



Modelska Analiza 1

9. naloga - Integracije z metodo Monte Carlo

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 12.12.2013

Naloga:

Pri tej nalogi smo uporabili naše znanje o naključnih številih, ki smo ga pridobili pri prejšnji nalogi. Spoznali smo se z integracijsko metodo Monte Carlo, s katero lahko v splošnem z dobro natančnostjo računamo tudi višje dimenzionalne integrale. Metodo smo pri prvi nalogi uporabili za izračun mase in težišča kompliciranega 3D telesa. Pri drugi nalogi smo imeli kroglo kot sevalec žarkov γ izračunati pa smo morali verjetnosti za pobeg fotona. Pri tretjem delu naloge smo imeli ploščo kot nevtronski reflektor, zanimala pa so nas količine kot npr. odbojnost, reflektivnost, porazdelitev po kotu ipd.

Uvod

Monte Carlo metoda je sklop računalniških algoritmov, kjer uporabljamo naključna števila za razne simulacije in izračune raznih procesov in količin. Največkrat je metoda uporabljena za reševanje matematičnih in fizikalnih problemov, kjer se njihova uporabnost zelo izkaže tam, kjer ni mogoče dobiti analitičnih izrazov. Monte Carlo metoda je najbolj uporabna pri problemih optimizacije, numerične integracije in generacije vzorcev iz verjetnostnih porazdelitev. Pri tej nalogi smo se osredotočili predvsem na numerično integracijo, ki poteka v grobem tako, da streljamo točke x_i v območje funkcije na nekem intervalu, kjer smo to funkcijo omejili z zgornjo mejo:

$$M \geq \sup |f(x)|_a^b, \quad (1)$$

nato pa za vsako točko pogledamo, če se nahaja pod funkcijo $f(x)$ ali nad njo. Če preštejemo število N točk od vseh izstreljenih Z točk, za katere velja $y_i \leq f(x_i)$, potem lahko integral ocenimo kot:

$$I = \int_a^b f(x) dx \cong M(b-a) \frac{N}{Z}. \quad (2)$$

Velika prednost pri tej metodi je tudi enostavna ocena natančnosti, saj je porazdelitev binomska. Napako števila prešteti delcev lahko ocenimo kot:

$$N \sim N_0 \pm \Delta N = Zp \pm \sqrt{Zp(1-p)}, \quad (3)$$

kjer je $p = \frac{N}{Z}$, iz tega pa ocenimo napako integrala:

$$I \sim I_0 \pm \Delta I = M(b-a) \frac{Zp \pm \sqrt{Zp(1-p)}}{Z} = M(b-a) \frac{N_0}{Z} \pm M(b-a) \sqrt{\frac{p(1-p)}{Z}}. \quad (4)$$

Vidimo, da napaka vedno pada kot $\propto \frac{1}{\sqrt{Z}}$, ne glede na število dimenzij problema, kar je še posebej prikladno pri problemih, ki so več kot 3D.

Del I

Izvirtana krogla

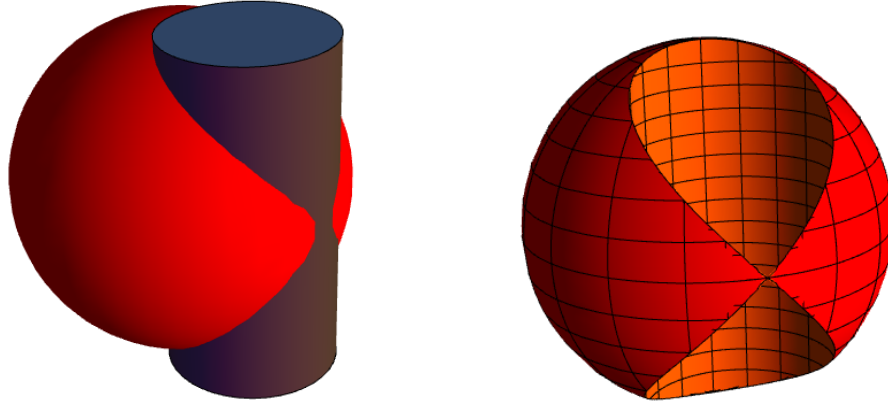
1 Naloga

Krogli izrežemo del telesa s cevastim rezilom, katerega radij je pol manjši od radija krogle, nastavljen pa je tako, da zareže ravno mimo središča krogle. Določiti moramo maso in težišče takšnega nastalega telesa v primeru:

- konstantne gostote: $\rho(r) = \rho_0$,
- spremenljive gostote: $\rho(r) = \rho_0(r/r_0)^3$,

kjer je r_0 radij krogle.

Novo nastalo telo je naslednje oblike:



Prilagam še povezavo do animacije našega simuliranega in točnega 3D telesa:
<https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/telo.gif>

2 Monte Carlo integracija

Integracije se lotimo računalniško, kjer sm v ta namen napisa program v matematičnem orodju Mathematica. Lahko bi generirali točke (x, y, z) kar v škatli s stranico dolžine 1, vendar na tak način nimam ovseh točk v notranjosti krogle in jih s tem nekaj pomečemo stran. Bolj elegantna opcija je, da uporabimo že znan način, kjer generiramo pravilno porazdeljene količine preko uniformno porazdeljenih spremenljivk na nam že znan način:

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi x, \\ \theta &= \arccos(2y - 1), \\ r &= \begin{cases} x^{\frac{1}{3}}; & \rho(r) = 1 \\ x^{\frac{1}{5}}; & \rho(r) = r^3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

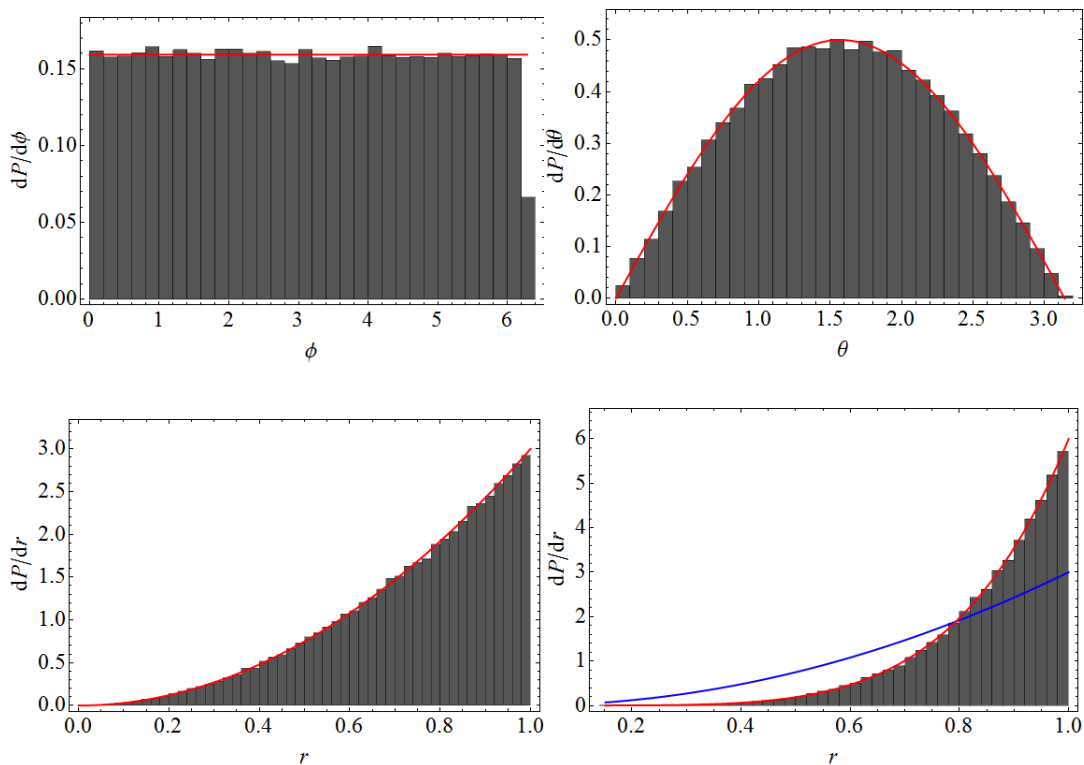
Nova enačba v tem primeru je porazdelitev po r , ki je prej nismo imeli, tu pa je potrebna, saj imamo porazdelitev tudi po notranjosti. Določimo jo preko:

$$\frac{dP}{dm} = \text{konst.} = \frac{1}{M}, \quad dm = \rho(r)dV = \rho(r)4\pi r^2 \quad (6)$$

od tu pa naprej določimo porazdelitev po radiju kot:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dP}{dm} \frac{dm}{dr} = \frac{\rho(r)4\pi r^2}{M} = \begin{cases} 3r^2; & \rho(r) = 1 \\ 6r^5; & \rho(r) = r^3 \end{cases} \quad (7)$$

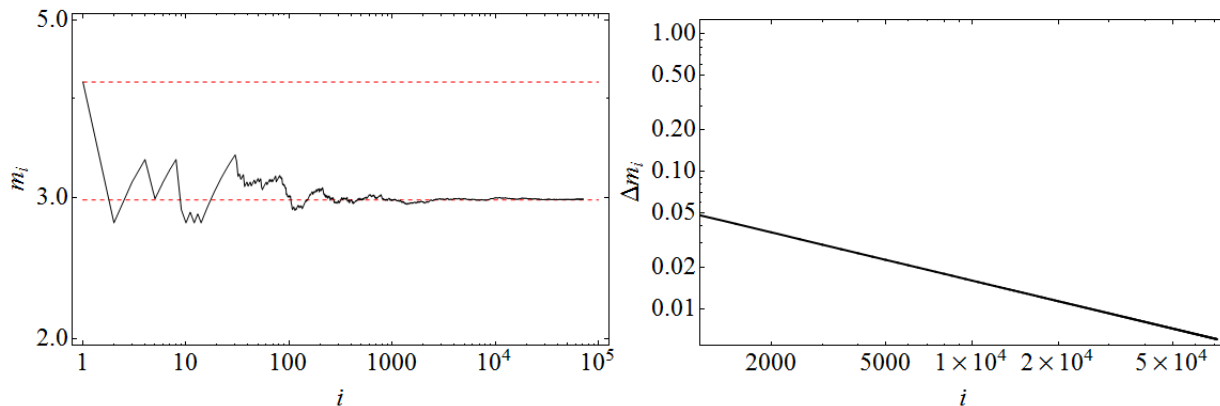
Generator pravilno porazdeljenih radijev dobimo od tu naprej v nekaj korakih po že znanih procesih. Na tej točki lahko preverimo, če so po MC simulaciji vse porazdelitve v skladu s teorijo, kjer spodnja desna slika prikazuje porazdelitev po radiju v primeru spremenljive gostote, ostale pa so za primer konstantne gostote:



Res se porazdelitve zelo dobro prilegajo krivuljam, problem smo torej nastavili pravilno.

3 Potek

Predvsem je zanimiv vpogled v metodo, kjer vidmo sprotno dogajanje. Spodaj sta prikazani masa in napaka mase v odvisnosti od trenutnega števila izstreljenih delcev, do števila $Z = 10^5$:



Vidimo, da na začetku rezultat mase kar precej skače, vendar konvergira proti točni vrednosti. Dobro določena je tudi napaka, ki pada v skladu s teorijo, ki smo jo prej predstavili.

4 Rezultati

4.1 $\rho(r) = 1$

Relevantne količine lahko izračunamo tudi analitično, kar nam omogoča, da preverimo pravilnost rezultatov. Najprej določimo enačbi, ki opisujeta kroglo in valj:

$$\text{krogla : } x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2, \quad (8)$$

$$\text{valj : } (x - 0.5)^2 + y^2 \leq (r_0/2)^2. \quad (9)$$

Najljajzje je integrirati v cilindričnih koordinatah, kjer našo mejo z koordinate predstavlja rob krogle:

$$z = \sqrt{r_0^2 - r^2}, \quad (10)$$

spodnjo mejo pa zaradi simetrije problema postavimo na 0. V našem primeru, kjer je $r_0 = 1$, dobimo integral:

$$m = \int_M dm = \int_V \rho(r) dV = \frac{4\pi}{3} - 4 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\cos \phi} r dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} dz, \quad (11)$$

preko tega pa analitične količine, ki jih primerjamo s simuliranimi, kjer sem general $Z = 10^6$ točk:

	m	x_T	y_T	z_T
Točno	$\frac{2(3\pi+4)}{9} \doteq 2.9832$	$-\frac{12}{5(3\pi+4)} \doteq -0.17877$	0	0
Izračunano	2.9829 ± 0.0019	-0.17874 ± 0.00011	$-0.00042 \pm 2 \times 10^{-7}$	$-0.00038 \pm 2 \times 10^{-7}$

Rezultati se zelo lepo ujemajo, napake pa so tudi pričakovane, razen pri y in z koordinatah težišč, kjer je napaka manjša, kot bi želeli, saj vemo, da morata ti dve koordinati težišča biti enaki 0.

4.2 $\rho(r) = r^3$

V tem primeru se spremeni le gostota, ki nastopa pod integralom, hkrati pa je potrebno paziti, saj se spremeni tudi masa celotne krogle. Omeniti je potrebno, da smo tu morali bodisi obtežiti točke, ki so generirane na enak način kot prej, s pravilnimi utežmi, ali pa smo spremenili porazdelitev. Že od prej je očitno, da sem se odločil za slednje, saj imajo tako točke enako navidezno maso, hkrati pa so bolj učinkovito porazdeljene. Integral ima v tem primeru obliko:

$$m = \frac{2\pi}{3} - 4 \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^{\cos \phi} r (r^2 + z^2) dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} dz. \quad (12)$$

Analitično tega integrala nisem več znal določiti, zato sem ga za primerjavo izračunal numerično in ga primerjal s simuliranimi, kjer sem spet general $Z = 10^6$ točk:

	m	x_T	y_T	z_T
Točno	1.569008	-0.175467	0	0
Izračunano	1.5688 ± 0.0009	-0.1752 ± 0.0001	-0.00009 ± 5.2110^{-8}	-0.0008 ± 4.6110^{-7}

Tudi v tem primeru se naši rezultati lepo ujemajo s točnimi izrazi. Res smo se prepričali, da integracija z metodo Monte Carlo dobro deluje.

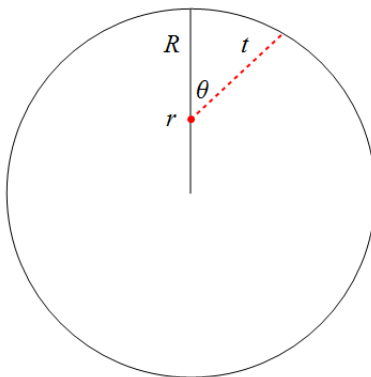
Del II

Sevanje žarkov γ

1 Naloga

Imamo kroglo, v kateri se rojevajo žarki γ . Njihova povprečna pot v snovi, iz katere je krogla, je enaka radiju krogle. Zanima nas, kolikšen delež fotonov uide iz krogle in kako se verjetnost pobega spreminja z razmerjem povprečne proste poti in radija krogle.

Na prvi pogled imamo problem s 5 prostimi parametri, saj je vsak žarek določen s koordinato rojstva (x, y, z) in smerjo potovanja (ϕ, θ) . Izkazuje se, da sfero lahko vedno zavrtimo tako, da bo najkrajša možna pot $R - r$ trenutnega fotona obrnjena v smeri $(0, 0, r)$, odklon od te najkrajše možne poti pa določa kot θ , kakor prikazuje skica:



2 Reševanje

Problema se lotimo tako, da izračunamo dolžino tetive t za splošen r in θ , ki jo žarek potrebuje, da uide iz krogle. Z uporabo kosinusnega izreka po le nekaj korakih dobimo zvezo za t v brezdimenzijski obliki:

$$t = -r \cos \theta + \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}. \quad (13)$$

Z metodo MC sedaj generiramo več naključnih točk in smeri in tako dobimo splošno dolžino tetive, ki jo mora žarek prepotovati, da uide iz krogle. Zopet porazdelimo r in θ po principu, ki nam je že dobro znan, torej:

$$r = x^{\frac{1}{3}}, \quad (14)$$

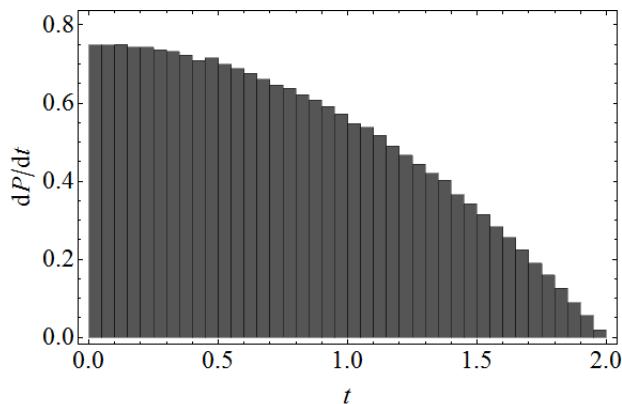
$$\theta = \arccos(2y - 1), \quad (15)$$

kjer sta x in y uniformno porazdeljeni naključni števili. Porazdelitev po dolžinah tetiv analitično določimo preko enačbe:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dr} \frac{dr}{dt} + \frac{dP}{d \cos \theta} \frac{d \cos \theta}{dt}, \quad (16)$$

kar nam da precej kompliciran izraz, ki ga ne bomo reševali.

Obliko hitreje vidimo s pomočjo histograma, kjer sem generiral 10^6 žarkov:



Porazdelitev je smiselna, saj ima najkrajša možna tetiva dolžino 0, najdaljša pa dolžino 2, kar je $2r$. Potrebno je ločiti, da je to dolžina, ki jo žarek **mora** prepotovati, da pobegne iz krogle. Pot, ki jo žarek dejansko opravi, je lahko krajša ali daljša, porazdeljena pa je po zakonu:

$$\frac{dP}{ds} = \lambda e^{-\frac{s}{\lambda}}, \quad (17)$$

kjer je λ povprečna prosta pot žarka. Zopet rabimo generator, ki nam iz uniformne porazdelitve da takšno, ki jo potrebujemo. Po nekaj računih dobimo, da je ta enak:

$$s = -\lambda \log(1 - x). \quad (18)$$

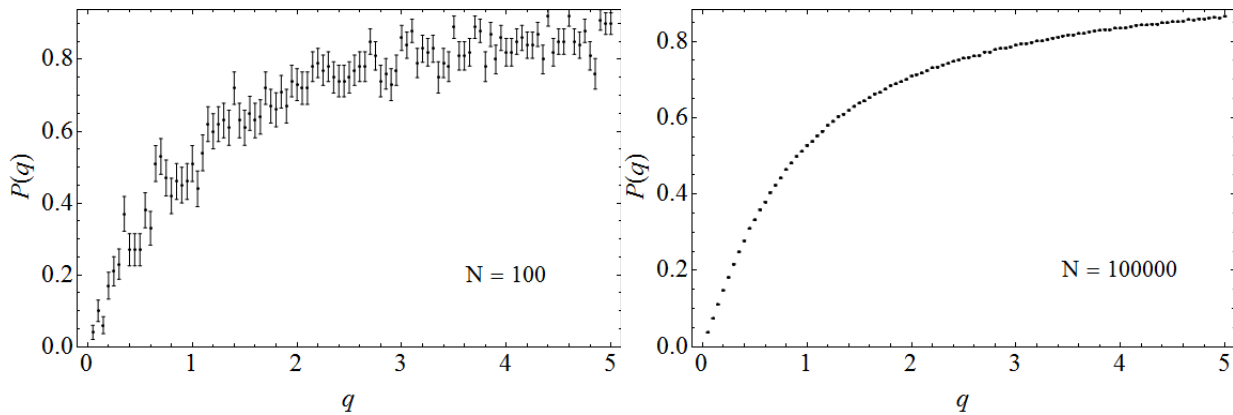
Integracija poteka tako, da generiramo naključne tetive in naključne dolžine poti, nato pa ju med sabo primerjamo in ugotovimo, ali se je žarek absorbiral ali je pobegnil. Končno razmerje nam da verjetnost za pobeg ali absorbcijo žarka γ .

3 Rezultat

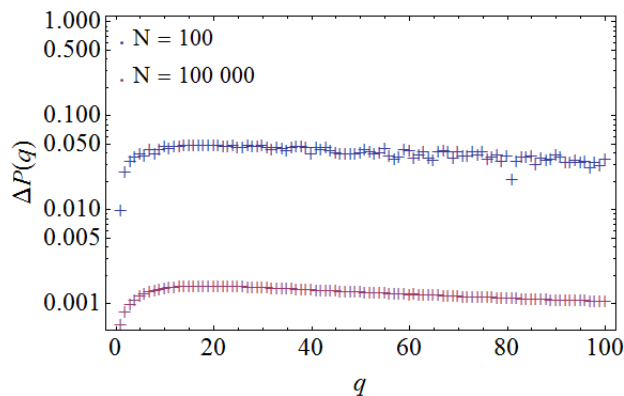
V primeru, ko je $q = \frac{\lambda}{R} = 1$, sklepamo, da bo razmerje nekje na polovici. Z 10^6 simuliranimi žarki dobimo verjetnost za pobeg:

$$P(q = 1) = 0.526275.$$

Vidimo, da smo z oceno precej zadeli. Bolj zanimivo si je ogledat odvisnost verjetnosti od razmerja q , t.j. odvisnost od razmerja med λ in R . Poskusimo najprej spet oceniti rezultat. V primeru $q \ll 1$ imamo $\lambda \ll R$, zato sklepamo, da se bo žarek absorbiral preden lahko sploh pride kam daleč, verjetnost za pobeg v tem območju bo torej okoli 0. Verjetnost pri razmerju $q = 1$ smo že ocenili, pri $q \gg 1$ pa imamo $\lambda \gg R$ in sklepamo, da bo večina žarkov imela večjo pot od radija krogle, zato bo tudi večina pobegnila. Rešitev sem izračunal za interval $q \in [0, 5]$, kjer sem interval razdelil na 100 delov, v vsakem delu pa verjetnost za pobeg izračunal preko simulacije, kjer sem uporabil 10^2 in 10^5 žarkov:



Vidimo, da smo potek krivulje pravilno ocenili. Pri zgornjih slikah vidimo tudi, kako močno večje število strelorv prispeva k znižanju napake, kjer je cena relativno nizka. Z malo več računanja smo napako znižali za faktor 50, kot je vidno na naslednjem grafu, in s tem precej izboljšali rezultat:



Del III

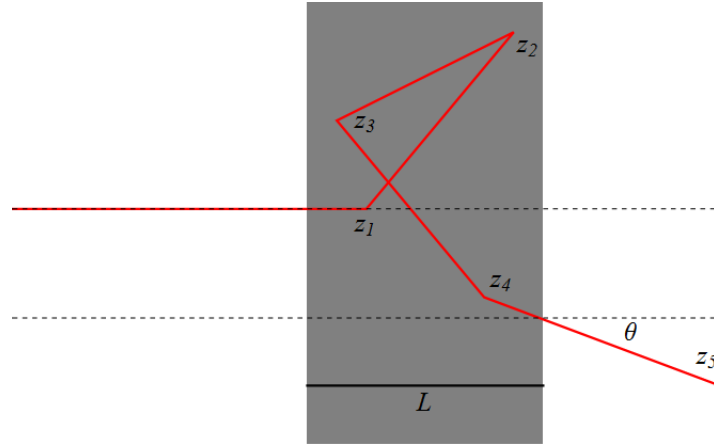
Nevtronski reflektor

1 Naloga

Imamo model nevtronskega reflektorja, kjer tok nevtronov vpada pravokotno na ploščo, v kateri se nevtroni sipljejo in nič ne absorbirajo. Zanimajo nas količine kot npr. porazdelitev po številu sipanj, prepustnost reflektorja, natančnosti rezultatov ipd. Takšen problem načeloma nima zgornje meje dimenzije, kar nam še dodatno potrjuje uporabnost metode Monte Carlo. Pri reševanju sem uporabil tri modele:

- Poenostavljen model - sipanje naprej-nazaj z nujno spremembo smeri
- Poenostavljen model - sipanje naprej-nazaj z naključno spremembo smeri
- Nepoenostavljen model - izotropno sipanje v prostoru

Tudi v tem primeru lahko izkoristimo simetrijo problema in tako sipanje nevtronov v splošnem opišemo le z spremenljivkama z in θ , kjer je z globina nevtrona, θ pa absolutni kot glede na smer z , kot prikazuje skica:



2 Reševanje

Reševanje pri vseh treh metodah poteka v grobem enako. Imamo začetni žarek ki prileti pravokotno v notranjost reflektorja nato pa se siplje. Že v prejšnjem delu smo zapisali generator dolžin žarkov, ki opisujejo tudi poti nevtronov:

$$s = -\lambda \log(1 - x). \quad (19)$$

V tem primeru moramo upoštevati le projekcijo poti na z os, saj je ta tista, ki nam pove, če se je žarek od stene odbil, ali jo je preletel, ta projekcija pa ravno predstavlja porazdelitev smeri v prostoru. Različne enačbe za različne zgoraj omenjene metode zapišemo kot:

$$z_{i+1} = z_i + s(x)f(\theta), \quad (20)$$

$$f(\theta) = \begin{cases} (-1)^{(i+1)}; & M1 \\ 2Y - 1; & M2, \\ 2y - 1; & M3 \end{cases} \quad (21)$$

kjer $M1$ ustreza primeru, kjer vsako sipanje pomeni nujen odboj, kjer $M2$ ustreza primeru z naključnim sipanjem naprej-nazaj z Y kot naključnim celim številom 0 ali 1 in kjer $M3$ ustreza primeru z izotropnim sipanjem v prostoru z y kot naključnim realnim številom med 0 in 1.

3 Rezultati

3.1 Prepustnost

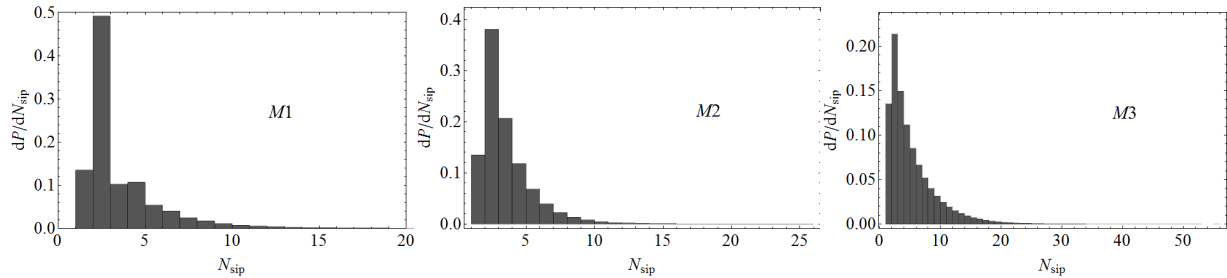
Kot naloga zahteva, sem si ogledal porazdelitve po številu sipanj in prepustnost reflektorja v primeru, ko je $q = \frac{\lambda}{L} = 0.5$ za vse zgoraj omenjene metode. Prepustnost T ($R = 1 - T$) za omenjen primer je enaka:

	$M1$	$M2$	$M3$
T	0.33271 ± 0.00047	0.50033 ± 0.0005	0.48195 ± 0.0005

Vidimo, da se le prvi primer zelo razlikuje od ostalih dveh, saj tudi porazdelitev po smeri žarka ni več naključna ampak je fiksno določena. Pri metodah $M2$ in $M3$ ima žarek večjo verjetnost, da preide a drugo stran, saj je verjetnost, da se večkrat siplje naprej, neničelna, kar pa pri metodi $M1$ ni res, zato je takšen rezultat smiseln. Drugi dve metodi sta si veliko bolj podobni, čeprav še vedno ostajajo majhne razlike, ki so izven napak, po čemer sklepamo, da razlika pride iz narave procesa. Vidimo tudi, da je pri metodi $M2$ rezultat zelo blizu $1/2$, tako da bi lahko sklepali na analitično vrednost.

3.2 Porazdelitev po številu sipanj

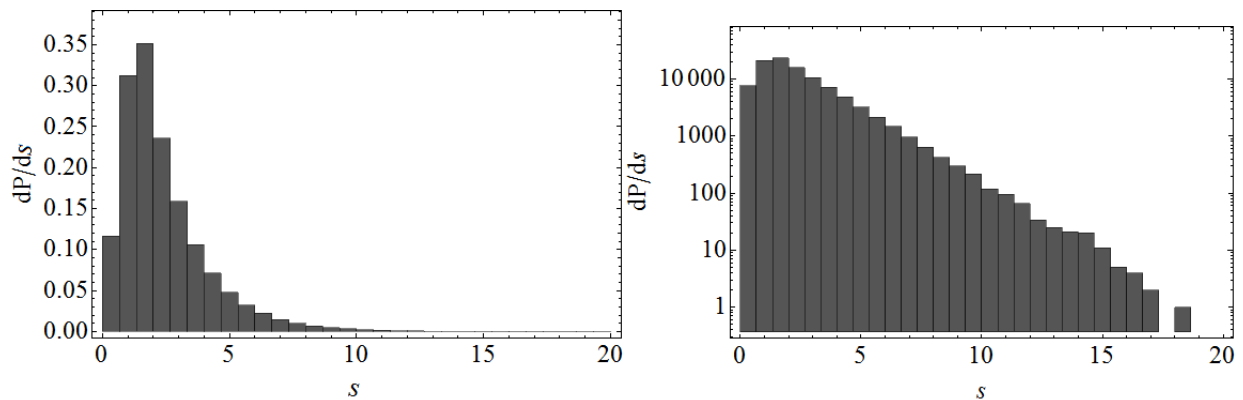
Zanimivo si je ogledati tudi porazdelitev po številu sipanj nevtronov. Izkaže se, da je ta porazdelitev najbolj fizikalno zanimiva ravno v tem območju ($q = 0.5$), drugje pa je bolj pusto, t.j. bodisi zelo velik razpon, ali pa le nekaj-kratno sipanje. Oglejmo si porazdelitve za vse tri metode:



Vidimo, da ponovno nastanejo razlike med metodami, kar je spet smiselno zaradi različnih metod. Opazimo, da je porazdelitev v tretjem primeru veliko bolj fina, kar je posledica različnih smeri, ki pripomorejo, da je žarek dlje ujet v reflektorju, čeprav ima lahko daljše poti, saj so lahko usmerjene pravokotno na smer vpadnega žarka.

3.3 Porazdelitev po celotni prepotovani poti

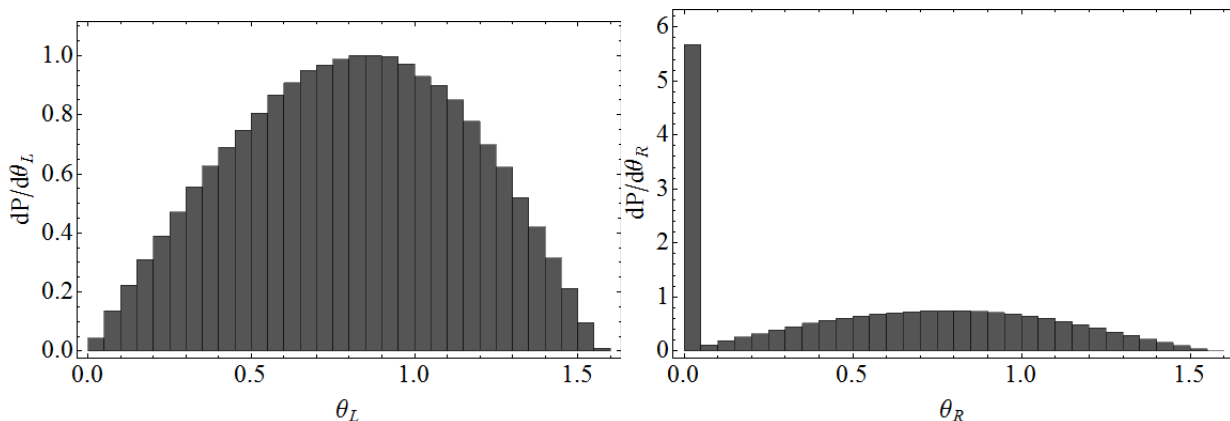
Porazdelitev po celotni prepotovani poti mora biti povezana s porazdelitvijo po številu sipanj, saj več sipanj pomeni daljšo pot. V ta namen sem si ogledal še to porazdelitev in porazdelitev po višini, kjer slednja ni bila nič bolj informativna, zato sem jo v poročilu izpustil. Poglejmo si porazdelitev po celotni prepotovani poti v linearni in logaritemski skali za izotropni model $M3$, kjer sem uporabil 10^6 nevtronov:



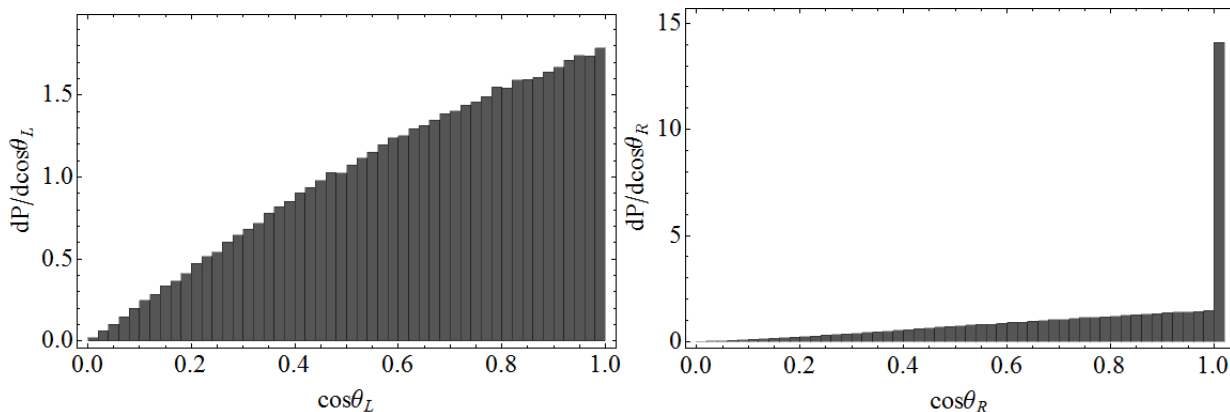
Vidimo, da je porazdelitev v linearni skali precej podobna obliki porazdelitve po številu sipanj, tako da so naše domneve potrjene. Bolj zanimiv je histogram v logaritemski skali, kjer vidimo, da so poti porazdeljene eksponentno. To seveda ni presenetljivo, saj je takšen bil naš začetni pogoj, je pa to eden od načinov za vmesno preverjanje pravilnosti simulacije.

3.4 Kotna porazdelitev nevtronov

Če si pri tretji metodi v podatke shranjujemo tudi absolutni kot, pod katerim odleti nevtron, lahko izračunamo porazdelitev po kotih za prepuščene in odbite nevtrone posebej. Kote sem izračunal na podlagi zadnjih dveh koordinat (z, x), zato so vsi absolutni koti na intervalu $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, kjer je $\theta = \frac{\pi}{2}$ največji odmik, ne glede na smer odklona. Oglejmo si omenjene porazdelitve za odbite in prepuščene nevtrone:

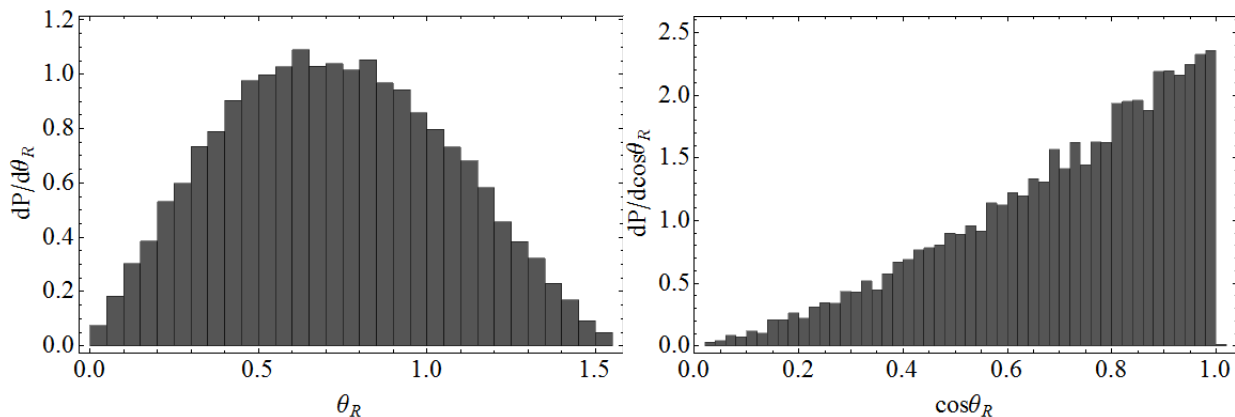


Vidimo, da sta si porazdelitvi v osnovi sicer zelo podobni, razlika je le v tem, da se ne delež prepuščenih fotonov sploh ni sipal, saj je bila njihova prvotna prepotovana pot takšna, da so ploščo v prvem poskusu preleteli. Vemo, da ima kotna porazdelitev pri izotropnem sevanju obliko kosinusa, oziroma je kosinusna porazdelitev uniformna, tu pa je kosinus nekoliko popačen, zato si oglejmo še popačenost pri kosinusu:



Tu je sedaj veliko bolj očitno, kakšno je dogajanje. Vidimo, da praktično nimamo nevtronov, ki bi se sipali pod kotom $\pm\pi/2$, saj je ta kot v smeri plošče, ki je neskončna. Po drugi strani imamo največjo frekvenco pri vrednosti $\cos\theta = 1$, kar ustreza kotoma 0 in π , ki predstavljata smeri pravokotno na ploščo. Največ nevtronov se torej odbije in prepusti pod pravim kotom glede na ravnino plošče. Še vedno pa je tu prisoten vrh, ki ustreza tistim nevtronom, ki se niso sipali.

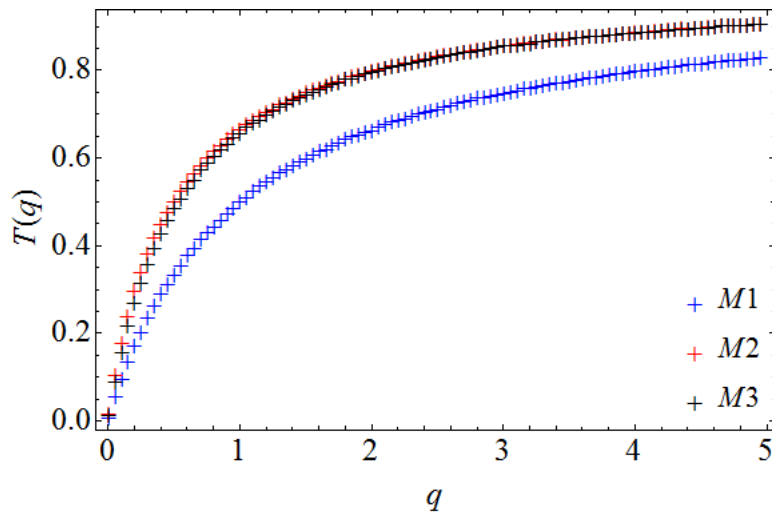
Poglejmo si, če lahko ta vrh odpravimo, tako da skrajšamo razmerje povprečne proste poti in debeline plošče na $q = 0.1$. To kotno porazdelitev prepuščenih nevtronov sem narisal za 10^5 nevtronov, kjer je tedaj prepustnost enaka $T = 0.855 \pm 0.001$:



Res smo se s tem znebili tistih nevtronov, ki so v prvem poskusu preleteli ploščo. Porazdelitvi sta v tem primeru precej podobni kotnim porazdelitvam odbitih nevtronov iz prejšnjega primera.

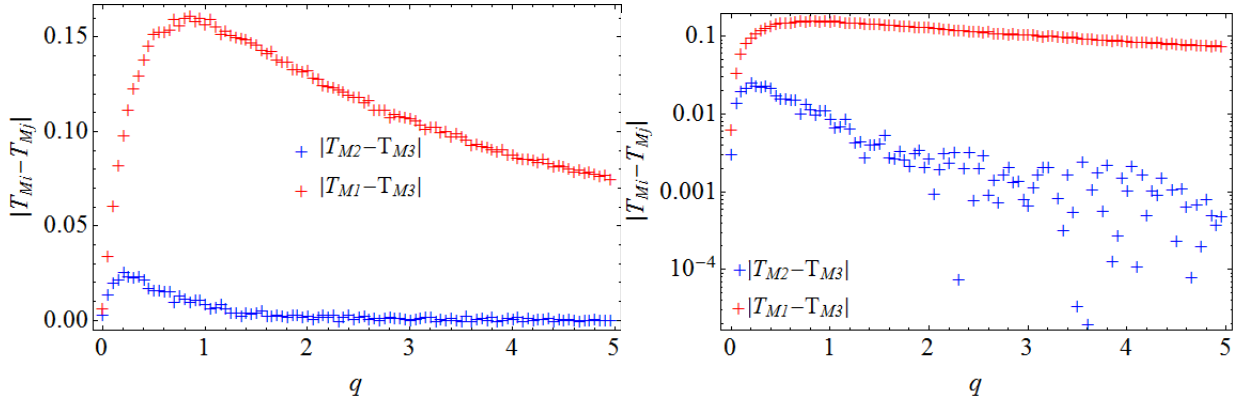
4 Odvisnost od debeline plošče

Bolj bogato informacijo dobimo, če izračunamo prepustnost v odvisnosti od debeline plošče, oziroma v našem primeru v odvisnosti od razmerja povprečne proste poti nevtronov in debeline plošče. V ta namen sem napisal program, ki na isti način kot zgoraj izračuna prepustnost za različne vrednosti $q = \frac{\lambda}{L}$ iz intervala $q \in [0, 5]$. Spodaj so prikazane krivulje za vse tri metode za 100 izračunanih točk q , kjer sem za vsak q simuliral 2×10^5 nevtronov:



Pozorno oko opazi, da sta si metodi $M2$ in $M3$ precej blizu, medtem ko metoda $M1$ odstopa od prej omenjenih. Razlog za to smo že omenili v prejšnjem razdelku, kjer smo trdili, da to pride na račun fiksno določene porazdelitve po smeri naprej nazaj, kjer pri metodi $M1$ zahtevamo nujno spremembo smeri pri vsakem sipanju. Opazimo, da je prepustnost blizu 0 za $q \ll 1$. Razlog za to so ponovno kratke proste poti v primerjavi z dolžino plošče. Večina nevtronov se v tem primeru odbije, odbojnost pa opisuje enačba $R = 1 - T$. Po drugi strani pa se prepustnost bliža vrednosti 1, ko $q \gg 1$, saj so v tem območju proste poti nevtronov precej daljše od plošče, zato jih večina ploščo preleti v prvih nekaj poskusih.

Oglejmo si še relevantne razlike med metodami:

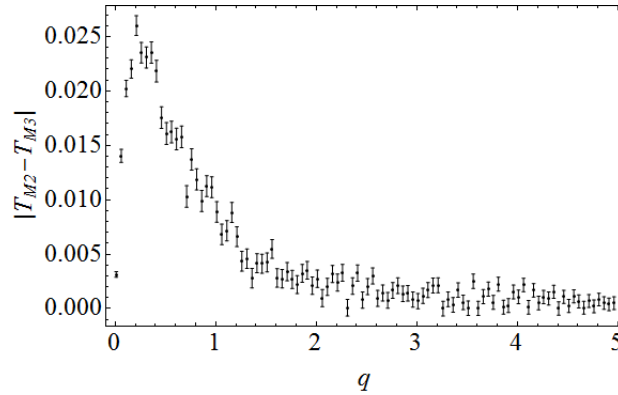


Oblike razlike funkcij imata podobno obliko. Imamo majhno razliko pri $q \ll 1$ in pri $q \gg 1$, največjo pa v okolici $q \sim 1$, kjer ima funkcija prepustnosti koleno. Manjšanje razlike pri vrednostih $q \gg 1$ je posledica tega, da prepustnost konvergira proti 1 ne glede na izbrano metodo. Tu se pojavi vprašanje, a je razlika med metodama $M1$ in $M2$ posledica napake ali procesa? To lahko preverimo tako, da v zgornji razliki upoštevamo še napako razlike, ki jo definiramo kot:

$$\Delta(T_{M2} - T_{M3}) = |\Delta T_{M2}| + |\Delta T_{M3}|, \quad (22)$$

$$T_{M2} - T_{M3} = T_{M2,0} - T_{M3,0} \pm \Delta(T_{M2} - T_{M3}). \quad (23)$$

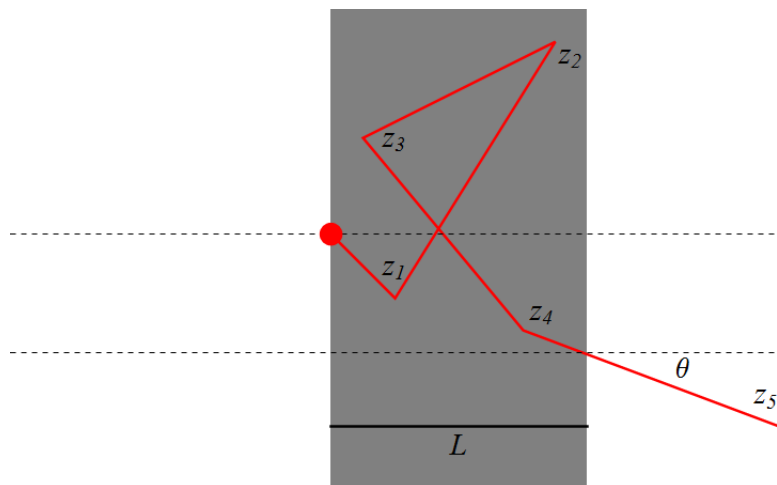
V kolikor bot o napake segale do ali preko osi, je verjetnost, da razliko pripišemo napakam, velika. Situacijo prikazuje spodnja slika:



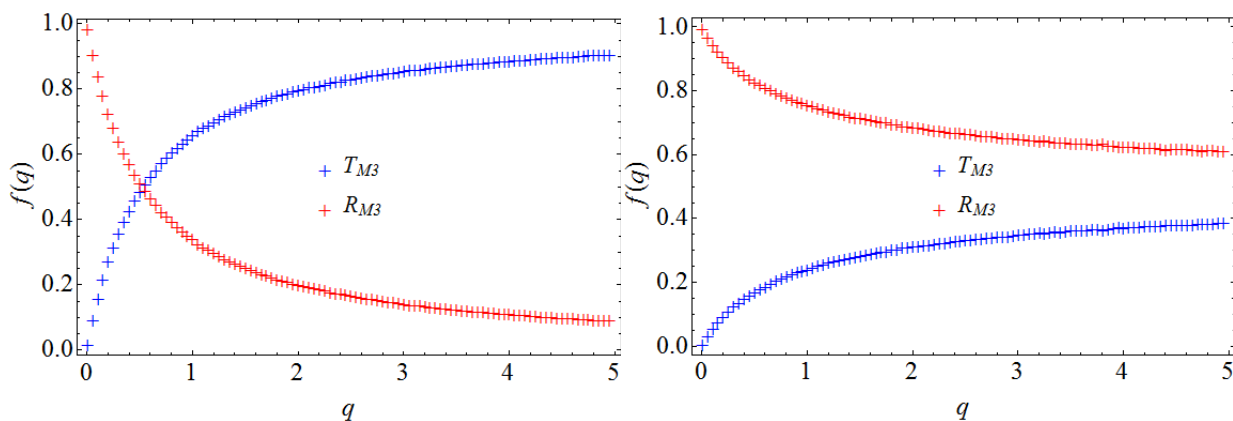
Vidimo, da so napake dosti manjše v primerjavi z vrednostjo razlike, torej imamo razliko res na račun različnih procesov.

5 Sevalec nevtronov

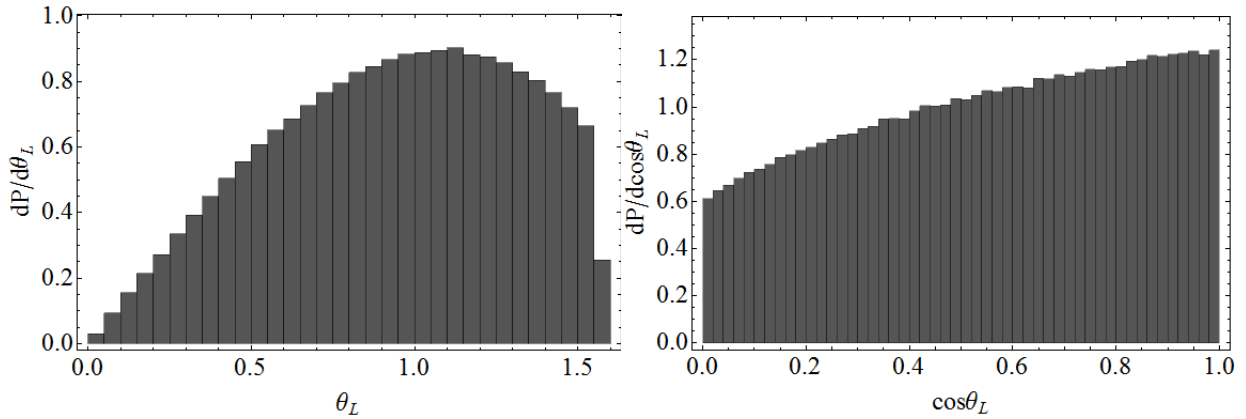
Med pisanjem programa nisem bil pazljiv in sem tako zaradi napake dobil rezultate, ki niso bili smiselni. Kasneje sem videl, da sem v bistvu reševal nek drug problem, ki pa se mi je zdel zanimiv, zato sem se odločil, da ga vključim v poročilo. Edina razlike med reševanjem prej in sedaj je ta, da imamo v tem razdelku izotropen sevalec nevtronov tik pred steno reflektorja. Bister bralec hitro opazi, da je bila napaka v mojem programu ta, da kota prvega nevtronskega žarka nisem fiksiral na $\theta = 0$, kar je povzročilo izotropno sevanje v cel prostor. Skico tega primera prikazuje spodnja slika:



Za večino rezultatov to ne predstavlja bistvene razlike, zato si pogledjmo le odvisnost prepustnosti od razmerja q ter razne kotne distribucije pri $q = 0.5$ za primer metode $M3$. Spodnja slika prikazuje prepustnost in odbojnost kot funkciji od q , kjer je na levi strani prikazan primer od prej, na desni pa sedanji primer:



Na levi sliki prepoznamo primer od prej, kjer je prepustnost začela z vrednostjo 0, potem pa naraščala proti 1. Pri sedanjem primeru pa temu ni tako. Še vedno prepustnost začne z vrednostjo 0 iz istega razloga kot prej, vendar pa konvergira k vrednosti 0.5. To je tudi smiselno, saj imamo izotropen sevalec **pred** steno, kar pomeni, da žarki sevajo v vse smeri, še posebej ko velja $q \gg 1$, kjer nevtroni že v prvih par sipanjih preletijo ploščo. Oglejmo si še kotne distribucije za primer $q = 0.5$, kjer desna stran ostaja enaka, z izjemo vrha pri kotu 0, saj ta ni več privilegiran tako kot prej. Bolj zanimive kotne distribucije odbitih nevtronov:



Kot vidimo, je porazdelitev po kotu odrezana pri $\theta = \pi/2$. Potrebno je upoštevati, da je rob tu v vsakem primeru, edina razlika je, da so zaradi narave sevalca koti okoli $\theta = \pi/2$ veliko bolj pogosti kot prej, saj sevalec dejansko v to smer tudi seva. Zaradi tega prispevka je kosinusna porazdelitev bolj uniformna kot prej, čeprav pa je še vedno popačena zaradi prisotnosti plošče.

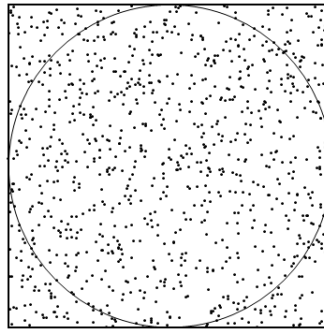
Del IV

Določitev števila π

Odločil sem se stopiti še korak nazaj in preveriti, kako natančno lahko določimo število π . To posebno število ni moč enostavno natančno izračunati, zato bom preveril, kako učinkovita je metoda Monte Carlo. V ta namen sem v kvadrat s stranico $a = 1$ zaprl največjo možno kroglo s premerom $2r = 1$. Kot smo že pri tej metodi vajeni, sem v kvadrat streljal naključne točke, ki so bile uniformno porazdeljene, vmes pa sem štel koliko jih je znotraj in koliko zunaj kroga. Število π lahko tedaj določimo iz razmerja površin kot:

$$\frac{N}{Z} \approx \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \pi \approx 4 \frac{N}{Z}, \quad (24)$$

kjer N predstavlja število točk znotraj kroga, Z pa je število vseh točk. Spodnja slika prikazuje vmesno stanje simulacije:



Končni rezultat sem z uporabo $Z = 10^8$ števil ocenil na:

$$\pi \approx 3.14168 \pm 0.00016. \quad (25)$$

Prilagam še povezavo do animacije, kjer je prikazan začetek izračuna števila π med streljanjem: <https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/pi.gif>