je odnese manj. Kam gre preostala energija? Ali se uniči? Pesimisti so že obupali nad zakonom o ohranitvi energije in postavili namesto enačbe neenačbo, češ da se pri procesih energija bodisi ohrani bodisi zmanjša. Pauli pa je predlagal kot možno razlago, da odnese del energije pri razpadu beta neki novi delec — nevtrino.

Ker je nevtrino nevtralen in nima magnetnega momenta, ne ionizira snovi in ga je bilo težko odkriti. Nevtrino leti skoraj neovirano skozi snov, celo skozi zemljo ali skozi sonce pride skoraj s 100% verjetnostjo. Zato so najprej

zbrali indirektne dokaze o njegovi eksistenci, šele leta 1953 so ga direktno eksperimentalno odkrili. Dandanes pa so zgradili ogromne nevtrinske detektorje in so postale meritve z nevtrini rutina; „nevtrinska fizika” je pomembno področje astrofizike in fizike osnovnih delcev.

Dokazi o eksistenci nevtrina

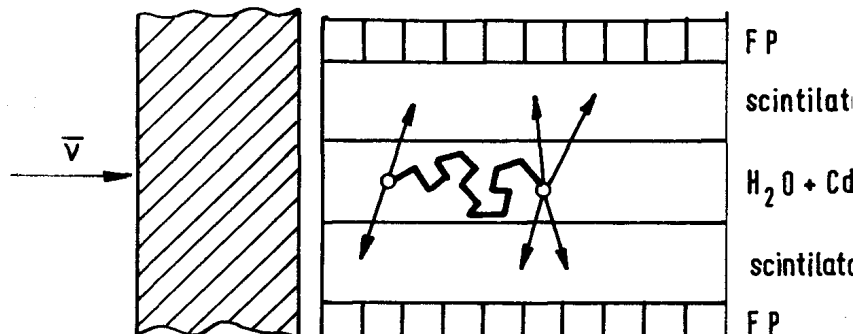
1. *Ohranitev energije* zahteva, da del energije pri razpadu beta odnese še neki delec, ki se izmuzne opazovanju (torej ni niti elektron niti foton). Ta delec mora biti nevtralen, ker ne odnese nič naboja.
2. *Oblika spektra* se da razločiti edino tako, da si razpadno energijo razdelita dva lahka delca (elektron in antinevtrino). Speker ima namreč težišče približno na polovici maksimalne energije in tudi podrobna oblika je v skladu s predpostavko, da nastaneta dva lahka delca. Izključena je možnost, da bi nastal samo elektron, saj bi moral biti spekter diskreten. Oblika spektra izključi tudi možnost, da bi nastali trije lahki delci (elektron in dva nevtralna delca), ker bi bilo v tem primeru težišče spektra okrog tretjine maksimalne energije in podrobna oblika drugačna, kot jo da eksperiment.
3. *Ohranitev gibalne količine*. Izmerili so gibalno količino elektrona in odrivno gibalno količino nastalega jedra ter ju vektorsko sešteli. Rezultanta ni bila enaka nič, torej je odnesel nekaj gibalne količine nevtrino. Ker so merili tudi energijo elektrona in jedra, so iz primanjkljaja izračunali še energijo nevtrina. Iz tega se da izračunati masa nevtrine: $m^2c^4 = E^2 - p^2c^2$. V okviru natančnosti meritev je masa nevtrina 0. Eksperiment je težaven, ker dobi jedro pri odrivnem sunku zelo majhno energijo, komaj nekaj eV. V megljeni celici dobimo za jedro čisto kratko sled, tako da določitev gibalne količine ni posebno natančna. Druga možnost je, da vzorec razpada v vakuumu in gibalno količino nastalega jedra analiziramo z magnetnim spektrometrom. To spet ni lahko zaradi majhnih intenzitet.
4. *Ohranitev vrtilne količine*. Nevtron ima spin $1/2$ in zato ne more razpasti samo v proton in elektron. Proton in elektron namreč ne moreta dati rezultante $1/2$, temveč ju lahko seštejemo samo v celoštevilčno vrtilno količino. Torej mora nastati še en delec, ki prispeva polovično vrtilno količino. Zato sklepamo, da ima nevtrino $s = 1/2$.
5. *Ohranitev statistike*. Če ni zamenjave delcev med sistemi, ubogajo sistemi iz lihega števila fermionov Fermi-Diracovo statistiko, sistemi

iz sodega števila fermionov pa Bose-Einsteinovo. Nevtron pred razpadom je fermion, torej mora tudi po razpadu nastati liho število fermionov. Proton in elektron sta premalo, nastati mora še en fermion (antinevtrino).

Doslej smo torej določili naslednje lastnosti nevtrina: $e = 0$, $\mu = 0$ (ker ne ionizira snovi), $m \approx 0$, $s = 1/2$, statistika = fermion.

6. *Direkten dokaz* za nevtrino je opazovanje reakcije, ki je obratna razpadu beta: $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$. Za izvor antinevtrinov so vzeli reaktor. Pri razcepu urana v reaktorju namreč nastanejo jedra s preveč nevtroni, ki potem razpadajo z β^- pri čemer nastanejo tudi antinevtrini. Reaktor je torej močan izvor antinevtrinov brez nevtrinov. Za tarčo so vzeli vodik. Za uspešen poskus so rabili

dober	izvor	–	reaktor,
dosti	vodika	–	cel tank vode,
dobro zaščito	proti ozadju iz reaktorja	–	debel betonski zid;
zanesljivo	detekcijo	–	da res zaznamo reakcijo, ki jo je sprožil nevtrino.



Slika 4.19: Poskus, pri katerem so zaznali nevtrino

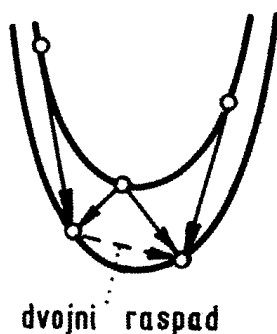
Vzeli so veliko plast vode (200 litrov), v kateri je bil raztopljen kadmij. Na vsako stran vodne plasti so dali cel tank tekočega scintilatorja (1400 litrov) in ga obdali z množico fotopomnoževalk. Pri opazovani reakciji nastaneta n in e^+ . e^+ se zaradi ionizacije ustavi in kmalu anihilira, pri čemer odda dva fotona z energijo 0,5 MeV. Ker gresta fotona vsak na svojo stran, pride verjetno eden v gornji scintilator, drugi pa v spodnjega. Nevtron tava nekaj mikrosekund v vodi, nakar se absorbira v Cd. Pri tem odda več fotonov s skupno energijo 9 MeV. Sunke peljemo na katodni osciloskop z dvema curkoma. Iz vsakega scintilatorja peljemo na en curek. Absorpcijo nevtrina

nedvoumno registriramo, če dobimo na obeh zaslonih hkrati najprej po en sunek 0,5 Mev in nato čez nekaj mikrosekund na vsakem zaslonu še en večji sunek s skupno vsoto 9 MeV. Zaporedje teh dveh dogodkov je tako karakteristično, da so izključeni lažni dogodki. Meritev je dolgotrajna, ker so reakcije antinevtrinov zelo redke. Dobili so le okrog 2 dogodka na uro, iz česar so ocenili presek za to reakcijo: $\sigma \approx 10^{-19}$ bn.

Nevtrino in antinevtrino

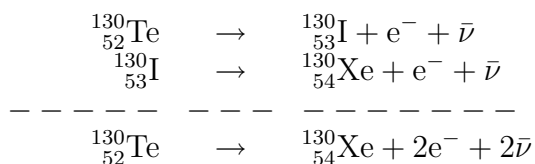
Da se nevtrino in antinevtrino razlikujeta, so ugotovili z naslednjimi tremi meritvami:

1. *Nevtrino lahko sproži reakcijo* $\nu + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$. To reakcijo lahko spoznamo po značilnem razpadu nastalega radioaktivnega ${}^{37}\text{Ar}$. Če se nevtrino in antinevtrino razlikujeta, jo lahko sproži samo nevtrino, če pa sta identična delca, jo lahko sproži tudi antinevtrino iz reaktorja. Vzorec iz ${}^{37}\text{Cl}$ so obsevali z antinevtrini iz reaktorja, vendar se vzorec ni prav nič aktiviral z ${}^{37}\text{Ar}$, kar dokazuje, da antinevtrino ne more sprožiti omenjene reakcije in se torej razlikuje od nevtrina. Reakcija je izbrana tako, da se v vzorcu ne more tvoriti ${}^{37}\text{Ar}$ na noben drug način (npr. z absorpcijo nevtronov, ki tudi prihajajo iz reaktorja).



Slika 4.20: Dvojni razpad beta; na diagramu so mase sosednjih sodo-sodo izobarov

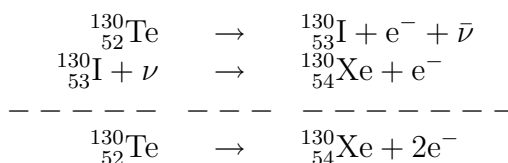
2. *Dvojni razpad beta.* Mnoga sodo-soda jedra so metastabilna, kajti oba sosednja izobara imata večjo maso. Šele drugi sosed ima manjšo maso. Da bi ga dosegli, rabimo dvojni razpad beta. Primer:



Vmesno stanje ${}^{130}\text{I}$ sicer energijsko ni dosegljivo za stalno (kot končno stanje), vendar lahko nastane po principu nedoločenosti za kratek čas.

Če v tem kratkem času uspe razpasti ^{130}Xe , dobimo končno stabilno stanje. Dvojni razpad beta je torej dvostopenjski proces. Ker je vmesno stanje malo verjetno (pojavi se le od časa do časa za zelo kratek čas), je verjetnost za dvojni razpad majhna.

Če sta nevtrino in antinevtrino identična, poteka dvojni razpad beta še vedno v dveh stopnjah, vendar enostavneje. Nevtrino, ki nastane pri prvem razpadu, se absorbira pri drugem:



Ker nastaneta samo dva elektrona brez nevtronov, je razpadni čas mnogo krajši. Rezultat:

Račun za $2e^- + 2\bar{\nu}$:	$t_{1/2} =$	$8 \cdot 10^{21 \pm 2}$	let
Račun za $2e^-$		$8 \cdot 10^{15 \pm 2}$	let
Eksperiment		$1,4 \cdot 10^{21}$	let

Eksperiment se ujema s prvim tipom razpada, kar kaže na to, da drugi tip ni mogoč. Torej sta ν in $\bar{\nu}$ različna. Podoben rezultat dajo tudi dvojni razpadi beta pri drugih jedrih, čeprav so zaradi dolgih razpolovnih časov običajno lahko ocenili samo spodnjo mejo za $t_{1/2}$.

3. *Vijačnost nevtrina.* Vijačnost imenujemo projekcijo vrtilne količine na smer gibanja. Meritve so pokazale, da se nevtrino, ki nastane pri razpadu β^+ , giblje vedno kot levi vijak (\vec{s} in \vec{p} sta antiparalelna). Antinevtrino, ki nastane pri razpadu β^- , pa se vedno giblje kot desni vijak (\vec{s} in \vec{p} paralelna). Po tej lastnosti se torej ν in $\bar{\nu}$ enolično razlikujeta. Podrobnosti si bomo ogledali pozneje.

4.4.2 Oblika spektra; reducirani razpolovni čas

Oblika spektra

Obliko spektra bomo izračunali z naslednjimi tremi predpostavkami:

1. Poleg končnega jedra nastaneta še dva delca (elektron in antinevtrino oz. pozitron in nevtrino).

2. Elektron in nevtrino si razdelita energijo slučajno (statistično). Z drugo besedo: matrični element za razpad beta ni odvisen od energije elektrona in nevtrina. Oblika spektra torej ni odvisna od mehanizma razpada beta, temveč le od velikosti faznega prostora, ki je na razpolago elektronu in nevtrinu.

3. Masa nevtrina je nič.

Veljavnost teh predpostavk potrjuje ujemanje izračunanega spektra z eksperimentom. Edino predpostavka 2 ne velja vedno: velja pri tako imenovanih dovoljenih prehodih, ne pa pri vseh prepovedanih prehodih.

Pri razpadu tipa $A \rightarrow B + b$ zavzameta jedri A in B diskretno vrednost energije, medtem ko je energija prostega delca b v območju zveznih energij. V tem primeru računamo verjetnost za prehod po „drugem zlatem pravilu kvantne mehanike”

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle H_{21} \rangle|^2 \frac{dn}{dE}$$

Pri razpadu beta pa nastaneta dva prosta delca v območju zveznih energij. Ne zanima nas le celotna verjetnost za prehod, temveč tudi verjetnostna porazdelitev, kako si delca porazdelita med seboj energijo. Oblika spektra (verjetnost za prehod na časovno enoto in na enoto energijskega intervala prvega delca) je potem naslednja:

$$\frac{dw}{dE_1} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle H_{21} \rangle|^2 \frac{dn_1}{dE_1} \frac{dn_2}{dE_2}$$

Ta izraz dobimo, če odvajamo prejšnjo formulo po E_1 , pri čemer upoštevamo, da je $E = E_1 + E_2$, $dE dE_1 = dE_1 dE_2$ ter $dn = dn_1 dn_2$.

Za elektron bomo pisali n , p , E , $E_{\max} = E_0$,

za nevtrino pa n_ν , $p_\nu = E_\nu/c$, $E_\nu = E_0 - E$.

Ker je razpadna energija reda velikosti nekaj MeV (torej večja od mirovne energije elektrona), moramo računati relativistično. Zato bomo z E označili celotno energijo elektrona, ne le kinetično.

Nadaljnja izpeljava gre tako:

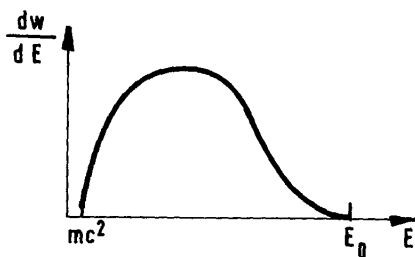
$$\begin{aligned} E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ E dE &= c^2 p dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dE} &= \frac{\mathcal{V} 4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3 dE} = \frac{\mathcal{V} p E dE}{2\pi^2 \hbar^3 c^2 dE} \\ \frac{dn_\nu}{dE_\nu} &= \frac{\mathcal{V} 4\pi p_\nu^2 dp_\nu}{(2\pi\hbar)^3 dE_\nu} = \frac{\mathcal{V} (E_0 - E)^2}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} \\ \frac{dw(E)}{dE} &= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle H_{21} \rangle|^2 \frac{\mathcal{V} p E}{2\pi^2 \hbar^3 c^2} \frac{\mathcal{V} (E_0 - E)^2}{2\pi^2 \hbar^3 c^3} = \frac{p E (E_0 - E)^2}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} M_\beta^2 \end{aligned}$$

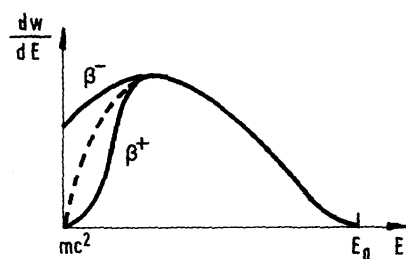
Matrični element za prehod smo pisali $|\langle H_{21} \rangle| \mathcal{V} = M_\beta$ in ima dimenzijo eV fm^3 . Ali je matrični element M_β in s tem verjetnost za razpad sorazmerna z volumnom škatle, v katero smo zaprli sistem, da lahko preštujemo število stanj elektrona in nevtrina? Ne, kajti čim večja je škatla, tem bolj sta razmazani valovni funkciji elektrona in nevtrina in tem manjši je $\langle H_{21} \rangle$: $\langle H_{21} \rangle \propto 1/\mathcal{V}$. M_β je torej neodvisen od izbire škatle.

Dobili smo naslednjo obliko spektra:

Pri $E \sim mc^2$ gre spekter navpično, $dw/dE \propto p \propto \sqrt{E_{\text{kin}}} = \sqrt{E - mc^2}$, kajti pri majhnih energijah velja klasično $E_{\text{kin}} = p^2/2m$



Slika 4.21: Spekter elektronov pri razpadu beta (brez upoštevanja elektrostatskega polja jedra)



Slika 4.22: Spekter elektronov in pozitronov pri razpadu beta (z upoštevanjem elektrostatskega polja jedra; črtkana črta pa je za obojne delce brez upoštevanja elektrostatskega polja jedra)

Desno pa konča spekter kot parabola z vodoravno tangento:

$$dw/dE \propto (E_0 - E)^2$$

Da dobimo pravilno obliko spektra, moramo upoštevati še vpliv elektrostatskega polja jedra na elektrone. Za elektron je to polje privlačno in je zato v bližini jedra valovna funkcija elektrona ter gostota elektronov povečana. Verjetnost za razpad je torej nekoliko večja kot smo računali doslej. Korekturni faktor se

imenuje Fermijeva funkcija $F_-(Z, E)$ in je odvisen le od obnašanja elektrona (energije E in elektrostatskega polja, ki ga občuti ... Z). Račun Fermijeve funkcije je stvar atomske in ne jedrske fizike, kajti izračunati je treba valovno funkcijo elektrona v atomu (v elektrostatskem polju jedra). Račun je zamuden, vendar ni načelnih težav. Toda Fermijeva funkcija je že izračunana in tabelirana za razne vrednosti E in Z , tako da nam je ni treba računati.

Za pozitron pa je elektrostatsko polje odbojno, zato je valovna funkcija pozitrona v jedru zmanjšana, $F_+(Z, E) < 1$. Pozitron mora priti skozi elektrostatsko ograjo s tunelskim efektom podobno kot delec alfa pri razpadu alfa. To lahko znatno zmanjša verjetnost za razpad: Fermijeva funkcija za pozitron je torej čisto analogen faktor kot prepustnost ograje pri razpadu alfa: $F_+ \sim e^{-g}$

Pri počasnih elektronih oz. pozitronih je efekt velik, ker se elektrostatska energija zelo pozna v primeru s kinetično. $F_-(Z, E = mc^2) = \infty$, $F_+(Z, E = mc^2) = 0$. Pri hitrih elektronih in pozitronih se pa elektrostatska energija ne pozna dosti in je efekt neznamen: $F_{\pm}(Z, E \gg Ze_0^2/4\pi\epsilon_0 R) \approx 1$

Popravljena oblika spektra je potem:

$$\frac{dw(E)}{dE} = \frac{pE(E_0 - E)^2}{2\pi^3\hbar^7 c^5} F_{\pm}(Z, E) M_{\beta}^2$$

Oblika spektra je nerodna za določevanje maksimalne energije elektronov, ker ima spekter pri E_0 vodoravno tangento. Zato diagram „lineariziramo“ (Kurijev diagram):

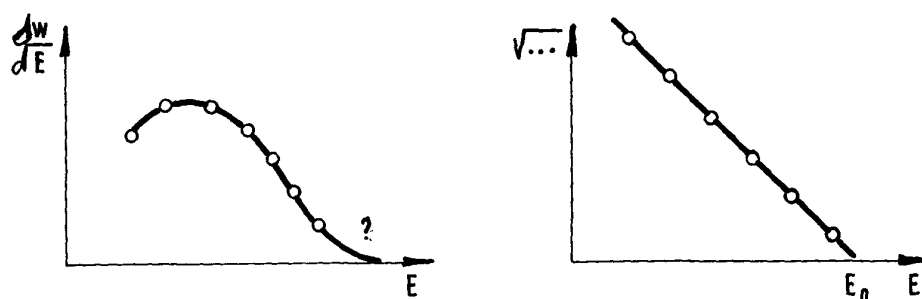
$$\sqrt{\frac{dw/dE}{pE F_{\pm}}} = \frac{M_{\beta}}{\sqrt{2\pi^3\hbar^7 c^5}} (E_0 - E)$$

Kurijev diagram je pripraven

- a) za določitev E_0 z ekstrapolacijo
- b) da preverimo, če je M_{β} res neodvisen od energije (če dobimo premico) oziroma da vidimo, kako se spreminja z energijo (če ne dobimo premice).

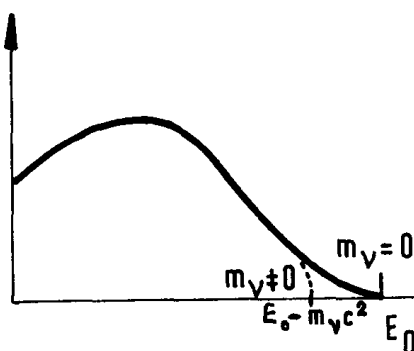
Iz oblike spektra lahko določimo tudi *maso nevtrina*. Če je $m = 0$, kot smo privzeli doslej, ima spekter pri E_0 vodoravno tangento in gre proti nič kot $(E_0 - E)^2$. Če pa je $m_{\nu} \neq 0$, se spekter konča že pri $E_0 - m_{\nu}c^2$ in gre proti nič z navpično tangento. Za nevtrinov fazni prostor moramo namreč vzeti

$$\frac{\mathcal{V}P_{\nu}E_{\nu}}{2\pi^2\hbar^3 c^2} \propto p_{\nu} \propto \sqrt{E_{\nu \text{ kin}}} = \sqrt{E_{\text{max}} - E},$$



Slika 4.23: Določitev maksimalne energije elektronov v navadnem in v Kuriejevem diagramu za spekter elektronov

ker bi veljala za počasne nevtrine pri zgornji meji klasična zveza. Meritve se ujemajo s krivuljo za $m_\nu = 0$. V okviru natančnosti bi skozi izmerjene točke lahko potegnili kvečjemu krivuljo za $m_\nu c^2 \sim 1$ eV.



Slika 4.24: Spekter elektronov, če je masa nevtrina enaka nič (polna črta) ali različna od nič (črtkano)

Reducirani razpolovni čas (vrednost $ft_{1/2}$)

Verjetnost za razpad beta je odvisna od dveh faktorjev: matričnega elementa M_β (lastnost jedra!) in od velikosti faznega prostora. Razpolovni čas torej ni dobro merilo za matrični element M_β . Zato eliminiramo fazni prostor in vpeljemo reducirani razpolovni čas. Šele ta je karakterističen za dogajanje v jedru.

Izračunajmo celotno verjetnostno gostoto za razpad beta! Sešteti moramo prispevke dw/dE za posamezne dele spektra.

$$w = \int \frac{dw}{dE} dE = \int_{mc^2}^{E_0} \frac{pE(E_0 - E)^2 F_{\pm}(Z, E)}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} M_{\beta}^2 dE$$

Spremenimo integral v brezdimenzijsko obliko:

$$w = \underbrace{\left\{ \int_{mc^2}^{E_0} \frac{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}}{mc^2} \frac{E}{mc^2} \frac{(E_0 - E)^2}{m^2 c^4} F_{\pm}(Z, E) \frac{dE}{mc^2} \right\}}_{f_{\pm}(Z, E_0)} \frac{m^5 c^9}{2\pi^3 \hbar^7 c^5} M_{\beta}^2$$

$$w = \frac{m^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} f(Z, E_0) M_{\beta}^2,$$

$$ft_{1/2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m^5 c^4} \frac{1}{M_{\beta}^2} = \left(\frac{6921 \text{ eV fm}^3}{M_{\beta}} \right)^2 \text{ sekund}$$

Faktor f izraža velikost faznega prostora, ki je na razpolago, v matričnem elementu M_{β} pa se skriva mehanizem razpada.

Vrednost $ft_{1/2}$ imenujemo reducirani razpolovni čas in je recipročno merilo za matrični element razpada beta. Funkciji $f_{\pm}(Z, E_0)$ dobimo z numerično integracijo funkcij $F_{\pm}(Z, E)$ pomnoženih z ustreznim faktorjem. Funkciji f_{\pm} sta že izračunani in tabelirani za razne vrednosti Z in E_0 .

4.4.3 Lastnosti šibke sile; matrični elementi

Šibki potencial

Vse procese v naravi povzročajo sile (izraz „sila” bom uporabljal v pomenu „interakcija”). Za razpad beta je odgovorna tako imenovana *šibka sila*, ki je ne poznamo niti iz makroskopskega niti iz atomskega sveta. Zato lahko ugotovimo njene lastnosti samo s študijem razpada beta pri raznih jedrih in raznih osnovnih delcih.

V naravi poznamo naslednje sile:

1. Jedrska ali močna sila, delce med katerimi deluje, imenujemo mezone in barione (od njih smo doslej srečali le nukleona).
2. Elektromagnetna sila deluje med vsemi nabitimi ali namagnetnimi delci ter fotonom.

3. Šibka sila deluje verjetno med vsemi delci razen fotona, vendar jo opazimo samo pri razpadu beta kot silo med nukleonom in leptonom (lepton je skupno ime za elektron in nevtrino). Drugod jo zakrijejo močnejše sile.
4. Gravitacijska sila deluje med vsemi delci, vendar je najšibkejša od vseh sil.

Sile se manifestirajo na tri načine:

1. **Vežejo** dva ali več delcev v vezano stacionarno stanje. Jedrska sila veže nukleone v jedra. Elektromagnetna sila veže jedra in elektrone v atome, molekule in snov. Šibka sila pa je prešibka in verjetno ne tvori vezanih sistemov.
2. **Povzročajo prehode** iz enega stacionarnega stanja v drugo (povzročajo sipanje in procese). Elektromagnetna sila spremeni prostorsko stanje delca (siplje) in eventualno tudi spinsko stanje (zasuče vrtavko zaradi navora na magnetni moment). Jedrska sila lahko spremeni poleg prostorskega in spinskega stanja delca tudi njegovo notranje (izospinsko) stanje — zamenjalna jedrska sila spremeni pri trku proton v nevtron, nevtron pa v proton. Podobno spremeni šibka sila poleg prostorskega in spinskega stanja tudi notranje stanje. To napravi hkrati nukleonu ($p \rightleftharpoons n$) in leptonu ($e^- \rightleftharpoons \nu$ česar ne zmore nobena druga sila. Zato je razpad beta (in ujetje elektrona) posledica šibke sile in pride šibka sila do izraza le pri tem razpadu, drugod pa jo zakrijejo močnejše sile. Ujetje elektrona si torej smemo predstavljati kot nekak trk: elektron trči ob proton in mu ob trku vzame naboj. S tem se elektron spremeni v nevtrino, proton pa v nevtron.
3. **Rodijo ali absorbirajo delce**. Pri elektromagnetnih prehodih (npr. sevanju ali fotoefektu) se rodi oz. absorbira foton. Pri trku nukleonov z veliko energijo se zaradi jedrskih sil rodijo mezoni. Medtem ko se bozoni lahko rodijo ali absorbirajo v poljubnem številu, se fermioni vedno rodijo oz. absorbirajo v parih delec-antidelec. Foton lahko npr. rodi par elektron-pozitron; pri trku nukleonov z veliko energijo dobimo zaradi jedrskih sil pare nukleon-antinukleon; zaradi šibkih sil pa se pri razpadu beta rodi par elektron-antinevtrino ali pozitron-nevtrino. Kot je bilo omenjeno v uvodu, je tvorba para delec-antidelec ekvivalentna trku delca v tem smislu, da imata oba procesa enak matrični element.

Ker šibkega potenciala ne poznamo iz vsakdanjega izkustva, nam ne pomaga klasična analogija, temveč moramo poskusiti s primernim nastavkom.

Že pri študiju jedrskih sil smo izpeljali najsplošnejšo obliko statičnega potenciala, ki je odvisen le od razdalje in smeri zveznice med delcema ter od njunih spinov. Poskusimo, če ustreza tak nastavek tudi za šibke sile:

$$V = V_1(r) + V_2(r)\vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2) + V_3(r)[3\vec{r}\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{r}\vec{\sigma}(2)/r^2 - \vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2)] + \\ + \{V_4(r) + V_5(r)\vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2) + V_6(r)[3\vec{r}\vec{\sigma}(1) \cdot \vec{r}\vec{\sigma}(2)/r^2 - \vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2)]\}P_r$$

Pri tem je r razdalja med delcema, operator P_r zamenja delcema lego, $\vec{\sigma}$ pa je Paulijev operator za spin ($\vec{\sigma} = 2\vec{s}$)

$$\begin{array}{lll} \sigma_x \uparrow = \downarrow & \sigma_y \uparrow = i \uparrow & \sigma_z \uparrow = + \uparrow \\ \sigma_x \downarrow = \uparrow & \sigma_y \downarrow = -i \uparrow & \sigma_z \downarrow = - \downarrow \end{array}$$

Izkazalo se je, da ima šibki potencial zelo kratek doseg, dosti krajši kot jedrske sile oz. kot je dimenzija jedra. Zato smemo vzeti za $V(r)$ kar kontaktni potencial (npr. funkcijo delta). V tem primeru operator P_r nič ne napravi, ker se zamenjava delcev ne pozna, ko se delca dotikata. Torej je $P_r = 1$ in zadnje tri člene lahko pridružimo prvim trem. Pri kontaktnem potencialu smemo tretji člen (necentralni potencial) izpustiti, ker ima zveznica pri dotiku delcev nedoločeno smer in je povprečni prispevek nevtralnega potenciala enak nič.

K zapisanemu potencialu moramo dodati še operator, ki poskrbi za spremembo notranjega stanja nukleona in leptona hkrati. S tem formalno zapišemo dejanski potek razpada beta. Za nukleon uporabimo kar izospinski operator t , za lepton pa vpeljemo ustrezen operator t^l :

$$\begin{array}{ll} \text{Beta minus:} & t_+ n = p \quad t_-^l \nu = e^- \\ & t_+ p = 0 \quad t_-^l e^- = 0 \\ \text{Beta plus:} & t_- n = 0 \quad t_+^l \nu = 0 \\ & t_- p = n \quad t_+^l e^- = \nu \end{array}$$

Oblika šibkega potenciala je potem takšna:

$$V_\beta = \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)[G + G'\vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2)]\underbrace{t_+(1)t_-^l(2)}_{\beta^-} + \underbrace{t_-(1)t_+^l(2)}_{\beta^+}$$

Šibki potencial smo zapisali nerelativistično. V relativističnem izrazu pride zraven še nekaj členov, vendar je zato potrebno že precejšnje znanje kvantne mehanike. Za vse primere, s katerimi se ukvarjamo tukaj, zadošča nerelativistični izraz.

Šibki potencial ima dva dela. Prvega (člen z G) imenujemo *Fermijeva interakcija*, drugega (člen z G') pa *Gamow-Tellerjeva interakcija*. Pri Fermijevi interakciji se niti nukleonu niti leptonu ne spremeni spin, saj ni nobenega spinskega operatorja. Pri ujetju elektrona ima nastali nevtrino isto smer

spina, kot jo je imel prej elektron. Tudi pri razpadu beta je sprememba spina enaka nič. To pomeni, da ima rojeni par elektron-antinevtrino spinsko vrtilno količino sklopljeno v rezultanto nič, zato da ne odnese nič spinske vrtilne količine. Nasprotno pa je pri Gamow-Tellerjevi interakciji zaradi operatorjev $\vec{\sigma}$ možen preklon spina. Elektron in antinevtrino odletita s paralelnim spinom ($S = 1$), o čemer se lahko prepričamo s trikotniškim pravilom:

$$\begin{array}{lll} \langle e^- + \bar{\nu} & | \vec{\sigma} \text{ (lepton)} & \text{leptonski vakuum} \rangle \\ S = 1 & \lambda = 1 & S = 0 \\ \text{(le to je)} & \text{(vektorski} & \\ \text{možno)} & \text{operator)} & \end{array}$$

Matrični element za razpad beta

Matrični element za nek proces izračunamo tako, da postavimo v ket začetno valovno funkcijo sistema, v bra postavimo končno valovno funkcijo sistema, v sredo pa Hamiltonov operator. Hamiltonov operator vsebuje več členov, ker mora opisati trk delca, antidelca, rojstvo in absorpcijo para delec-antidelec itd. V naravi pa imamo posebno simetrijo Hamiltonovega operatorja glede na delce in antidelce: matrični element za proces, pri katerem se rodi antidelec, je isti kot za proces, pri katerem se absorbira delec. Da sta procesa ekvivalentna, mora seveda imeti absorbirani delec obratno smer gibalne in vrtilne količine kot rojeni antidelec (sistemu se namreč enako spremeni gibalna količina, če antidelec odnese \vec{p} ali da delec prinese $-\vec{p}$). Zaradi opisane simetrije lahko poenostavimo račun matričnih elementov tako, da zapišemo v Hamiltonovem operatorju le potencial med delci in vstavimo v bra in ket le valovne funkcije (ekvivalentnih) delcev. Ker je absorpciji antidelca ekvivalentno rojstvo delca in obratno, velja pravilo, da postavimo prirejeno valovno funkcijo začetnih antidelcev v bra ter končnih antidelcev v ket. Izraz prirejena valovna funkcija antidelca pomeni valovno funkcijo ekvivalentnega delca (ki ima obratno smer gibalne in vrtilne količine). To prirejenost bomo označili z vijugo:

- **bra:** delci ψ_{kon}^* , antidelci $\tilde{\psi}_{\text{zač}}^*$
- **ket:** delci $\psi_{\text{zač}}$, antidelci $\tilde{\psi}_{\text{kon}}$

Izračunajmo sedaj matrični element za razpad beta minus. Šibki potencial smo v prejšnjem poglavju že zapisali kot potencial med delci, zato bomo uporabili zgornje pravilo. Valovno funkcijo nukleona bomo pisali s ψ , leptonovo pa s ϕ .

$$M_{\beta}^{-} = \mathcal{V} \int \psi_2^*(\vec{r}_1) \phi_2^*(\vec{r}_2) \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) [G + G' \vec{\sigma}(1) \vec{\sigma}(2)]$$

$$\begin{aligned}
& [t_+(1)t_-^l(2) + t_-(1)t_+^l(2)]\psi_1(\vec{r}_1)\tilde{\phi}_1(\vec{r}_2)d^3r_1d^3r_2 \\
= & \mathcal{V} \int \psi_2^*(\vec{r})\phi_2^*(\vec{r})[G + G'\vec{\sigma}(1)\vec{\sigma}(2)]t_+(1)t_-^l(2)\psi_1(\vec{r})\tilde{\phi}_1(\vec{r})d^3r
\end{aligned}$$

V drugem izrazu je zapisan le tisti izospinski člen, ki povzroči razpad beta minus. Valovne funkcije ψ in ϕ so tudi funkcije spina in izospina, česar nismo posebej označili.

Za leptonske valovne funkcije bomo vzeli kar ravne valove. Za nevtrino to ustreza, za elektron pa ne. V elektrostatskem polju atoma se elektron ne giblje kot raven val, temveč bolj komplicirano. Ker pa je približek z ravnim valom precej dober, lahko korigiramo rezultat naknadno s Fermijevo funkcijo $F_{\pm}(Z, E)$.

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{u_1}{\sqrt{\mathcal{V}}}e^{i\vec{k}_\nu\vec{r}}\boxed{\nu}, & \tilde{\phi}_1 &= \frac{\tilde{u}_1}{\sqrt{\mathcal{V}}}e^{-i\vec{k}_\nu\vec{r}}\boxed{\nu} \\
\phi_2 &= \frac{u_2}{\sqrt{\mathcal{V}}}e^{i\vec{k}_e\vec{r}}\boxed{e^-}
\end{aligned}$$

Pri tem sta u_1 in u_2 spinska dela valovnih funkcij, $\boxed{\nu}$ in $\boxed{e^-}$ pa sta notranja dela valovnih funkcij in velja $\langle \boxed{e^-} | t_-^l | \boxed{\nu} \rangle = \langle \boxed{e^-} | \boxed{e^-} \rangle = 1$. Leptona odneseta skupaj gibalno količino $\vec{k}_e + \vec{k}_\nu = \vec{k}$, nasprotno gibalno količino $-\vec{k}$ pa dobi jedro kot odzivni sunek,

Matrični element ima potem obliko:

$$M_\beta = \int \psi_2^*(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}[G\langle u_2 | \tilde{u}_2 \rangle + G'\langle u_2 | \vec{\sigma} | \tilde{u}_1 \rangle \vec{\sigma}]t_+\psi_1(\vec{r})dV$$

Vrednost matričnega elementa M_β je odvisna od smeri elektronovega in antinevtronovega spina (u_2 in \tilde{u}_1). Vsak od njiju lahko gleda gor ali dol in moramo upoštevati vse štiri možnosti za končno stanje. Vpeljimo tako imenovani Fermijev in Gamow-Tellerjev matrični element

$$\begin{aligned}
alnM_F &= \int \psi_2^*(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}t_+\psi_1(\vec{r})dV \\
\vec{M}_{GT} &= \int \psi_2^*(\vec{r})e^{-i\vec{k}\vec{r}}\vec{\sigma}t_+\psi_1(\vec{r})dV \\
M_{GT} &= \sqrt{|M_{GTx}|^2 + |M_{GTy}|^2 + |M_{GTz}|^2}
\end{aligned}$$

Vrednost matričnega elementa M_β je potem za vse štiri kombinacije leptonskih spinov naslednja:

e	$\bar{\nu}$	$\langle u_2 \tilde{u}_1 \rangle$	$\langle u_2 \sigma_x \tilde{u}_1 \rangle$	$\langle u_2 \sigma_y \tilde{u}_1 \rangle$	$\langle u_2 \sigma_z \tilde{u}_1 \rangle$	M_β
\uparrow	\uparrow	0	1	-i	0	$G'(M_{GTx} - iM_{GTy})$
\uparrow	\downarrow	1	0	0	1	$GM_F + G'M_{GTz}$
\downarrow	\uparrow	1	0	0	-1	$GM_F - G'M_{GTz}$
\downarrow	\downarrow	0	1	i	0	$G'(M_{GTx} + iM_{GTy})$

Ker se da z dobrim analizatorjem ločiti, s kakšnim spinom nastaneta lep-
tona, moramo za te štiri dogodke sešteti verjetnosti (ne amplitude). Skupna
verjetnost je izražena z

$$\begin{aligned}
M_{\beta\text{ef}}^2 &= \frac{1}{2}(|M_{\uparrow\downarrow}|^2 + |M_{\downarrow\uparrow}|^2 + |M_{\uparrow\uparrow}|^2 + |M_{\downarrow\downarrow}|^2) \\
&= \frac{1}{2}(G^2|M_F|^2 + 2GG'|M_F||M_{GTz}|\cos\gamma + G'^2|M_{GTz}|^2 \\
&\quad + G^2|M_F|^2 - 2GG'|M_F||M_{GTz}|\cos\gamma + G'^2|M_{GTz}|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}G'^2(|M_{GTx}|^2 + 2|M_{GTx}||M_{GTy}|\cos\delta + |M_{GTy}|^2 \\
&\quad \quad + |M_{GTx}|^2 - 2|M_{GTx}||M_{GTy}|\cos\delta + |M_{GTy}|^2)
\end{aligned}$$

$$M_{\beta\text{ef}}^2 = G^2|M_F|^2 + G'^2|M_{GT}|^2$$

Mešani členi so se krajšali. γ je fazni kot med M_F in M_{GTz} (ki smeta biti kompleksna), δ pa je fazni kot med M_{GTx} in iM_{GTy} . Faktor $\frac{1}{2}$ na čelu pride od tega, ker ima antinevtrino le eno možno smer spina, mi pa smo šteli obe. Nevtrino ima spin vedno v nasprotni smeri gibanja (levi vijak), antinevtrino pa v smeri gibanja (desni vijak). Glede na os z moramo sicer upoštevati obe možnosti (spin \uparrow in spin \downarrow), ker antinevtrini letijo v vse smeri (gor in dol in počez). Toda število dovoljenih končnih stanj je dvakrat manjše (glede na smer gibanja je le ena možnost).

Reducirani razpolovni čas po tem zapišemo

$$ft_{1/2} = \frac{(6921 \text{ eV fm}^3/G)^2}{M_F^2(G'/G)^2 M_{GT}^2} \text{ sekund}$$

Konstanti G in G' najbolje določimo iz takih jeder, kjer se da M dobro izračunati in $ft_{1/2}$ dobro izmeriti. Ker imamo dve neznanki, rabimo vsaj dve jedri. Najnatančnejši rezultat so dobili iz

$$\begin{aligned}
^{14}\text{O} \quad M_F &= \sqrt{2}, & M_{GT} &= 0, & ft_{1/2} &= 3066 \text{ s} \\
\text{n} \quad M_F &= 1, & M_{GT} &= \sqrt{3}, & ft_{1/2} &= 1187 \text{ s} .
\end{aligned}$$

Iz tega sledi $G = 88,4 \text{ eV fm}^3$ $G'/G = 1,19$ ter

$$ft_{1/2} = 6132 \text{ s} / (M_F^2 + 1,4M_{GT}^2) .$$

Novejša vrednost je $G'/G = 1,270$ in $(G'/G) = 1,61$

Meritve so pokazale, da sta jakost Fermijevega šibkega potenciala G ter jakost Gamow-Tellerjevega šibkega potenciala G' isti za vsa jedra. Torej sta G in G' osnovni konstanti v istem smislu kot npr. osnovni naboj.

Primerjajmo sedaj jakost raznih sil v naravi:

	jedrska	elektromag.	šibka	gravitacijska
$\int V d^3r$	1440 MeV fm ³	∞	88,4 eV fm ³	∞
$V \cdot r$	$V_0 e^{-\kappa r} / \kappa =$ 57 MeV fm	$e_0^2 / 4\pi\epsilon_0 =$ 1,44 MeV fm	?	$km_{\text{prot}}^2 =$ $1,16 \cdot 10^{-36}$ MeV fm
$V \cdot r / \hbar c$	0,3	1/137		$5,9 \cdot 10^{-39}$

Jakost je težko primerjati direktno, ker imajo sile različni doseg. Po volumskem integralu je šibki potencial za faktor $0,7 \cdot 10^{-7}$ šibkejši od jedrskega. Ker je presek za reakcije sorazmeren s kvadratom matričnega elementa, bo presek za reakcije s šibko silo 10^{14} krat manjši od jedrskih reakcij (npr. Presek za $\bar{\nu} + p \rightarrow e^+ + n$ je 10^{-19} bn). Enostavno je tudi primerjati gravitacijsko silo z elektrostatsko, ker imata enako obliko; za protone je faktor 10^{-36} .

Če nas zanima le jakost sil v bližini (znotraj dosega), je ranglista naslednja: jedrska, elektromagnetna, (šibka), gravitacijska. Kadar pa je važen tudi doseg — pri velikem številu delcev — prevladata elektromagnetna in gravitacijska. V atomskem svetu jedrske sile več ne čutimo zaradi njenega kratkega dosega, važna je le elektromagnetna (pri tem je magnetna za faktor v/c šibkejša). V astronomskem svetu pa prevlada celo gravitacijska sila nad elektromagnetno; električna sila se zaradi + in – nabojev v povprečju izravna, medtem ko je gravitacijska sila vseskozi aditivna in pri astronomskem številu delcev prevlada. Zanimivo je, da je tudi magnetna sila v velikih sistemih lahko pomembnejša od električne (elektromotorji, magnetna polja v vesolju), ker je lažje nakopičiti same paralelne tokove kot pa same istoimenske naboje.

4.4.4 Multipolni razvoj in izbirna pravila

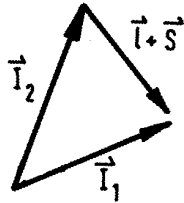
Matrični element za razpad beta lahko znatno poenostavimo, če $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ razvijemo v vrsto: $e^{-i\vec{k}\vec{r}} = 1 - i\vec{k}\vec{r} - \frac{1}{2}(\vec{k}\vec{r})^2 + \dots$ Čisto analogen multipolni razvoj smo napravili pri razpadu gama; tudi tam elektromagnetno polje fotona $e^{-i\vec{k}\vec{r}}$ razvijemo v vrsto. Vrsta dobro konvergira, ker je $kr \sim 10^{-2}$ ali 10^{-3} ($kr = (E/\hbar c)r \sim 1 \text{ MeV} \cdot 2 \text{ fm} / 200 \text{ MeV fm} \sim 10^{-2}$). Zato smemo v vrsti vzeti samo najnižji člen, ki ga še dopuščajo izbirna pravila. Če da že prvi člen (1) od 0 različen prispevek, pravimo, da je prehod dovoljen. Kadar pa moramo vzeti člen z $(kr)^l$, imenujemo prehod l -krat prepovedan.

Namesto izraza „multipolni red” uporabljamo pri razpadu beta izraz „red prepovedanosti”.

l -krat prepovedani člen $(kr)^l$ ima kotno odvisnost v obliki krogelne funkcije $Y_l(\theta, \phi)$. Ker je to pravzaprav valovna funkcija leptonskega para elektron-antinevtrino, sledi, da leptona odneseta skupaj tirno vrtilno količino l . Videli smo že, da leptona odneseta poleg tega še spinsko vrtilno količino, in sicer pri Fermijevem prehodu 0 pri Gamow-Tellerjevem pa 1. Celotna vrtilna količina, ki jo odneseta leptona, je torej:

$$\begin{aligned} \text{prehod } F: \quad \Delta I &= l \\ \text{prehod } GT: \quad \Delta I &= l \text{ ali } l \pm 1 \end{aligned}$$

Zaradi ohranitve vrtilne količine se za ravno toliko spremeni vrtilna količina jedra. Pri tem moramo seveda vrtilne količine seštevati vektorsko. Sprememba parnosti je odvisna le od tirne vrtilne količine l . Če je l sod, odneseta leptona pozitivno parnost (parnost jedra se ne spremeni), če je l lih, pa odneseta leptona negativno parnost (parnost jedra se spremeni).



Slika 4.25: Izbirno pravilo za red prepovedanosti l in tip razpada S

Napravimo si pregledno tabelo za tip in red prepovedanosti razpada beta pri danih vrtilnih količinah začetnega in končnega jedra. Pri tem bomo upoštevali, da se vrtilne količine vektorsko seštevajo in vzeli bomo vedno le člen z najnižjim možnim redom prepovedanosti.

ΔI	$P_1 P_2 = +1$	$P_1 P_2 = -1$
$0 \rightarrow 0$	FO	GT1
0	FO, GTO	F1, GT1
1	GTO	F1, GT1
2	F2, GT2	GT1
3	GT2	F3, GT3
4	F4, GT4	GT3

Če ugotovimo eksperimentalno, kakšen je tip in red prepovedanosti danega razpada, nam torej izbirna pravila omogočajo določiti neznano vrtilno količino začetnega ali končnega jedra. Eno od njiju moramo seveda poznati.

Določanje tipa in reda prepovedanosti pri razpadu beta

a) **Reducirani razpolovni čas** je močno odvisen od reda prepovedanosti, saj za vsak naslednji red pade matrični element za faktor 100–1000. Reducirani razpolovni časi se torej za zaporedne rede prepovedanosti razlikujejo za faktor $10^4 - 10^6$. Zato že iz grobega reda velikosti $ft_{1/2}$ ugotovimo red prepovedanosti razpada beta. Zmotiti se utegnemo kvečjemu za en red, če izmerjeni $ft_{1/2}$ ne leži na sredi tipičnega intervala, temveč na robu. Tipični intervali za $ft_{1/2}$ so naslednji:

$l = 0$	superdovoljen	$ft_{1/2} = 10^3 - 10^4$ s
$l = 0$	dovoljen	$10^5 - 10^8$
$l = 1$	$1 \times$ prepovedan	$10^7 - 10^{12}$
$l = 2$	$2 \times$ prepovedan	$10^{11} - 10^{16}$
$l = 3$	$3 \times$ prepovedan	$10^{14} - 10^{20}$
$l = 4$	$4 \times$ prepovedan	$10^{18} - 10^{25}$

Superdovoljeni so prehodi med dvema zrcalnima jedroma oziroma med člani istega izobarnega multiplleta. Takrat imata začetno in končno stanje jedra isto prostorsko-spinško valovno funkcijo, le notranje stanje se spremeni. En nevtron se spremeni v proton (ali obratno), ne da bi spremenil tir. Zato je v matričnem elementu M_β prekrivanje ψ_1 in ψ_2 idealno, integrand je zelo velik. Pri navadnih dovoljenih prehodih pa se spremeni celotna valovna funkcija jedra, vsi nukleoni nekoliko spremenijo svoje tire in je prekrivanje med ψ_1 in ψ_2 slabo za vse nukleone. Pri prepovedanih prehodih se matrični element že dodatno zmanjša za faktor $(kr)^l \ll 1$.

Pri tej metodi moramo izmeriti samo razpolovni čas $t_{1/2}$ in maksimalno energijo elektronov E_0 , iz katere izračunamo (oz. poiščemo v tabeli) Fermijevo funkcijo f .

b) **Oblika spektra.** Pri dovoljenih prehodih je matrični element

$$M_F = \int \psi_2^* t_+ \psi_1 dV$$

$$\vec{M}_{GT} = \int \psi_2^* \vec{\sigma} t_+ \psi_1 dV$$

Matrični element je torej neodvisen od energije leptonov. Oblika spektra je zgolj statistična, kot smo jo izračunali v enem od prejšnjih poglavij. Pri prepovedanih spektrih pa je oblika spektra lahko nekoliko spremenjena, ker je tudi matrični element odvisen od energije elektrona, ne samo fazni prostor. Pri enkrat prepovedanem prehodu je npr. $M_F = \int \psi_2 \cdot (i\vec{k}\vec{r}) \cdot t_+ \psi_1 dV$, velikost k pa je odvisna od tega, kako si leptona med seboj porazdelita energijo. Pravilna relativistična izpeljava da pri prepovedanih prehodih tudi

člene, ki niso odvisni od energije elektrona. Vse člene moramo povprečiti po vseh smereh k . Zato imamo včasih tudi pri prepovedanih prehodih dovoljeno (= statistično) obliko spektra. Včasih pa je oblika spektra tipična za določen tip in red prepovedanosti prehoda in določimo iz nje tip in red prepovedanosti.

c) Ujetje elektrona. Razpadu β^+ konkurira ujetje elektrona. V bistvu sta to ista pojava; pri ujetju elektrona se spremeni v nevtrino elektron iz lastnega atoma, pri razpadu β^+ pa elektron iz morja negativnih energij. Verjetnost za ujetje elektrona je odvisna od:
valovne funkcije elektrona,
sproščene energije,
sproščene vrtilne količine (= tipa in reda prepovedanosti prehoda),
matričnega elementa.

Edino matrični element vsebuje podrobne lastnosti jedra. Ker je matrični element isti za ujetje elektrona kot za razpad β^+ , se v razmerju krajša. Kvocijent $\frac{w_e}{w_\beta}(Z, E, \text{tip}, l)$ je torej odvisen le od lastnosti atoma (valovne funkcije elektrona), ne pa od jedra. Račun je v principu enostaven, vendar zamuden; sodi v atomsko fiziko. Vrednost kvocijenta so že izračunali za razne energije, vrste atoma (Z) in rede prepovedanosti ter je na razpolago v tabelah. Če torej izmerimo razmerje w_e/w_β in razpadno energijo E , lahko ocenimo red prepovedanosti.

Verjetnost za ujetje elektrona je razmeroma večja pri težjih jedrih, ker je tam gostota elektronov na mestu jedra večja. Ker pada „radij“ elektrona v lupini K približno kot $1/Z$, raste gostota elektronov na mestu jedra in s tem verjetnost za ujetje elektrona z Z^3

Kvocijent w_e/w_β pada z rastočo razpadno energijo. To je tipično za vse procese. Če je na razpolago malo energije, je fazni prostor največji, če odleti en sam delec; ved delcev bi dobilo premajhen delež energije in s tem premajhen fazni prostor. Toda fazni prostor narašča s tem višjo potenco energije, čim več delcev odleti. Od neke energije naprej prevlada proces z 2,3, ... delci.

Za ilustracijo izračunajmo verjetnost za ujetje elektrona za dovoljen Fermijev prehod. Računali bomo približno, za valovno funkcijo elektrona bomo vzeli kar tako kot jo ima vodik (le da je naboj jedra Z). Za nevtrino pa bomo vzeli ravni val.

$$\langle 2|H|1\rangle = G \int \int \psi_2^2(\vec{r}_1) \frac{u_2}{\sqrt{\mathcal{V}}} e^{i\vec{k}_\nu \vec{r}_2} [\nu] \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) t_- t_+ \\ \psi_1(\vec{r}_1) \frac{e^{-r_2/r_e}}{\sqrt{\pi r_e^3}} u_1 [e] d^3 r_1 d^3 r_2$$

Pri tem je „radij elektronskega tira” $r_e = (137/Z)(\hbar/m_e c)$. Zaradi kontaktnega potenciala (funkcije δ) lahko eno integracijo izvršimo takoj. Obe eksponentni funkciji razvijemo v vrsto in pri dovoljenem prehodu obdržimo le prvi člen 1. Pri Fermijevem prehodu je spin nevtrina (u_2) isti kot spin elektrona (u_1) ter velja $\langle u_2 | u_1 \rangle = 1$. Prav tako je $\langle \bar{\nu} | t_+^l | e \rangle = 1$. Torej velja

$$\langle 2 | H | 1 \rangle = G \int \psi_2^* t_- \psi_1 d^3 r / \sqrt{\mathcal{V} \pi r_e^3} = M_\beta / \sqrt{\mathcal{V} \pi r_e^3}$$

Kvocien verjetnosti znaša potem:

$$\frac{w_e}{w_\beta} = \frac{(2\pi\hbar)(M_\beta^2/\mathcal{V}\pi r_e^3)(\mathcal{V} 4\pi E_\nu^2 dE_\nu / 8\pi^3 \hbar^3 c^3 dE_\nu)}{(m^5 c^4 / 2\pi^3 \hbar^7) f M_\beta^2}$$

$$\frac{w_e}{w_\beta} = \frac{2\pi}{m^2 c^4} \left(\frac{Z}{137} \right)^3 \frac{E_\nu^2}{f}$$

Ker je Fermijeva funkcija f sorazmerna z $E^{3,5} - E^5$, relativna verjetnost za ujetje elektrona res pada z energijo. Podoben račun za prepovedane prehode bi pokazal, da je relativna verjetnost za ujetje elektrona tudi močno odvisna od reda prepovedanosti.

d) Kotne korelacije (npr. med elektronom ter žarkom gama, ki sledi razpadu beta). Podobno kot pri razpadu gama pove tudi tu kotna porazdelitev nekaj o kotnem delu leptonske valovne funkcije, torej o tirni vrtilni količini leptonov. Situacija je tu težja, ker odletita dva leptona hkrati in se kotna porazdelitev zabriše. Pomaga nam lahko, če hkrati merimo še polarizacije.

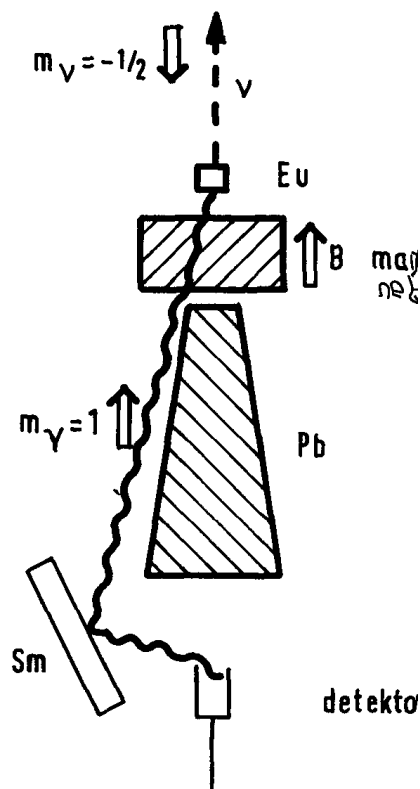
4.4.5 Vijačnost nevtrina; neohranitev parnosti

Ker sta nevtrino in antinevtrino oba nevtralna, brez mase in magnetnega momenta, se človek vpraša, po čem se sploh razlikujeta. Poskusi so pokazali, da se razlikujeta po vijačnosti. Vijačnost je definirana kot projekcija smeri spina na smer gibanja $h = \vec{\sigma} \vec{p} / p$. V naravi najdemo samo levosučne nevtrine ($h = -1$) in desnusučne antinevtrine ($h = +1$). Medtem ko ima spin elektrona lahko poljubno smer v prostoru, ima spin nevtrina samo eno možno smer — obratno smer gibanja. Opisali bomo dve vrsti meritev, s katerimi so ugotovili vijačnost nevtrina in antinevtrina.

a) Razpad $^{152}\text{Eu}^*$

$^{152}\text{Eu}^*$ razpada z ujetjem elektrona iz lupine K . Nastali vzbujeni ^{152}Sm gre potem v osnovno stanje z razpadom gama. $^{152}\text{Eu}^*$ in ^{152}Sm (osnovno stanje) imata oba $I = 0$.

Da ugotovimo vijačnost nevtrina, mu moramo določiti smer spina in smer gibanja. Taka meritev je seveda na nevtrinu neizvedljiva na direkten način. Uporabili so trik. Pri spretno sestavljenem poskusu so merili le lastnosti fotona in z ohranitvenimi zakoni sklepali na lastnosti nevtrina.



Slika 4.26: Poskus, s katerim so izmerili vijačnost nevtrina

Smer gibanja nevtrina so ugotovili tako, da so merili resonančno sipanje fotonov na ploščici iz samarija. Pri resonančnem sipanju se foton najprej absorbira v ^{152}Sm in ga vzbudi v prvo vzbujeno stanje, nato pa se spet izseva. Za resonančno sipanje potrebuje foton nekoliko večjo energijo, kot je razlika med osnovnim in vzbujenim stanjem ^{152}Sm , ker mora jedru podeliti še odzivni sunek. Če odleti nevtrino na sliki navzgor, odleti nastalo jedro $^{152}\text{Sm}^*$ (izvor fotona) navzdol. Zaradi Dopplerjevega efekta ima foton ravno prav povečano energijo, da se lahko resonančno siplje. Če pa odleti nevtrino navzdol ali počez, ima tisti nastali foton, ki gre proti samarijevi ploščici, premajhno energijo za resonančno sipanje. Ker je presek za resonančno sipanje mnogo večji kot za navadno sipanje, pride v detektor večina

fotonov iz izvorov (^{152}Sm), ki jih je nevtrino odrinil navzdol. Na ta način prepoznamo in izberemo dogodke, pri katerih je odletel nevtrino navzgor.

Da določimo nevtrinu še *orientacijo spina*, analiziramo sučnost fotonov. Za analizator vzamemo železomagnet. Sipanje fotonov na elektronih v železu je odvisno od medsebojne orientacije spina fotona ter spinov elektronov. Ker je nekaj elektronov v železu orientiranih v smeri magnetnega polja, se fotoni s smerjo spina obratno kot \vec{B} močneje sipljejo. Magnet zato prepušča v glavnem le fotone z isto smerjo cirkularne polarizacije kot je \vec{B} . Poskus je pokazal, da za desnosučne fotone (\vec{B} navzdol) ne dobimo resonančnega sipanja, za levosučne fotone (\vec{B} navzgor) pa ga dobimo. Kadar leti nevtrino navzgor, mu sledi torej levosučni foton. Kakšna je potem smer nevtrinovega spina? Ugotovimo jo iz ohranitve z -komponente vrtilne količine:

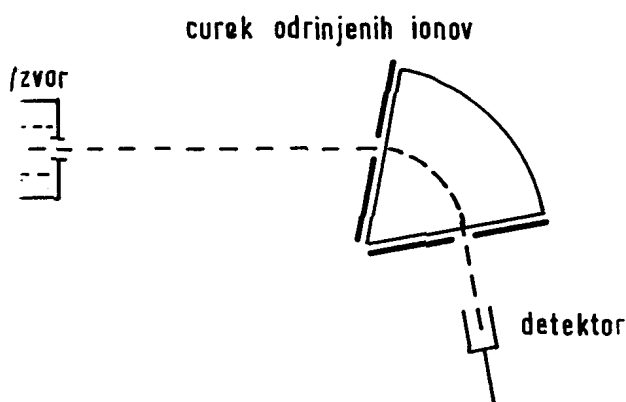
$$\begin{array}{rcccl} \text{začetno stanje:} & & \text{končno stanje:} & & \\ \pm\frac{1}{2} & = & +1 & & \pm\frac{1}{2} \\ \text{elektron} & & \text{foton} & & \text{nevtrino} \end{array}$$

Pri tem smo upoštevali, da imata začetno in končno jedro $I = 0$. Enačba je izpolnjena le, če se je absorbiral elektron s tretjo komponento spina $+1$ in nastal nevtrino z $m = -\frac{1}{2}$. Nevtrino, ki leti navzgor in ima $m = -\frac{1}{2}$, pa je levosučen. V okviru natančnosti meritve so vsi nastali nevtrini levosučni, ker pri smeri magnetnega polja navzdol ni bilo nobenih resonančno sipanih fotonov.

b) Vijačnost elektrona in kotna korelacija $e-\nu$.

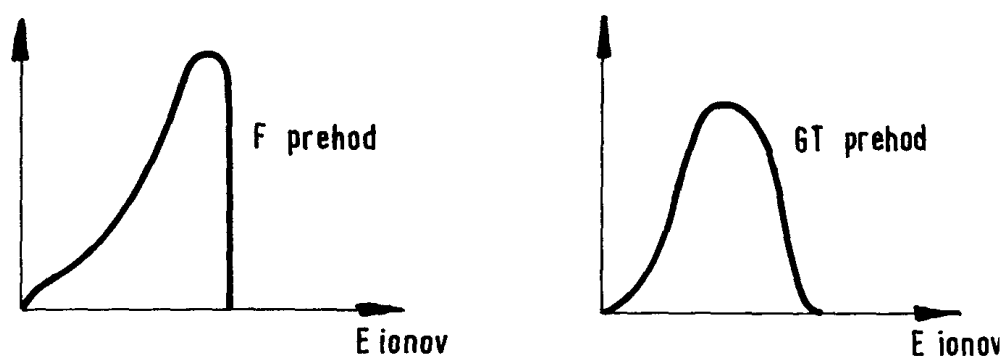
Vijačnost elektronov lahko izmerimo s sipanjem elektronov na orientiranih elektronih (npr. v železomagnetu). Sipanje je močnejše, če imata elektrona nasprotno smer spinov. Če štejemo sipane elektrone dvakrat, enkrat z eno drugič z drugo smerjo polja, lahko iz razmerja pogostosti štetja ugotovimo, koliko imamo levosučnih in koliko desnosučnih elektronov. Meritve so pokazale, da nastanejo pri razpadu β^- pretežno levosučni elektroni, pri razpadu β^+ pa pretežno desnosučni pozitroni. Povprečna vijačnost elektronov je vedno $h = -v/c$, pri pozitronih pa $h = +v/c$. To je ravno maksimalna povprečna vijačnost, ki jo dopušča naš nastavek za šibki potencial, če ga dopolnimo do relativistično invariantne oblike.

Kotno korelacijo med smerjo elektrona ter nevtrina merimo posredno, tako da posnamemo energijski spekter odrinjenih jeder. Meritev je težavna, ker so odzivne energije komaj nekaj eV. V meglični celici je sled jedra prekratka za točno meritev. Merili so tako, da so curek odrinjenih jeder analizirali z magnetnim spektrometrom. Trden izvor ne pride v poštev, ker bi jedro izgubilo energijo že v samem izvoru. Plinast izvor mora biti zelo redek, da jedra ne izgubljajo energije in da se ne kviri vakuum v spektrometru.



Slika 4.27: Merjenje energijskega spektra odrinjenih jeter

Zato so pri meritvi intenzitete zelo šibke.

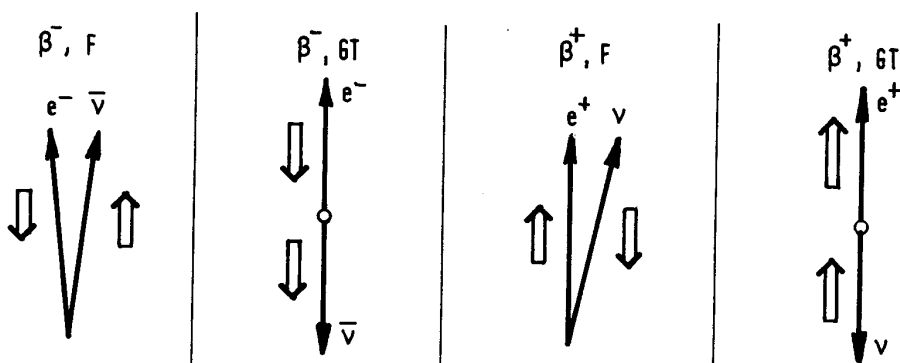


Slika 4.28: Energijski spekter odrinjenih jeter pri Fermijevem prehodu (levo) in pri Gamow-Tellerjevem prehodu (desno)

Meritve so pokazale, da dobi pri Fermijevem razpadu večina nastalih jeter maksimalni odriv. Iz tega sklepamo, da odletita elektron in antinevtrino (oz. pozitron in nevtrino) pretežno v isto smer. Njuni gibalni količini se tako seštejeta in dobi jedro maksimalni odriv v obratno smer. Pri Gamow-Tellerjevem razpadu pa dobijo jedra večinoma majhen odriv. Torej odletita leptona pretežno v nasprotnih smereh.

Obe meritvi skupaj (vijačnost elektronov in korelacija elektron-nevtrino) določata vijačnost nevtrina. Upoštevati moramo, da nastaneta pri Fermi-

jevem prehodu leptona z antiparalelnim spinom, pri GT prehodu pa leptona s paralelnim spinom. Iz skice (slika 4.29) strani se vidi, da je nevtrino levo-sučen, antinevtrino pa desnosučen.



Slika 4.29: Iz znanih smeri gibanja obeh leptonov ter iz znane smeri elektronovega spina lahko sklepamo na smer nevtrinovega spina (smeri gibanja so označene z enojno puščico, smeri spina pa s kratko dvojno puščico)

Masa nevtrina

Če imamo v naravi same levo-sučne nevtrine, morajo imeti maso točno nič. To sledi iz relativistične invariantnosti. Če nevtrino ne bi imel mase točno nič, bi ga v dovolj hitrem inercialnem sistemu lahko prehiteli in bi se zdel desnosučen. V naravi pa najdemo v vseh inercialnih sistemih le levo-sučne nevtrine. Torej se jih ne da prehiteti, gibljejo se s svetlobno hitrostjo in imajo maso 0.

Neohranitev parnosti

Dejstvo, da imamo v naravi le levo-sučne nevtrine, ima važne posledice. Narava ni simetrična glede na inverzijo. So pojavi, katerih zrcalna slika ne eksistira. Zrcalna slika levo-sučnega nevtrina (levega vijaka) bi bil desnosučni nevtrino (desni vijak), teh pa v naravi ni. Če gledamo razpad beta v zrcalu, vidimo torej nemogoč dogodek — izvor desnosučnih nevtrinov.

Jedrske in elektromagnetne sile so invariantne glede na inverzijo. Zato je zrcalna slika nekega pojava ψ spet neki mogoči pojav $P\psi$. Obe stanji, ψ in $P\psi$, sta hkrati lastni stanji Hamiltonovega operatorja z isto lastno energijo:

$$\begin{aligned} H\psi &= E\psi \\ PH\psi &= H(P\psi) = PE\psi = E(P\psi) \end{aligned}$$

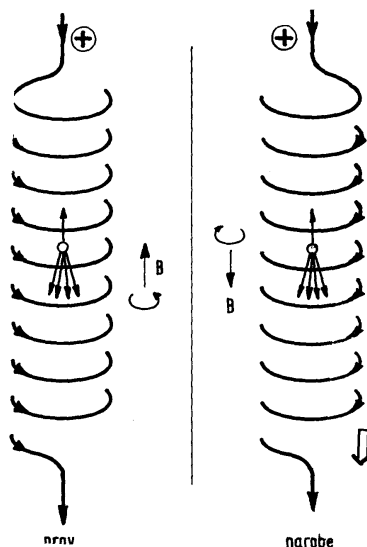
Šibke sile pa niso invariantne na inverzijo prostora, saj rodijo le leve nevtrine. Pri pojavih, v katerih nastopajo šibke sile, zrcalna slika $P\psi$ ni več lastno stanje Hamiltonovega operatorja in je ne najdemo več kot mogoč pojav.

Jedrske in elektromagnetne sile ohranjajo parnost. Če ima sistem v začetku določeno parnost, jo bo obdržal ves čas. To se vidi npr. iz Schrödingerjeve enačbe:

$$\psi(t + dt) = \psi(t) + (d\psi/dt) dt = \psi(t) + (i/\hbar) H\psi(t)dt$$

Ker ima recimo $\psi(t)$ pozitivno parnost in H pozitivno parnost, ima tudi prirastek $H\psi(t)dt$ pozitivno parnost in obdrži ψ pozitivno parnost v vseh nadaljnjih časih.

Šibki potencial pa ni invarianten na inverzijo in valovni funkciji s časom spreminja parnost. Pri razpadu beta imamo v začetku jedro z določeno parnostjo, na koncu pa nastane nevtrino, ki nima določene parnosti (vijak ni centralno simetrična tvorba).



Slika 4.30: Poskus, s katerim so pokazali, da se pri razpadu beta ne ohranja parnost. Pri razpadu jeter ^{60}Co , ki jih orientiramo z magnetnim poljem, leti večina elektronov v smeri nazaj. Eksperiment pokaže kotno porazdelitev na levi sliki, pojav na zrcalni sliki na desni pa ni mogoč.

Najprej so ugotovili pri osnovnih delcih, da se pri procesih s šibkimi silami ne ohranja parnost. Prvi poskus te vrste pri jedrih je bil napravljen s ^{60}Co .

Kobaltova jedra so orientirali z zelo močnim magnetnim poljem pri zelo nizki temperaturi ($<0,001$ K). Opazovali so kotno porazdelitev elektronov glede na smer orientacije. Meritev je pokazala, da leti večina elektronov v obratni smeri spina kobalta. V zrcalni sliki (glej sliko 4.30) bi se spin kobalta vrtel v obratno smer, elektroni pa bi leteli še vedno navzdol — torej v isto smer kot spin. To pa ni res. Če bi se ohranjala parnost, bi morali biti obe sliki pravilni — porazdelitev bi morala biti ista navzgor in navzdol — tako kot je to vedno pri porazdelitvah žarkov gama. Asimetrija porazdelitve elektronov torej pokaže, da se pri razpadu beta ne ohranja parnost.

4.5 Jedrske reakcije

4.5.1 Vrste reakcij

Jedrsko reakcijo zapišemo z izrazom $A+a\rightarrow B+b$ ali krajše $A(a,b)B$. Pri tem je A mirujoča tarča, a pa je lahek delec – projektil, ki ga dobimo iz pospeševalnika ali naravnega izvora. B in b sta delca (jedri), ki nastaneta po reakciji. Z veliko in malo črko poudarimo, da nastane običajno en težek in en lahek delec.

Za projekte vzamemo navadno lahke delce:

n , $p=^1\text{H}$, $d=^2\text{H}$, $t=^3\text{H}$, ^3He , $\alpha = ^4\text{He}$, γ .

Projektil mora namreč premagati elektrostatsko ograjo okrog jedra; to pa veliko lažje napravi lahek projektil z majhnim nabojem. Težek projektil z velikim nabojem rabi za to veliko energijo, sicer je presek za reakcijo zanemarljivo majhen.

Kljub temu so napravili precej modernih meritev ravno s težkimi ioni ($A \sim 12\text{--}20$), kadar so želeli izkoristiti posebne efekte:

- Težek projektil prinese pri dani energiji večjo gibalno količino ($p = \sqrt{2mW}$). Zato letijo reakcijski produkti bolj v smeri naprej in imajo večjo hitrost. Zadnje je važno npr. pri merjenju kratkih razpolovnih časov z dolžino življenjske poti, ki je pri večji hitrosti daljša in zato lažje merljiva.
- Težek projektil prinese pri dani energiji večjo vrtilno količino ($\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{p}$), saj sta ročica (radij projektila) in gibalna količina večji. Zato so uspeli s težkimi ioni vzbuditi stanja do $I = 30$ ali več.
- S težimi ioni lahko tvorimo jedra s presežkom protonov. Težki ioni imajo običajno $N = Z$ ter ima nastalo jedro isto razliko $N - Z$ kot jo je imela tarča. To pa pomeni za nastalo jedro presežek protonov, saj ima stabilni izobar razliko $N - Z$ večjo kot tarča. (Opomba: jedra s presežkom nevtronom nam pa nudi razcep.)
- Pri trkih najtežjih jeder (uran na uranu) pri relativističnih energijah (več GeV na nukleon) pride do novih pojavov, zanimivih za jedrsko fiziko, fiziko delcev in astrofiziko. Nastane vroče sestavljeno jedro, ki izhlapeva razne hadrone. Študirajo fazne prehode v supergosto snov in plazmo kvarkov, antikvarkov in gluonov. Iz supergoste jedrske snovi nekaj zremo o stanju jedrske snovi v nevtronskih zvezdah.

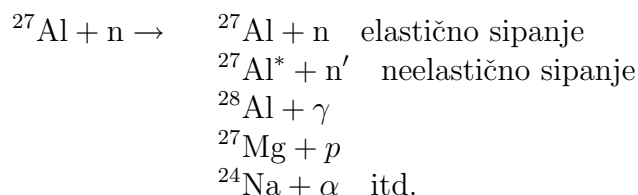
Iz podobnega razloga, kot lažje prodre v jedro lahek projektil, dobimo tudi kot produkt reakcije en lahek in en težek delec. Zaradi elektrostatske ograje

lahko pri reakciji uide iz jedra samo delec z majhnim nabojem. V poštev pridejo isti delci, kot sem jih preje naštel za projekte.

V začetnem sistemu imamo vedno dva delca. Če imamo en sam delec, imenujemo tak proces $A \rightarrow B + b$ „razpad“. Za tri delce v začetnem sistemu pa je premalo verjetno, da bi hkrati trčili skupaj.

V končnem sistemu imamo pri nižjih energijah 2 delca. Kadar je na razpolago dovolj energije, lahko nastanejo tudi 3 ali več delcev; pri nizkih energijah so take reakcije redke, pri visokih energijah pa pogoste. Zaradi enostavnosti se bomo omejili na reakcije, pri katerih nastaneta dva delca. En sam delec kot končni produkt ne more nastati, ker ne more hkrati ohraniti \vec{p} in W . En delec ima namreč tri prostostne stopnje (3 komponente \vec{p} ; W je z njimi določena: $W = p^2/2m$), zadovoljiti pa bi moral 4 enačbe (za 3 komponente \vec{p} in za W).

Pri istem projektilu in tarči lahko dobimo zelo različne končne produkte, npr.:



Glede mehanizma delimo reakcije v glavnem na dve vrsti: *direktne reakcije* in *reakcije preko vmesnega jedra*. Direktne reakcije nastanejo neposredno po vstopu projektila v jedro; trajajo toliko časa, kot je red velikosti časa preleta delcev skozi jedro:

$$t \sim 2R/v \sim 10 \text{ fm}/0,1 \cdot 3 \cdot 10^{23} \text{ fm s}^{-1} \sim 10^{-22} \text{ do } 10^{-21} \text{ s}$$

Reakcije preko vmesnega jedra pa potekajo v dveh korakih in trajajo tako dolgo, kot je življenjski čas vmesnega jedra.

Oglejmo si najznačilnejše tipe *direktnih reakcij*.

- Elastično sipanje na povprečnem jedrskem potencialu.* Valovanje, ki opisuje gibanje delca, se ukloni na istem povprečnem jedrskem potencialu, v katerem se gibljejo nukleoni pri lupinskem modelu. Na „zaslonu“ dobimo uklonsko sliko, podobno kot če bi sipali svetlobo na kroglici s spremenljivim lomnim količnikom.
- Neelastično sipanje.* Delec na poti skozi jedro enkrat ali nekajkrat trči z nukleoni v jedru, pri čemer izgubi nekaj energije.

- c) *Izbijanje (knock-out)*. Delec pri trku sune nukleon ven, sam pa obtiči v jedru. Primera: (p,n), (n,p).
- d) *Trganje (stripping)*. Devteron se na poti skozi jedro raztrga in „izgubi” nevtron (ali proton). Nevtron obtiči v jedru, proton pa nadaljuje svojo pot (ali obratno). Pri tem proton pogosto niti ne vstopi v jedro, temveč ostane zaradi elektrostatske ograje kar zunaj in potuje mimo jedra; njegov partner nevtron, ki je v devteronu precej oddaljen in slabo vezan, pa vstopi v jedro in v njem obtiči. Primeri: (d,p), (d,n), (t,p), (t,n).
- e) *Pobiranje (pick-up)* je obratna reakcija od prejšnje. Delec pri prehodu skozi jedro „ukrade” še en ali dva nukleona.

Skicirajmo še mehanizem *reakcij preko vmesnega jedra*. Če delec ne uide iz jedra po enem trku (ali po nekaj trkih), ali če v nekaj trkih ne sune ven drugega delca, obtiči v jedru zelo dolgo. Po nekaj trkih se namreč porazdeli energija med ostale nukleone v jedru, tako da nobeden nima več dovolj energije, da bi ušel iz jedra. Nukleoni tičijo 8 MeV globoko v potencialni jami in rabijo vsaj 8 MeV ekscitacije, da lahko odletijo. Vpadli delec je imel v začetku veliko energijo: $W_{\text{projektila}} + 8 \text{ MeV}$. Ko se ta energija porazdeli enakomerno na vse nukleone, nastane *vmesno jedro*, ki živi za jedrske pojme zelo dolgo: $\sim 10^{-16} \text{ s}$. Glavni razlog za tako dolgo življenje je v tem, da je treba počakati na *fluktucijo*, pri kateri pridobi en nukleon ali ena gruča spet dovolj energije za pobeg. Za dolg življenjski čas pomagajo nekoliko tudi naslednji efekti:

- a) Elektrostatska ograja pogosto zadrži delce, ki bi sicer imeli dovolj energije za odhod.
- b) Izbirna pravila prepovejo nekatere razpade vmesnega jedra
- c) Razpad gama, ki tudi lahko odnese odvišno energijo vmesnemu jedru in ga spravi v osnovno stanje, je počasen (običajno je daljši od 10^{-16} s).

Reakcije preko vmesnega jedra zapišemo $A+a \rightarrow C^* \rightarrow B+b$, ker potekajo v dveh korakih. Najprej se tvori vmesno jedro, ki potem razpada na različne načine. Reakcije preko vmesnega jedra imenujemo tudi *resonančne reakcije* ker ima presek značilno obliko resonančne krivulje.

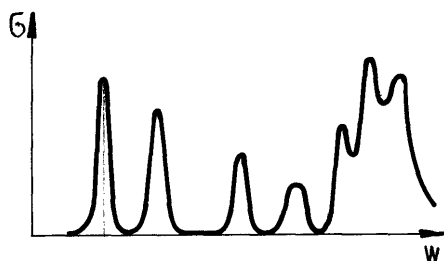
Razmejitev med direktnimi in resonančnimi reakcijami je dokaj enolična, saj nastane direktna reakcija najkasneje po nekaj trkih, medtem ko traja resonančna reakcija milijon časov preleta. Obstojajo pa tudi vmesni tipi reakcij, npr. reakcije preko kratkoživega *vhodnega stanja (doorway state)*, v katerem se energija projektila porazdeli le na nekaj nukleonov ali le na kolektivna gibanja.

4.5.2 Razlika med direktnimi in resonančnimi reakcijami

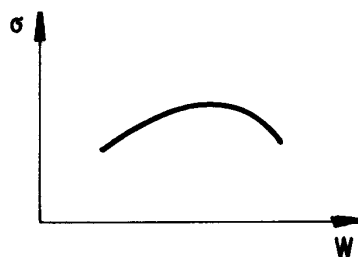
Kot posledica različnega mehanizma so med direktnimi in resonančnimi reakcijami tri zelo značilne razlike.

1. **Odvsnost preseka od energije.** Vmesno jedro ima precej natančno določeno energijo. Če bi bilo to stacionarno stanje, bi imelo ostro energijo. Zaradi končnega življenjskega časa pa ima negotovost v energiji po principu nedoločenosti

$$\Delta W \sim \hbar/\tau \sim 6,7 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}/10^{-16} \text{ s} \sim 1 \text{ eV}.$$



Slika 4.31: Presek kot funkcija energije pri reakcijah preko vmesnega jedra



Slika 4.32: Presek kot funkcija energije pri direktnih reakcijah

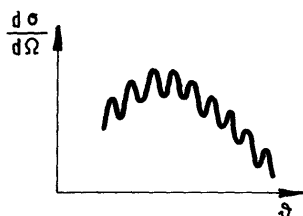
Projektil mora imeti ravno pravo energijo, da lahko nastane dano vzbujeno stanje vmesnega jedra. Projektil se sme „zmotiti“ kvečjemu za ± 1 eV. Presek za reakcijo je zato znaten samo v zelo ozkih območjih — odtod pride oblika resonančne krivulje pri reakcijah preko vmesnega jedra.

Pri direktnih reakcijah pa je negotovost v energiji ob času reakcije mnogo večja:

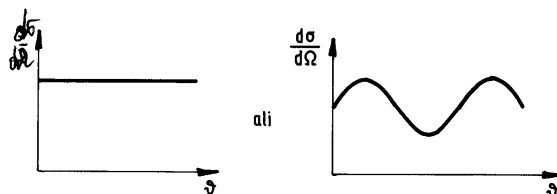
$$\Delta w \sim \hbar/\tau \sim 6,7 \cdot 10^{-22} \text{ MeV s}/10^{-22} \text{ s} \sim 1 \text{ MeV}.$$

Jedro torej ne more v kratkem času „izmeriti“ energije projektila posebno natančno. Zato si lahko mislimo, da odgovarja izid reakcije enkrat malo večji, drugič pa manjši energiji. Presek je nekakšno povprečje preko širokega energijskega intervala (reda \sim MeV). Pri direktnih reakcijah se torej presek zelo počasi spreminja z energijo, pri resonančnih pa zelo hitro.

2. **Kotna porazdelitev** kaže ravno obratne lastnosti. Pri direktnih reakcijah interferirajo med seboj valovi odhajajočega delca, ki izvirajo iz različnih mest jedra ter je zato odvisnost od kota zelo izrazita. Dobimo prave uklonske slike. Pri resonančnih reakcijah pa je kotna porazdelitev kolikor mogoče izotropna. Vmesno jedro namreč v svoji dolgi življenjski dobi pozabi, kako je nastalo. Razpad je neodvisen od tvorbe vmesnega jedra. Pozabijo se vse fazne povezave in s tem možnost interferene. Edino, česar jedro ne more pozabiti, je vrtilna količina in parnost, zato kotna porazdelitev ni vedno čisto izotropna, vendar je vedno zelo gladka.



Slika 4.33: Kotna porazdelitev pri direktnih reakcijah



Slika 4.34: Kotna porazdelitev pri reakcijah preko vmesnega jedra

3. **Razmerja med parcialnimi preseki.** Primerjajmo naslednjih 16 reakcij:

$$\left. \begin{array}{l} A + a \\ B + b \\ C + c \\ D + d \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} A + a & \alpha\% \\ B + b & \beta\% \\ C + c & \gamma\% \\ D + d & \delta\% \end{array} \right.$$

Pri dani celotni energiji nas zanima 16 različnih presekov. Kot bomo videli v naslednjem poglavju, je med presekom za neko reakcijo in za obratno reakcijo enostavna zveza. Torej imamo v splošnem 10 neodvisnih presekov. To velja za *direktne reakcije*. Pri *resonančnih reakcijah* pa je drugače. Vmesno jedro pozabi, kako je nastalo. Zato so verjetnosti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ za razne razpadne produkte vmesnega jedra neodvisne od začetnega sistema (iste za vse začetne sisteme). Med parcialnimi preseki veljajo torej naslednja razmerja:

$$\sigma_{A \rightarrow A} : \sigma_{A \rightarrow B} : \sigma_{A \rightarrow C} : \sigma_{A \rightarrow D}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma_{B \rightarrow A} : \sigma_{B \rightarrow B} : \sigma_{B \rightarrow C} : \sigma_{B \rightarrow D} \\
 &= \sigma_{C \rightarrow A} : \sigma_{C \rightarrow B} : \sigma_{C \rightarrow C} : \sigma_{C \rightarrow D} \\
 &= \sigma_{D \rightarrow A} : \sigma_{D \rightarrow B} : \sigma_{D \rightarrow C} : \sigma_{D \rightarrow D} \\
 &= \alpha : \beta : \gamma : \delta
 \end{aligned}$$

zač.	kon.			
	A+a	B+b	C+c	D+d
A+a				
B+b				
C+c				
D+d				

Slika 4.35: Tabela neodvisnih presekov pri direktnih reakcijah (vsa osenčena polja; preseki v praznih poljih pa se dajo izraziti s preseki za obratno reakcijo)

Če poznamo parcialne preseke samo za en začetni sistem, lahko vse ostale preseke izračunamo. Iz presekov $\sigma_{A \rightarrow A}$, $\sigma_{A \rightarrow B}$, $\sigma_{A \rightarrow C}$, $\sigma_{A \rightarrow D}$ dobimo preseke $\sigma_{B \rightarrow A}$, $\sigma_{C \rightarrow A}$, $\sigma_{D \rightarrow A}$ iz zveze za obratno reakcijo. Vse ostale preseke potem izračunamo iz enakosti sorazmerij. Število neodvisnih presekov je torej samo tolikšno, kolikor imamo sistemov (v našem primeru 4).

4.5.3 Splošna formula za reakcijski presek

Splošno formulo lahko izpeljemo iz izraza, ki ga da časovno odvisna teorija motenj („zlato pravilo“):

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{A \rightarrow B}|^2 \frac{dn_b}{dE_b}.$$

Matrični element za prehod $H_{A \rightarrow B}$ običajno definiramo tako, da so valovne funkcije začetnih in končnih delcev normirane v volumnu \mathcal{V} . Nas pa ne zanima verjetnost, s katero bi potekala reakcija pod takimi pogoji, temveč nas zanima presek za reakcijo. Reakcijski presek je definiran z zvezo $w = \sigma \Phi$, pri čemer je $\Phi = \rho v_a = v_a / \mathcal{V}$ in v_a je hitrost projektila. Odtod dobimo $\sigma = w \mathcal{V} / v_a$.

Izračunajmo najprej dn_b/dE_b ! Računamo strogo relativistično, da veljajo rezultati tudi za fotone in za delce s hitrostjo blizu svetlobne. Z W označimo kinetično energijo, z E pa celotno energijo (kinetično in mirovno). Vse količine se nanašajo na težiščni sistem.

$$\begin{aligned} dn_b &= \mathcal{V} 4\pi p_b^2 dp_b / (2\pi\hbar)^3 \\ E^2 &= p^2 c^2 + m^2 c^4 \\ 2E dE &= 2p dp c^2 \quad p/E = (mv/\sqrt{\dots}) / (mc^2/\sqrt{\dots}) = v/c^2 \\ dE &= v dp. \end{aligned}$$

Odtod dobimo $dn_b/dE_b = \mathcal{V} \cdot p_b^2 / 2\pi^2 \hbar^3 v_b$.

Če imata končna delca od nič različno vrtilno količino, moramo ta izraz še pomnožiti s številom možnih orientacij vrtilne količine: $(2I_B + 1)(2I_b + 1)$.

Običajno je matrični element $H_{A \rightarrow B}$ sicer odvisen od orientacije vrtilnih količin, vendar nimamo niti orientiranih tarč niti polariziranih projektilov niti ne analiziramo orientacije reakcijskih produktov. V tem primeru moramo $|H_{A \rightarrow B}|^2$ povprečiti po orientacijah začetnih delcev in sešteti po orientacijah končnih delcev. Ker pa smo število končnih orientacij že upoštevali s faktorjem $(2I_A + 1)(2I_a + 1)$, moramo $|H_{A \rightarrow B}|^2$ tudi po končnih orientacijah povprečiti in ne sešteti. Povprečni matrični element torej definiramo z

$$\overline{|H_{A \rightarrow B}|^2} = \sum_{m_A m_a m_B m_b} |H_{A \rightarrow B}|^2 / (2I_A + 1)(2I_a + 1)(2I_B + 1)(2I_b + 1).$$

Da bo formula kompletna, jo moramo pomnožiti še s prepustnostjo elektrostatske ograje. Delec a se mora pri vstopu v jedro, delec b pa pri izstopu iz jedra prebiti skozi elektrostatsko ograjo. Le nevtralni delci je ne občutijo. Pri tem se fluks vstopajočih in izstopajočih delcev zmanjša za enak faktor e^{-g_a} oz. e^{-g_b} , kot smo ga že srečali pri razpadu alfa. Tudi tukaj je g približno enak $g \approx 2 \int \sqrt{2\tilde{m}(V - W)} dr / \hbar$.

Tako dobimo končni izraz za reakcijski presek:

$$\sigma = \frac{\mathcal{V}}{v_a} \frac{2\pi}{\hbar} \overline{|H_{A \rightarrow B}|^2} \frac{\mathcal{V} p_b^2}{2\pi^2 \hbar^3 v_b} (2I_B + 1)(2I_b + 1) e^{-g_a} e^{-g_b}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\pi \hbar^4} \overline{|H_{A \rightarrow B}|^2} \frac{p_b^2}{v_a v_b} (2I_B + 1)(2I_b + 1) e^{-g_a} e^{-g_b}}$$

Prvi del tega izraza je matrični element za reakcijo, drugi del je fazni prostor, ki je na razpolago za reakcijo, tretji del pa je prepustnost elektrostatske ograje.

\mathcal{V} in $H_{A \rightarrow B}$ smo spet pisali skupaj, podobno kot pri razpadu beta. $H_{A \rightarrow B}$ je namreč odvisen od gostote delcev in je zato obratno sorazmeren z \mathcal{V} .

Produkt $\mathcal{V}H_{A \rightarrow B}$ pa ni odvisen od \mathcal{V} , saj presek ne sme biti odvisen od naše izbire normirnega volumna!

Splošna formula nam eksplicitno izraža le, kako je presek odvisen od zunanjih okoliščin („geometrije“) reakcije: od faznega prostora in elektrostatske ograje. Vpliv mehanizma reakcije in vpliv strukture prizadetih jeder na reakcijski presek pa sta skrita v matričnem elementu in ju je treba študirati posebej. Ker je to problem več teles, potrebujemo za to primerne modele in približke. Namen splošne formule je torej, da loči „geometrijo“ reakcije od podrobnega dogajanja pri reakciji. Iz nje dobimo rezultate hitro in neodvisno od modelov, če se omejimo na tiste lastnosti, ki so odvisne le od faznega prostora ter elektrostatske ograje.

Presek za obratno reakcijo

Splošno formulo za reakcijski presek lahko uporabimo, da izpeljemo enostavno zvezo med presekom za dano reakcijo ter presekom za obratno reakcijo.

$$\sigma_{B \rightarrow A} = \frac{1}{\pi \hbar^4} \overline{|VH_{B \rightarrow A}|^2} \frac{p_a^2}{v_a v_b} (2I_A + 1)(2I_a + 1) e^{-g_b} e^{-g_a}$$

$$\frac{\sigma_{B \rightarrow A}}{\sigma_{A \rightarrow B}} = \frac{p_a^2 (2I_A + 1)(2I_a + 1)}{p_b^2 (2I_B + 1)(2I_b + 1)}$$

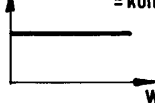


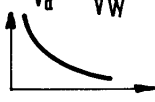



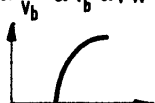
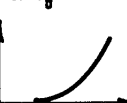
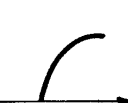

Vsi ostali členi se krajšajo, ostane le razmerje faznih prostorov.

Pri tem smo upoštevali, da je H hermitski operator: $H_{B \rightarrow A} = H_{A \rightarrow B}^*$.

To zvezo lahko uporabimo v tri namene:

1. Če poznamo presek za reakcijo samo za eno smer, lahko napovemo presek za obratno smer. Presek za obratno smer je namreč skoraj nemogoče meriti, če je končno jedro pri prvi reakciji (=tarča pri obratni reakciji) nestabilno.
2. S primerjanjem preseka za dano reakcijo in preseka za obratno reakcijo lahko preverimo naravni zakon, da je matrični element za obe smeri reakcije isti (princip detaljnega ravnovesja). To pomeni v formalizmu teorije motenj, da je H hermitski operator. Vsi dosedanji poskusi so to potrdili.
3. S primerjanjem preseka za dano reakcijo in preseka za obratno reakcijo lahko iz treh znanih vrtilnih količin od I_A , I_a , I_B , I_b določimo četrto neznano.

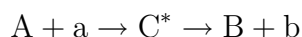
Obnašanje preseka pri nizkih energijah in v bližini praga

	a, b nevtralna	b nabit	a nabit	a, b nabita
E/a stično Sipanje	(n, n) $\sigma \propto \frac{p_b^2}{v_a v_b} = \frac{p^2}{v^2} = m^2 =$ $\sigma \propto \frac{p_b^2}{v_a v_b} = \frac{p^2}{v^2} = \text{konst.}$ 			prevlada vpliv elektrostatskega sipanja $\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2}$ $\sigma = \infty$
Q > 0	(n, γ) $\sigma \propto \frac{1}{v_a} \propto \frac{1}{\sqrt{W}}$ 	$\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{W}}$ 	$\sigma \propto \frac{1}{v_a} e^{-g_a}$ 	$\sigma \propto \frac{1}{v_a} e^{-g_a}$ 
Q < 0	(n, n') $\sigma \propto \frac{p_b^2}{v_b} \propto v_b \propto \sqrt{W - W_0}$ 	$\sigma \propto v_b e^{-g_b}$ 		

Slika 4.36: Obnašanje preseka pri nizkih energijah in v bližini praga

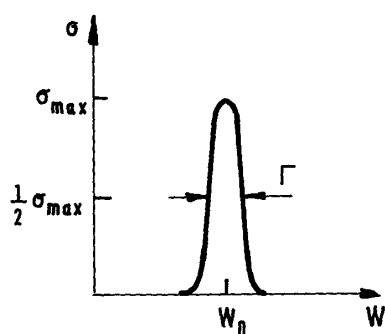
Pri direktnih reakcijah se $H_{A \rightarrow B}$ počasi spreminja z energijo in je oblika $\sigma(W)$ včasih bolj odvisna od faznega prostora in propustnosti elektrostatske ograje kot od $H_{A \rightarrow B}$. Podobne razmere smo srečali že pri obliki spektra pri razpadu beta. Pri eksotermnih jedrskih reakcijah je to najznačilnejše pri nizkih energijah projektila, pri endotermnih reakcijah pa v bližini praga, kajti tam se velikost faznega prostora najhitreje spreminja. Značilni potek preseka bom za razne primere podal v obliki tabele. Pri tem bom upošteval fazni prostor in prepustnost ograje samo za počasni delec, pri katerem se to že v majhnem energijskem intervalu zelo močno spremeni. Pri hitrem delcu se v istem energijskem intervalu fazni prostor in prepustnost ograje samo neznatno spremeni in ju vzamemo za konstantna.

4.5.4 Resonančne reakcije; Breit-Wignerjeva formula

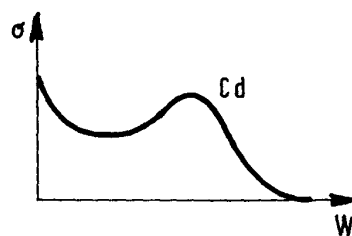
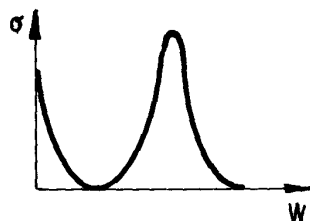


Reakcije preko vmesnega jedra imenujemo tudi resonančne reakcije, ker ima odvisnost preseka od energije obliko resonančne krivulje. Resonance karakteriziramo z lego W_0 , širino Γ in višino σ_{\max} . Lega pove energijo vzbujenega stanja C^* , širina pa njegov razpadni čas.

Primer: $^{115}\text{In}(n\gamma)^{116}\text{In}$ ima
 $W_0 = 1,44 \text{ eV}$, $\Gamma = 0,042 \text{ eV}$, $\sigma_{\text{max}} = 27\,000 \text{ bn}$.



Slika 4.37: Definicija širine resonančne krivulje



Slika 4.38: Oblika preseka za eksotermne resonančne reakcije

Ker je reakcija preko vmesnega jedra proces II. reda, moramo vzeti v splošni formuli za reakcijski presek tak matrični element, kot nam ga da teorija motenj II. reda:

$$H_{A \rightarrow B} + \sum C H_{A \rightarrow B} H_{C \rightarrow B} / (W_A - W_C)$$

Prvi člen predstavlja direktno reakcijo, drugi člen pa resonančno. V območju resonance je drugi člen dosti večji od prvega in smemo prvega zanemariti. Daleč od resonanc pa imamo samo direkten proces. Zapišimo presek za resonančno reakcijo:

$$\sigma = \frac{1}{\pi \hbar^4} \frac{|H_{A \rightarrow C}|^2 |H_{C \rightarrow B}|^2 (2I_C + 1)}{(W_A - W_C)^2} \frac{\mathcal{V}^2 p_b^2}{v_a v_b} (2I_B + 1)(2I_b + 1) e^{-g_a} e^{-g_b}$$

Ta izraz še ni dober, ker je pri resonanci presek neskončen. Pozabili smo, da energija W_C ni točno določena, ker C ni stacionarno stanje, temveč razpadajoče stanje. To lahko opišemo s kompleksno energijo:

$$n_C = n_{C0} e^{-t/\tau}$$

$$\psi_C = \psi_{C0} e^{-iWt/\hbar} e^{-t/2\tau} = \psi_{C0} e^{-i(W - \frac{1}{2}i\Gamma)t/\hbar}$$

Pri tem je $\Gamma = \hbar w = \hbar/\tau$ reda velikosti širine resonance. Pozneje bomo videli, da je to ravno cela širina resonance pri polovični višini. V formulo za presek moramo vstaviti namesto W_C kompleksno energijo $\hat{W}_C = W_C - \frac{1}{2}i\Gamma$ in dobimo v imenovalcu $|W_A - W_C|^2 = (W_A - W_C)^2 + \Gamma^2/4$. Presek je po tem povsod končen, dobili smo dušeno resonančno krivuljo.

Formulo lahko še poenostavimo, če vpeljemo pojem parcialnih širin. Podobno, kot je celotna verjetnost za razpad vsota parcialnih verjetnosti $w = w_A + w_B + \dots$, lahko tudi celotno širino $\Gamma = \hbar w$ razdelimo na parcialne širine $\Gamma = \Gamma_A + \Gamma_B + \dots$. Parcialne širine (verjetnosti) lahko z „zlatim pravilom“ izrazimo z matričnimi elementi $H_{C \rightarrow A}$, $H_{C \rightarrow B}$ itd.

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \hbar w_A = 2\pi \overline{|H_{C \rightarrow A}|^2} \mathcal{V} 4\pi p_a^2 (2\pi\hbar)^{-3} v_a^{-1} (2I_A + 1)(2I_a + 1) e^{-g_a} \\ \Gamma_B &= \hbar w_B = 2\pi \overline{|H_{C \rightarrow B}|^2} \mathcal{V} 4\pi p_b^2 (2\pi\hbar)^{-3} v_b^{-1} (2I_B + 1)(2I_b + 1) e^{-g_b} \end{aligned}$$

Če sedaj v formuli za presek nadomestimo matrične elemente s parcialnimi širinami, dobimo znamenito *Breit-Wignerjevo formulo*. (Namesto \hbar/p_a bomo pisali de Brogliejevo valovno dolžino $\bar{\lambda}_a$.)

$$\sigma = \pi \bar{\lambda}_a^2 \frac{2I_C + 1}{(2I_A + 1)(2I_a + 1)} \frac{\Gamma_a \Gamma_b}{(W - W_0)^2 + \Gamma^2/4}$$

Prepričajmo se, da je Γ res cela širina pri polovični višini. Pri resonanci ($W = W_C$) imamo v imenovalcu $\Gamma^2/4$. Pri $W = W_C \pm \frac{1}{2}\Gamma$ pa imamo v imenovalcu $\Gamma^2/4 + \Gamma^2/4$, torej dvakrat več. Ker so ostale količine obakrat iste, je na mestu $W_C \pm \frac{1}{2}\Gamma$ presek res polovica maksimalnega.

Če je resonanca ozka, so vse količine razen W konstantne v območju resonance. Če pa je resonanca široka, moramo upoštevati, da se Γ_a in Γ_b nekoliko spreminjata, kvečjemu matrična elementa $H_{A \rightarrow C}$ in $H_{C \rightarrow B}$ smemo vzeti za približno konstantna. To je važno zlasti pri nizkih energijah delca a , kjer je $\Gamma_a \propto v_a$

$$\Gamma_a = \Gamma_a^r \frac{v_a}{v_a^r} = \Gamma_a^r \frac{\bar{\lambda}_a^r}{\bar{\lambda}_a}$$

pri čemer pomeni indeks r vrednost pri resonance. Breit-Wignerjeva formula ima potem obliko

$$\sigma = \pi \bar{\lambda}_a \bar{\lambda}_a^r \frac{2I_C + 1}{(2I_A + 1)(2I_a + 1)} \frac{\Gamma_a^r \Gamma_b}{(W - W_C)^2 + \Gamma^2/4}$$

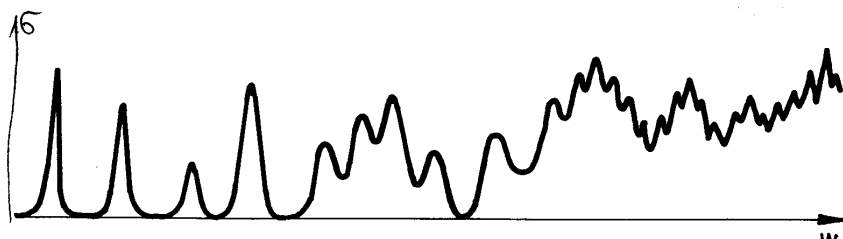
Kot vidimo, dobimo pri eksotermnih reakcijah pri nizkih energijah spet $\sigma \propto \bar{\lambda} \propto \frac{1}{v}$. Vendar je ta „rep“ važen samo pri širokih in nizkoležečih resonancah (npr. pri Cd). Pri ozkih resonancah je neznaten.

Višina resonance je največja možna, kadar imamo samo sipanje ($a=b$, $\Gamma_a = \Gamma$); tedaj je $\sigma_{\max} = 4\pi\bar{\lambda}_a g$, kjer je $g = (2I_C + 1)/(2I_A + 1)(2I_a + 1)$. Če imamo sipanje in še eno reakcijo, ima izraz $\Gamma_a(\Gamma - \Gamma_a)/\frac{1}{4}\Gamma^2$ maksimum, če je $\Gamma_a = \Gamma_b = \frac{1}{2}\Gamma$; maksimalni presek za reakcijo je tedaj $\sigma_{\max} = 2\bar{\lambda}_a^2 g$. Torej lahko napišemo naslednji neenačbi:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{sip}} &\leq 4\pi\bar{\lambda}_a^2 g \\ \sigma_{\text{reak}} &\leq \pi\bar{\lambda}_a^2 g\end{aligned}$$

Ker ima jedro C veliko vzbujenih stanj, dobimo celo množico resonanc. Pri nizkih energijah so te resonance ozke in redke, pri visokih energijah pa so široke in pogoste, tako da se med seboj prekrivajo. Pri zelo visokih energijah bi torej pričakovali, da bo zaradi prekrivanja presek že čisto enakomeren. Poskusi pa kažejo v preseku izrazite fluktuacije, ki so dosti ožje od širine resonanc v tistem območju. Vzroki za statistične fluktuacije v preseku so naslednji:

- Neenakomerna gostota vzbujenih stanj jedra C
- Neenakomerni matrični elementi $H_{A \rightarrow C}$ in $H_{C \rightarrow B}$ za razna vzbujena stanja C
- Interferenca med matričnimi elementi za razna vzbujena stanja C.



Slika 4.39: Oblika preseka za resonančne reakcije pri nizkih energijah (prekrivajoče se resonance) ter višjih energijah (fluktuacije)

Breit-Wignerjeva formula predstavlja pri resonančnih reakcijah korak naprej glede na splošno formulo, ker smo vgradili osnovno značilnost mehanizma resonančnih reakcij, da potekajo preko vmesnega jedra. Breit-Wignerjeva formula izraža poleg faznega prostora in elektrostatske ograje eksplicitno še vpliv nekaterih značilnih lastnosti vmesnega jedra (energije in parcialnih razpadnih konstant posameznih stanj vzbujenega jedra). Podroben potek reakcije in struktura prizadetih jeder pa so še vedno skriti v omenjenih parametrih.

Vrednost Breit-Wignerjeve formule je v tem, da z njo lahko komplicirano obliko $\sigma(W)$ izrazimo z maloštevilnimi parametri W_C in Γ_i .

Eksperimentalno jih določimo tako, da se Breit-Wignerjeva formula čim boljše ujema z izmerjenimi preseki. Te parametre bi radi tudi izračunali in jih povezali s podrobnim potekom reakcije in strukturo prizadetih jeder. Za to potrebujemo modele in računi so danes še v večini primerov neizvedljivi. Študij preseka nam da zaenkrat v glavnem le podatke o legi, razpadnem času in morda vrtilni količini vzbujenih stanj jedra C, toda tudi to je že veliko vredno.

Poglavje 5

Dodatki

5.1 ZBIRKA NALOG

5.1.1 Statične količine

1.1 Curek ionov pošljemo najprej skozi cilindrični kondenzator, nato pa še skozi magnetni spektrometer. Radij plošč v cilindričnem kondenzatorju je 49,5 in 50,5 cm, reže v magnetnem spektrometru pa določajo prav tako krivinski radij 50 cm. Kolikšno napetost moramo pritisniti na cilindrični kondenzator in kolikšno magnetno poljsko gostoto potrebujemo v magnetu, da separiramo iz curka samo ione z masnim številom 2 (ali 16) ter z energijo 1 MeV?

1.2 Kolikšna je elektrostatska energija jedra? Predpostavi, da so vsi protoni enakomerno razmazani v krogli z radijem $r = r_0 A^{1/3}$!

1.3 Izračunaj radij jedra in r_0 iz masnih razlik za zrcalna jedra! Predpostavi, da je jedrska energija v obeh jedrih enaka in da je zato razlika vezavnih energij kar enaka razliki elektrostatskih energij. Vzemi naslednje pare zrcalnih jeder:

a) ^{23}Na , ^{23}Mg

b) ^{19}Ne , ^{19}F

c) ^{27}Si , ^{27}Al

1.4 Pri kateri vrednosti Z pade najnižji Bohrov tir leptona μ ravno znotraj jedra?

1.5 Mion preskoči v mionskem atomu urana ^{238}U z lupine L na lupino K . Kolikšna je energija izsevanega fotona? Upoštevaj, da je elektrostatski potencial znotraj enakomerno nabite krogle harmonski. Kot približek pri računu stanj miona ekstrapoliraj ta harmonski potencial tudi ven iz jedra. Približek je dober, če se nahaja mion z večino verjetnosti znotraj jedra.

1.6 Nariši hiperfino strukturo neke optične črte!
 $I = 5/2$, $J = 3$, $J' = 4$, $\mu = 1\mu_j$, $b = 1\text{T}$, $b' = 0$.

1.7 Izračunaj iz hiperfine strukture $^{22}_{11}\text{Na}$ njegovo vrtilno količino in magnetni moment!

Optična črta ima valovno dolžino 4130 Å. Začetno stanje atoma ima vrtilno količino elektronov $J = 7/2$ in maksimalno magnetno polje na mestu jedra $b = -44\text{T}$. Končno stanje atoma ima $J = 5/2$ in zelo majhen b . Hiperfina struktura ima 7 črt z naslednjimi valovnimi dolžinami (navedena je razlika med valovno dolžino dane črte ter črte z najmanjšo valovno dolžino v enotah 10^{-4}Å):

0 21 39 53 64 72 77.

Pazi tudi na predznak magnetnega momenta jedra!

1.8 Pri dvoatomni molekuli opazujemo enega od rotacijskih pasov v optičnem spektru. Kolikšna je vrtilna količina jedra, če imajo zaporedne črte naslednje relativne intenzitete:

15 30 21 40 27 50 32 58 37 66...

1.9 Za koliko se odkloni molekula $^7\text{Li}^{35}\text{Cl}$ v nehomogenem magnetnem polju z gradientom 10^3 T/m na razdalji 0,52 m? Za litij vzemi $M = I = 3/2$ ter $\mu = 3,3\mu_j$. Magnetni moment klora zanemari. J in μ elektronov je nič. Hitrost molekule ustreza termičnemu gibanju pri 1000°C .

1.10 Za koliko se odkloni nevtron s hitrostjo 500 ms^{-1} v nehomogenem magnetnem polju z gradientom 1000 T/m ? Območje nehomogenega magnetnega polja je dolgo 0,2 m, detektor pa je postavljen 2 m dalje. Nevtron ima $\mu = -1,91\mu_j$.

1.11 Pri kateri frekvenci dobimo jedrsko magnetno resonance, če je vzorec iz vodika v magnetnem polju 1 T? μ protona je $2,79268\mu_j$.

1.12 Za koliko % je pri jedrski magnetni resonanci absorpcija večja od stimulirane emisije, če je vzorec iz vodika v polju 1 T in

a) pri sobni temperaturi

b) Pri 4 K?

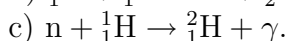
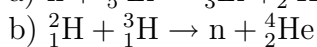
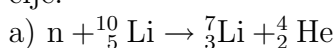
1.13 Za koliko % se razlikujeta osi $^{176}_{71}\text{Lu}$, ki ima kvadrupolni moment $q = 8,0\text{ barn}$ in vrtilno količino $I = 7$? Predpostavi, da je lutecijevo jedro rotacijski elipsoid s konstantno gostoto.

1.14 Izračunaj električni kvadrupolni moment jedra ^9Be z modelom, da ima to jedro obliko dveh dotikajočih se kroglic (delcev alfa). Preostali nevtron naj bo nekje blizu dotikaljšča. Radij delca alfa oceni s formulo $r = r_0A^{1/3}$.

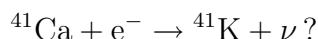
Primerjaj rezultat z eksperimentalno vrednostjo $q = 2,9 \text{ fm}^2$ (${}^9\text{Be}$ ima $I = 3/2$). Ali je ujemanje dobro?

5.1.2 Dinamične količine

2.1 Izračunaj energijo, ki se sprosti pri naslednjih jedrskih reakcijah! Izračunaj, kako se porazdeli med oba končna delca, če nista imela začetna delca skoraj nič kinetične energije. Izračunaj tudi pragove za obratne reakcije.

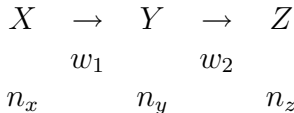


2.2 Kolikšna je odzivna energija jedra pri ujetju elektrona:



2.3 S curkom devteronov z energijo 400 keV streljamo na tritijevo tarčo. Pri tem dobimo nevtrone iz reakcije ${}^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n$. Kolikšna je energija nevtronov, ki letijo pod kotom 60° stran od smeri devteronskega curka?

2.4 Imamo zaporedni razpad



Kako se števila jeder n_x, n_y in n_z spreminjajo s časom, če so bila v začetku samo jedra X ? Skiciraj za tri primere:

a) $w_2 \gg w_1$

b) $w_2 \ll w_1$

c) $w_2 = w_1$

2.5 Jedro razpada na dva načina (razpadni konstanti sta w_1 in w_2). Kolikšen je razpadni čas?

2.6 Kolikšna je aktivnost 1 kg ${}^{226}\text{Ra}$, ki ima razpolovni čas 1620 let? Izrazi tudi v Curiejih.

2.7 Kolikšna je specifična aktivnost naravnega rubidija?

${}^{85}\text{Rb}$ 72,46%, stabilen

${}^{87}\text{Rb}$ 27,85%, $t_{1/2} = 4,3 \cdot 10^{10}$ let

2.8 Tanko ploščo iz a) fosforja

b) aluminija

c) NaCl

težko 10 g damo v curek termičnih nevtronov, ki pada pravokotno na to

ploščo. Intenziteta curka je 10^{17} nevtronov/m²s. Kolikšno aktivnost ima vzorec v trenutku, ko ga vzamemo iz curka, če ga obsevamo 2 uri?

2.9 Curek nevtronov z energijo 4 MeV se elastično siplje na protonih. Diferencialni presek za nevtrone, ki se odklonijo od prvotne smeri za 60° , znaša 0,3 b/sterradian. Kolikšen je totalni presek, če je sipanje izotropno v težiščnem sistemu? Vsi podatki so v laboratorijskem sistemu.

2.10 Kako izgledajo naslednje kotne porazdelitve (podane v težiščnem sistemu), če jih gledamo v laboratorijskem sistemu:

$$d\sigma/d\Omega = a^2, \sin^2 \vartheta, \cos^2 \vartheta, 1/\sin^4(\vartheta/2) ?$$

Izračunaj a) za sipanje dveh enako težkih delcev

b) za sipanje delca z maso 1 na delcu z maso 10

2.11 S protoni streljamo v tarčo iz ogljika in opazujemo devterone iz reakcije $^{12}\text{C}(p,d)^{11}\text{C}$. Maksimalni kot v laboratorijskem sistemu, pod katerim še opazimo devterone, je 60° . Kolikšna je energija protonov? Kakšna je porazdelitev protonov v laboratorijskem sistemu v okolici kota 60° , če je porazdelitev v težiščnem sistemu izotropna? Skiciraj!

2.12 Kakšna je v laboratorijskem sistemu energijska porazdelitev nevtronov, ki se v težiščnem sistemu siplje elastično in izotropno? Vzemi a) sipanje na vodiku
b) sipanje na ^{238}U !

2.13 Po koliko trkih postanejo nevtroni z energijo 1 MeV termični (0,04 eV)
a) v vodiku
b) v uranu?

5.1.3 Jedrske sile

3.1 Kolikšna je verjetnost, da sta pri devteronu proton in nevtron znotraj potencialne jame in kolikšna, da sta izven nje? Računaj s pravokotno potencialno jamo!

3.2 Kolikšen je povprečni r in r^2 pri devteronu?

3.3 Kolikšna je povprečna kinetična energija in valovna dolžina termičnih nevtronov ($T = 300$ K) ter hladnih nevtronov (20 K, 4 K)?

3.4 Nevtrone lahko „ohladimo“ s sipanjem na kristalu, ki siplje po Braggovem pogoju nevtrone nad neko mejno energijo, nevtrone pod mejno energijo pa prepusti. Kolikšna je mejna energija, če je največji razmak kristalnih ravnin 2 Å? Kateri temperaturi približno ustrezajo „ohlajeni“ nevtroni? Nariši njihov spekter!

3.5 Kolikšen je presek za sipanje polariziranih nevtronov na polariziranih protonih,

- a) če so nevtroni in protoni polarizirani navzgor
 b) če so nevtroni polarizirani navzgor, protoni pa navzdol
 b1) sipanje brez preklopa,
 b2) sipanje s preklpom.

Sipalni dolžini sta $a_t = 5,4$ fm, $a_s = -23,68$ fm.

3.6 Kolikšen je presek za sipanje nevtronov na paravodiku, ortovodiku ter povprečnem vodiku, če je valovna dolžina nevtronov dosti večja od medatomske razdalje? Upoštevaj tudi, da prevzame pri trku gibalno količino cela molekula in je zato težiščni sistem drugačen kot za sipanje na prostih protonih.

3.7 Kolikšen je presek za koherentno sipanje in kolikšen za nekoherentno sipanje v vodikovem kristalu?

3.8 Kolikšen je kot totalnega odboja za nevtrone

- a) v tekočem vodiku ($\rho = 70,8$ kg m⁻³)
 b) v butanu ($\rho = 600$ kg m⁻³)?

Sipalna dolžina v ¹²C je $-6,63$ fm; ¹²C ima $I = 0$. Hitrost nevtronov je 1000 m s⁻¹.

3.9 Naravni rubidij je mešanica 72,2% ⁸⁵Rb in 27,8% ⁸⁷Rb. Meritve dajo za koherentno sipanje nevtronov presek 4,1 b, za nekoherentno sipanje pa presek 12,5 b. Izračunaj sipalno amplitudo za vsak izotop zase!

3.10 Izračunaj presek za sipanje nevtronov na magnetnem momentu elektrona! Pri tem uporabi formulo za sipanje na plitki pravokotni potencialni jami. Magnetni potencial okrog elektrona si misli razdeljen na same tanke pravokotnike in seštej vse prispevke (pri plitkem potencialu so posamezni prispevki k sipalni amplitude aditivni).

3.11 Izračunaj presek za sipanje nevtronov na magnetnem polju ene kristalne celice feromagnetne snovi! Za velikost kristalne celice vzemi kocko s stranico 2 Å, za povprečno magnetno polje pa 1 T. Kako sta sipalna amplituda in presek odvisna od orientacije nevtronovega spina glede na magnetno polje?

3.12 Za koliko se razlikujeta v namagnetnem železu preseka za obe orientaciji nevtronov? Kako debel absorber moramo vzeti, da dobimo 90% orientirane nevtrone? Koliko se pri tem oslabi nevtronski fluks? Za koliko se razlikujeta lomna količnika (ter kota totalnega odboja) za obe orientaciji nevtronov s hitrostjo 1000 m s⁻¹?

Podatki: sipalna amplituda na železovem jedru je 9,7 fm, na elektronih namagnetnega železa pa $\pm 1,3$ fm na atom.

3.13 Kolikšna bi morala biti globina singletnega potenciala pravokotne

oblike z dosegom 2,02 fm, da bi ravno še imeli vezano singletno stanje deuterona (ter ogromno pozitivno sipalno dolžino)?

3.14 Za koliko % je singletni potencial proton-proton šibkejši od singletnega potenciala nevtron-proton, če sta sipalni amplitudi $a_{pp} = -17,2$ fm, $a_{np} = -23,7$ fm. Vzemi obakrat pravokotno potencialno jamo z dosegom 2,02 fm!

3.15 Kolikšen je presek za sipanje nevtronov na nevtronih pri energijah manjših od 1 keV?

Predpostavi enakost jedrskih sil in vzemi iste sipalne dolžine kot pri sipanju nevtronov na protonih. Upoštevaj, da sta nevtrona enaka delca in da se zato pri singletnem sipanju z $l = 0$ amplituda podvoji, medtem ko je tripletno sipanje z $l = 0$ po Paulijevem principu izključeno.

3.16 Dva curka termičnih nevtronov sipljemo drugega na drugem. Curka sta usmerjena drug proti drugemu. Fluks v obeh curkih je 10^{18} nevtronov/m²s. Koliko trkov dobimo na sekundo v 1 dm³ skupnega prostora?

Števec je oddaljen 0,5 m od nezaklonjenega dela curkov (1 dm³), ima okence 1 dm² in iskoristek 2%. Koliko sunkov nam da na sekundo? Računaj, kot da je hitrost vseh nevtronov enaka povprečni hitrosti pri 300 K!

3.17 Stanja z izobarnim spinom T nastopajo kot analogna stanja pri $2T+1$ sosednjih izobarih. Analogna stanja imajo isto vrtilno količino, parnost in vezavno energijo (pri tem moramo šteti le jedrsko energijo, elektrostatsko energijo odštejemo kot popravek). S primerjavo sosednjih izobarov določi pri spodaj naštetih jedrih izobarni spin osnovnega stanja in tistih vzbujenih stanj, za katere je dovolj podatkov!

- a) ⁸Li, ⁸Be, ⁸B
- b) ⁹Li, ⁹Be, ⁹B, ⁹C
- c) ¹⁰Be, ¹⁰B, ¹⁰C
- d) ¹²Be, ¹²C, ¹²N
- e) ²²Ne, ²²Na, ²²Mg
- f) ²⁴Na, ²⁴Mg, ²⁴Al
- g) ²⁶Mg, ²⁶Al, ²⁶Si
- h) ³⁰Si, ³⁰P, ³⁰S

3.18 Skiciraj ekvipotencialne ploskve za tenzorski potencial, če sta spina nukleonov

- a) paralelna
- b) antiparalelna
- c) pod pravim kotom!

Nariši ekvipotencialne ploskve najprej samo za tenzorski potencial, nato

pa še za celotni potencial oblike

$$V = V_0 \frac{\exp(kr)}{kr} (\alpha + \beta \vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2 + \gamma T_{12})$$

5.1.4 Kapljični model; masna formula

$$mc^2 = Zm_Hc^2 + (A - Z)m_n c^2 - w_0 A + w_1 A^{2/3} + w_2 Z^2/A^{1/3} + w_3 (A - 2Z)^2/A + w_4 A^{-3/4} \delta(A, Z)$$

Viri:	w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	
(razni)	14,04	13,0	0,583	19,5	33,5	MeV
(Segre)	15,56	17,2	0,698	23,3	33,5	MeV

4.1 Iz razlike mas za nekaj parov zrcalnih jeder določi empirično koeficient w_2 pri elektrostatski energiji!

4.2 Določi razmerje konstant w_3/w_2 v masni formuli tako, da se napovedana krivulja stabilnih jeder v diagramu N/Z čimbolj ujema z eksperimentalno! Eksperimentalno krivuljo skiciraj tako, da izbereš iz tabele jeder nekaj stabilnih jeder v začetku, v sredini in na koncu.

4.3 Oцени površinsko napetost s predpostavko, da je jedro sestavljeno iz togih kroglic, razporejenih v gosto prostorsko mrežo!

4.4 Iz masne formule oceni, od katerega A naprej je razpad alfa energijsko možen!

4.5 Iz masne formule oceni, od katerega A naprej je energijsko možen spontan razcep!

4.6 Ali pove tudi masna formula, da so liha-liha jedra stabilna samo do ${}_{7}^{14}\text{N}$?

4.7 Iz podatkov za najbližja sosednja jedra oceni, kolikšno maso ima neznano jedro ${}_{35}^{86}\text{Br}$. Za interpolacijo oz. ekstrapolacijo uporabi masno formulo!

4.8 ${}_{37}^{92}\text{Rb}$ je radioaktiven (beta minus). Energije delcev beta še niso izmerili. Oцени jo iz masne formule!

4.9 Oцени z masno formulo, od katerega A naprej imajo sodo-soda jedra po tri stabilne izobare!

4.10 Oцени z masno formulo, kateri izotop kalcija je nestabilen za emisijo nevtrona!

5.1.5 Model plinskega mehurčka

5.1 Z modelom plinskega mehurčka oceni, kolikšna je globina povprečnega jedrskega potenciala! Za podatek vzemi radij jedra in silo med dvema nukleonoma (potencialno jamo z dosegom 2 fm in globino 36 MeV). Predpostavi, da je v okolici danega nukleona konstantna gostota ostalih nukleonov in da je v povprečju povsod enake protonov in nevtronov ter spinov gor in spinov dol.

Primerjaj rezultata z Rosenfeldovo mešanico ($W = -0,13$; $M = 0,93$; $B = 0,47$; $H = -0,27$) ter s Soperjevo mešanico ($W = 0,28$; $M = 0,45$; $B = 0,30$; $H = -0,03$)!

5.2 Z modelom plinskega mehurčka izračunaj povprečno kinetično energijo nukleonov v jedru,

a) če je $Z = N$

b) če je $Z \neq N$

Oceni, koliko to prispeva h koeficientu w_3 pri simetrijski energiji!

5.3 Koliko atmosfer je tlak v jedru?

5.4 Za jedra ^{12}C , ^{30}Si in ^{38}Ar primerjaj eksperimentalno gostoto nivojev s formulo izpeljano iz entropije idealnega Fermi-Diracovega plina: $\rho(E) = (C/E) \exp(2(aE)^{1/2})$, kjer je C sorazmernostna konstanta ter $a = 0,08A^{2/3}(Z^{1/3} + (A-Z)^{1/3}) \text{ MeV}^{-1}$. E je energija nad osnovnim stanjem. Nasvet: primerjaj razmerje med gostoto nivojev blizu osnovnega stanja ter gostoto nivojev v nekem višjem energijskem območju!

5.1.6 Lupinski model

Vrstni red podlupin je naslednji:

1s _{1/2}						
1p _{3/2}	1p _{1/2}					
1d _{5/2}	2s _{1/2}	1d _{3/2}				
1f _{7/2}						
2p _{3/2}	1f _{5/2}	2p _{1/2}	1g _{9/2}			
2d _{5/2}	1g _{7/2}	3s _{1/2}	1h _{11/2}	2d _{3/2}		nevtroni
1g _{7/2}	2d _{5/2}	1h _{11/2}	2d _{3/2}	3s _{1/2}		protoni
2f _{7/2}	1h _{9/2}	3p _{3/2}	2f _{5/2}	3p _{1/2}	1i _{13/2}	nevtroni
1h _{9/2}	2f _{7/2}	3p _{3/2}	2f _{5/2}	3p _{1/2}	1i _{13/2}	protoni

6.1 Zapiši konfiguracijo osnovnega stanja naslednjih jeder ter določi njihovo vrtilno količino in parnost

${}^9_4\text{Be}$	${}^{13}_6\text{C}$	${}^{25}_{12}\text{Mg}$	${}^{31}_{15}\text{P}$	${}^{35}_{17}\text{Cl}$	${}^{35}_{16}\text{S}$	${}^{39}_{19}\text{K}$	${}^{45}_{21}\text{Sc}$	${}^{51}_{23}\text{V}$
${}^{43}_{20}\text{Ca}$	${}^{49}_{22}\text{Ti}$	${}^{55}_{25}\text{Mn}$	${}^{59}_{27}\text{Co}$	${}^{53}_{24}\text{Cr}$	${}^{57}_{26}\text{Fe}$	${}^{61}_{28}\text{Ni}$	${}^{63}_{29}\text{Cu}$	${}^{71}_{31}\text{Ga}$
${}^{67}_{30}\text{Zn}$	${}^{69}_{30}\text{Zn}$	${}^{73}_{32}\text{Ge}$	${}^{77}_{34}\text{Se}$	${}^{83}_{36}\text{Kr}$	${}^{87}_{38}\text{Sr}$	${}^{85}_{37}\text{Rb}$	${}^{89}_{39}\text{Y}$	${}^{113}_{49}\text{In}$
${}^{91}_{40}\text{Zr}$	${}^{97}_{42}\text{Mo}$	${}^{111}_{46}\text{Cd}$	${}^{119}_{54}\text{Xe}$	${}^{137}_{56}\text{Ba}$	${}^{143}_{60}\text{Nd}$	${}^{173}_{70}\text{Yb}$	${}^{207}_{82}\text{Pb}$.	

6.2 Zapiši konfiguracijo osnovnega stanja in prvega vzbujenega stanja pri naslednjih jedrih ter določi njuno vrtilno količino in parnost:

${}^{11}_5\text{B}$, ${}^{27}_{13}\text{Al}$, ${}^{29}_{14}\text{Si}$, ${}^{33}_{16}\text{S}$, ${}^{41}_{20}\text{Ca}$.

6.3 Pri jedru ${}^{15}\text{O}$ (ali ${}^{15}\text{N}$) poišči tista nivoja, ki ustrezata luknji v stanju $1p_{3/2}$ oz. $1p_{1/2}$ glede na polno lupino! Izračunaj enodelčno energijo stanj $1p_{3/2}$ ter $1p_{1/2}$ s predpostavko, da je enodelčna energija približno enaka separacijski energiji:

$$Mc^2({}^{15}\text{O}, i) = Mc^2({}^{16}\text{O}, o) - Mc^2(n) - \epsilon_i.$$

Pri tem je i ustrezno vzbujeno stanje, o pa osnovno stanje. Iz razlike enodelčnih energij določi jakost η sile spin-tir $2\eta \vec{l}\vec{s}$ za lupino p !

6.4 Pri jedru ${}^{17}\text{O}$ (ali ${}^{17}\text{F}$) poišči tiste nivoje, ki ustrezajo polni lupini + en delec v stanju $1d_{5/2}$ (oz. $2s_{1/2}$ ali $1d_{3/2}$). Analogno kot v prejšnji nalogi izračunaj enodelčne energije teh stanj ter jakost sile spin-tir za lupino d !

6.5 Razloži energijske nivoje svinca ${}^{207}_{82}\text{Pb}$! Opiši to jedro z luknjo v svincu ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, ki ima zaključene lupine protonov in nevtronov! V katerem stanju je luknja pri posameznih vzbujenih nivojih? Izračunaj tudi enodelčne energije teh stanj ter jakost sile spin-tir pri svincu!

2,3 MeV	7/2-
1,6	13/2+
0,9	3/2-
0,6	5/2-
0	1/2 -

6.6 Opiši jedri ${}^{11}\text{B}$ in ${}^{11}\text{C}$ kot da imata po eno luknjo glede na zaključeno podlupino ${}^{12}\text{C}$. Jedri ${}^{13}\text{C}$ in ${}^{13}\text{N}$ pa imata dodaten delec glede na zaključeno podlupino ${}^{12}\text{C}$. V katerih stanjih so ti delci (luknje)? Kolikšne so njihove enodelčne energije? Zakaj enodelčna energija protona in nevtrona v istem stanju nista enaki? (Katera je večja?) Koliko energije potrebuješ, da dvigneš proton ali nevtron iz stanja $1p_{3/2}$ v stanje $1p_{1/2}$? Kateremu vzbujenemu stanju ${}^{12}\text{C}$ to ustreza (glej diagram v dodatku)? Izračunaj tudi vezavno energijo osnovnega stanja ${}^{12}\text{B}$ in ${}^{12}\text{N}$ tako da nadomestiš pri ${}^{12}\text{C}$ en nevtron s protonom ali obratno (zanemari spremembo residualne energije)! Rezultat primerjaj z eksperimentalnim podatkom!

6.7 Izračunaj magnetni moment jeder ^{15}O , ^{15}N , ^{17}O , ^{17}F s predpostavko, da prispeva le delec (luknja) izven zaključene lupine. Primerjaj z eksperimentalnimi podatki:

^{15}O	$\mu =$	0,7190 μ_j
^{15}N		-0,28309
^{17}O		-1,89370

5.1.7 Kolektivni model

7.1 Pokaži, da tvorijo vzbujena stanja $^{238}_{92}\text{U}$ in $^{159}_{65}\text{Tb}$ rotacijske pasove! Stanja v različnih oklepajih pripadajo različnim rotacijskim pasovom. Izračunaj vztrajnostni moment in ga primerjaj z vztrajnostnim momentom enako velikega in težkega togega telesa!

7.2 Izračunaj vztrajnostni moment jedra ^8Be z modelom, da ima to jedro obliko dveh dotikajočih se kroglic (delcev alfa). Primerjaj tako izračunani vztrajnostni moment z eksperimentalnim, ki ga razbereš iz rotacijskega spektra ^8Be . Ali je model dveh kroglic dober?

7.3 Pokaži, da imajo $^{76}_{34}\text{Se}$, ^{106}Pd in ^{114}Cd vibracijska vzbujena stanja!

^{76}Se	^{106}Pd	^{114}Cd
	1,702	2+
	1,557	4+
1,340	4+	1,229
	4+	1,282
	4+	4+
1,215	2+	1,133
	2+	0+
	2+	1,208
	2+	2+
1,122	0+	1,127
	0+	2+
	2+	1,133
	2+	0+
0,550	2+	0,512
	2+	2+
	2+	0,558
	2+	2+
0	0+	0
	0+	0+
	0+	0
	0+	0+

7.4 a) Izračunaj lastno frekvenco za kvadrupolne površinske vibracije kapljice tekočine, ki se giblje irotacionalno. Računaj klasično.

b) Uporabi rezultat za jedra pri vaji 7.3. Gostoto jedrske snovi in radij jedra poznaš, površinsko napetost vzemi iz masne formule. Primerjaj izračunane frekvence vibracij z eksperimentalnimi!

7.5 Izračunaj frekvenco za dipolno nihanje jedra, pri katerem nihajo vsi protoni na eno stran, vsi nevtroni pa na drugo stran. Računaj klasično. Potencialno energijo nihanja izračunaj iz simetrijske energije v masni formuli (na polih ostanejo v jedrski snovi samo protoni ali samo nevtroni in se tam energija poveča za simetrijsko energijo). Kako je frekvenca dipolnega nihanja odvisna od A ? Primerjaj izračunano energijo dipolnega stanja z zgledno eksperimentalno vrednostjo $E \approx 60A^{-1/3}$ MeV.

5.1.8 Razpad alfa

$$\log w = \log Cv/2r - 1,70Z(W/\text{MeV})^{-1/2} + 1,28(r_0/\text{fm})^{1/2} \cdot Z^{1/2} A^{1/6}$$

8.1 Kako je visoka elektrostatska ograja pri ^{238}U ?

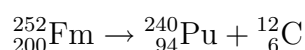
8.2 Določi radij (in r_0) iz razpolovnega časa ^{238}U !
($t_{1/2} = 4,51 \cdot 10^9$ let, $W = 4,18$ MeV).

8.3 ^{238}Pu razpada z razpadom alfa v ^{234}U .
($t_{1/2} = 89,6$ let). Ker je končno jedro lahko v osnovnem ali v vzbujenem stanju, dobimo več črt v spektru alfa. Oceni razmerje intenzitet za te črte! Pri razmerju propustnosti upoštevaj samo različne energije delcev alfa in zanemari vpliv različnih vrtilnih količin delcev alfa. Rezultate primerjaj z eksperimentalnimi vrednostmi intenzitete! Razpadna shema je naslednja:

^{238}Pu	^{234}U	intenziteta
5,59MeV		
	0,499 8 ⁺	7 · 10 ⁻⁸
	0,296 6 ⁺	4 · 10 ⁻⁵
	0,143 4 ⁺	9,5 · 10 ⁻⁴
	0,435 2 ⁺	0,28
	0 0 ⁺	0,72

8.4 ^8Be razpada z razpadom alfa. Iz razpadnega časa in razpadne energije oceni prepustnost elektrostatske ograje ter radij ^4He !

8.5 $^{252}_{100}\text{Fm}$ razpada z razpadom alfa. Razpolovni čas je 30 ur, energija delcev alfa pa 7,1 MeV. Oceni, kolikokrat manj verjeten je naslednji razpad:



Mase (v masnih enotah) so naslednje:

C	12,000
Pu	240,053
Fm	252,082

5.1.9 Razcep

9.1 Koliko energije se sprosti pri razcepu 1 g ^{235}U ?

9.2 Z masno formulo oceni, od katerega A naprej je spontan razcep energijsko možen (glej nalogo 4.5) in od katerega A naprej poteka momentano! Če je okrogla oblika labilna, upoštevaj, da sta površinska in elektrostatska energija deformirane nabite kapljice enaki $w_1 = A^{2/3}(1+2\epsilon^2/5) + w_2 Z^2 A^{-1/3}(1-\epsilon^2/5)$.

Pri tem je ϵ deformacija: $\epsilon = 2(c - a)/(c + 2a)$, kjer je c simetrijska, a pa prečna os elipsoida.

9.3 Termični nevtron se ujame v ^{235}U in ga razcepi v dva enaka kosa. Nastali jedri oddasta še nekaj nevtronov. Oцени z masno formulo, koliko nevtronov oddasta in kolikšna je skupna energija oddanih nevtronov. Predpostavi, da sta jedri, ki nastaneta neposredno po razcepu, v osnovnem stanju.

9.4 Kakšna je zveza med fluksom nevtronov v reaktorju in močjo reaktorja?

Kolikšna je moč reaktorja, ki ima fluks 10^{18} nevtronov/m²s in volumen 10 m^3 ?

9.5 Kolikšna je kritična velikost homogenega reaktorja v obliki kocke z naslednjimi podatki:

$$\epsilon = 1 \quad \eta = 1,34 \quad p = 0,9 \quad f = 0,9 \quad L = 0,5 \text{ m}$$

9.6 Kolikšna je kritična velikost krogle iz čistega urana ^{235}U ?

5.1.10 Razpad gama

$$\begin{aligned} \text{električni :} \quad t_{1/2} &= C_{El} A^{-2l/3} \cdot (W/\text{MeV})^{(-2l+1)} \\ \text{magnetni :} \quad t_{1/2} &= C_{Ml} A^{-2(l-1)/3} \cdot (W/\text{MeV})^{(-2l+1)} \end{aligned}$$

l	1	2	3	4	5
C_{El}	$6,7 \cdot 10^{-15}$	$9,3 \cdot 10^{-9}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^4$	$2,8 \cdot 10^{11}$
C_{Ml}	$1,5 \cdot 10^{-14}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^5$	$8,8 \cdot 10^{11}$

10.1 Kakšen je tip in multipolnost naslednjih razpadov gama:

$$\begin{aligned} \text{Začetno stanje :} & \quad 3^+ \quad 3^+ \quad 5^+ \quad 2^+ \quad 2^+ \quad 3^+ \quad 1/2^+ \quad 9/2^+ \quad 9/2^+ \quad 11/2^+ \\ \text{Končno stanje :} & \quad 2^+ \quad 2^- \quad 2^+ \quad 1^- \quad 2^+ \quad 3^- \quad 1/2^- \quad 3/2^- \quad 1/2^- \quad 1/2^+ \end{aligned}$$

10.2 V spodnji tabeli so za nekatera jedra navedene naslednje količine: energija (E) razpolovni čas ($t_{1/2}$) in konverzijski koeficient (α) prvega vzbujenega stanja ter vrtilna količina in parnost (I^P) osnovnega stanja. Jedro $^{10}\text{B}^{**}$ (=drugo vzbujeno stanje) razpada samo v prvo vzbujeno stanje. Jedro ^{34}Cl razpada s 46% z razpadom gama in s 56% z beta. Povsod določi tip in multipolnost razpada gama ter vrtilno količino in parnost vzbujenega stanja!

Jedro	E (MeV)	$t_{1/2}$	α	I^P
${}^7\text{Li}$	0,478	$8 \cdot 10^{10}$ s		$3/2^-$
${}^{10}\text{B}$	0,7173	$1,01 \cdot 10^{-9}$ s		3^+
${}^{10}\text{B}^{**}$	1,740	$1,5 \cdot 10^{-10}$ s		
${}^{24}\text{Na}$	0,4723	$2,00 \cdot 10^{-2}$ s		4^+
${}^{34}\text{Cl}$	0,143	32,4 minut	0,14	0^+
${}^{111}\text{Cd}$	0,247	$8 \cdot 10^{-8}$ s	0,034	$1/2^+$
${}^{113}\text{In}$	0,39	1,6 ure	0,6	$9/2^+$
${}^{114}\text{In}$	0,192	50 dni	2	5
${}^{137}\text{Ba}$	0,663	2,6 minut	0,097	$3/2^+$
${}^{198}\text{Hg}$	0,411	$5 \cdot 10^{-11}$ s	0,031	0^+
${}^{204}\text{Pb}$	0,905	67 minut	0,06	0^+

10.3 Vodikova jedra, ki so v magnetnem polju 10 T orientirana v obratno smer kot \vec{B} , lahko preskočijo v stanje paralelno z \vec{B} s spontano emisijo radiofrekvenčnega fotona. Kakšen je tip in multipolnost tega prehoda? Kolikšen je razpolovni čas?

10.4 Pri neken jedru razpada drugo vzbujeno stanje z dvema zaporednima razpadoma gama po naslednji razpadni shemi:

$$\begin{array}{c}
 \hline
 0^+ \\
 \downarrow \gamma_1 \\
 \hline
 1^+ \\
 \downarrow \gamma_2 \\
 \hline
 0^+ \\
 \hline
 \end{array}$$

Nariši kotno korelacijo med obema žarkoma gama! Upoštevaj, da lahko vmesno stanje zavzame 3 možne orientacije (sešteti moraš vse tri verjetnosti)!

5.1.11 Razpad beta

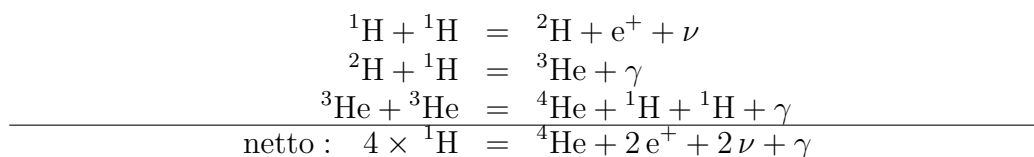
11.1 Kolikšna je verjetnost, da pride antinevtrino z energijo 1 MeV srečno skozi Sonce? Presek za absorpcijo antinevtrina v vodiku je pri tej energiji 10^{-19} bn. Za oceno smeš predpostaviti, da je Sonce samo iz vodika. Premer Sonca je $1,4 \cdot 10^9$ m, gostota pa okrog 1000 kg/m^3 .

11.2 Do kakšne reakcije vodi absorpcija nevtrina v ${}^{14}\text{N}$ in do kakšne reakcije vodi absorpcija antinevtrina v ${}^{14}\text{N}$? Kolikšna sta praga za ti dve reakciji?

11.3 Kolikšen je fluks antinevtrinov 10 m stran od reaktorja z močjo 1 MW? Število antinevtrinov, ki sledijo vsakemu razcepu, ocenimo s številom

razpadov beta, ki jih potrebuje tipična razcepna produkta, da postaneta stabilna.

11.4 Kolikšen je na Zemlji fluks nevtrinov, ki pridejo iz Sonca, če je solarna konstanta $1,3 \text{ kW/m}^2$? Predpostavi, da nastane vsa sončna energija po ciklusu



11.5 Določi tip in stopnjo prepovedanosti za razpad beta, če poznaš vrtilno količino in parnost začetnega in končnega stanja:

Začetno stanje : $0^+ \quad 1/2^+ \quad 0^+ \quad 1/2^+ \quad 1^+ \quad 3^+ \quad 4^+ \quad 3^+ \quad 4^- \quad 1^+ \quad 1^+ \quad 7/2^+$
 Končno stanje : $0^+ \quad 1/2^+ \quad 0^- \quad 1/2^- \quad 1^- \quad 0^+ \quad 0^+ \quad 0^- \quad 1^+ \quad 3^+ \quad 0^+ \quad 3/2^-$

11.6 Izračunaj Fermijev in Gamow-Tellerjev matrični element za razpad nevtrona!

11.7 Izračunaj Fermijev in Gamow-Tellerjev matrični element za razpad ${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N}^* + e^+ + \text{nevtrino}$ (obe jedri imata vrtilno količino in parnost 0^+).

11.8 Izračunaj funkcijo $f(Z, W_0)$ za primer, da je $Z = 0$ in
 a) W_0 mnogo manjši od $m_e c^2$
 b) W_0 mnogo večji od $m_e c^2$.

11.9 Izračunaj vrednost $ft_{1/2}$ za nevtron in za ${}^{40}\text{K}$!

n: $t_{1/2} = 11,7 \text{ min}, \quad W_0 = 0,782 \text{ MeV}$
 ${}^{40}\text{K}$: $t_{1/2} = 1,3 \cdot 10^9 \text{ let}, \quad W_0 = 0,63 \text{ MeV}$

11.10 Kakšna bi bila oblika spektra beta, če bi poleg elektrona odletela dva nevtralna delca z maso 0?

11.11 Nariši spekter elektronov iz razpada ${}^{32}\text{P}$ ($t_{1/2} = 14,32$ dni) v Kurijejevem diagramu ter določi maksimalno energijo W_0 ! Fermijevo funkcijo $F(Z, W)$ poišči v tabelah. Spekter je podan v merilu, ki ga direktno odčitamo pri magnetnem spektrometru (magnetna poljska gostota \times radij tira elektrona) ter ga moramo še pretvoriti v energijsko skalo:

$B \cdot r(10^{-4}\text{Tm})$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Rel.intenziteta	14	27	42	58	76	91	94	91	82	68	49	31	12	3

Izračunaj (z numerično integracijo) tudi vrednost $ft_{1/2}$!

11.12 Za jedra ${}^9\text{Li}$, ${}^{10}\text{Be}$, ${}^{10}\text{C}$, ${}^{16}\text{N}$, ${}^{19}\text{O}$, ${}^{24}\text{Na}$, ${}^{26}\text{Al}$ in ${}^{38}\text{Cl}$ privzemi, da še ni znana vrtilna količina in parnost osnovnega stanja. Določi ju s študijem razpada beta! Razpadne sheme poišči na internetu! Za vse razpade beta, po katerih razpadajo navedena jedra, izračunaj vrednost $ft_{1/2}$ ter določi tip in red prepovedanosti. Vrtilno količino in parnost razpadajočega jedra potem določiš z izbirnimi pravili. Če je več konkurenčnih razpadov (v različna končna vzbujena stanja), upoštevaj vse te informacije, da najdeš po možnosti enolično rešitev.

Dodatni podatek pri ${}^{26}\text{Al}$: oblika spektra kaže na prepovedan čisti GT prehod.

5.1.12 Jedrske reakcije

12.1 Presek za reakcijo ${}^{40}\text{Ca} + \gamma \rightarrow {}^{39}\text{K} + \text{p} - 8,3 \text{ MeV}$ je 0,025 b pri energiji žarkov gama 14 MeV. Kolikšen je presek za inverzno reakcijo? Vrtilna količina ${}^{40}\text{Ca}$ je 0, ${}^{39}\text{K}$ pa 3/2.

12.2 Presek za reakcijo ${}^1\text{H}(n, \gamma){}^2\text{H}$ za počasne nevtrone s hitrostjo v je $620 \text{ b ms}^{-1} \cdot (1/v)$. Kolikšen je presek za inverzno reakcijo, če je energija gama 1 eV nad pragom? Kako se presek za inverzno reakcijo spreminja z energijo (ali hitrostjo) izhajajočih nevtronov?

12.3 Presek za absorpcijo nevtronov v indiju ${}^{115}\text{In}$ ima resonanco pri energiji nevtronov 1,44 eV. Maksimalni presek je 27 000 b, širina resonance (pri polovični višini) pa je 0,042 eV. Kolikšen je absorpcijski presek pri energiji nevtronov 1,00 eV?

12.4 Na indijevo tarčo pada curek nevtronov, ki imajo do energije 5 eV zvezen spekter s konstantno porazdelitvijo 10^{10} nevtronov/eV s. Koliko reakcij dobimo na sekundo, če je tarča debela

a) 10^{-3} kg/m^2

b) 1 kg/m^2 (za ta primer samo oceni!).

12.5 V nalogi 12.3 so podatki za reakcijo ${}^{115}\text{In}(n, \gamma){}^{116}\text{In}$. Izračunaj še parcialni širini za n in za gama. Kolikšen je maksimalni presek za elastično sipanje nevtronov in za elastično sipanje gama? Vrtilna količina ${}^{115}\text{In}$ je 9/2, ${}^{116}\text{In}$ (osnovno stanje) $I = 5$, za vzbujeno stanje pa ni znana (za račun privzemi $I = 5$).

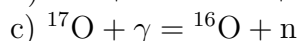
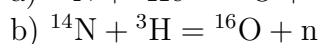
12.6 Določi parametre za Breit-Wignerjevo formulo (resonančno energijo, Γ in $\Gamma_n^r \times \Gamma_r^\gamma$) pri resonanci $^{113}\text{Cd}(n, \gamma)^{114}\text{Cd}$.

w [eV]	0,01	0,02	0,03	0,05	0,08	0,10	0,15
σ [b]	3500	2700	2500	2500	2800	3600	7000

w	0,20,	0,30	0,40	0,50	0,70	1,00
σ	7000	1500	300	150	50	22

Podatki: ^{113}Cd : $I = 1/2$; ^{114}Cd : $I = 0$; ^{114}Cd : $I = ?$ (privzemi $I = 1$)

12.7 Pri naslednjih reakcijah lahko nastane ^{16}O v osnovnem stanju ali v vzbujenem stanju:



Za vse tri reakcije zapiši izobarne spine tistih stanj pri ^{16}O , ki nastanejo z veliko verjetnostjo!

12.8 Oglej si shemo vzbujenih stanj jedra ^8Be . Nekatera so zelo kratkoživa, kar opazimo po tem, da so zelo „široka“ (imajo zelo nedoločeno energijo). Ta stanja razpadajo z razpadom alfa. Druga stanja pa so zelo ozka in razpadajo samo z razpadom gama. Razloži to bodisi z ohranitvijo izobarnega spina bodisi z ohranitvijo vrtilne količine, parnosti in statistike.