



# Modelska Analiza 1

## 11. naloga - Stohastični populacijski modeli

Avtor: Matic Lubej  
Asistent: dr. Simon Čopar  
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 8.1.2014

---

### Naloga:

Pri tej nalogi smo si ogledali populacijske modele še iz druge perspektive, kjer jih sedaj obravnavamo stohastično, s čimer se bolj približamo realnosti. V prvi nalogi smo naredili statistiko časov izumrtja za preprost eksponentni model in ugotavljali vplive velikosti populacije in velikosti časovnega koraka na modela, kjer smo enkrat obravnavali rojstva in smrti ločeno in enkrat skupaj. V drugem delu naloge smo poiskali matriko prehodov za zgoraj omenjeni model, s čimer smo lahko ocenili čas izumrtja. Matrika prehodov nam je omogočila tudi vpogled v natančno sliko porazdelitve števil okoli pričakovane vrednosti populacije ob nekem času, tako pa smo si lahko ogledali efektivno širino porazdelitve s časom. V tretjem delu naloge smo obravnavali že znan problem plenilec-plen ter določili povprečno življenjsko dobo sistema za stacionarno stanje.

## Del I

# Preprost eksponentni model

## 1 Naloga

Napravi statistiko časov izumrtja za preprosti eksponentni model  $N(t) = N_0 e^{-\beta t}$ , kjer je  $\beta = 1.0/\text{enota časa}$ . Primerjaj statistiko v primeru majhne ( $N = 25$ ) in velike ( $N = 250$ ) populacije. Ali je ta čas odvisen od velikosti časovnega koraka? Primerjaj z modelom, ki vključuje rojstva in smrti ( $\beta_r = 4\beta$ ,  $\beta_s = 5\beta$ ).

## 2 Uvod

V tem razdelku torej stohastično rešujemo problem oblike:

$$\dot{N} = -\beta N. \quad (1)$$

Tega se lotimo z numerično integracijo:

$$N(t + dt) = N(t) - \Delta N = N(t) - \mathcal{P}(\beta N(t)dt), \quad (2)$$

kjer je  $\Delta N$  porazdeljen po Poissonovi porazdelitvi okoli povprečne vrednosti  $\beta N(t)dt$ . Točna rešitev diferencialne enačbe je seveda eksponentna funkcija

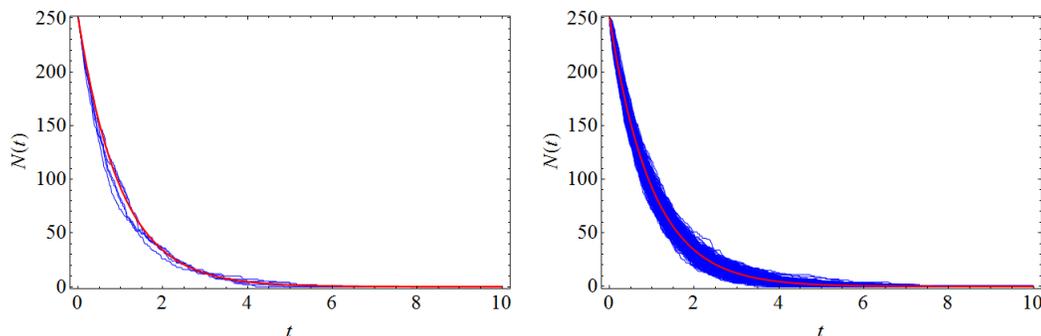
$$N(t) = N_0 e^{-\beta t}. \quad (3)$$

Izkaže se, da pri stohastičnem načinu reševanja vedno dobimo drugačno rešitev, te rešitve pa so porazdeljene okoli analitične vrednosti, ki predstavlja točno povprečje Poissonove porazdelitve populacijskega modela v odvisnosti od časa. Pri vsakem času imamo torej neko verjetnostjo porazdelitev populacije, ki jo poimenujemo:

$$w(t_0) = \frac{dP}{dN} \Big|_{t=t_0} \quad (4)$$

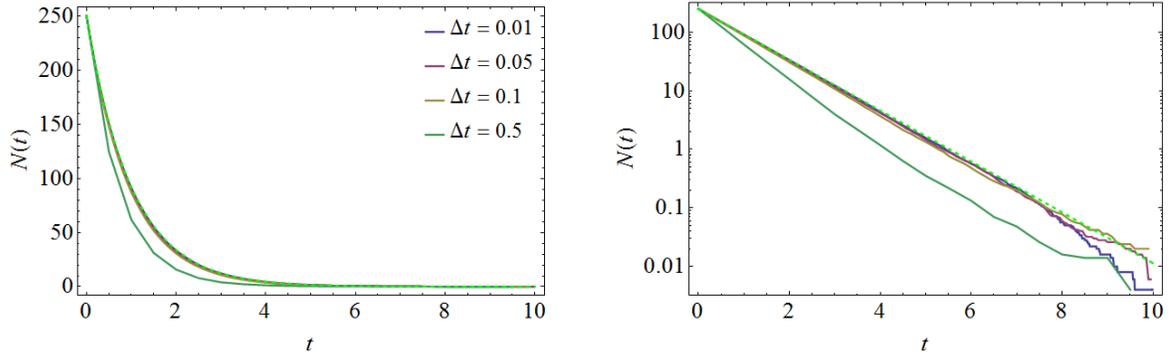
## 3 Velika populacija

Problem sem reševal v matematičnem orodju Mathematica, kjer sem rešitev izvednotil za časovne korake  $dt = \{0.01, 0.05, 0.1, 0.5\}$ , računal pa sem za  $N_0 = 250$  do časa  $t_{max} = 10$ . Naredil sem 500 ponovitev in nakoncu rešitve povprečil ter med seboj primerjal. Spodnja grafa prikazujeta množico nekaj rešitev (levo) in množico vseh 500 rešitev (desno) za primer  $dt = 0.01$ :

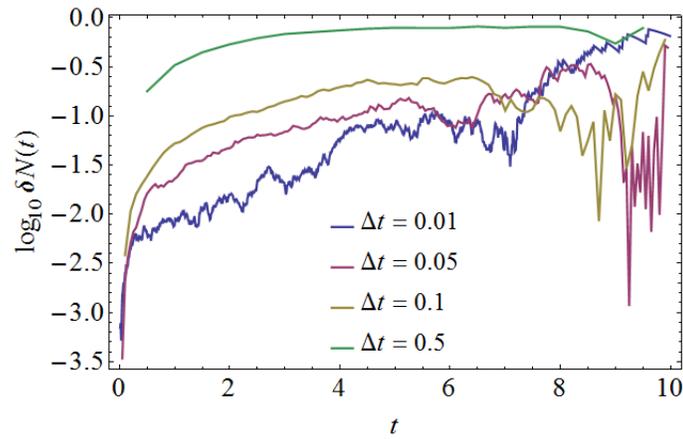


Vidimo, da so rešitve kar na gosto porazdeljene okoli povprečne vrednosti, ki jo predstavlja analitična rešitev diferencialne enačbe. Prilagam povezavo do animacije odvisnosti širine porazdelitve  $w(t)$  od časa: <https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/dist2.gif>

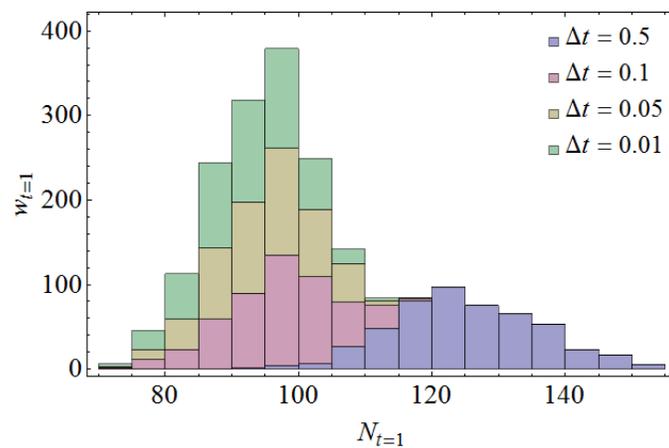
Najprej si podrobneje oglejmo odvisnost od velikosti časovnega koraka, kar prikazuje spodnja slika:



Vidimo, da najbolj odstopa rešitev, kjer smo uporabili  $\Delta t = 0.5$ , medtem ko se rešitve v ostalih primerih kar dobro ujemajo, kar potrjuje tudi graf logaritma napake:



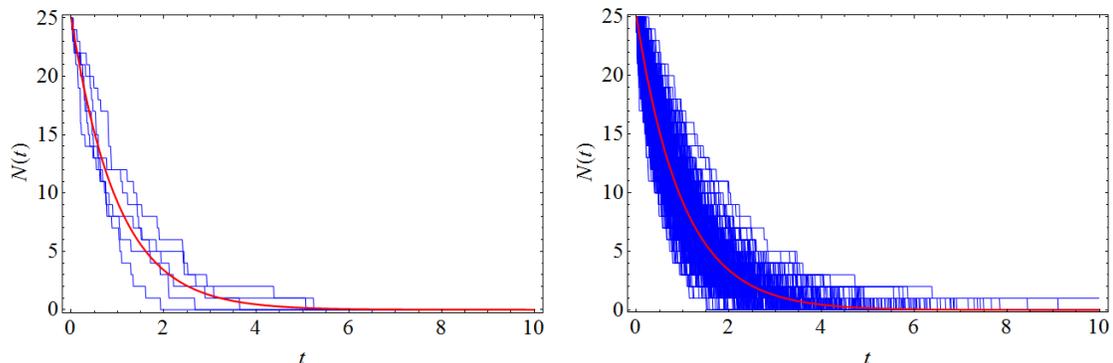
Podobno vidimo tudi, če si ogledamo naložene porazdelitve  $w(t)$  za recimo primer  $t = 1$ :



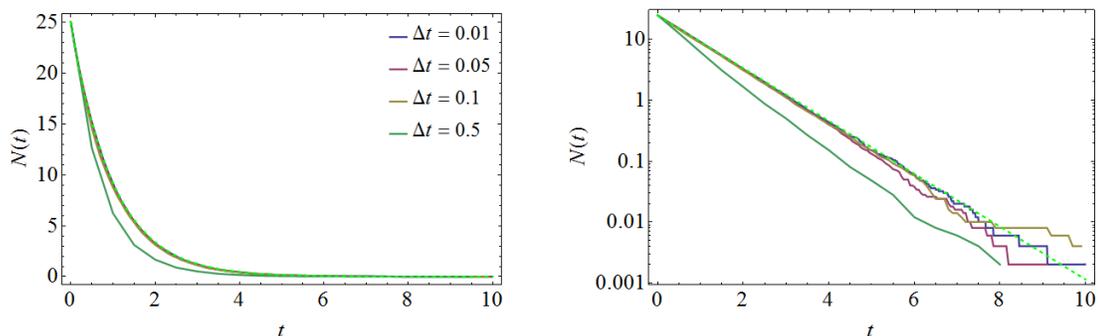
Na slikah je očitno, da primer z  $\Delta t = 0.5$  najbolj odstopa, zato zaključimo, da to ni več dobra izbira.

## 4 Majhna populacija

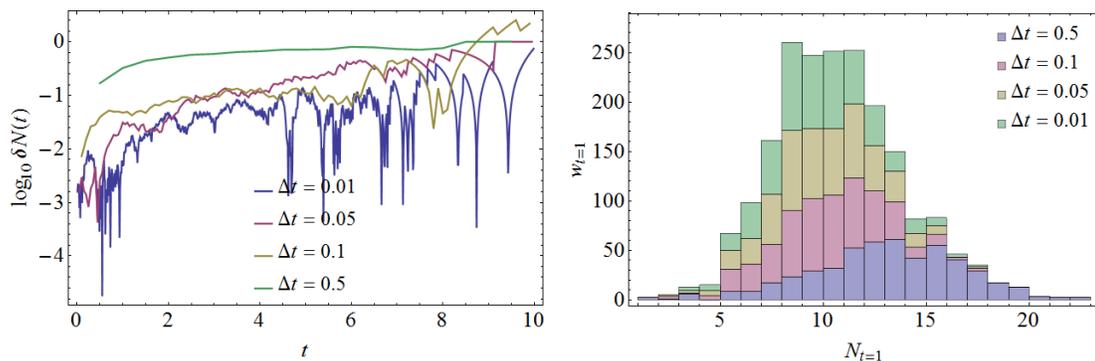
Oglejmo si sedaj rešitve še v primeru majhne populacije z  $N_0 = 25$ , kjer pa smo vrednosti ostalih parametrov ohranili.



Prva stvar, ki jo opazimo, je, da so rešitve v tem primeru veliko bolj diskretne oblike, kar je smiselno, saj imamo na izbiro manj stanj. Poglejmo, če ta diskretnost kaj vpliva na skupno povprečje. Tako kot prej si podrobneje oglejmo odvisnost od velikosti časovnega koraka:



Vidimo, da so rešitve precej podobne prejšnjim, torej velikih razlik ni. Zopet najbolj odstopa rešitev z  $dt = 0.5$ , medtem ko se rešitve v ostalih primerih spet dobro ujemajo, kar potrjuje tudi enaki grafi kot zgoraj:



Na desni sliki vidimo, da so se naložene porazdelitve zožile, kar je pričakovano, saj imamo opravka z manjšo populacijo, še vedno pa je očitno, da primer z  $dt = 0.5$  najbolj odstopa in ta izbira ni več dobra. Zaključimo z sklepom, da se situacija pri veliki ali majhni populaciji relativno ne spremeni.

## 5 Rojstva in smrti

Prednost stohastičnega modela je v tem, da lahko upošteva hkrati rojstva in smrti nekega populacijskega modela, česar analitična rešitev ni sposobna, saj je neodvisna od števila členov v enačbi:

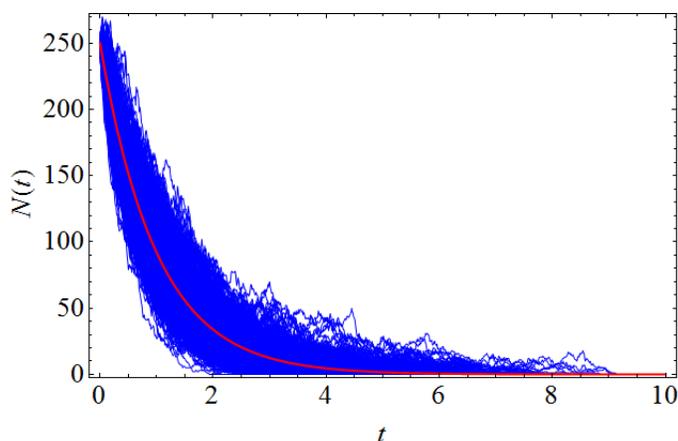
$$\dot{N} = N(\pm\beta_1 \pm \beta_2 \pm \dots) \propto \beta_S N, \quad (5)$$

$$\dot{N} = \beta_r N - \beta_s N = 4\beta N - 5\beta N = -\beta N, \quad (6)$$

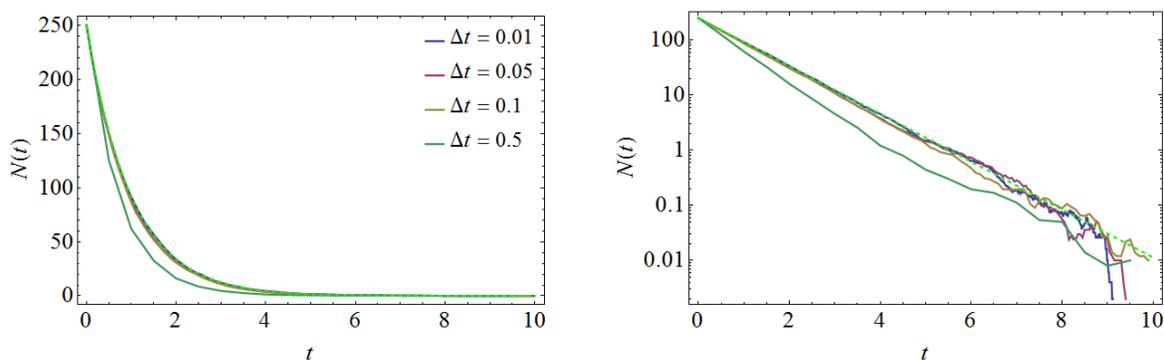
in še vedno ostaja kot v En. (3). Stohastična rešitev je v tem primeru bolj motena, zato ima večjo razpršitev okoli srednje vrednosti. Za razliko od prej, se lahko v posameznem koraku zgodi, da število populacije tudi zraste. Naša rešitev se v tem primeru glasi:

$$N(t+dt) = N(t) - \Delta N = N(t) + P(\beta_r N(t)dt) - P(\beta_s N(t)dt) = N(t) + P(4\beta N(t)dt) - P(5\beta N(t)dt). \quad (7)$$

Poglejmo kako takšna razsklopitev vpliva na rešitev, kjer sem reševal izključno za primer  $N_0 = 250$ , ostali parametri pa so ostali enaki:

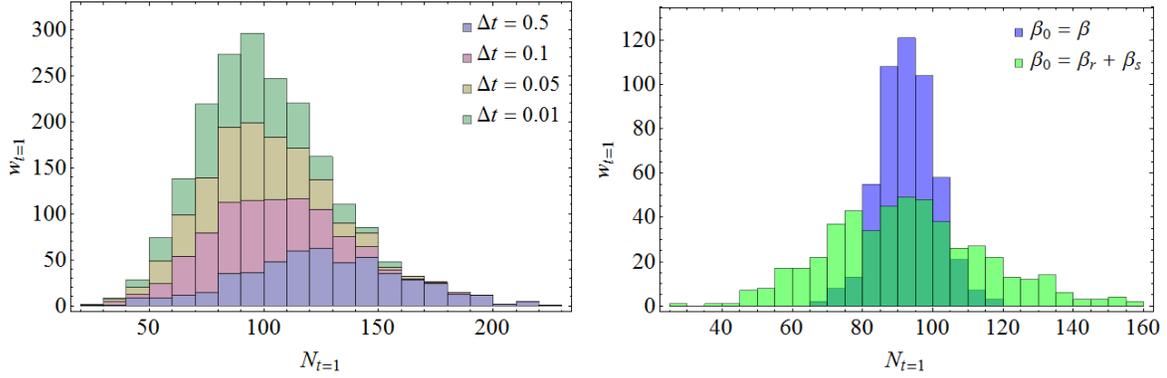


Res se je porazdelitev precej odebelila, kot smo pričakovali. Tudi v tem primeru si lahko ogledamo odvisnost od velikosti časovnega koraka  $\Delta t$ :



Praktičnih razlik zopet ni videti, zaključki so enaki prejšnjim.

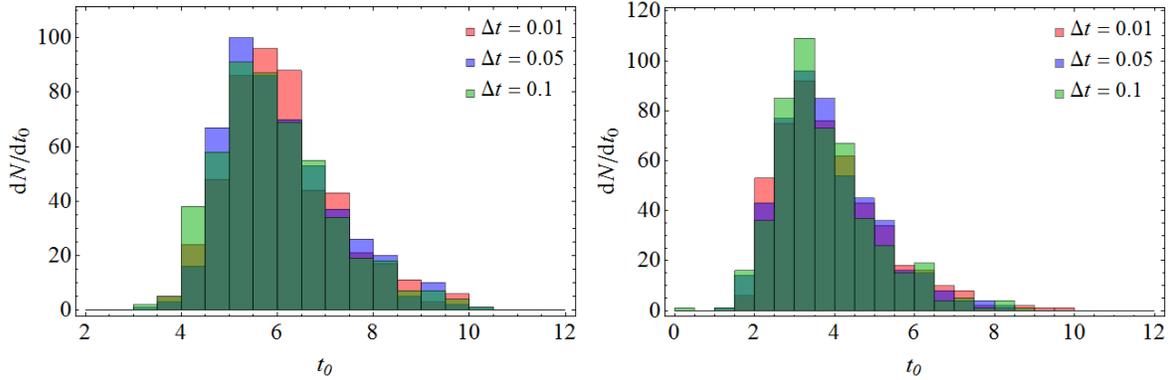
Bolj zanimivo si je ogledati naložene porazdelitve  $w(t)$  ob času  $t = 1$  za različne  $dt$ , ali pa primerjati to porazdelitev s prejšnjim modelom za primer  $dt = 0.01$ , kjer smo imeli skupe parameter  $\beta$ :



Na levi sliki vidimo, da za razliko od razširjene porazdelitve praktično nimamo razlik, na desni pa vidimo dejanski vpliv razklopitve, ki se kaže kot razlika v širini porazdelitev.

## 6 Statistika časov izumrtja

Oglejmo si še porazdelitev po časih izumrtja populacije. To simuliramo tako, da shranimo tisti čas, ob katerem populacija doseže vrednost  $N \leq 0$ . Najprej si oglejmo vpliv časovnega koraka  $dt$  na porazdelitev te količine za veliko (levo) in majhno populacijo (desno), kjer nisem upošteval časovnega koraka  $dt = 0.5$ , saj je prevelik:

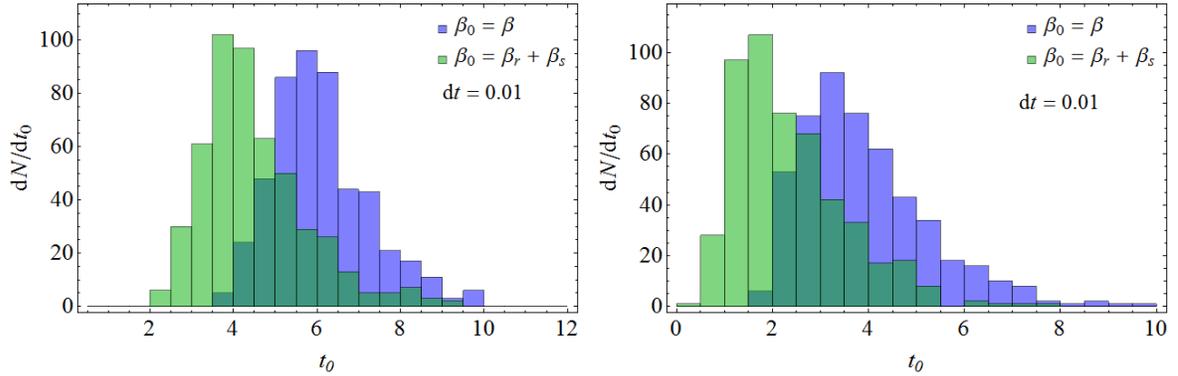


Vidimo, da ima porazdelitev pri obeh velikostih populacij enako obliko, razlikuje se le po časovni skali, kjer so časi v povprečju pri večji populaciji daljši, kar je smiselno, saj pri isti hitrosti izumiranja rabimo dlje časa, da izumrejo vsi, če je populacija večja. Vidimo, da časovni korak praktično ne vpliva na porazdelitev. Določimo lahko povprečni čas izumrtja za obe populaciji, ki znaša:

$$\bar{t}_0(N_0 = 250) = 5.90, \quad (8)$$

$$\bar{t}_0(N_0 = 25) = 3.89. \quad (9)$$

Ker porazdelitev prej ni bila odvisna od časovnega koraka, si sedaj oglejmo primerjavo porazdelitev po časih izumrtja za model, kjer ločeno obravnavamo rojstva in smrti za časovni korak  $dt = 0.01$  :



Spet opazimo podobno situacijo, kjer je edina razlika med populacijama časovna skala. Opazimo, da ima drugi model v splošnem krajše čase izumrtja, kar je smiselno, saj takšen sistem bolj „motimo“ kot pa prejšnjega, kar povzroči večje oscilacije in s tem hitrejšo izumrtje. povprečna časa izumrtja za obe populaciji sta v tem primeru:

$$\bar{t}_0(N_0 = 250) = 4.44, \quad (10)$$

$$\bar{t}_0(N_0 = 25) = 2.36. \quad (11)$$

## Del II

# Prehodna matrika

## 1 Naloga

Za model iz prejšnje naloge poišči prehodno matriko in z njo oceni čas izumrtja. Za preprost eksponentni model izumiranja lahko zapišeš enačbe za verjetnostno porazdelitev v odvisnosti od časa. Kako se efektivni odmik te porazdelitve spreminja s časom?

## 2 Uvod

Definiramo vektor stanj  $p$ . Vsak element vektorja  $p$  predstavlja neko število populacije. Upoštevali bomo samo prehode iz večje v manjšo populacijo, zato bo dimenzija vektorja enaka  $N_0 + 1$ . V splošnem iščemo matriko  $M$ , ki ima za elemente podane verjetnosti za prehod velikosti populacije iz  $N_j$  v  $N_i$ , ta verjetnost pa je enaka verjetnosti, da izžrebamo  $N_j - N_i$  osebkov populacije. Ker je porazdelitev Poissonova, sestavimo matriko kot:

$$M_{ij} = \mathcal{P}(N_j - N_i, \beta N_j dt), \quad N_j = N_0 - j, \quad (12)$$

kjer je  $\mathcal{P}(x, \lambda)$  Poissonova porazdelitev s povprečno vrednostjo  $\lambda$ . S takšno prehodno imamo dostop do porazdelitve  $w(t)$  ob poljubnem času  $t$ , saj velja:

$$p(t + dt) = M \cdot p(t), \quad (13)$$

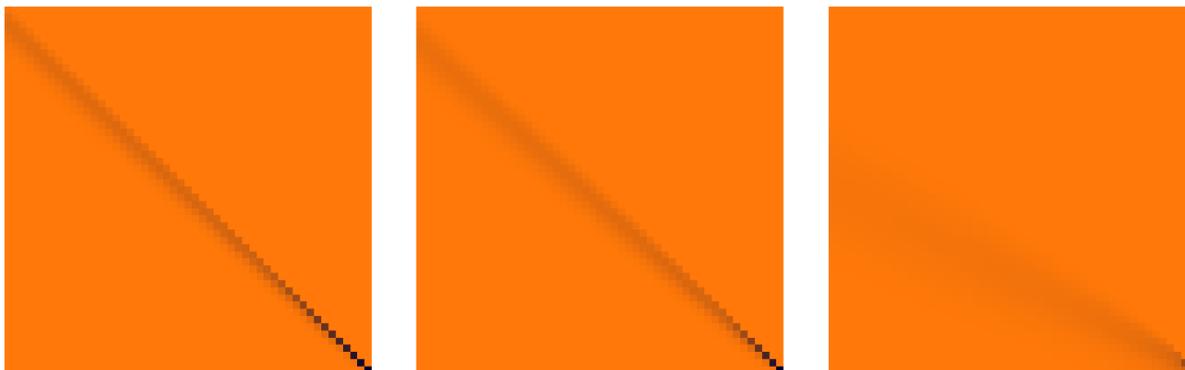
$$p(t = kdt) = M^k p(t = 0), \quad (14)$$

kjer je  $p(0)$  začetna porazdelitev:

$$p(0) = \{1, 0, \dots, 0\}. \quad (15)$$

### 3 Reševanje

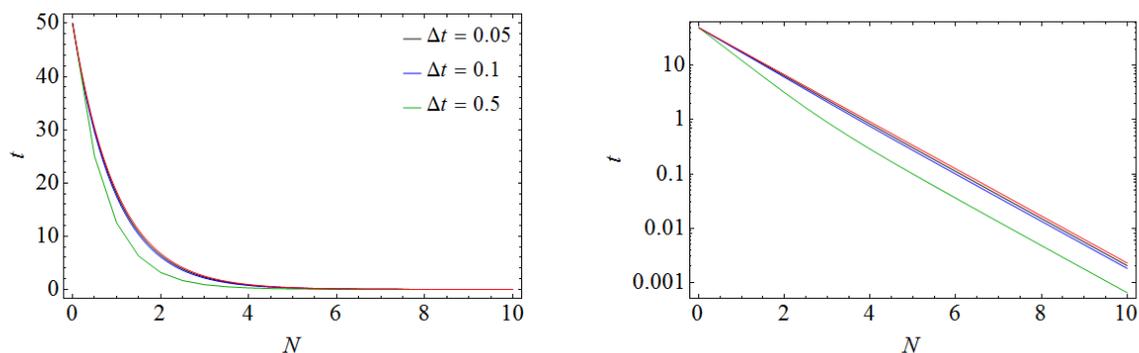
Oglejmo si obliko takšne matrike za  $N_0 = 50$  in za različne vrednosti  $dt$ , kjer sem izključil  $dt = 0.01$ , saj je tako računanje trajalo predolgo:



Vidimo, da je matrika v grobem diagonalna. Opazimo trend, da je matrika z manjšim časovnim korakom  $dt$  vedno bolj diagonalne oblike, z večjim korakom pa postaja vse bolj razpršena. S takšno matriko torej dobimo porazdelitev ob poljubnem času. Preko porazdelitve imamo na kratkem dosegu tudi izračun povprečne vrednosti porazdelitve:

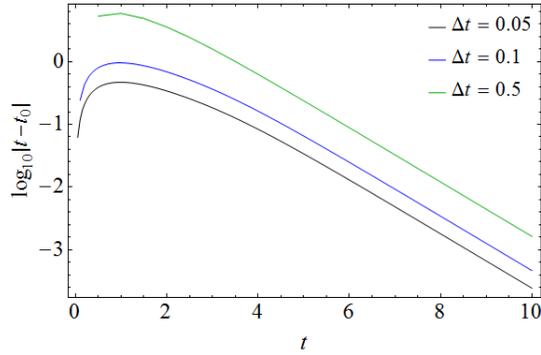
$$\langle N \rangle = \int N(t)w(t)dt, \quad (16)$$

s katero lahko sedaj primerjamo točnost modela s prehodno matriko. Oglejmo si povprečje rešitev še v tem primeru, kjer sem računal z začetno vrednostjo  $N_0 = 50$  :



Prva stvar, ki jo je opaziti, je gladkost funkcij, saj smo prej imeli veliko zlomov. Drugih sprememb praktično ni, zaključki pa so enaki.

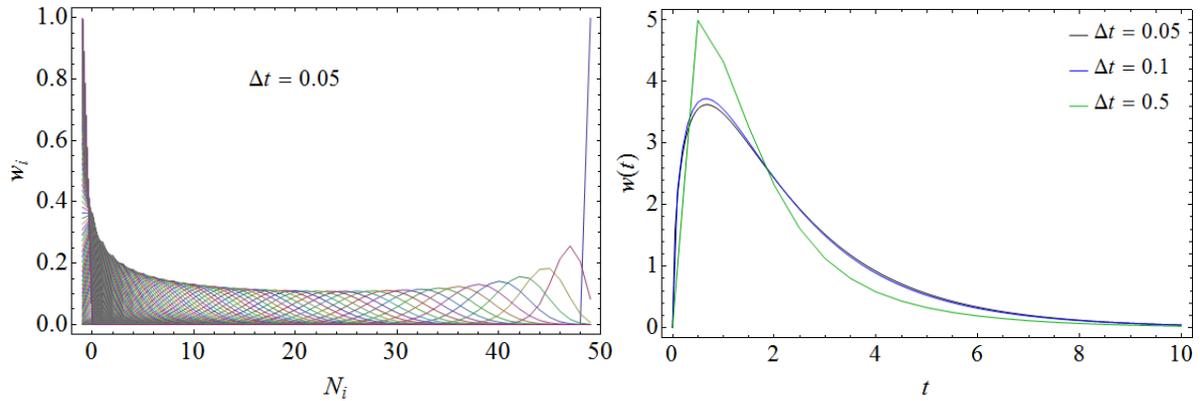
Enako velja tudi za vrednost napake:



Kot smo že omenili, je prednost metode s prehodno matriko ta, da imamo pri roku porazdelitev  $w(t)$  ob poljubnem času. Bolj nazoren je graf odvisnosti efektivne širine porazdelitve v odvisnosti od časa, kar ponovno ni težko izračunati zaradi tako prikladno dosegljive porazdelitvene funkcije:

$$\begin{aligned}\langle N \rangle &= \int N(t)w(t)dt, \\ \langle N^2 \rangle &= \int N^2(t)w(t)dt, \\ \delta N &= \sqrt{\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2}.\end{aligned}\tag{17}$$

Oglejmo si odvisnost takšne porazdelitve od časa, kar je že bilo prikazano v animaciji zgoraj:



Vidimo, da imamo na začetku delta funkcijo, ki se nato razleže medtem ko potuje proti končnem času. Kmalu nato se porazdelitev spet začne ožati, saj vrednost populacije pada proti 0. Na desni sliki vidimo časovno odvisnost efektivnega odmika naše porazdelitve. Izkaže se, da maksimalni odmik nastopi ob tistem času, ko populacija pade na polovico začetne, torej ob času  $t_{1/2} = \log 2/\beta$ .

## 4 Čas izumrtja

Ocenimo lahko tudi čas izumrtja populacije. Čas izumrtja definiramo kot čas, ko zadnja komponenta vektorja verjetnostne porazdelitve, torej komponenta, ki predstavlja število populacije 0, doseže več kot 99 %.

Spodnja tabela prikazuje vrednosti časa izumrtja za populaciji  $N_0 = \{25, 250\}$  za različno velike časovne korake  $dt$ :

| $N_0$                                | 25     |       |      |      |     |     | 250     |       |      |      |     |     |
|--------------------------------------|--------|-------|------|------|-----|-----|---------|-------|------|------|-----|-----|
| $dt$                                 | 0.001  | 0.005 | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 | 0.001   | 0.005 | 0.01 | 0.05 | 0.1 | 0.5 |
| $t_0$                                | 7.818  | 7.81  | 7.81 | 7.75 | 7.7 | 7.0 | 10.119  | 10.11 | 10.1 | 10.0 | 9.9 | 8.5 |
| $t_{0,exact} = \log(N_0/0.01)/\beta$ | 7.8240 |       |      |      |     |     | 10.1266 |       |      |      |     |     |

## Del III

# Model plenilec-plen

## 1 Naloga

V stohastičnem modelu plenilec-plen določi povprečno življenjsko dobo sistema, če začnemo v ravnovesnem stanju. Za boljšo primerjavo med rezultati uporabi stacionarno stanje v katerem je 200 plena in 50 plenilcev, razmerje rodnost/smrtnost pa naj bo  $5/4$  za plen in  $4/5$  za plenilce.

## 2 Uvod

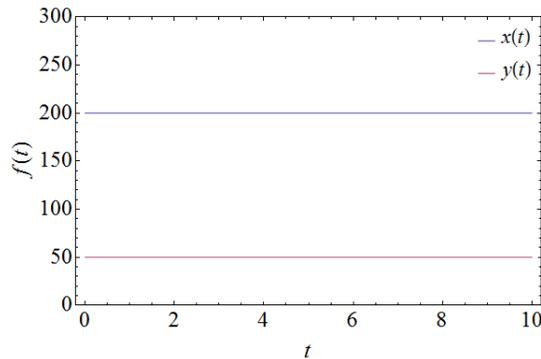
Naša stohastična enačba se v tem primeru glasi:

$$\begin{aligned} x(t+dt) &= x(t) + \mathcal{P}(\beta_{r,x}x(t)dt) - \mathcal{P}(\beta_{s,x}x(t)dt) - \mathcal{P}(Cx(t)y(t)dt), \\ y(t+dt) &= y(t) + \mathcal{P}(\beta_{r,y}y(t)dt) - \mathcal{P}(\beta_{s,y}y(t)dt) + \mathcal{P}(Dx(t)y(t)dt), \end{aligned} \quad (18)$$

kjer sta  $\beta_{r,x}$  in  $\beta_{s,x}$  rodnost in smrtnost plena ter  $\beta_{r,y}$  in  $\beta_{s,y}$  rodnost in smrtnost plenilcev. Stacionarno stanje dosežemo s pravilno nastavitvijo parametrov  $C$  in  $D$ . Tu uporabimo naše znanje diferencialnih enačb iz naloge z analitičnim reševanjem populacijskih modelov, kjer se spomnimo, da velja:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy. \end{aligned} \quad (19) \quad (20)$$

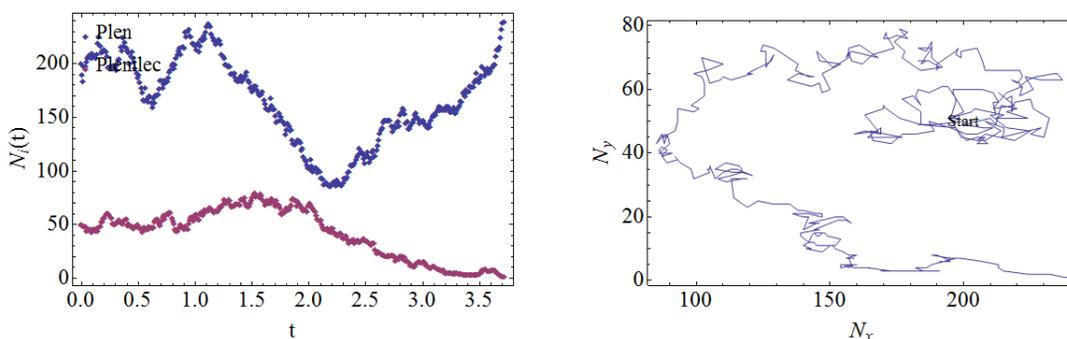
Skupna rodnost plena  $x$  v stohastičnem modelu je  $\beta_{r,x} - \beta_{s,x}$ , ta razlika pa sovpada s parametrom  $\alpha$ . Prav tako razlika  $\beta_{r,y} - \beta_{s,y}$  sovpada s parametrom  $\gamma$ . Parametre nastavimo tako, da bo  $\alpha = -\gamma = 1$ . Za začetno stanje  $x_0 = 200$  in  $y_0 = 50$  si moramo izbrati parametra  $C = 1/y_0$ , in  $D = 1/x_0$ , kar lahko na hitro preverimo z numerično integracijo diferencialnih enačb:



Res smo se prepričali, da je naše stanje stacionarno, saj ni prisotnih nobenih oscilacij populacij, kot pa že vemo, je fazni diagram v tem primeru kar točka  $(x_0, y_0)$ .

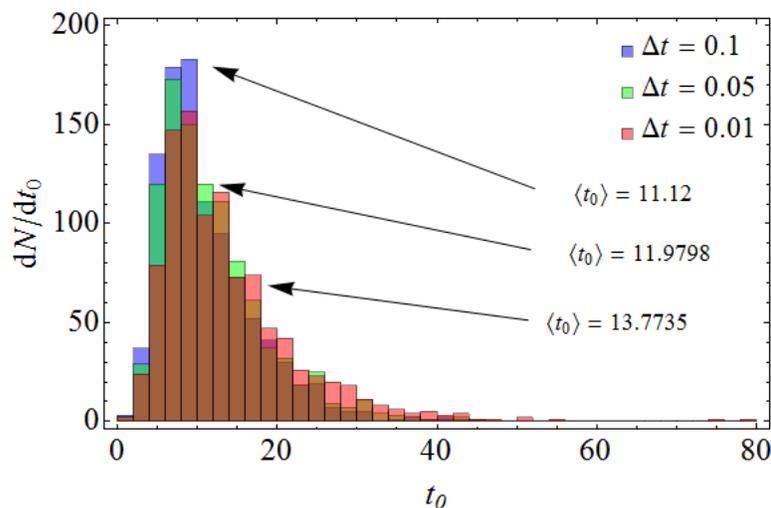
### 3 Povprečna življenjska doba

Življenjsko dobo sistema definiramo kot čas, ob katerem pade ena izmed populacij  $x$  ali  $y$  na 0, hkrati pa štejemo kolikokrat izumre katera populacija. Simulacijo opravimo tako, da po stohastični formuli časovno propagiramo obe populaciji in spremljamo njuno velikost. Oglejmo si tipičen primer časovnega razvoja obeh populacij za  $dt = 0.01$ :



Vidimo, da populaciji res začneta v stacionarnem stanju, v njem nekaj časa vztrajata, potem pa se ravnovesje poruši in malo zaniha. Ti odmiki se vedno bolj približujejo skrajnosti, kjer nato slej ko prej ena od populacij izumre. Na desni sliki je prikazan fazni diagram tega specifičnega primera. Tudi tu vidimo, da smo na začetku v točki ravnovesja (200, 50), nato pa se začne krivulja oddaljevati od te točke, kar počne vse dokler se ne „zaleti“ v eno od osi.

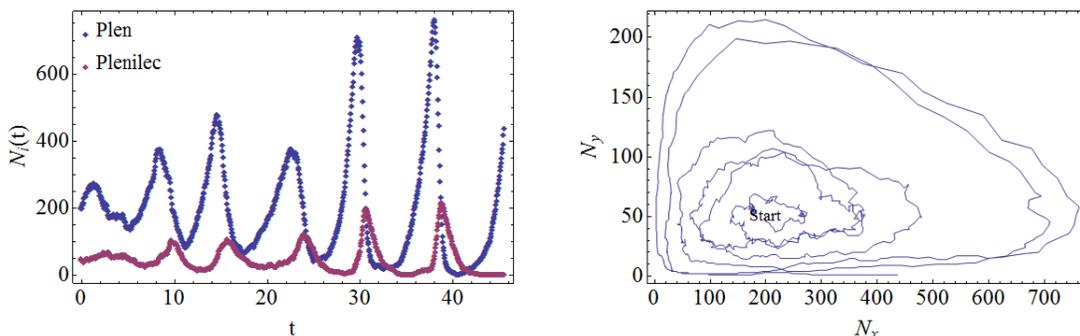
Oglejmo si sedaj distribucijo življenjskih dob, kjer sem simulacijo ponovil 1000 krat za časovne korake  $dt = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ :



Dobili smo porazdelitev časov izumrtja populacije za različne časovne korake. Vidimo, da je porazdelitev v grobem neodvisna od izbire širine časovnega koraka. Če najbolj verjetni čas izumrtja ocenimo kar s povprečno vrednostjo porazdelitve, dobimo, da se giblje okoli vrednosti  $t_0 = 12 \pm 1$ , segajo pa vse do  $t_0 = 40$ . Določimo lahko tudi verjetnost s katero izumre določena populacija, kar dosežemo tako, da štejemo katera populacija umre, ko do tega dogodka pride. Izkaže se, da v povprečju plenilci izumrejo prvi z verjetnostjo  $\{76.4\%, 72.2\%, 63.9\%\}$  za časovne korake v istem vrstem redu, v povprečju torej 70.8%. Takšna asimetrija verjetnosti za izumrtje ni nepričakovana, saj ima plen pozitivno rodnost, medtem ko ima plenilec negativno, torej so plenilci že v osnovi bolj nagnjeni k izumrtju.

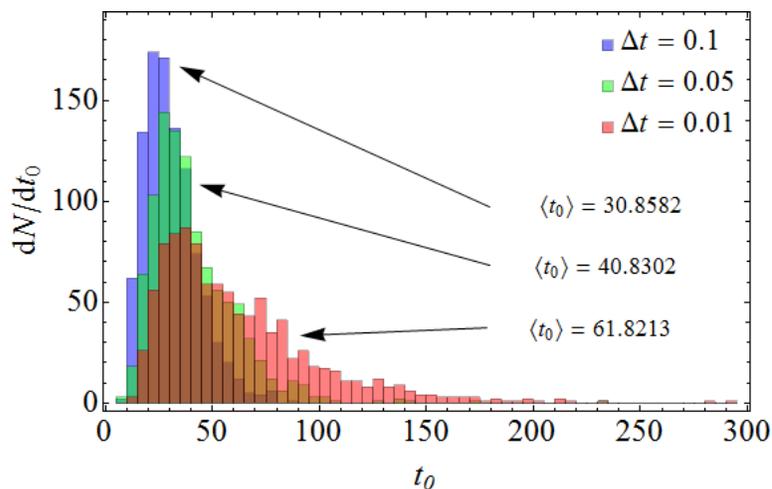
## 4 Povprečna življenjska doba - sklopljeno

Podobno lahko storimo tudi za sklopljen sistem, kjer rojstva in smrti obravnavamo skupaj in med njimi ne razločujemo. V tem primeru imamo spet skupen parameter  $\beta$ . Sklepamo lahko, da bo sistem vzdržal dlje, saj ga „motimo“ manj kot v prejšnjem primeru, manj motenj pa pomeni daljše vzdrževanje, oziroma poskušavanje vzdrževanja stacionarnega stanja. Oglejmo si tipičen primer časovnega razvoja obeh populacij za  $dt = 0.05$  za tak primer:



Vidimo, da populaciji tudi tokrat začneta v stacionarnem stanju, v njem nekaj časa vztrajata, potem pa se ravnovesje poruši in sistem še večkrat zaniha z različnimi amplitudami. To nihanje se vedno bolj približuje skrajnosti, kjer nato slej ko prej ena od populacij izumre, tako kot se je zgodilo tudi v prejšnjem primeru. Na desni sliki je situacija enaka prejšnji, le da imamo več „obhodov“.

Oglejmo si sedaj distribucijo življenjskih dob, kjer sem simulacijo ponovil 1000 krat za iste časovne korake:



V tem primeru je prišlo do različnih porazdelitev za različne časovne korake. Opazimo, da manjši časovni korak bolj razleže porazdelitev. Skupnega povprečnega časa več ne moremo definirati, saj so razlike prevelike, so pa povprečja za posamezno porazdelitev prikazana na sliki. Vidimo, da smo sklepali pravilno. Življenjske dobe so v splošnem mnogo daljše v tem primeru kot pa v prejšnjem, saj se le-te raztezajo vse do časa  $t = 200$ . Tudi v tem primeru lahko določimo verjetnost, s katero umre določena populacija. V teh primerih plenilci izumrejo prvi z verjetnostjo  $\{76.4\%, 68.1\%, 56.3\%\}$  za časovne korake  $dt = \{0.01, 0.05, 0.1\}$ . Opazimo, da se s časovnim korakom  $dt = 0.01$  bolj približamo prejšnji situaciji, zato sklepamo, da je ta bolj pravilna, saj je tudi časovni korak bolj natančen. Glavna razlika med sistemoma je torej le skalirni faktor življenjskih dob.