

University of *Ljubljana*
Faculty of *Mathematics and Physics*



Modelska Analiza 1

4. naloga - Populacijski modeli

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 3.11.2013

Naloga:

Pri tej nalogi smo se seznanili s populacijskimi modeli, ki so primerni za reševanje dinamičnih problemov. Imeli smo tri probleme, populacijski model plenilec-plen, model laserja in model epidemije. V vsakem delu sem nastavljal problem v obliki sistema diferencialnih enačb, ki sem ga nato rešil z metodo Runge-Kutta 4. Vsak problem sem analiziral in zanj preštudiral odvisnosti od posameznih parametrov, ogledal pa sem si tudi fazne diagrame modela in njegove stacionarne točke. Nalogo sem reševal v matematičnem orodju MATLAB, s katerim sem rešitve tudi grafično predstavil.

Del I

Model plenilec-plen

1 Naloga

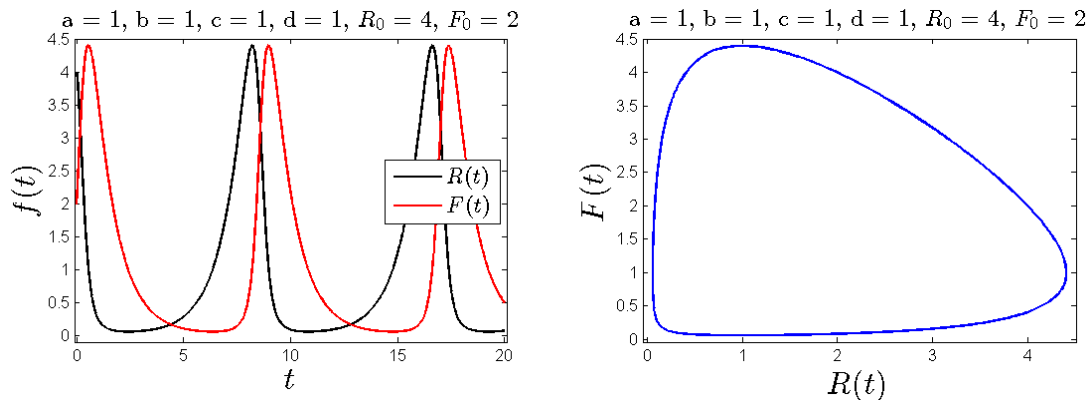
V prvem delu naloge sem naredil analizo standardnega determinističnega modela plenilec (lisica) - plen (zajec). Narisal in analiziral sem fazne diagrame modela z različnimi parametri, poiskal stacionarne točke in raziskal periode modela v odvisnosti od začetnega stanja. Problem zapišemo kot sistem dveh dveh diferencialnih enačb 1. reda:

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \alpha R - \beta RF, \\ \dot{F} &= -\gamma F + \delta RF.\end{aligned}\tag{1}$$

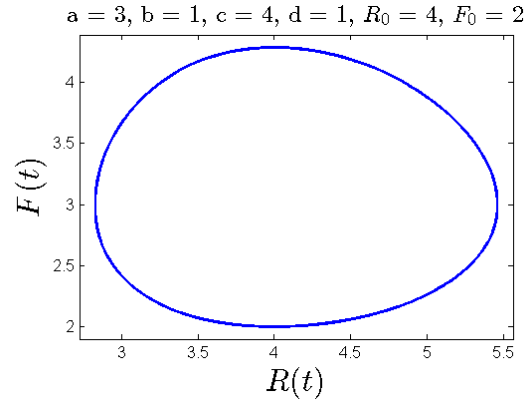
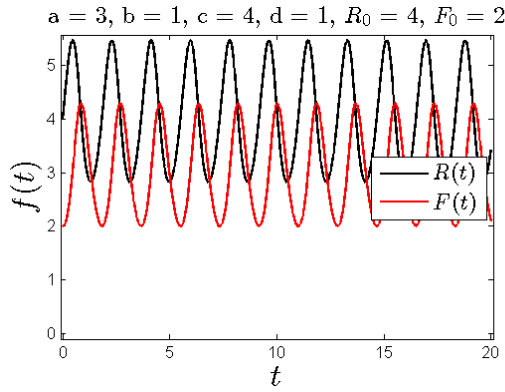
Poleg začetnih količin plenilca in plena, imamo tu še 4 parametre α , β , γ , δ , ki predstavljajo različne oblike modela. Parametra α in γ predstavljata rodnost plena in umrljivost plenilca, parametra β in δ pa smrt plena in rojstvo plenilca, kjer člen RF predstavlja srečanje teh dveh vrst.

2 Osnovne rešitve

Začetnih in končnih pogojev tega problema ne poznamo, zato si lahko parametre prosto izberemo tako, da so grafično najbolj zanimivi. Za naslednje rešitve sem si izbral končni čas $t_k = 20$ pri širini koraka $h = 0.01$ in vrednostih parametrov $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$, kjer je bilo na začetku plena $R_0 = 4$ in plenilcev $F_0 = 2$:



Vidimo, da so rešitve periodične funkcije, ki so vsota različnih frekvenc. Ko je količina plena največja, začne naraščati količina plenilcev, saj imajo na voljo veliko hrane. Plen zato začne upadati, za njim pa tudi število plenilcev, saj jim primanjkuje hrane. Na grafu je opaziti ta fazni zamik, kjer sprememba pri plenilcih sledi spremembi pri plenu. Desni graf prikazuje fazni diagram rešitve. Vidimo, da se amplituda in perioda ohranjata, sama oblika faznega diagrama pa je precej zanimiva, saj ni simetrična. Opazimo, da ko število plenilcev doseže maksimum, količina plena hitro upade, ko pa ta doseže minimum. Fazni diagram torej poteka v nasprotni smeri urinega kazalca. Oglejmo si še primer, kjer povečamo vrednosti parametrov α in γ :



V tem primeru je funkcija bolj podobna pravilnemu sinusnemu nihanju, kar vidimo tudi po obliki faznega diagrama, ki je v tem primeru podoben elipsi. Očitno smo se s tako izbiro parametrov nekoliko približali stacionarni vrednosti. V naslednjih razdelkih si oglejmo stacionarne rešitve in brezdimenzijsko obliko problema.

3 Stacionarne točke

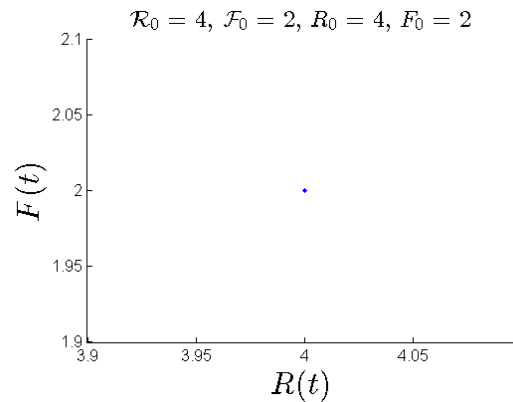
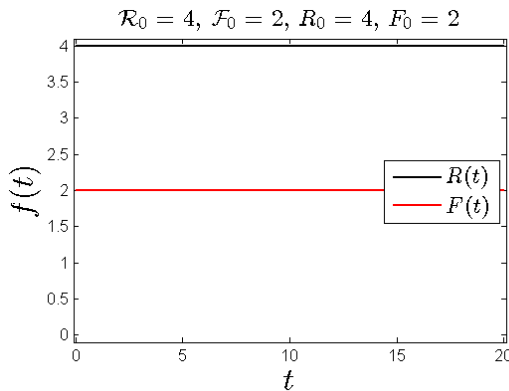
Ravnovesje imamo v primeru, ko velja $\dot{R}(t) = \dot{F}(t) = 0$. Rešitev tega problema nam da naslednje enakosti:

$$R(t) = \mathcal{R}_0 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad F(t) = \mathcal{F}_0 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad (2)$$

kjer sta konstanti \mathcal{R}_0 in \mathcal{F}_0 „priporočeni“ vrednosti količine plena in plenilcev, s katerima dosežemo stacionarno stanje. Našo prvotno enačbo lahko tako prepisemo v naslednjo obliko:

$$\frac{\dot{R}}{\alpha} = R - \frac{RF}{\mathcal{F}_0}, \quad \frac{\dot{F}}{\gamma} = -F + \frac{RF}{\mathcal{R}_0}. \quad (3)$$

Čeprav sta tu še vedno pristonni konstanti α in γ , ju lahko postavimo kar na 1, saj tako ali tako ne poznamo ozadja problema. Z izbiro začetnih pogojev $R_0 = \mathcal{R}_0$ in $F_0 = \mathcal{F}_0$ tko dobimo stacionarno stanje:



Vidimo, da so količine v tem primeru konstante, fazni diagram pa je kar točka v $(\mathcal{R}_0, \mathcal{F}_0)$.

4 Brezdimenzijska oblika problema

Z enačbami v (3) lahko tudi nadaljujemo in predstavimo problem v brezdimenzijski obliki:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\dot{R}(t)}{\mathcal{R}_0} = \alpha x \left(1 - \frac{L}{\mathcal{L}_0}\right) = \alpha x(1 - y), \\ \dot{y} &= \frac{\dot{F}(t)}{\mathcal{F}_0} = -\gamma y(1 - x). \end{aligned} \quad (4)$$

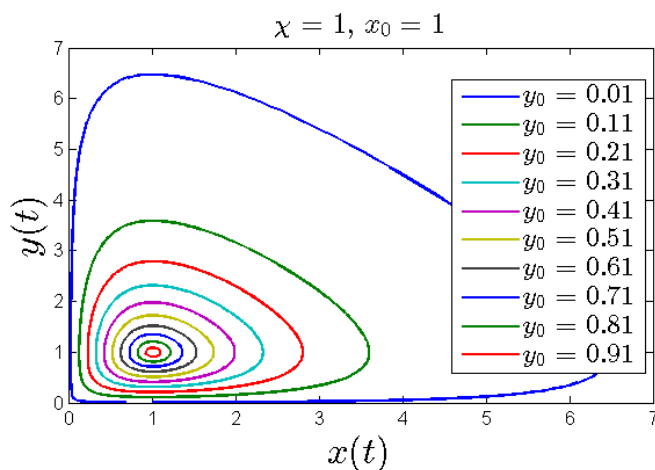
Uveljaviti moramo tudi brezdimenzijski čas:

$$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \sqrt{\alpha\gamma}, \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} = \chi. \quad (5)$$

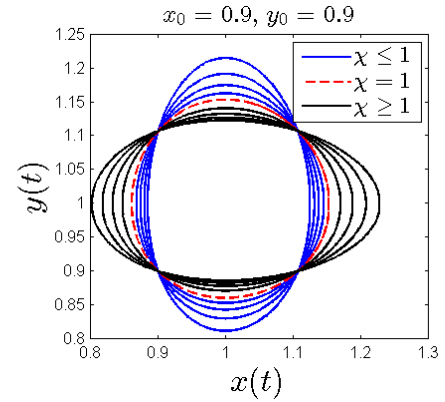
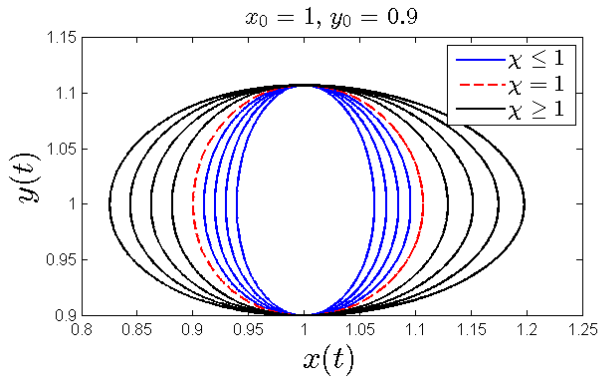
Tako dobimo končno brezdimenzijsko obliko problema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \chi x(1 - y), \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\chi} y(1 - x). \end{aligned} \quad (6)$$

Problem smo tako poenostavili na en prost parameter in dva začetna pogoja. Oglejmo si vpliv različnih količin plenilcev pri ravnovesni vrednosti plena $x_0 = 1$ in $\chi = 1$:



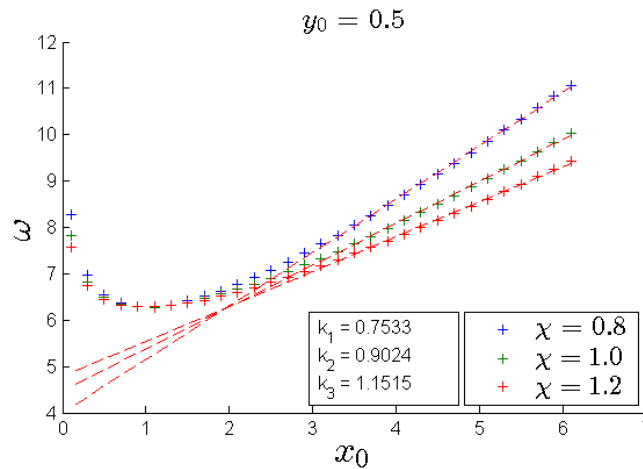
Z bližanjem prostega parametra proti ravnovesni vrednosti, se sistem seseda v stacionarno točko (1,1). Pri majhnih vrednostih y_0 imamo velike odmike od stacionarne točke, nihanje pa je nesimetrično, ko pa se vrednosti y_0 bliža ravnovesni, pa se odmik zmanjšuje, nihanje pa postaja vse bolj sinusno, dokler sistem ne doseže ravnovesja. Oglejmo si še vpliv parametra χ na obliko faznega diagrama, kjer je v prvem primeru ena koičina $x(t)$ v ravnovesnem stanju, v drugem pa ni nobena:



Tokrat vidimo, da parameter χ vpliva na eliptičnost faznega diagrama. Na levi sliki, kjer imamo v ravnovesnem stanju količino x , vidimo, da se eliptičnost spreminja le v smeri x , torej se spreminja amplituda količine plena, amplituda količine plenilcev pa ostaja enaka, kar je nekoliko neintuitivno, saj bi naivno predlagali ravno obratno. Na desni sliki, kjer sta obe količini stran od ravnovesne točke, pa imamo spremembo amplitude v obeh smereh. Na obeh grafih je prikazan tudi primer za $\chi = 1$, ki na desni sliki prikazuje pravilno krožnico.

5 Vpliv na periodo sistema

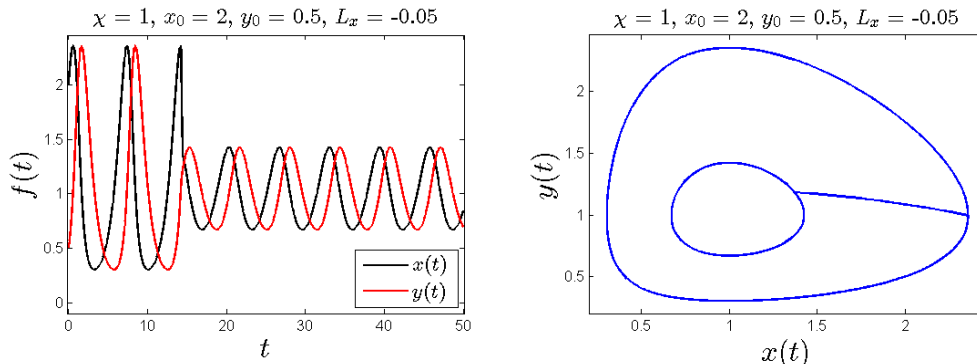
Zanimivo si je tudi ogledati vpliv različnih parametrov na periodo sistema. Periodo sem določil z razliko dveh sosednjih točk, v katerih je izpolnjen pogoj za maksimum ali minimum. Ogledal sem si periodo v odvisnosti od različnega začetnega pogoja x_0 pri fiksni vrednosti $y_0 = 0.5$ za različne vrednosti χ :



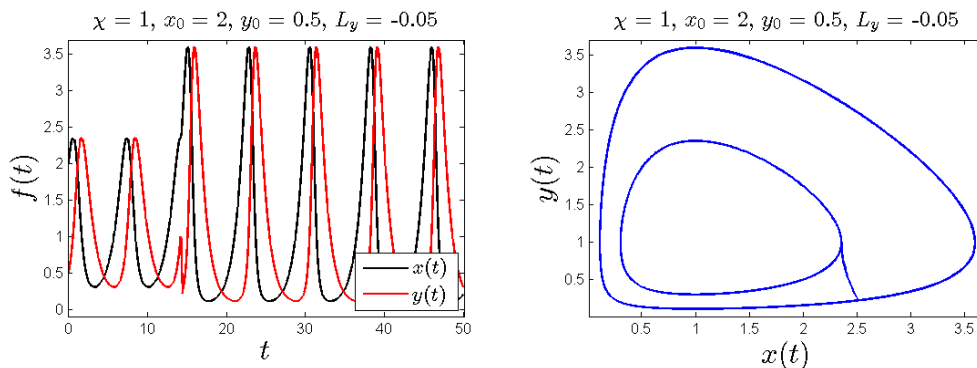
Vidimo, da se perioda v vseh primerih najprej manjša, doseže minimum, nato pa začne linearno naraščati. Minimum je v vseh primerih približno na istem mestu, koeficienti premic pa so tesno povezani s parametrom χ , odstopanja po vsej verjetnosti nastopajo zaradi premajhne količine podatkov za prilagajanje premice.

6 Vpliv lovca na sistem

Kot zanimivost sem v sistem še vključil lovca. Lovec deluje na sistem diskretno in v sistemu ni predstavljen kot dodaten člen v sistemu diferencialnih enačb. Sistem se najprej obnaša tako kot ponavadi, nato pa se začne sezona lova. Recimo, da se začne sezona lova za posamezno vrsto živali v nekem trenutku, ko je število plena maksimalno:



V tem primeru je potekala sezona lova na plen. Vidimo, da je lovec zmanjšal količino plena, ko je bila ta maksimalna. Zaradi tega se plenilci niso toliko namnožili, saj je bilo manj hrane kot ponavadi. Po končani sezoni lova je sistem prešel na drug nivo, kjer je bila amplituda količine plena in plenilcev manjša. Poglejmi si še primer, kjer se se prične sezona lova na plenilce:



Vidimo, da je lovec spet zmanjšal količino plenilcev takrat, ko je bila količina plena maksimalna. Zaradi tega se je plen lahko bolj namnožil, saj je bilo manj nevarnosti. Po končani sezoni lova je sistem spet prešel na drug nivo, kjer je bila amplituda količine plena in plenilcev večja.

Del II

Populacijski model laserja

1 Naloga

V drugem delu naloge sem analiziral populacijski model laserja s konstantnim črpanjem in njegov fazni portret. Tako kot pri prejšnji nalogi sem tudi tu poiskal stacionarno stanje in predstavil problem v brezdimenzijski obliki. Prav tako sem raziskal spreminjanje frekvence in karakterističnega časa relaksacijskih

oscilacij v odvisnosti od moči črpanja. Problem zopet zapišemo kot sistem dveh diferencialnih enačb prvega reda, kjer so a vzbujeni atomi, f pa fotoni:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= -Aaf - Ba + P, \\ \dot{f} &= Aaf - Cf.\end{aligned}\tag{7}$$

Člen $z A$ predstavlja izsevanje fotona, kjer se vzbujen atom sesede v osnovno stanje, člen $z B$ predstavlja spontano emisijo, P predstavlja konstantno črpanje vzbujenih atomov in člen $s C$ predstavlja izgubo fotonov.

2 Stacionarne točke

Podobno kot v prejšnjem delu, lahko tudi tu najdemo stacionarne točke sistema. Rešitvi sta dve:

$$a_{10} = \frac{P}{B} \xrightarrow{P \rightarrow 0} 0, \quad f_{10} = 0,\tag{8}$$

$$a_{20} = \frac{C}{A}, \quad f_{20} = \frac{AP - BC}{AC} \xrightarrow{P \rightarrow 0} -\frac{B}{A}.\tag{9}$$

Rešitev v enačbi (8) je trivialna, v enačbi (9) pa netrivialna. Sistem bo v vseh primerih prešel v eno od teh dveh stacionarnih stanj. Vidimo, da nam stacionarne točke ponujajo lepe izbire za brezdimenzijsko obliko problema.

3 Brezdimenzijska oblika problema

Iz enačbe (9) vidimo, da lahko izberemo:

$$a_0 = \frac{C}{A}, \quad f_0 = \frac{B}{A}\tag{10}$$

in tako prepišemo (7) v brezdimenzijsko obliko:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\dot{a}}{a_0} = -Afx - Bx + \frac{P}{a_0} = -Bx(1+y) + \frac{P}{a_0}, \\ \dot{y} &= \frac{\dot{f}}{f_0} = Aay - Cy = -Cy(1-x).\end{aligned}\tag{11}$$

Tudi tu implementiramo brezdimenzijski čas kot $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{d}{dt} \sqrt{BC}$ in definiramo nov parameter $\chi = \sqrt{\frac{C}{B}}$. Problem tako prepišemo v novo obliko:

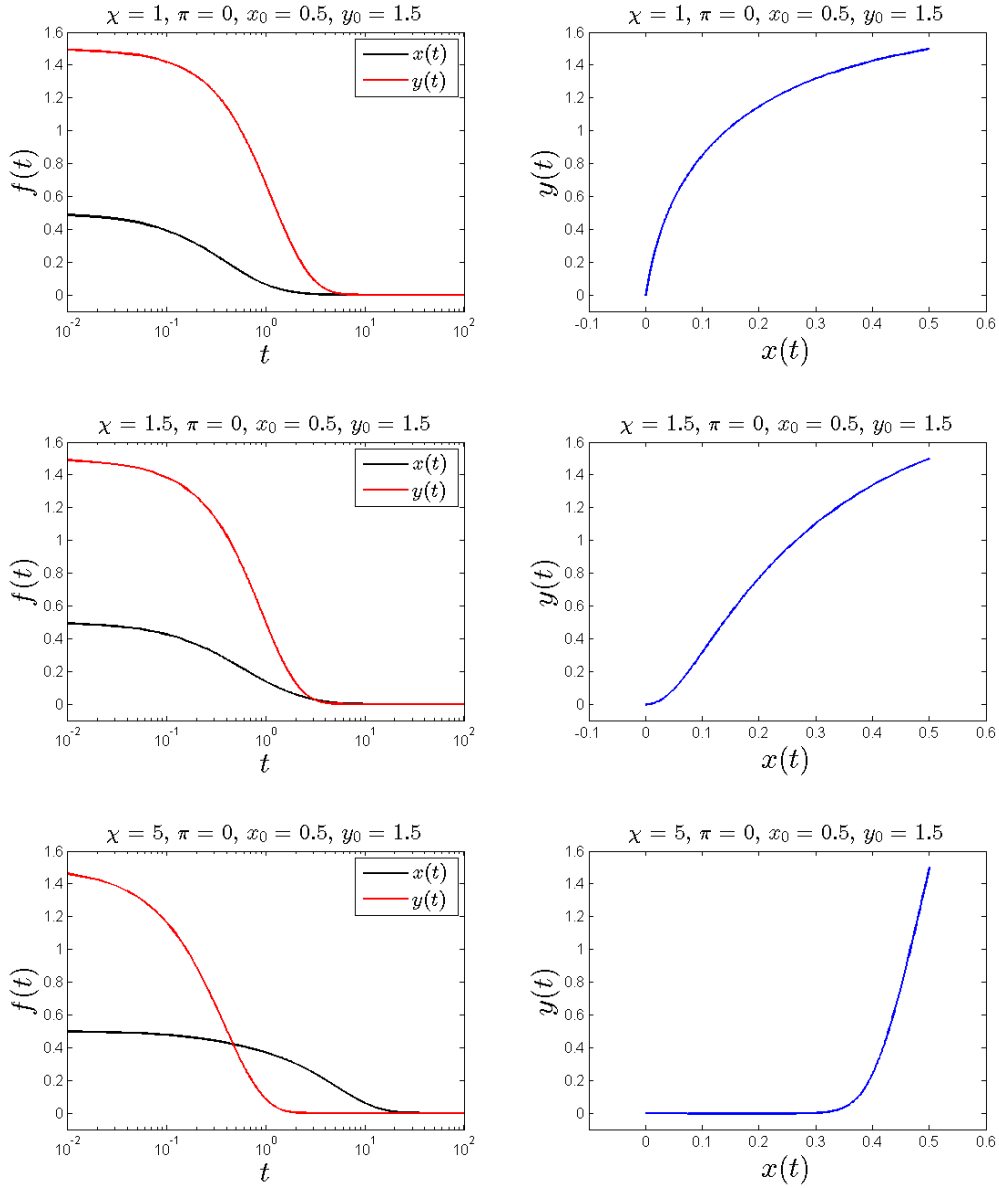
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{1}{\chi}x(1+y) + \pi, \\ \dot{y} &= -\chi y(1-x),\end{aligned}\tag{12}$$

kjer smo definirali konstantno črpanje kot $\pi = \frac{P}{a_0 \sqrt{BC}}$. Nove stacionarne točke zapišemo kot:

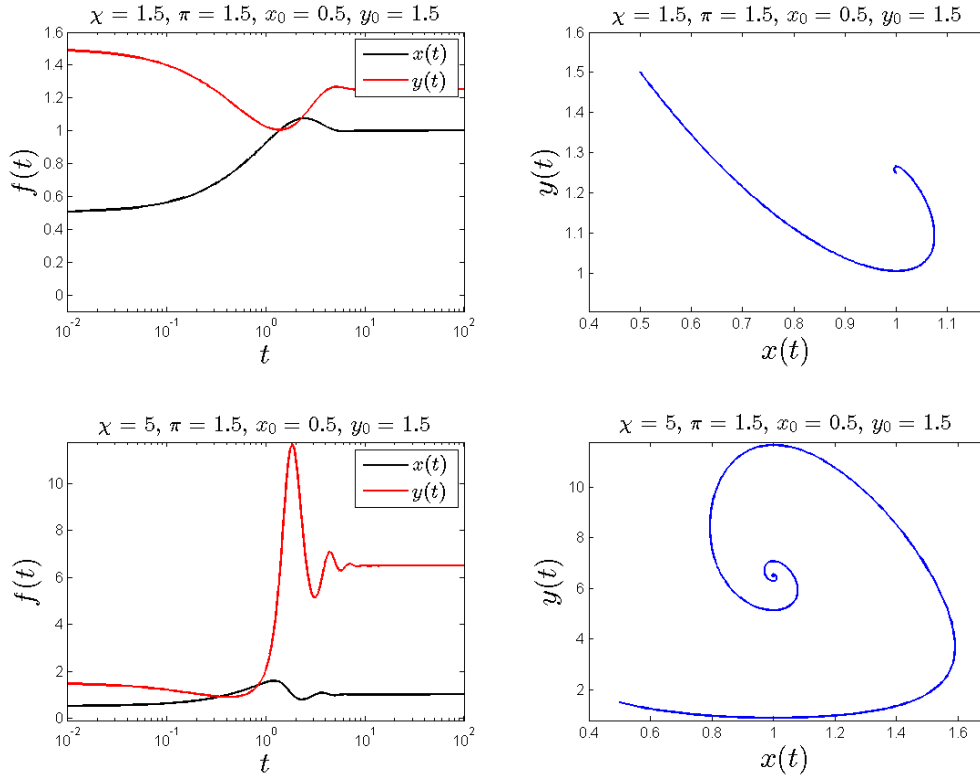
$$T_{\text{stac},1} = (\chi\pi, 0) \xrightarrow{\pi \rightarrow 0} (0, 0),\tag{13}$$

$$T_{\text{stac},1} = (1, \chi\pi - 1) \xrightarrow{\pi \rightarrow 0} (1, -1).\tag{14}$$

Sedaj, ko imamo problem definiran v najbolj optimalni obliki, si oglejmo rešitve za različne parametre v primeru $\pi = 0$, $x_0 = 0.5$, $y_0 = 1.5$:



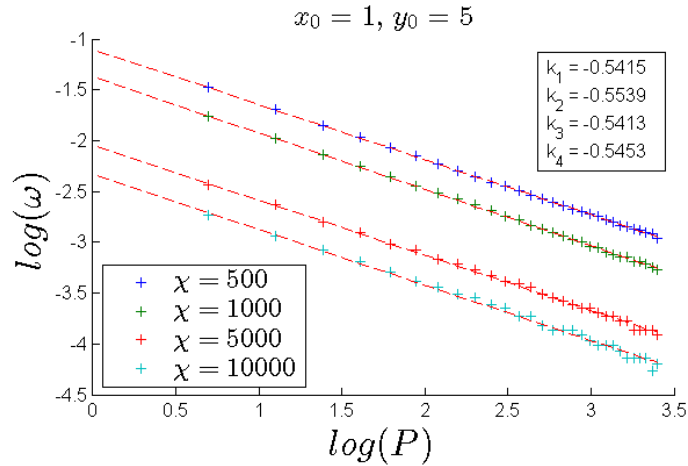
Vidimo, da se v vseh primerih stanje sesede v trivialno stacionarno točko $(0,0)$. Sklepamo, da se takšno stanje vedno sesede v to stanje, ko imamo $\pi = 0$. Zanimivo je tudi to, da parameter χ vpliva na relaksacijski čas fotonov in vzbujenih atomov; ko enega poveča, drugega zmanjša, kar je opaziti tudi na konveksnosti/konkavnosti faznega diagrama. Oglejmo si še rešitve, kjer imamo prisotno konstantno črpanje vzbujenih atomov $\pi = 1.5$:



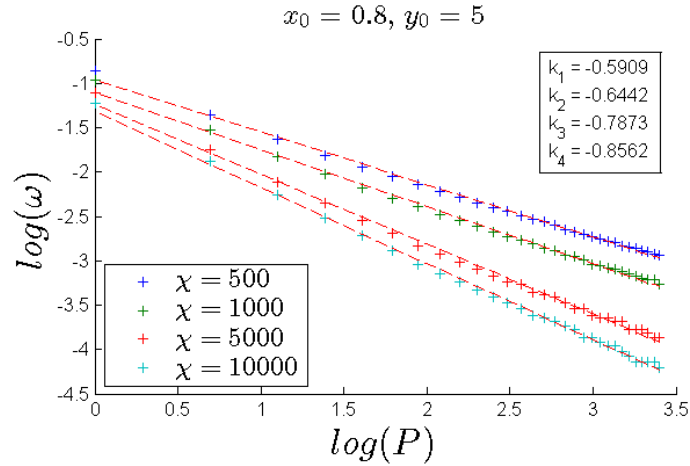
V tem primeru imamo na grafih malo več razgibanosti. Vsi primeru se sesedejo v netrivialno stacionarno stanje. Pri drugem primeru je na faznem diagramu nekoliko nakazana spirala, v tretjem pa je ta že očitna. V tretjem primeru že tudi vidimo oscilacije količin vzbujenih atomov in fotonov, hkrati pa je tudi očitna relaksacija v stacionarno stanje. V naslednjem razdelku si oglejmo glavne karakteristike modela laserja.

4 Vpliv črpanja na periodo sistema

V prejšnjem razdelku smo opazili, da se v našem modelu pojavljajo oscilacije. Ker je perioda elektronov in fotonov enaka, sem v naslednjih računih upošteval le fotone. Z večanjem parametra χ se število nihajev večja, ne vemo pa še kakšen vpliv ima parameter črpanja π . Oglejmo si, kaj se dogaja z razdaljo med temi vrhovi pri fiksnih vrednostih $x_0 = 1, y_0 = 5$ za različne vrednosti χ :



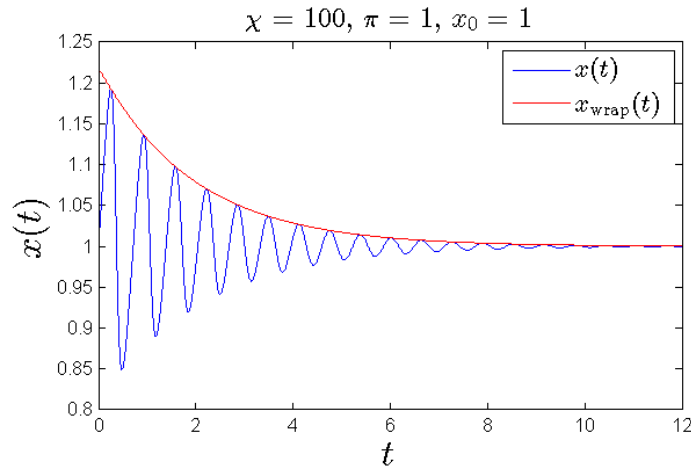
Vidimo, da krivulje zavzamejo obliko premice v log-log skali. Iz tega lahko sklepamo, da je odvisnost periode od moči črpanja potenčna. Tudi razdalje med posameznimi premicami so linearne, torej je tudi odvisnost od parametra χ potenčna. Ne smemo pozabiti, da je v tem primeru ena od spremenljivk v ravnovesnem stanju. Poglejmo, kaj se zgodi, ko iz ravnovesja izmaknemo obe spremenljivki:



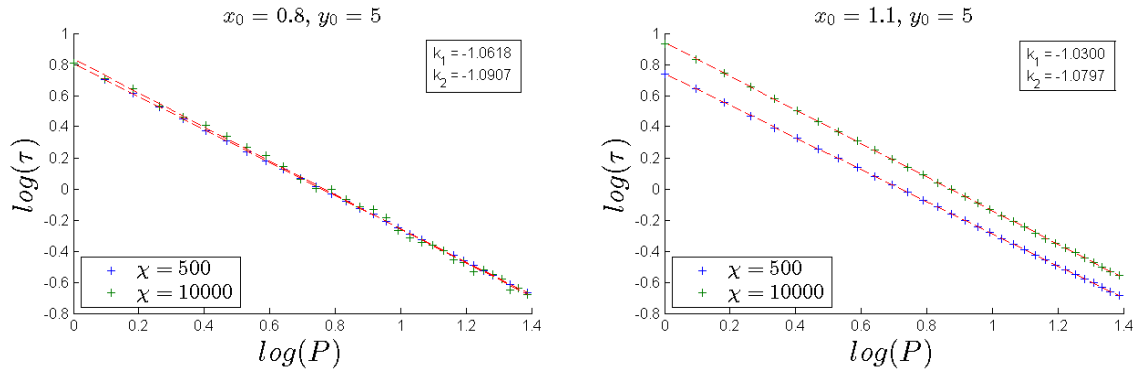
V tem primeru so krivulje v log-log skali spet premice, vendar niso več vzporedne. Še vedno lahko sklepamo na potenčno odvisnost periode od moči črpanja, enako pa ne more biti rečeno za odvisnost periode od parametra χ . Pri podrobnem ogledu tudi odvisnost od moči črpanja nekoliko odstopa od premice, vendar so v tem območju odstopanja še zanemarljiva, lahko pa da ne bi bila več, če bi bil odmik iz ravnovesja bolj znaten.

5 Vpliv črpanja na karakteristični čas sistema

Opazili smo, da amplituda oscilacij s časom pada. Sistem se torej relaksira v stacionarno stanje, to pa stori v nekem relaksacijskem času. Oglejmo si, kako amplituda oscilacij pada s časom:



Padanje amplitude s časom je eksponentno, relaksacijski čas τ pa definiramo kot čas, ko vrednost amplitude pade na faktor $\frac{A(\tau)}{A_0} = e^{-1}$. Da sem ta čas našel, sem poiskal vse maksimume v sistemu, ter skozi njih interpoliral z metodo „spline“, nato pa v vmes zračunanih točkah našel iskan pogoj. Poglejmo si sedaj odvisnost karakterističnega časa τ od moči črpanja π za različne vrednosti parametra χ :



Tudi tu so krivulje v log-log skali enake premicam, torej imamo spet potenčno odvisnost karakterističnega časa τ od moči črpanja. Opazimo, da je razmik med premicama različen za različne začetne pogoje, kar nakazuje na nekoliko bolj zapleteno odvisnost, v katero se dalje nisem spuščal.

Del III

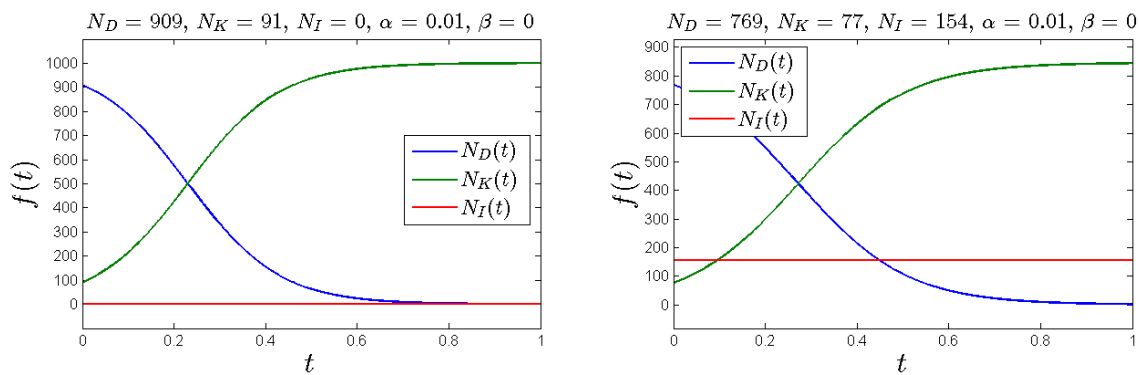
Model epidemije

1 Naloga

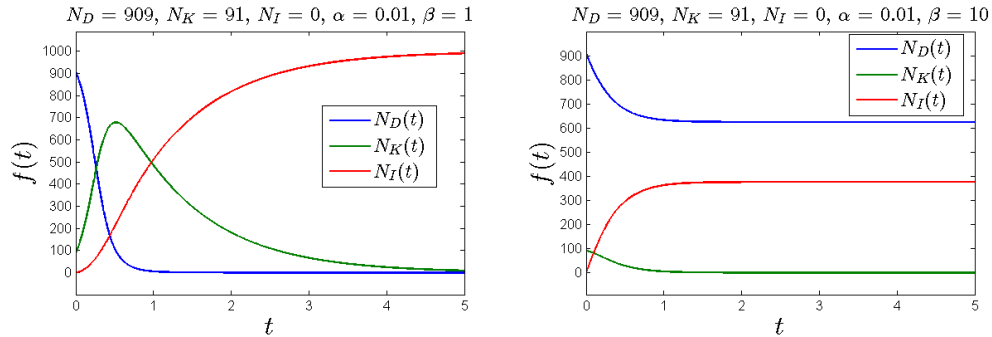
V tretjem delu naloge sem analiziral model epidemije. Populacijo sem razvrstil v tri razrede: zdrave in dovzetne (N_D), bolne in kliconosne (N_K) ter imune (N_I). Bolezen se širi s stikom med dovzetnimi in med bolnimi, bolnik pa preide s konstantno verjetnostjo med imune ali pa umre. Model opišemo s sistemom treh diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{N}_D &= -\alpha N_D N_K, \\ \dot{N}_K &= \alpha N_D N_K - \beta N_K, \\ \dot{N}_I &= \beta N_K. \end{aligned} \tag{15}$$

Člen α predstavlja okužbo dovzetnega zaradi srečanja z bolnim, člen β pa predstavlja cepljenje dovzetnih. V primeru $\beta = 0$ imamo samo trivialne stacionarne točke $N_K = 0$ ali pa $N_D = 0$. Parameter α predstavlja hitrost širjenja bolezni. Ker nismo bolezni definirali, jo umerimo na $\alpha = 0.01$ tako, da pri $N_I = 0$ in pri celotni populaciji $N = 1000$, 10 % kužnih okuži celotno populacijo v času $t = 1$. Celotno populacijo sem različno spreminjal začetne parametre in jih nato normiral na 1000, računal sem do časa $t_k = 5$, razen pri umeritvi α , za širino koraka pa sem vzel $h = 0.001$. Oglejmo si kako na populacijo vpliva izbran parameter α pri $\beta = 0$:



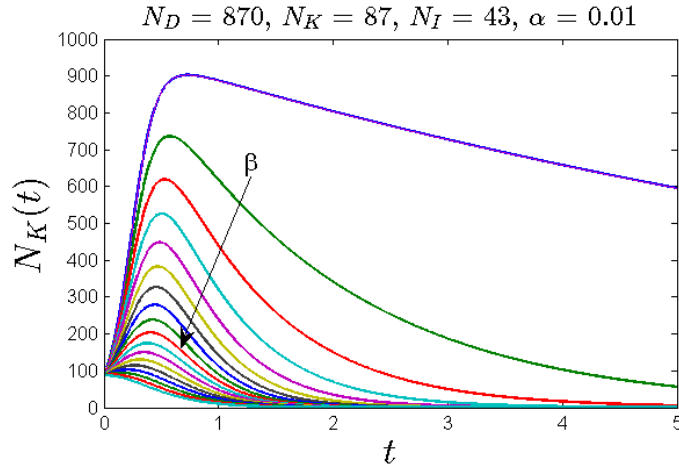
Populacija je v obeh primerih normirana na 1000, v desnem primeru pa prisotni še imuni. Vidimo, da količina imunih ne vpliva znatno na potek bolezni, saj se v obeh primerih do časa $t = 1$ vsi zdravi okužijo. Poglejmo sedaj za različni, kako na se bolezen razvija v primeru, ko za bolezen obstaja cepivo:



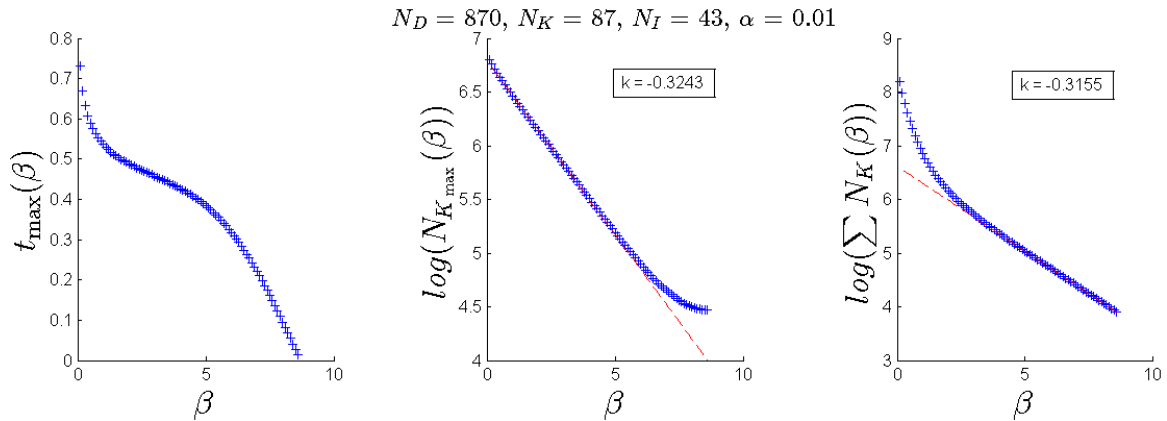
Na levem grafu število kužnih prične naraščati, doseže maksimum, nato pa začne upadati zaradi vedno večjega števila imunih na račun cepiva. Če uspešnost cepljenja povečamo, potem imamo lahko primer kot je na desnem grafu, kjer je število okuženih maksimalno na začetku, nato pa takoj začne upadati. V tem primeru preživi tudi velik delež zdravih, ki so še dovzetni.

2 Vpliv cepljenja na parametre epidemije

Kot je razvidno iz prejšnjega razdelka, ima potek bolezni kar nekaj karakterističnih količin, ki nas pri bolezni utegnejo zanimati. Nekatere od teh so maksimalno trenutno število obolelih, čas nastopa maksimuma, celotno število obolelih in, če okuženi umirajo, število preživelih. Za začetek si oglejmo vpliv cepljenja na potek števila okuženih v odvisnosti od časa:



Vidimo, da z večanjem parametra β nižamo vrh in površino $N_K(t)$ ter krajšamo čas nastopa maksimuma. Naslednji graf prikazuje natančnejšo odvisnost omenjenih količin od parametra β , kjer je potrebno opomniti, da smo z β pri fiksnem α omejeni navzdol z $\beta = 0$ in navzgor z $\beta = \beta_{\max}$, saj v tej regiji funkcija $N_K(t)$ nima maksimuma:



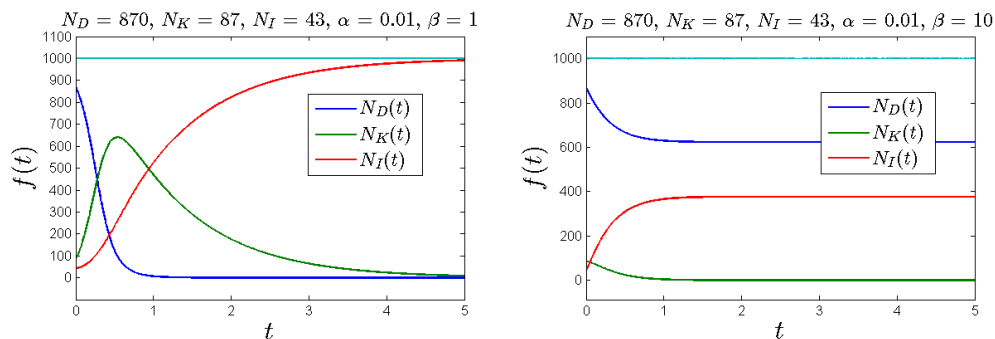
Medtem ko v odvisnosti časa nastopa maksimuma $N_K(t)$ ni prepoznati nobene znane krivulje, vidimo, da se v nekem odseku pri ostalih dveh količinah v log skali pojavi premica. Imamo torej eksponentno upadanje maksimalnega trenutnega števila okuženih v območju $0 < \beta < 6$ in eksponentno upadanje celotnega števila okuženih v območju $3 < \beta < 8.5 \doteq \beta_{\max}$. Razlog za neeksponentno obnašanje po celem območju lahko pride zaradi nenatančnosti metode RK4, ko se maksimum premika proti $\beta = 0$, ali pa ima funkcija preprosto takšno odvisnost.

3 Vpliv umrljivosti na parametre epidemije

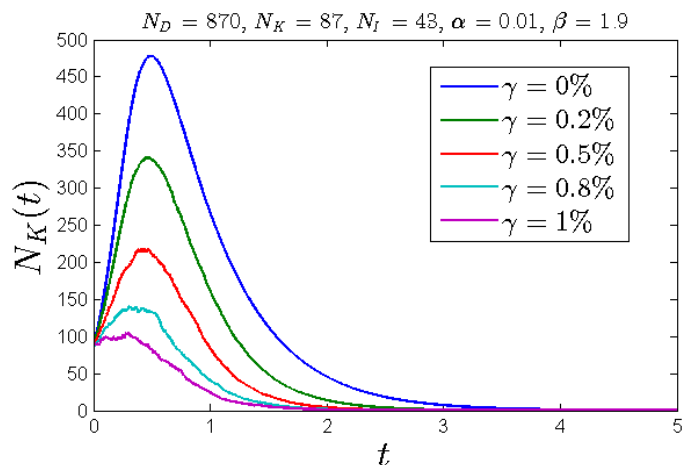
Do sedaj smo kužne vedno obravnavali kot bolnike, ki zbolijo in kasneje zaradi cepljenje ozdravijo, nikoli pa ne umrejo. To lahko pokažemo s celotno populacijo:

$$N(t) = N_K(t) + N_D(t) + N_I(t) = \text{konst.} \quad (16)$$

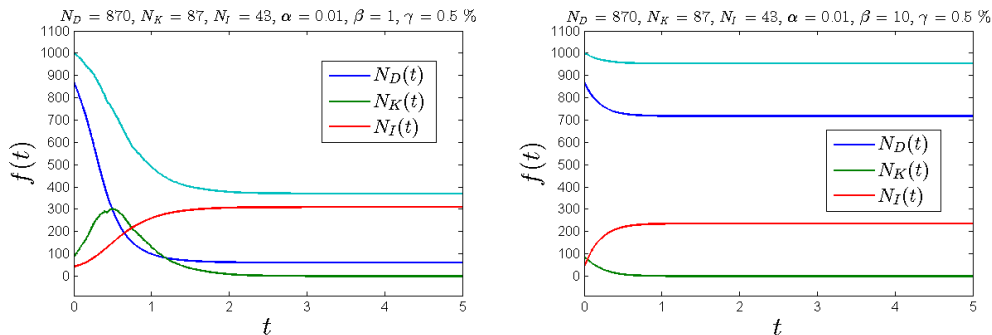
To lahko vidimo tudi na grafu:



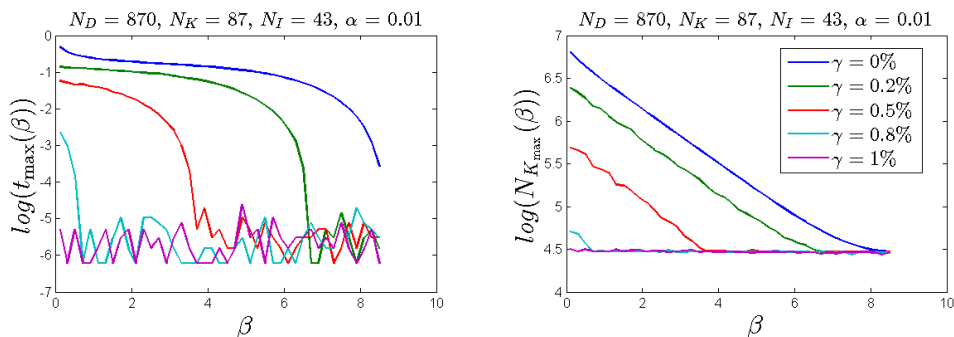
V tem razdelku sem bolezen napravil smrtonosno, kar sem ponovno storil na diskreten način, torej v začetni sistem diferencialnih enačb ni bil dodan noben nov člen. Definiral sem parameter smrtonosnosti γ , ki predstavlja delež ljudi, ki z 50 % verjetnostjo umre v času ht_K , torej v vsakem koraku metode RK4. Oglejmo si, kako tak parameter vpliva na število okuženih $N_K(t)$:



Vidimo, da se vsi parametri epidemije; nastop časa maksimuma, maksimalno trenutno število okuženih in celotno število okuženih z večanjem smrtonosnosti manjšajo. Naslednja slika prikazuje vpliv smrtonosnosti na celotno populacijo:

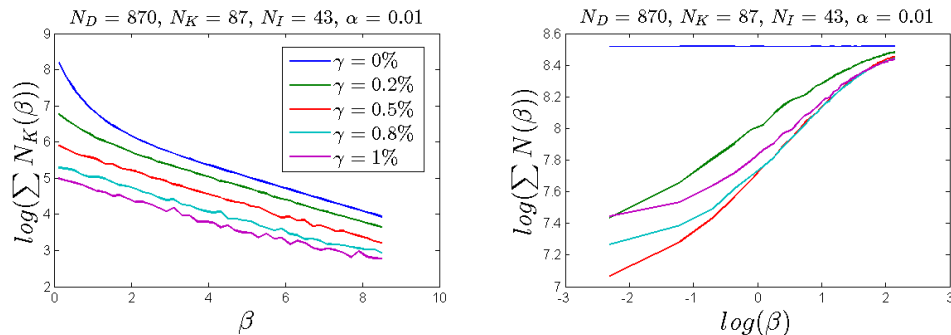


Res se celotna populacija zmanjšuje na račun smrti okuženih. Čeprav smo s tem optimizirali parametre epidemije, pa je zaradi tega veliko ljudi umrlo, vendar na smrtonosnost bolezni tako ali tako ne moremo znatno vplivati. Na desni sliki, kjer je cepljenje bolj učinkovito, je opaziti manjšo količino umrlih, saj je večini okuženih hitro bilo dano cepivo. V primeru smrtonosne bolezni se nam pojavi tudi nov parameter, in sicer celotno število preživelih $\sum N(t)$. Naslednje rešitve prikazujejo podrobnejšo analizo parametrov epidemije v odvisnosti od β za različno smrtonosne bolezni:



Poleg že znanih rešitev za $\gamma = 0$ so sedaj prikazane še ostale. Vidimo, da se čas nastopa maksimuma hitreje zmanjša pri večjem γ , nato pa ostaja konstanten. Zanimive so tudi maksimalne vrednosti okuženih, saj te še vedno padajo eksponentno, vendar je krivulja premaknjena navzdol. Ko funkcija doseže neko vrednost, postane konstantna, ta vrednost pa je enaka za vse vrednosti parametra γ . Opazimo, da imajo

pri večjih vrednostih β vsi parametri epidemije podobne vrednosti, torej je res, da bolj učinkovito cepljenje zmanjša število žrtev in v boljše ohranja populacijo. Oglejmo si še celotno število okuženih in pa celotno število preživelih:



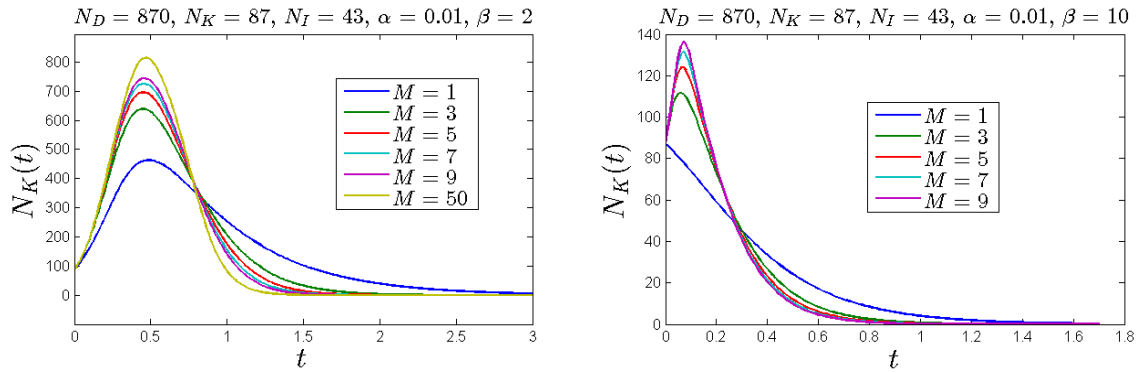
Leva slika prikazuje celotno število okuženih. Opazimo, da smrtonosnost bolezni odpravi neeksponentnost na začetku krivulje. Pri vseh vrednostih γ so funkcije eksponentne, le da so premaknjene navzdol z večjim γ , saj imamo manjšo populacijo. Zanimiva pa je tudi odvisnost celotne populacije od parametra β . Pri $\gamma = 0$ dobimo to kar smo pričakovali, konstantno, vendar pa je obnašanje pri neničelnih vrednostih bolj potenčno kot eksponentno, saj so krivulje v log-log skali precej podobne premicam. Zopet opazimo, da z večanjem parametra β celotna populacija konvergira k skupni vrednosti, kar je spet posledica šibega vpliva smrtonosnosti bolezni na populacijo, ki je oborožena z učinkovitim cepivom.

4 Razdelitev bolnikov na razrede

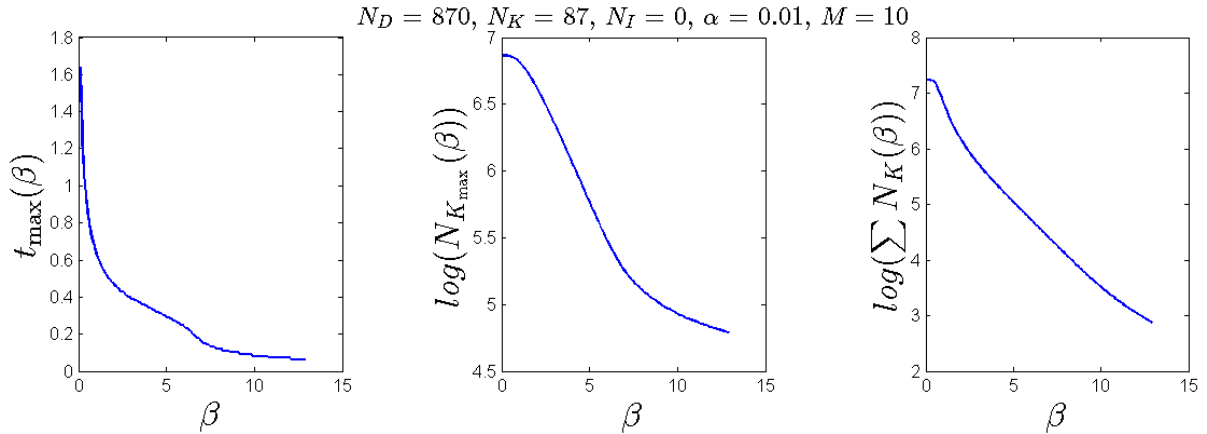
V splošnem lahko razdelimo bolnike na M razredov, kjer bolniki prehajajo med različnimi stadiji bolezni v času epidemije. Pri takšnem modelu imamo torej še večji sistem diferencialnih enačb naslednje oblike:

$$\begin{aligned}
 \dot{N}_D &= -\alpha N_D (N_{K_1} + \dots + N_{K_M}), \\
 \dot{N}_{K_1} &= \alpha N_D (N_{K_1} + \dots + N_{K_M}) - \beta M N_{K_1}, \\
 &\vdots \\
 \dot{N}_{K_j} &= \beta M (N_{K_{j-1}} - N_{K_j}), \\
 &\vdots \\
 \dot{N}_I &= \beta M N_{K_N}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Pri takšnem modelu so kužni bolniki iz vseh razredov, bolniki pa prehajajo iz višjega razreda v nižje, kar si lahko predstavljamo kot različne stopnje zdravljenja bolezni. Bolniku 1. stopnje se zdravje izboljša in preide na 2. stopnjo, tiste, ki pa preživijo vse stopnje, pa deklariramo za imune. Omeniti je potrebno tudi spremembo parametra $\beta \rightarrow \beta M$, saj mora parameter delovati hitreje pri večjem številu razredov. S takšno razdelitvijo povzročimo bolj gladek prehod med imune. Poglejmo kako se spreminja oblika celotne populacije bolnikov v odvisnosti od časa za različna števila razredov:



Vidimo, da z večanjem števila M povzročimo, da se funkcija vse bolj prilega Gaussovi funkciji. Centralni limitni izrek pravi, da se povprečje večih porazdelitev približuje normalni porazdelitvi, in to ne glede na to kakšne porazdelitve seštevamo. S takšno delitvijo razredov smo torej naredili konvolucijo. Na desni sliki opazimo, da lahko sedaj izračunamo parametre epidemije v takšnih območjih, kjer to prej ni bilo mogoče. Poglejmo, ali so v tem primeru parametri epidemije v odvisnosti od parametra cepljenja kaj znatno drugačni:



Opazimo, da smo območje parametra res povečali, vendar se oblike funkcij niso nič kaj veliko spremenile, so pa prisotne večje nepravilnosti, kar nakazuje na še bolj zapletene odvisnosti.