



# Modelska Analiza 1

## 12. naloga - Spektralna analiza in filtriranje

Avtor: Matic Lubej  
Asistent: dr. Simon Čopar  
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 15.1.2014

---

### Naloga:

Pri tej nalogi smo se dotaknili Fourierovih transformacij in filtriranja šuma v signalih. V prvem delu naloge smo analizirali frekvenčni spekter dveh signalov in preverili vplive različnega obsega podatkov, nato pa še vplive različnih okenskih funkcij. V drugem delu naloge smo uporabili Wienerjev filter, ki deluje na principu minimizacije šuma, na konvoluciji signala s prenosno funkcijo, kamor je bil primešan tudi šum. Naša naloga je bila, da čim bolj kvalitetno rekonstruiramo vhodni signal  $u(t)$ . Tretji del naloge je bil precej podoben drugemu, le da smo z Wienerjevim filtrom filtrirali šum iz slike Lincolнове podobe, kar smo morali storiti posamezno po stolpcih.

## Del I

# Frekvenčna analiza

## 1 Naloga

Signaloma s 512 točkami na datotekah `val2.dat` in `val3.dat` določi frekvenčni spekter. Preskusi različne okenske funkcije. Kako se spremeni spekter, če analiziramo krajše intervale (64, 128, ... točk) ?

## 2 Frekvenčni spekter

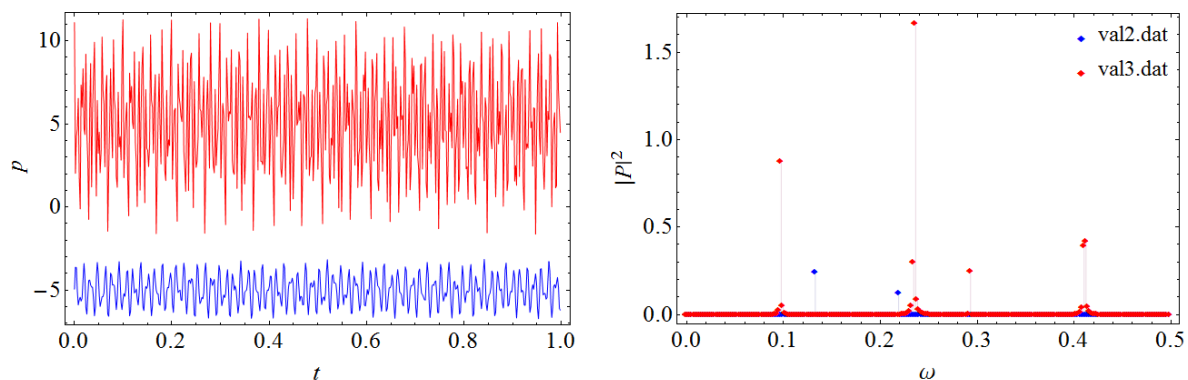
Osnovna funkcija te teme je diskretna Fourierova funkcija:

$$F_n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{N-1} f_k e^{ikn/N}, \quad (1)$$

kjer je  $f$  vhodna funkcija,  $F$  pa je njena transformiranka. Definiramo lahko tudi inverzno transformacijo:

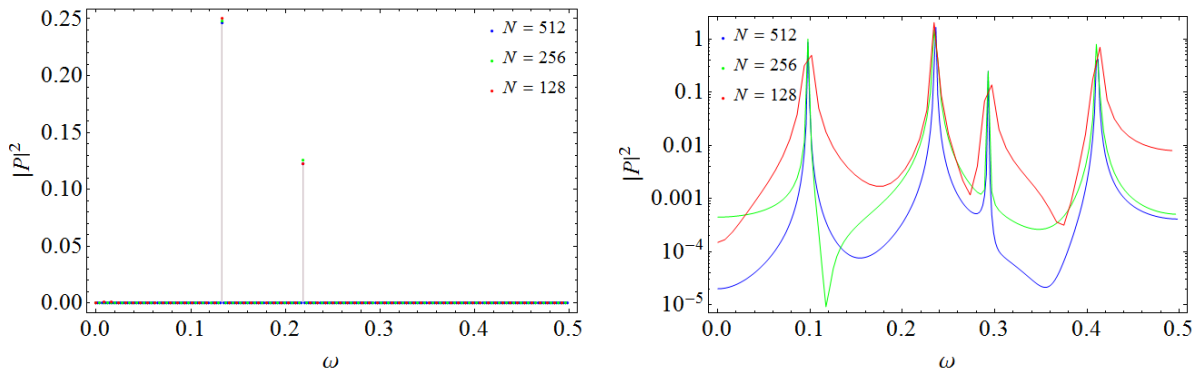
$$f_k = \sum_{n=1}^{N-1} F_n e^{-ikn/N}. \quad (2)$$

Fourierovo funkcijo v praksi pogosto uporabljamo za konstrukcijo signala, med drugim pa je tudi orodje za frekvenčno analizo. Če naredimo to transformacijo na nekem signalu, dobimo informacijo o frekvenci in fazi tega signala. Oglejmo si frekvenčna spektra dveh signalov, ki sta z „off-setom“ prikazana na levi sliki, na desni pa sta njuna frekvenčna spektra:



Opazimo, da je drugi signal veliko bolj razgiban kot prvi. Na prvi pogled deluje leva slika zelo zašumljena, vendar po analizi frekvenčnega spektra na desni sliki vidimo, da temu ni tako, le frekvenca vzorčenja je premajhna, da bi podatke lahko elegantno povezali z očmi, kar pa pri programu ne predstavlja problema. Vidimo, da je prvi signal sestavljen iz 2 vrhov, drugi signal pa iz 4ih, kjer vsak vrh predstavlja svojo frekvenco. Za kasnejše namene je vredno omeniti, da je prvi signal veliko čistejši od drugega, saj posamezno frekvenco predstavlja en sam vrh, medtem ko pri drugem signalu opazimo majhno razmazanost. Opazimo tudi, da so vrhi zastopani z različno amplitudi, katerih razmerja se morajo ujemati z amplitudami signala.

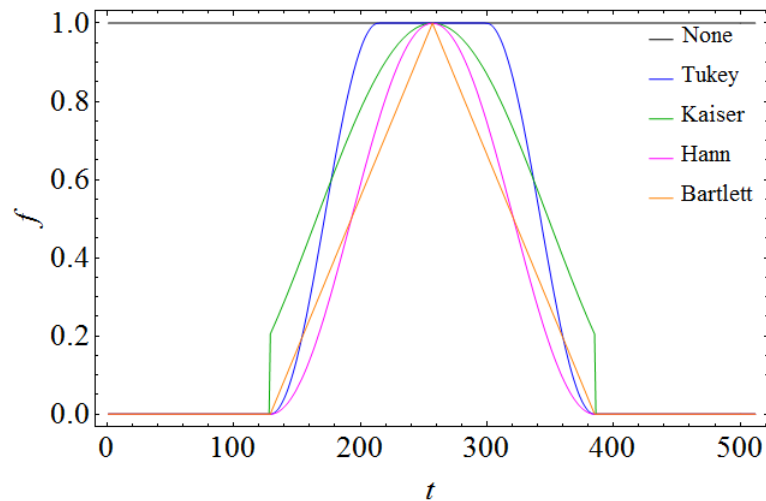
V splošnem moramo v podatkih za pravilno frekvenčno analizo imeti večkratnik periode, drugače v spekter prinesemo notri še druge frekvence. Oboji podatki sestojijo iz 512 vnosov. Oglejmo si, če se frekvenčni spekter kaj spremeni, če v obravnavo vzamemo manjše število podatkov:



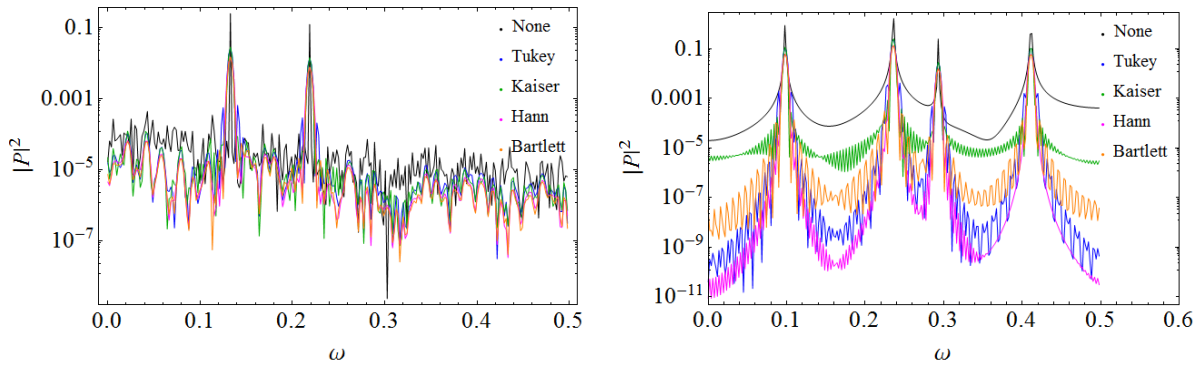
Na levi sliki opazimo, da se frekvenčni spekter prvega signala ni spremenil. Sklepamo lahko, da smo tudi pri manjšem številu podatkov zaključili z večkratnikom periode signala. Spremenila se ni ne amplituda in ne širina spektra. Na desni sliki pri drugem signalu pa je situacija drugačna. Verjetno že pri začetnem signalu nismo ujeli večkratnika frekvence, zato obravnava krajšega števila podatkov le oslabša situacijo tako, da se vrhovi odebelijo. Podatki so zaradi lažje vizualne reprezentacije povezani tu in tudi v kasnejših primerih.

### 3 Okenske funkcije

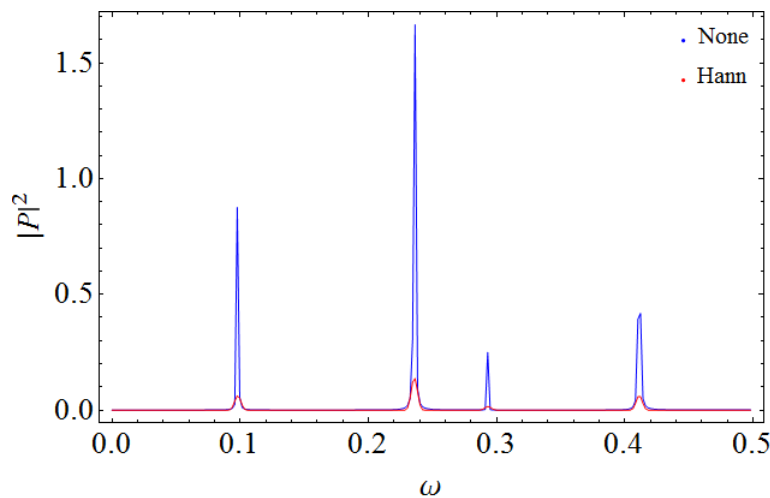
Okenske funkcije uporabimo z namenom, da izboljšamo razmerje med signalom in šumom. Obstajajo različne okenske funkcije, ni pa nobenega pravila katera je boljša od druge, saj je veliko odvisnosti od signala. Oglejmo si vpliv različnih okenskih funkcij na naš signal, kjer sem uporabil že vgrajena okna iz orodja Mathematica:



Lastnosti okenskih funkcij koristimo tako, da jo pomnožimo s signalom v časovnem prostoru in nato po istem postopku kot prej napravimo diskretno fourierovo transformacijo. Oglejmo si sedaj vpliv različnih okenskih funkcij na naše podatke:



Vpliv je najbolj očiten v logaritemski skali. Od prej vemo, da frekvenčnega spektra ne bi mogli bolj izboljšati. Leva slika dokazuje, da je kakršna koli dodatna „optimizacija“ slaba ideja, saj nam to vrhove razširi, njihovo amplitudo pa zmanjša. Vidimo, da prvi signal najbolj razširi Tukeyevo okno. Na desni sliki pa vidimo, da nekatera okna res očistijo naš signal slabih frekvenc. Opazimo, da okna znižajo vmesne frekvence, vendar to plačamo z zmanjšanjem amplitude vrha. Čeprav pa znižamo vrh, ga znižamo veliko manj kot pa znižamo vmesno področje. V tem smislu so naša okna precej izboljšala situacijo, najbolje pa se je izkazalo Hannovo okno. Naslednja slika prikazuje še primerjavo med slednjim in prvotnim frekvenčnim spektrom, kjer vidimo vpliv Hannovega okna:



Vidimo, da se čeprav se je višina vrha prevej zmanjšala, je širina vrha ožja, poleg tega pa je dosti nižje še vmesno področje med vrhovi.

# Del II

## Wienerjev filter

### 1 Naloga

S pomočjo Wienerjevega filtra napravi dekonvolucijo signalov na datotekah `signal{0, 1, 2, 3}.dat`. Število točk v posameznem signalu je 512. Na zadnjih treh datotekah je signalu primešan šum. Prenosna funkcija je:

$$r(t) = \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau}, \quad \tau = 16. \quad (3)$$

### 2 Uvod.

Signal  $u(t)$ , ki prihaja v merilno napravo s prenosno funkcijo  $r(t)$ , se ob dodatku šuma preoblikuje v:

$$c(t) = u(t) \star r(t) + n(t). \quad (4)$$

Iz izmerjenega časovnega poteka  $c(t)$  in ob poznavanju odzivne funkcije  $r(t)$  ter nekaterih predpostavkah o šumu  $n(t)$  bi radi rekonstruirali vpadni signal  $u(t)$ . Pri tem uporabljamo znano zvezo, ki nam zelo olajša nalogo:

$$c(t) = u(t) \star r(t) \longrightarrow C(\omega) = U(\omega) \cdot R(\omega), \quad (5)$$

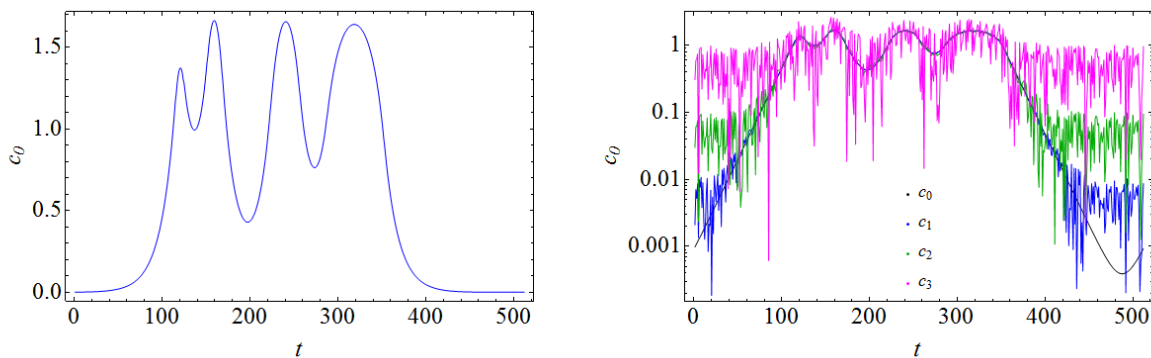
kar pa ne velja več ob prisotnosti šuma. N. Wiener je predlagal naslednjo rešitev, ki sledi iz minimizacije napake po metodi najmanjših kvadratov. Pred dekonvolucijo je treba transformiranko  $C(\omega)$  pomnožiti s filtrom:

$$\Phi(\omega) = \frac{|S(\omega)|^2}{|S(\omega)|^2 + |N(\omega)|^2}, \quad (6)$$

kjer sta  $C(\omega)$  in  $N(\omega)$  fourierovi transformiranki funkcij  $c(t)$  in  $n(t)$ .

### 3 Reševanje

$|N(\omega)|^2$  je spektralna moč šuma, ki jo je treba nekako uganiti. To storimo tako, da narišemo periodogram  $|C(\omega)|^2$  in pogledamo od katere frekvence naprej lahko predpostavimo, da je glavna komponenta le šum. Ta del nato aproksimiramo s konstantno ali linearno funkcijo ter ekstrapoliramo po celem območju. Analizirali smo 4 signale, med katerimi je bil prvi brez šuma, ostalim pa je bil šum primešan. Najprej si oglejmo te signale:

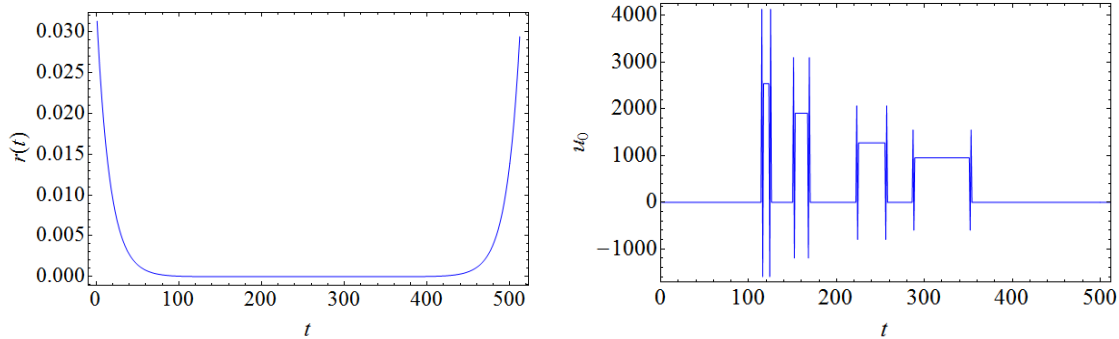


Vidimo, da so signali res različica prvega, kjer ima vsak naslednji primešanega več šuma.

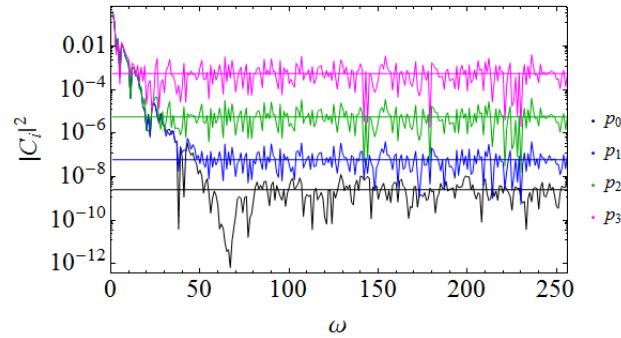
Prvi signal, ki je brez šuma, lahko enostavno dekonvoluiramo preko relacije:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{C(\omega)}{R(\omega)} \right) \quad (7)$$

in dobimo:



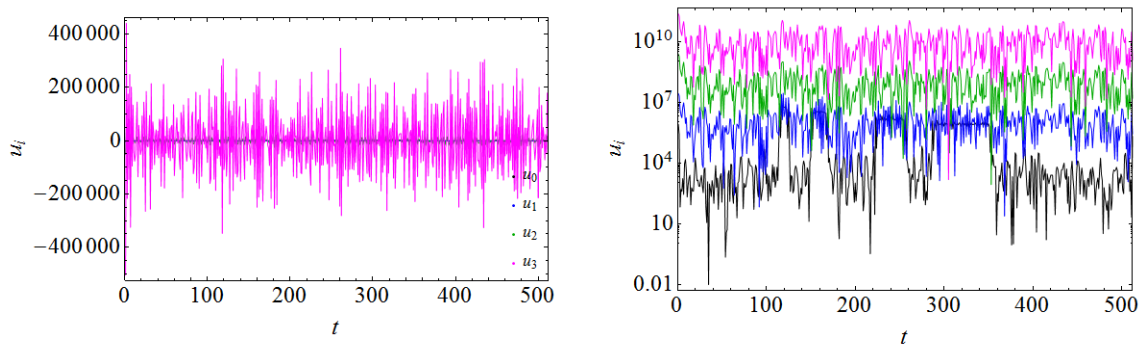
Leva slika prikazuje prenosno funkcijo, desna pa naš vhodni signal  $u(t)$ . Vidimo, da je signal škatlast in da sestoji iz štirih škatel, katerih amplituda pada, širina pa se večja. Opazimo tudi, prisotnost ostrih robov, ki so posledica visokih frekvenc. Oglejmo si najprej frekvenčni spekter, kjer smo že ocenili povprečen prispevek šuma:



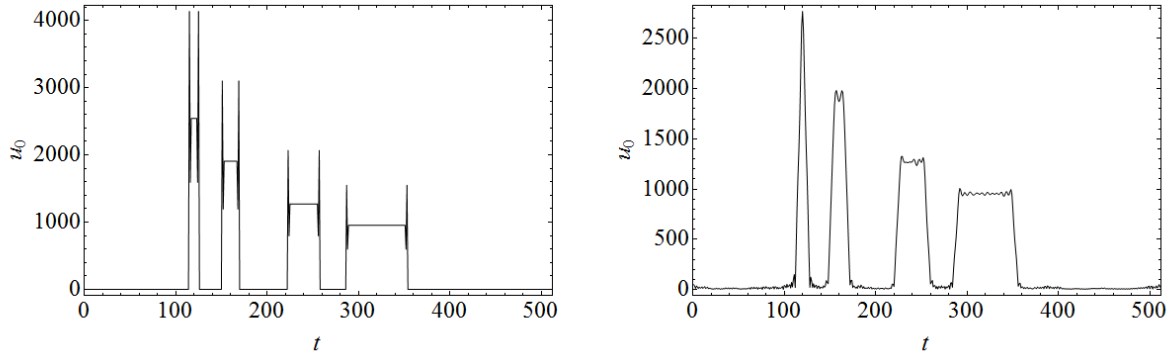
Tako ocenjen šum nato ekstrapoliramo po celem intervalu in preko njega izračunamo Wienerjev filter  $\Phi$ . Popravljen signal nato dobimo preko relacije:

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1} \left( \Phi(\omega) \frac{C(\omega)}{R(\omega)} \right). \quad (8)$$

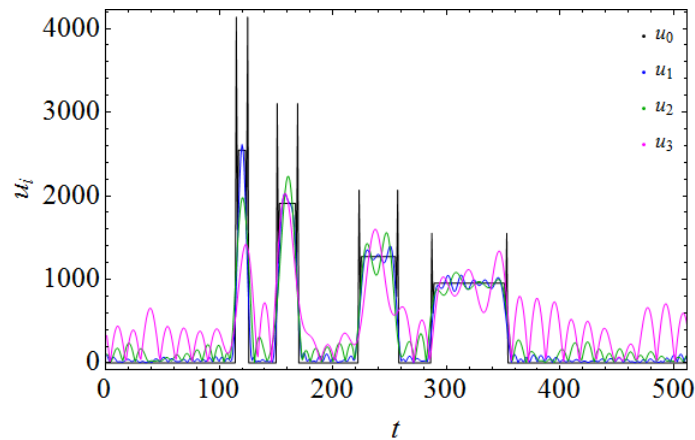
Poglejmo, ali je takšen signal čemu podoben:



Vidimo, da signal praktično ni prepoznaven. Filter tako ni pretirano izboljšal situacije. Sklepal sem, da bi se splačalo porezati višje frekvence od neke meje, saj se bom tako znebil veliko šuma, ki je enakomeren po celem frekvenčnem spektru. Ker se s tem znebim višjih frekvenc, pa naša stopnica ne bo imela več tako elegantne oblike, ampak bo v njej videti sestavo iz nižjih frekvenc. Oglejmo si ta prestop pri prvem signalu:



Tako smo se znebili ostrih vrhov, ki nam v tej analizi le škodijo, pri čemer pa smo ohranili grobo obliko signala. Oglejmo si, kako Wienerjev filter sodeluje skupaj z rezanjem frekvenc v tem primeru:



Vidimo, da je v tem primeru rešitev mnogo bolj podobna originalnemu signalu. Res, da je signal večinoma sestavljen iz nižjih frekvenc, a so to edine, ki so izstopale iz šuma, saj smo višje morali skupaj s šumom odrezati proč. Na tak način smo torej uspešno rekonstruirali začetni signal, kljub primešanemu šumu.

## Del III

# Čiščenje slike

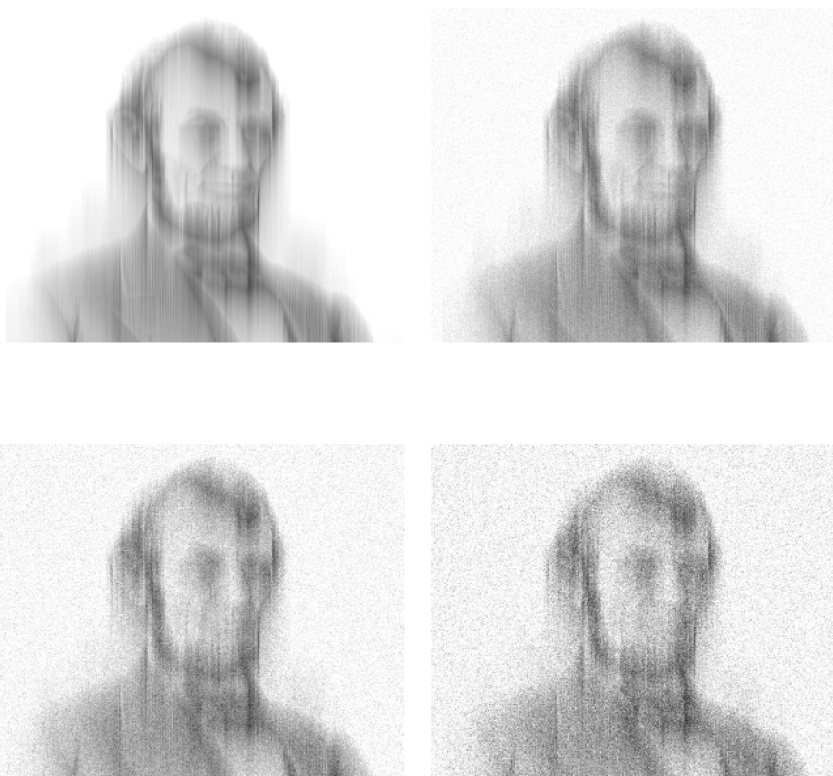
## 1 Naloga

Poskusi očistiti Lincolново podobo, odbrano po stolpcih, ki se v metodi LA-P-MS tradicionalno uporablja za testiranje dekonvolucijskih algoritmov. Podatki sestojijo iz datotek `lincoln_L30_N{00,10-40}.pgm` (313x256), kjer je v zadnjih dveh datotekah dodan šum. Šuma se bomo v tej nalogi ponovno lotili z Wienerjevim filtrom. Prenosna funkcija je

$$r(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad \tau = 30. \quad (9)$$

## 2 Reševanje

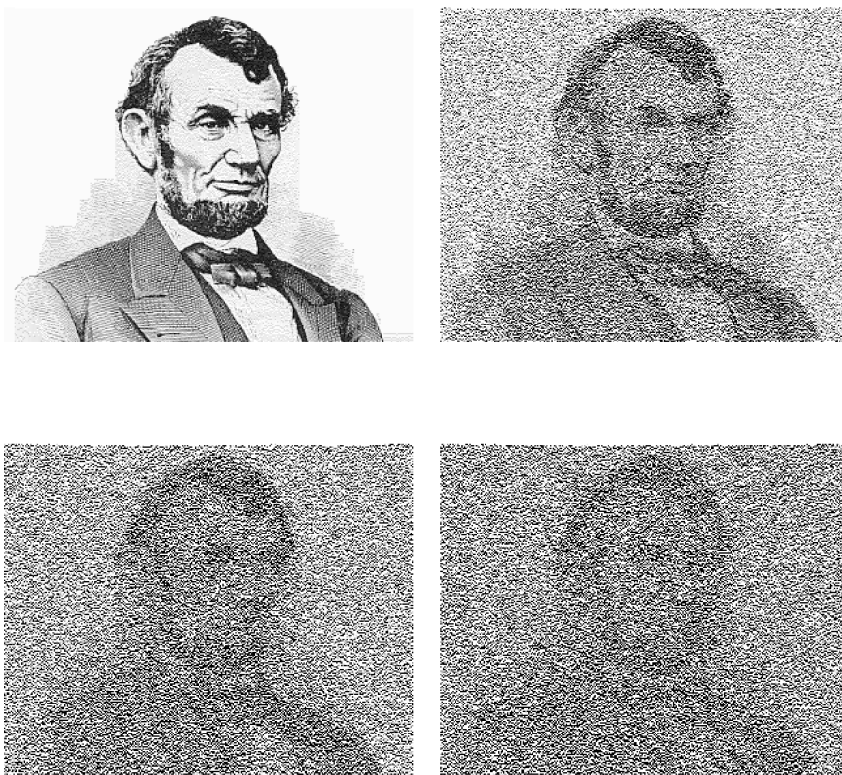
Problem sem reševal v matematičnem orodju Matlab tako, da smo „skenirali“ po stolpcih slike, kjer sem vsak stolpec posamezno rekonstruiral na isti način kot prejšnjo nalogo. Ponovno kot prej smo tudi uporabili kombinacijo Wienerjevega filtra, kjer sem od nekje naprej višje frekvence šuma odrezal. Najprej si oglejmo prvotne izhodne podatke, med katerimi so nekateri zašumljeni:



Vidimo, da imamo v vseh primerih razmazanost po stolpcih, pri vsaki naslednji datoteki pa imamo primešano vedno več šuma.



Tako kot pri prejšnji nalogi lahko tudi tu rekonstruiramo vhodni signal  $u(t)$  preko relacije (7), ne da bi uporabili Wienerjev filter. Oglejmo si vhodne podatke skupaj s šumom:



Prva slika je zelo razločna in je nedvomno original, pri ostalih pa je šum še bolj očiten kot prej. Oglejmo si sedaj vplive filtra pri več različnih frekvencah rezanja  $\omega_m$  za posamezno sliko:

$$N10, \quad \omega_m = \{30, 40, 50\}$$



$N20, \quad \omega_m = \{30, 40, 50\}$



$N30, \quad \omega_m = \{30, 40, 50\}$



Pri vseh slikah vidimo, da z določeno izbiro frekvence reza delamo kompromis med natančnostjo in med resolucijo, kjer kvaliteta slike pada z večanjem količine šuma. Vseeno ima v večini primerov rekonstruirana slika še prepoznavljivo podobo, tako da smo z rekonstrukcijo zadovoljni. Slike za zadnje podatke nisem rekonstruiral, ker je bil šum premočan za kvalitetno rekonstrukcijo.