University *of Ljubljana*
Faculty *of Mathematics and Physics*

Modelska Analiza 1

1. naloga - Model vožnje skozi semafor: Variacijska metoda

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 7.10.2013

Naloga:

Varčno vožnjo lahko definiramo s pogojem, da je pospeševanja in zaviranja čim manj. To lahko dosežemo z minimizacijo kumulativnega kvadrata pospeška. Iščemo optimalni režim vožnje v situaciji, ko poskušamo razdaljo do semaforja prevoziti ravno v trenutku, ko se prižge zelena luč. Z uporabo variacijskega računa sem dobil analitične rešitve za dan problem, kjer sem v razičnih razdelkih predpostavil različne pogoje. Nalogo sem reševal v matematičnem orodju Mathematica, kjer sem rezultate prav tako grafično prikazal.

1 Brezdimenzijska oblika in fiksen končni robni pogoj

Denimo, da imamo avto na razdalji L od semaforja. Čas, ko je avto na tej razdalji postavimo na 0, na semaforju pa se prižge zelena luč ob času T. Avto ima neko začetno hitrost v_0. Zanima nas torej vožnja, ki bo zagotovila najbolj gladko vožnjo do semaforja, kar bomo upoštevali tako, da je kumulativni kvadrat pospeška minimalen. Zanima nas torej funkcija hitrosti od časa $v(t)$, ki bo zadoščala naslednjima pogojema:

$$S = \int_0^T (\dot{v}(t))^2 \,\mathrm{d}t = \min, \tag{1}$$

$$\int_0^T v(t)\mathrm{d}t = L, \tag{2}$$

kjer pogoj (1) definiramo kot akcijo, ki mora biti minimalna, s pogojem (2) pa zagotovimo, da se bo zelena luč prižgala točno takrat, ko avto pripelje do njega. Imamo torej variacijski problem, ki se ga lotimo s pomočjo Euler-Lagrangevih enačb, kjer uporabimo Lagrangevo funkcijo:

$$\mathcal{L} = \dot{v}^2 + \lambda v, \tag{3}$$

kjer drugi člen predstavlja pogoj (2) v obliki Lagrangevega multiplikatorja. Tedaj prepišemo problem kot :.

$$S = \int_0^T \mathcal{L}\mathrm{d}t = \min, \tag{4}$$

rešujemo pa ga preko enačbe:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{v}}\right) = 0. \tag{5}$$

Prepišimo sedaj problem v brezdimenzijsko obliko, saj imamo tako univerzalne enačbe, količine pa so brez enot in so tako splošne. Definirajmo brezdimenzijski čas brezdimenzijsko hitrost kot:

$$x = \frac{t}{T}, \qquad y = \frac{v}{L/T}. \tag{6}$$

Tako definiran čas x teče od 0 do 1, hitrost $y = 1$ pa ustreza hitrosti, pri kateri bi z enakomerno hitro vožnjo prišli do semaforja ravno ob pravem času, torej ob času $x = 1$. Problem sedaj v brezdimenzijski luči zapišemo kot:

$$S = \int_0^1 \mathcal{L}(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\dot{y}^2 - \lambda y\right)\mathrm{d}x = \min, \tag{7}$$

pri pogoju

$$\int_0^1 y\mathrm{d}x = 1. \tag{8}$$

Vredno je opomniti, da simbol {} sedaj pomeni odvod po spremenjivki x. EL enačbe iz (5) tedaj zapišemo kot:

$$2\ddot{y} + \lambda = 0. \tag{9}$$

Če se vrnemo k enačbi (9) in jo dvakrat integriramo, dobimo relacijo:

$$y(x) = -\frac{\lambda}{4}x^2 + Ax + B, \tag{10}$$

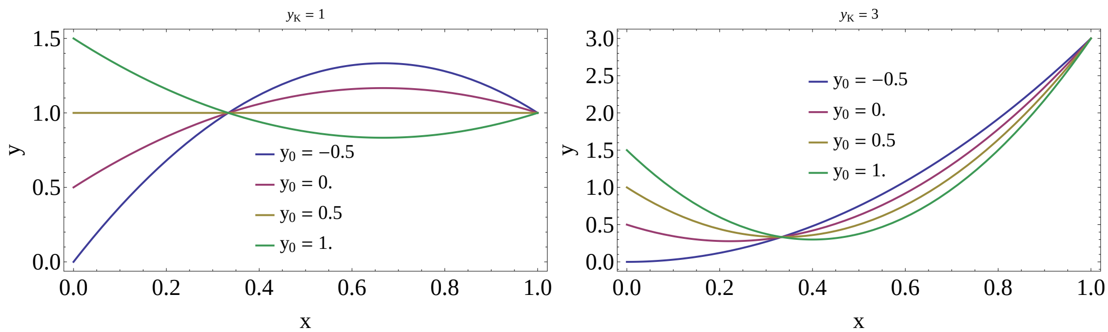
kjer sta a in b konstanti, ki ju določimo iz robnih pogojev. Iz začetnega robnega pogoja dobimo $y(0) = y_0 = B$. Če privzamemo fiksen končni robni pogoj dobimo $y(1) = y_K = -\frac{\lambda}{4} + A + y_0$, iz česar izrazimo $A = y_K - y_0 + \frac{\lambda}{4}$. Ostane nam le še Lagrangev multiplikator λ, ki ga določimo s pogojem (2) :

$$\int_0^1 y\mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{12} + \frac{1}{2}\left(y_K - y_0 + \frac{\lambda}{4}\right) + y_0 = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = 12(2 - y_0 - y_K). \tag{11}$$

Končna rešitev pri fiksnih robnih pogojih se tako glasi:

$$\boxed{y_F(x) = 3x^2(1 + y_0) - 4xy_0 + y_0} \tag{12}$$

Oglejmo si obliko rešitve za nekaj različnih primerov y_0 pri nekaj različnih končnih hitrostih y_K :



Vidimo, da je v vseh primerih končna hitrost fiksna, kot smo nastavili, vmes pa imamo parabolo, kateri je prišteta ali odšteta neka premica. Oblika parabole se spreminja v skladu z robnima vrednostma tako, da bo površina pod krivuljo vedno enaka L.

2 Periodični robni pogoj

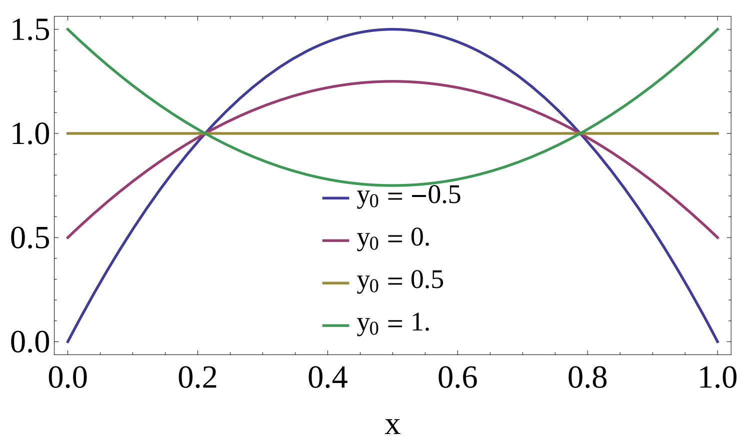
Če nadaljujemo iz koraka (10) in privzamemo periodične pogoje, potem velja $y(1) = y(0)$, tako da dobimo $y_0 = -\frac{\lambda}{4} + A + y_0$, iz česar izrazimo $A = \frac{\lambda}{4}$. Ostane nam le še Lagrangev multiplikator λ, ki ga določimo s pogojem (2) :

$$\int_0^1 y\mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda}{8} + y_0 = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = 24\,(1 - y_0)\,. \tag{13}$$

Končna rešitev pri periodičnih robnih pogojih se tako glasi:

$$\boxed{y_P(x) = 6x\,(1 - x)\,(1 - y_0) + y_0} \tag{14}$$

Oglejmo si obliko rešitve za nekaj različnih primerov y_0 :



Vidimo, da je res v vseh primerih končna hitrost enaka začetni, vmes pa nimamo nič drugega kot parabole. Oblika parabole se spreminja v skladu z robnima vrednostma tako, da bo površina pod krivuljo vedno enaka L. Vidimo, da so krivulje simetrične okoli sredinskega časa $x = 0.5$, pospeški pa so enaki in največji na robovih, medtem ko so ob času $x = 0.5$ enaki 0. To še zdaleč ni konec naloge, zato si poglejmo še kakšne fizikalno bolj zanimive probleme.

3 Dinamični robni pogoj

V tem primeru dopuščamo spremenljivo končno hitrost ob času $x = 1$. Matematično tak pogoj zapišemo kot:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}|_{x=1} = 2\dot{y}(1) = 0, \tag{15}$$

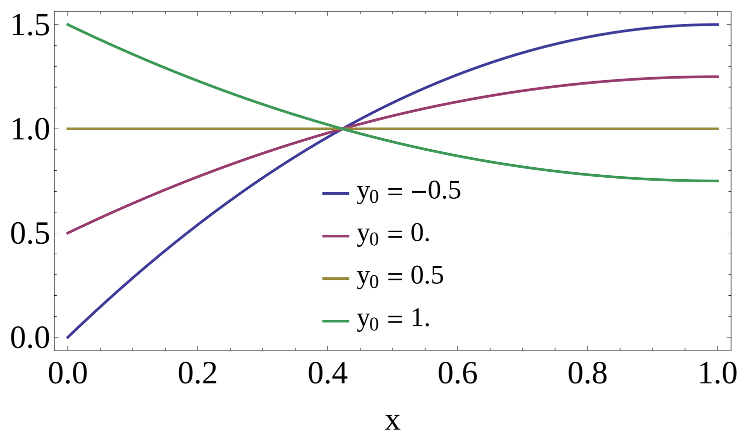
kar nam da $\dot{y}(1) = 0 = -\frac{\lambda}{2} + A$. Ker začetni pogoj ostane enak, nam moramo določiti le še Lagrangev multiplikator, ki ga zopet določimo s pogojem (2) :

$$\int_0^1 y \mathrm{d}x = -\frac{\lambda}{12} + \frac{\lambda}{4} + y_0 = 1 \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = 6\left(1 - y_0\right). \tag{16}$$

Končna rešitev pri dinamičnem končnem robnem pogoju se tako glasi:

$$\boxed{y_D(x) = 3x\left(1 - \frac{x}{2}\right)(1 - y_0) + y_0} \tag{17}$$

Oglejmo si obliko rešitve za nekaj različnih primerom y_0 :



Vidimo, da imamo v tem primeru res dinamičen robni pogoj, saj se končne hitrosti spreminjajo za različne začetne hitrosti. Funkcija je ponovno parabola, razlika je le, da v tem primeru funkciji priševamo ali odštevamo linearno funkcijo. Opazimo, da se velikost pospeška manjša s časom, ne glede na začetno hitrost, ta vpliva le na predznak pospeška. To je drugače kot pri prejšnjem primeru, kjer je hitrost bila simetrična okoli sredinskega časa $x = 0.5$. Opazimo tudi, da višja kot je začetna hitrost, nižja je končna, kar je v skladu z ohranjanjem površine pod krivuljo. Lahko bi zvišali začetno hitrost tako, da bi bila končna negativna, kar si lahko predstavljamo kot primer kjer avto prevozi semafor ob času $x < 1$ ob rdeči luči, nato pa se ustavi in vzvratno pripelje do semaforja ravno ob zeleni luči. Takšne rešitve seveda niso dovoljene, zato jih nisem upošteval. Mejno začetno hitrost, kjer se to ne zgodi, dobimo tako, da izračunamo $y(\frac{1}{2}) = 0$, kar nam da rešitev $y_0 = 3$. Pozorno oko tudi opazi linearno odvisnost med začetnimi in končnimi hitrostmi, saj so razmiki na vsaki strani enako dolgi. To lahko zapišemo kot funkcijo v obliki:

$$y(1) = \frac{1}{2}\left(3 - y_0\right). \tag{18}$$

4 Višje potence $\dot{y}$

V prejšnjih razdelkih smo v Lagrangevi funkciji $\mathcal{L}$ vedno uporabili kumulativni kvadrat pospeška. V tem razdelku si poglejmo, kako na gladkost vožnje vplivajo višje sode potence pospeška. V tem primeru Lagrangevo funkcijo iz (7) prepišemo kot:

$$\mathcal{L}(x) = (\dot{y})^{2n} - \lambda y, \tag{19}$$

kjer n predstavlja naravno število. EL enačba ima v tem primeru obliko:

$$2n(2n-1)\,(\dot{y})^{2n-2}\,\ddot{y} + \lambda = 0, \tag{20}$$

kar lahko lepše zapišemo kot

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2n\,(\dot{y})^{2n-1}\right) = -\lambda. \tag{21}$$

Po prvi integraciji in izpostavitvi dobimo:

$$\dot{y} = \left(A - \frac{\lambda x}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}. \tag{22}$$

Že v tem koraku lahko upoštevamo dinamični robni pogoj iz (7):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}|_{x=1} = 2n\,(\dot{y}(1))^{2n-1} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad A = \frac{\lambda}{2n}. \tag{23}$$

Po drugi integraciji dobimo:

$$y(x) = -\frac{(2n-1)}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2n} - \frac{\lambda x}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}} + B, \tag{24}$$

kamor vstavimo še začetni pogoj in dobimo:

$$B = y_0 + \frac{2n-1}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}. \tag{25}$$

Ko vse to postavimo nazaj v prvotno enačbo in poenostavimo, dobimo:

$$y(x) = \frac{(2n-1)}{2n}\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\left(1-(1-x)^{\frac{2n}{2n-1}}\right) + y_0. \tag{26}$$

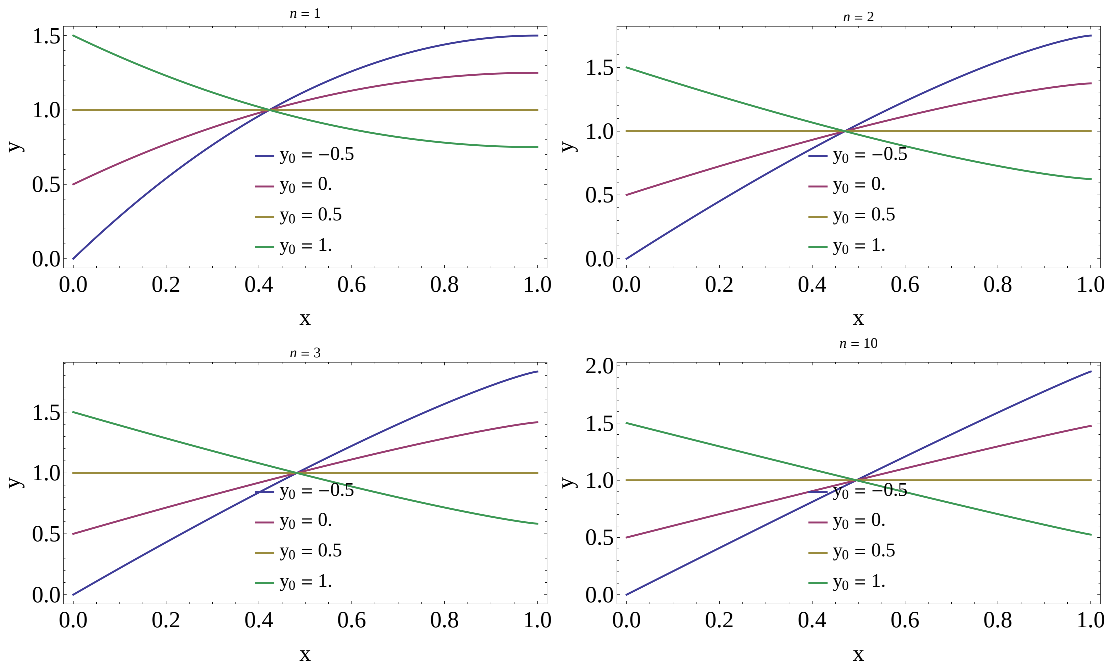
Za končno rešitev moramo upoštevati le še pogoj (2) s katerim dobimo parameter :

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = y_0 + \frac{2n-1}{2n}\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}\frac{2n}{4n-1} = 1. \tag{27}$$

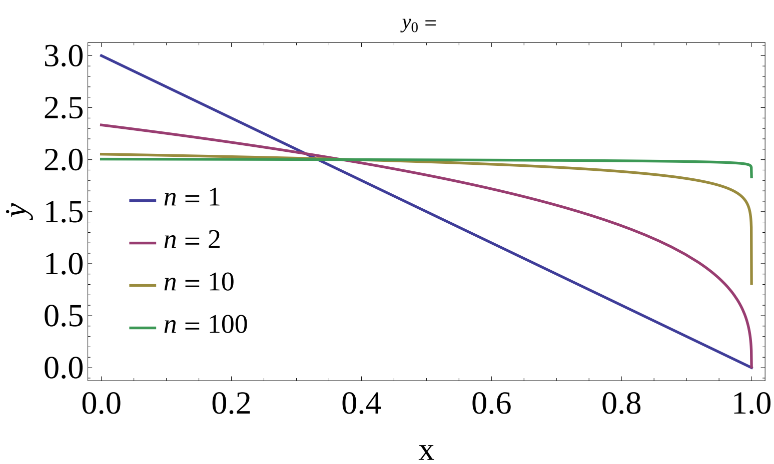
Izrazimo lahko le $\left(\frac{\lambda}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}} = (1-y_0)\,\frac{4n-1}{2n-1}$, saj ta edini nastopa v končni rešitvi. Tako končno dobimo rešitev:

$$\boxed{y_n(x) = \frac{4n-1}{2n}\,(1-y_0)\left(1-(1-x)^{\frac{2n}{2n-1}}\right) + y_0.} \tag{28}$$

V limiti $n \to \infty$ dobimo $y_\infty(x) = 2x(1-y_0) + y_0$, kar predstavlja premico. Oglejmo si obliko rešitev za različne y_0 pri nekaj fiksnih vrednostih n :



Vidimo, da funkcije res konvergirajo k premicam. Poglejmo si še funkcijo $\dot{y}(x)$:



Vidimo, da za večje vrednosti parametra n funkcija konvergira h konstanti. To lahko razumemo tako, da večja vrednost parametra n pomeni večje omejitve na spreminjanje pospeška, saj za večje vrednosti n pospešek konvergira h konstanti in se tako med vožnjo ne spreminja. Večje vrednosti n torej vse močneje omejujejo spremembe hitrosti.

5 Omejitev hitrosti

Zaradi enostavnosti ostanimo pri kumulativnem kvadratu pospeška, na ostale potence pa pozabimo. V tem razdelki bomo omejili še hitrosti, kar je smiselno, saj so hitrosti omejene tudi na cestah. Hitrost tudi v tem primeru omejimo v obliki kumulativnega kvadrata, saj se s tem znebimo velikih fluktuacij. Lagrangevo funkcijo tako zapišemo v obliki:

$$\mathcal{L}(x) = (\dot{y})^2 + \mu^2 y^2 - \lambda y, \tag{29}$$

kjer parameter μvpliva na to, kako močno omejimo hitrost. EL enačba je enaka:

$$\ddot{y} - \mu^2 y = -\frac{\lambda}{2}. \tag{30}$$

Z znanimi nastavki pridemo do rešitve

$$y(x) = \frac{\lambda}{2\mu^2} + Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}. \tag{31}$$

Zopet upoštevamo dinamični robni pogoj:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}|_{x=1} = \dot{y}(1) = Ae^{\mu} - Be^{-\mu} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad B = Ae^{2\mu} \tag{32}$$

in še začetni robni pogoj:

$$y(0) = y_0 = \frac{\lambda}{2\mu^2} + A\left(1 + e^{2\mu}\right) \qquad \longrightarrow \qquad A = \left(y_0 - \frac{\lambda}{2\mu^2}\right)\frac{1}{(1 + e^{2\mu})}. \tag{33}$$

Če upoštevamo še pogoj v (2), dobimo:

$$\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x = \frac{\lambda}{2\mu^2} + \left(y_0 - \frac{\lambda}{2\mu^2}\right)\frac{\left(e^{2\mu} - 1\right)}{\mu\left(1 + e^{2\mu}\right)} = 1, \tag{34}$$

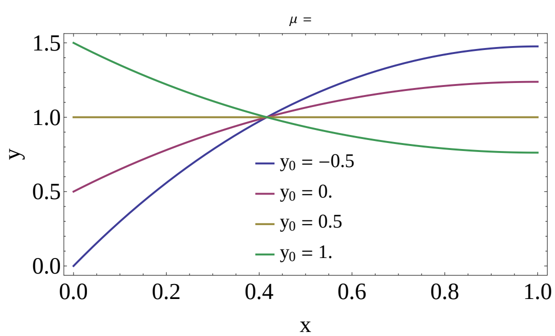
kar nam v nekaj korakih da:

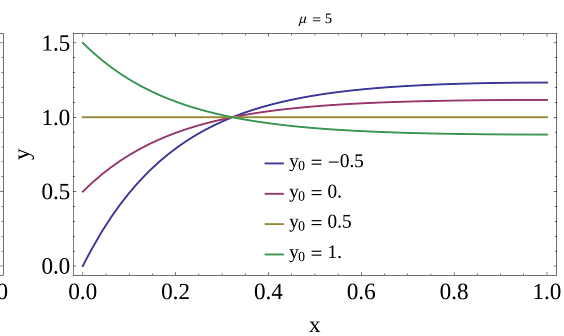
$$\frac{\lambda}{2\mu^2} = \frac{\mu - y_0 \tanh(\mu)}{\mu - \tanh(\mu)}. \tag{35}$$

Končno rešitev zapišemo kot:

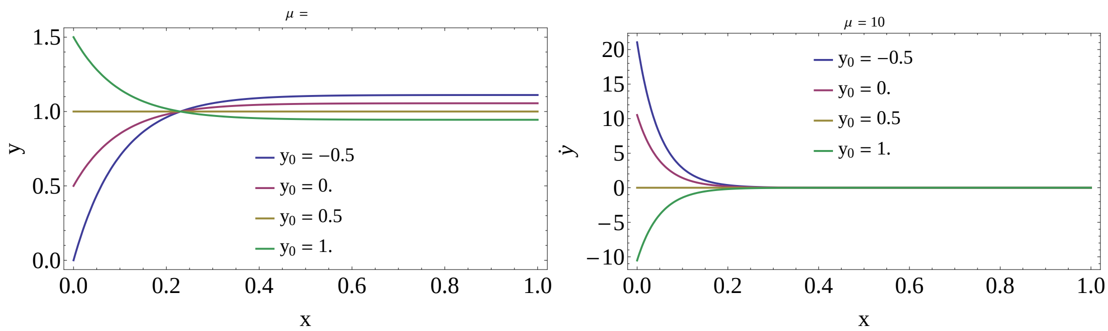
$$\boxed{y_\mu(x) = \frac{\mu - y_0 \tanh(\mu)}{\mu - \tanh(\mu)} + \frac{\mu(y_0 - 1)}{\mu - \tanh(\mu)}\frac{e^{\mu x} + e^{2\mu - \mu x}}{1 + e^{2\mu}}.} \tag{36}$$

Oglejmo si rešitve še za ta primer za različne začetne hitrosti, kjer spreminjamo parameter μ :

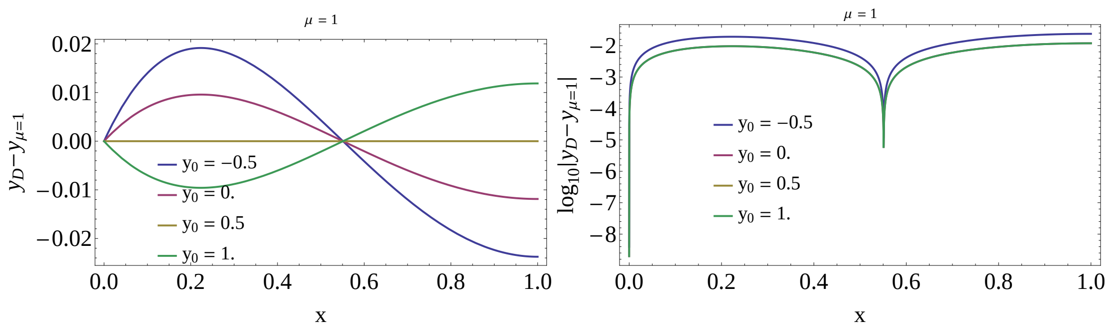




Vidimo, da je pri vrednosti parametra $\mu = 1$ situacija zelo podobna, če ne celo enaka rešitvi v razdelku 3, kjer smo imeli prvič dinamični robni pogoj. Z večanjem parametra μ povzročimo, da ima minimiziranje kumulativnega kvadrata hitrosti vedno večjo prednost pred minimiziranjem kumulativnega kvadrata pospeška, kot je razvidno iz grafov. Z večjim parametrom μ se funkcija hitreje in močneje približa vrednosti $y = 1$,nato pa dobimo praktično konstantno hitrost. Poglejmo si še hitrost in pospešek v odvisnosti od časa za vrednost parametra $\mu = 10$:



Grafa potrjujeta zgoraj napisano, da se hitrost približuje vrednosti $y = 1$ in da je pri večjih vrednostih parametra μ minimizacija kumulativnega kvadrata hitrosti prevladujoča, saj so pospeški na začetku precejšnji. Poglejmo si še razliko med funkcijo s parametrom $\mu = 1$ in funkcijo iz razdelka 2:



Vidimo, da dejansko funkciji nista enaki, vendar sta si po vrednosti zelo blizu. V logaritemski skali je opazna tudi neka periodičnost, ki pa tu verjetno nima globljega pomena.

6 Naključen čas

V realnem primeru seveda ne poznamo točnega časa, kdaj se bo na semaforju prižgala zelena luč. To dejstvo prinese v naše enačbe element verjetnosti, zaradi tega pa se enačb ne da več analitično rešiti. Če vemo kakšna je oblika časovne porazdelitve, lahko približno sklepamo in posledično odločamo o drznosti naše vožnje. Imamo nek čas T, ki je isti kot v zgornjih enačbah, le da v tem primeru T predstavlja čas, ko se bo prižgala na semaforju zelena luč z verjetnostjo p, ki jo določimo preko:

$$p = \int_0^T \omega(t)\mathrm{d}t, \tag{37}$$

kjer $\omega(t)$ predstavlja časovno porazdelitev verjetnosti. Verjetnost, da bi prevozili rdečo luč, je v tem primeru $1 - p$.