



Modelska Analiza 1

13. naloga - Metoda maksimalne entropije

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 19.2.2014

Naloga:

Pri tej nalogi smo spoznali metodo maksimalne entropije (MEM). V prvem delu naloge smo po tej metodi določili frekvenčni spekter signalov in si ogledali odvisnosti od števila polov in od gostote prikaza. Metodo smo tudi primerjali z rezultati iz prejšnje naloge, kjer smo frekvenčni spekter določili z metodo FFT. V drugem delu naloge smo metodo uporabili za linearno napoved podatkov na podlagi prve polovice podatkov. Izkaže se, da s to metodo v splošnem dosežemo boljšo resolucijo, ampak imamo tudi tu težave, ki so značilne za metodo MEM, od katerih je najbolj značilna magična izbira števila polov, ki jih moramo uporabiti.

Del I

Frekvenčni spekter

1 Naloga

Določi frekvenčni spekter signalov iz datotek `val2.dat`, `val3.dat`, in `co2.dat` z metodo maksimalne entropije. V slednji datoteki s koncentracijo CO₂ v zraku upoštevaj splošen (linearen) letni trend. Preizkusi delovanje metode v odvisnosti od števila polov in od gostote prikaza. Pri CO₂ si oglej še njihovo lego. Primerjaj natančnost metode z rezultati, ki jih da FFT ob uporabi filtrov. Sestavi tudi testni signal iz vsote sinusnih členov z bližnjimi frekvencami ter razišči ločljivost metode.

2 Uvod in reševanje

Za razliko od prejšnje naloge, smo v tokrat uporabili metodo maksimalne entropije. Oceno frekvenčnega spektra pri metodi maksimalne entropije dobimo preko izraza:

$$P(f) \approx \frac{a_0}{|1 + \sum_{k=1}^M a_k z^k|^2}, \quad (1)$$

kjer so a_k neki koeficienti in M število polov. Enačba zgoraj ima torej pole, preko katerih lahko opišemo frekvenčni spekter, saj lahko z njimi opišemo ostre črte, ki se pojavljajo pri zastopanih frekvencah. V ta namen sem uporabil že obstoječe funkcije iz priročnika Numerical recipes, kjer sem koristil naslednje funkcije: `memcof`, `evlmem`, `predict`, `fixrts` ipd. Parametra teh metod, na katere lahko vplivamo, sta število polov M in gostota prikaza. V C++ izračunane podatke sem grafično prikazal v orodju Mathematica.

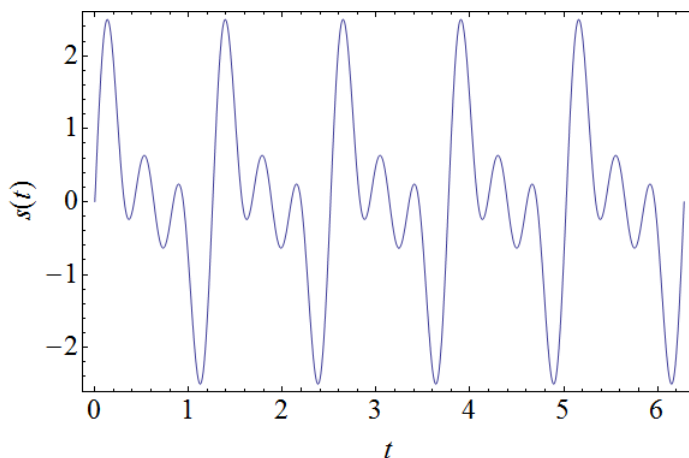
3 Rezultati

3.1 Testni signal

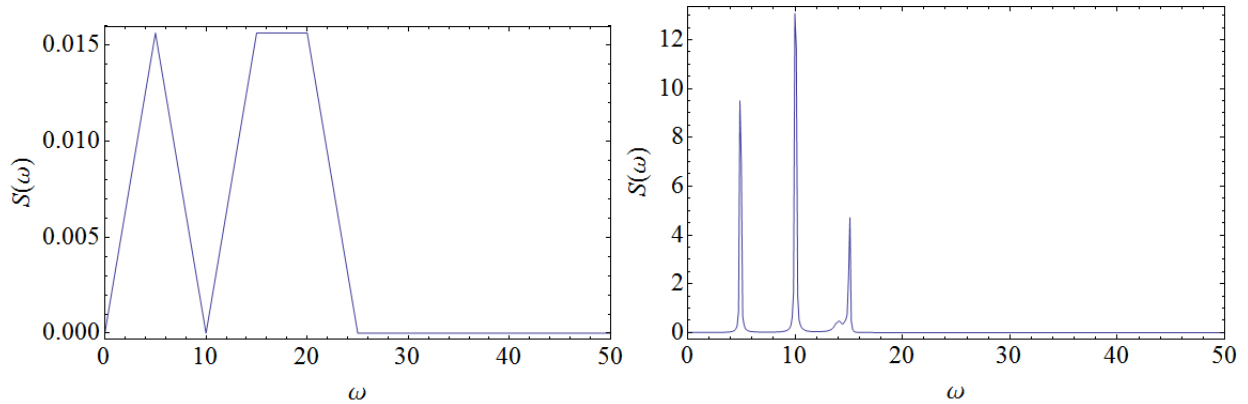
Najprej sem se želel z metodo spoznati in jo preučiti na nekem testnem signalu, za katerega sem vedel, kako se mora obnašati. Izmislil sem si signal kot vsoto treh sinusov:

$$s(t) = \sin(5t) + \sin(10t) + \sin(15t), \quad (2)$$

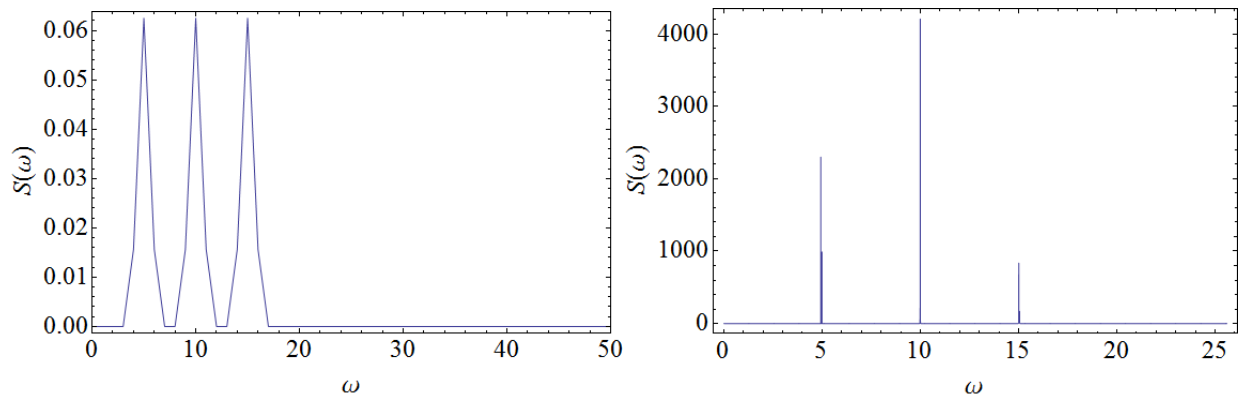
ki ima skupno periodo :



Na testnem signalu sem uporabil metodo maksimalne entropije in FFT ter ju med sabo primerjal. Oglejmo si rezultate, kjer sem za vzorec vzela eno periodo in jo vzorčil s 512 točkami:



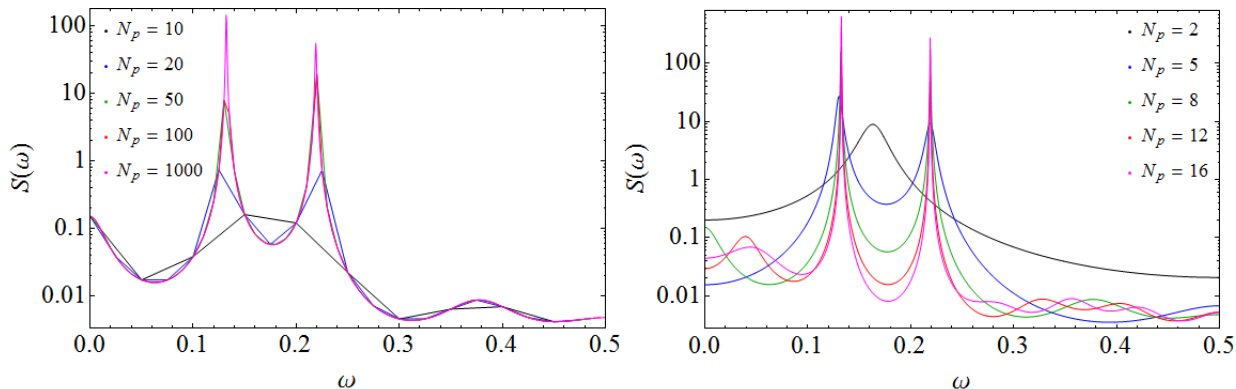
Vidimo, da imamo pri metodi FFT kar precejšnje težave z ločljivostjo, kar pa pri metodi MEM ne predstavlja nobenega problema. Enako ne moremo reči za amplitudo frekvenčnega spektra, saj so razmerja med amplitudami pri metodi MEM precej zgrešena, medtem ko so razmerja pri FFT metodi prava, čeprav vrhovi niso razločeni. Oglejmo si še primer kjer z istim številom točk vzorčimo petkratnik periode:



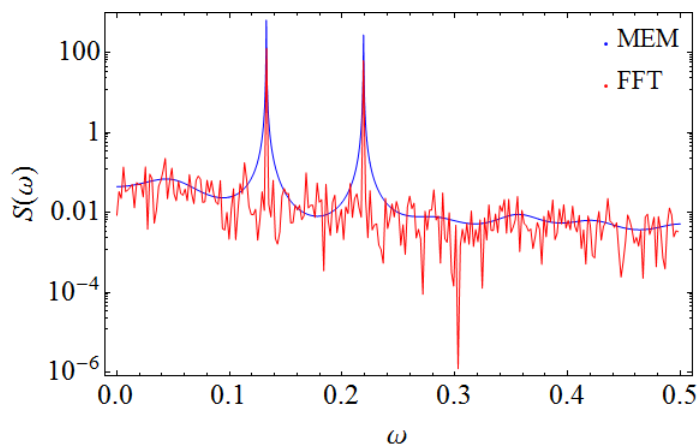
V tem primeru se je ločljivost pri metodi FFT izboljšala, razmerje med amplitudami pa ohranile, medtem ko se situacija pri metodi MEM ni spremenila, imamo le malce boljšo ločljivost. Naučili smo se torej, da metodo MEM uporabimo takrat, ko potrebujemo dobro ločljivost, oziroma nas zanimajo položaji frekvenc, ne pa njihova relativna zastopanost.

3.2 Datoteki val2.dat in val3.dat

Podatke, ki smo jih analizirali v prejšnji nalogi, bomo analizirali z metodo MEM tudi v tej nalogi in metodi med sabo primerjali še na dejanskih podatkih. Najprej si oglejmo odvisnost od gostote prikaza za 16 polov (levo) in od števila polov za 10 000 točk (desno) pri metodi MEM za datoteko val2.dat:

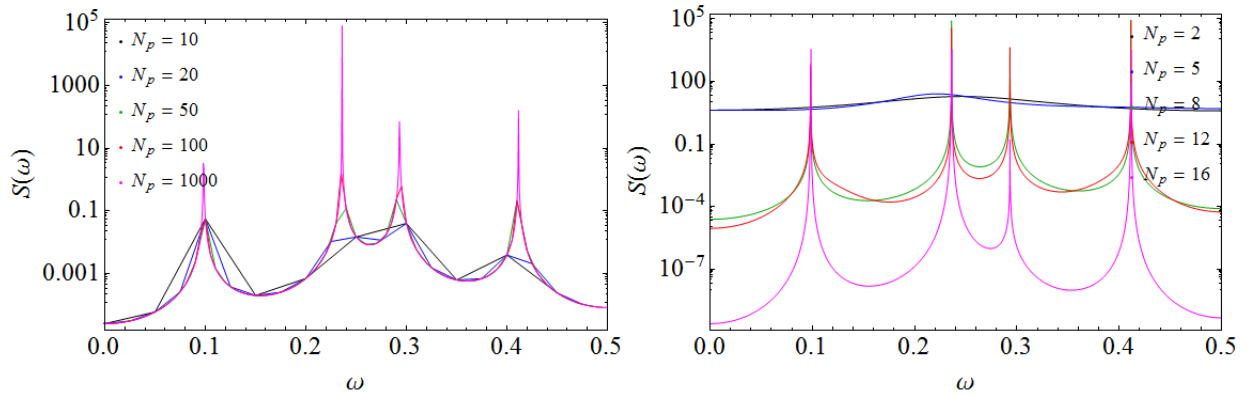


Vidimo, da lahko gostota točk precej vpliva na interpretacijo rezultata, saj se lahko zgodi, da pri manjšem številu točk vrhove kar „povozimo“. Situacija se izboljša če gostoto točk povečamo. Očitno je to kar pomemben parameter. Po drugi strani je precej pomembno tudi število polov, saj s premajhnim števiom ne zajamemo dovolj potrebne informacije. Pri nekem številu polov se potem zgodi, da med vrhovi dobro ločimo, z nadaljnim večanjem števila pa le izboljšujemo situacijo z nižanjem „ozadja“, dokler ni število polov preveliko. Oglejmo si primerjavo metode MEM z metodo FFT, pri kateri sem signal pomnožil s Hannovo okensko funkcijo:

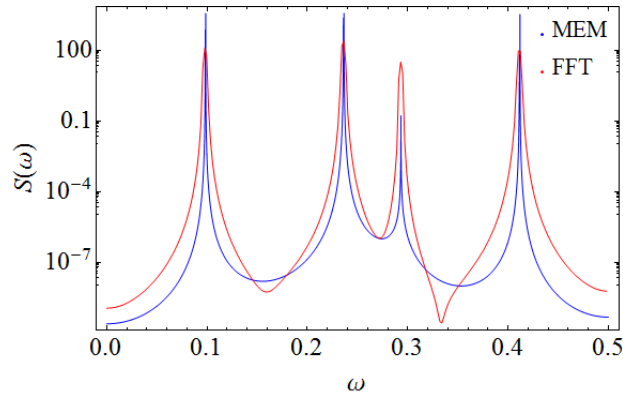


Opazimo, da je v tem primeru metoda FFT nekoliko bolj natančna, vsaj kar se tiče ostrine vrhov, kar pa bi verjetno lahko do neke mere popravili z večjim številom polov. Razlog je verjetno ta, da je signal v datoteki periodično zaključen, zato ga lahko FFT natančneje določi. Če podatkov ne bi pomnožili z okensko funkcijo, bi v resnici dobili diskretne vrhove, katerim pa se metoda MEM ne more približati.

Poglejmo si sedaj še datoteko `va13.dat` :



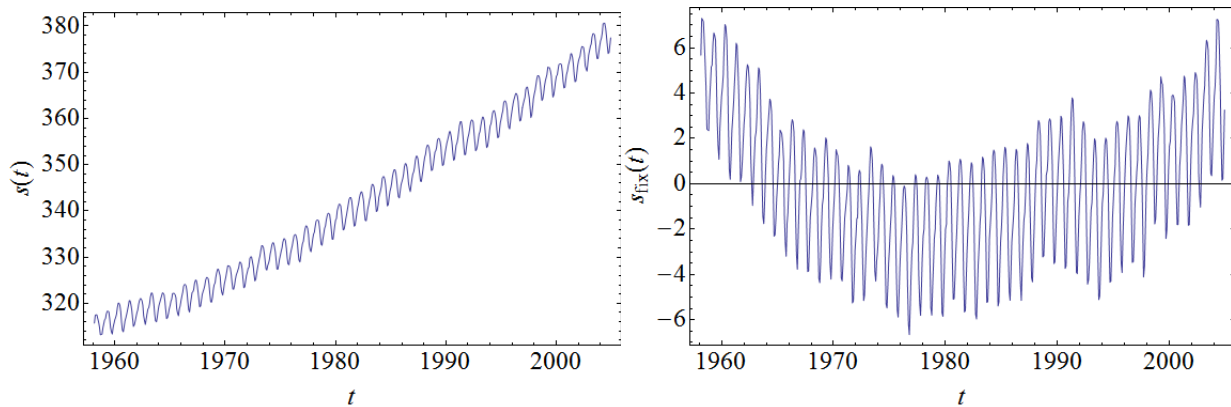
Tudi tu opazimo podobno situacijo. Pri majhnem številu točk na grobo ločimo med tistimi vrhovi, ki so bolj narazen, bližjih pa ne ločimo, medtem ko pri manjšem številu polov ponovno ne zajamemo dovolj informacije. Oglejmo si še primerjavo z metodo FFT:



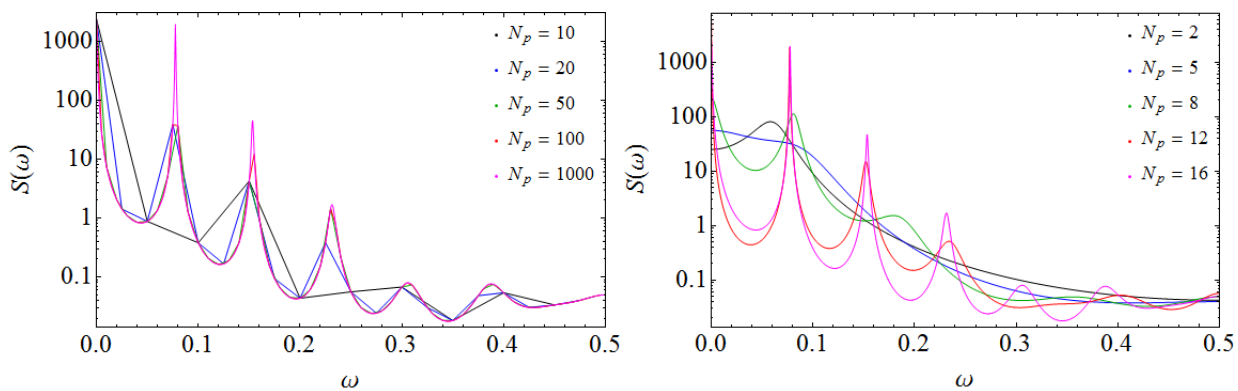
Tokrat se je metoda MEM izkazala za bolj natančno. Obe metodi dobro določita vrhove, vendar jih metoda MEM določi bolj ostro kot metoda FFT. Tu je razlog obraten kot pri prejšnji datoteki, saj signal v tem primeru ni periodično zaključen, kar nam odebeli vrhove in omogoči metodi MEM večjo uspešnost. V splošnem podatki niso periodično zaključeni zato ima iz tega stališča metoda MEM večjo prednost.

3.3 Koncentracija CO₂ v zraku

Podobno si oglejmo sedaj še na vzorcu novih podatkov, ki prikazujejo koncentracijo CO₂ v zraku. V splošnem ima ta linearen trend, ki pa ne pripomore k frekvenčni analizi, zato podatkom odštejemo premico:

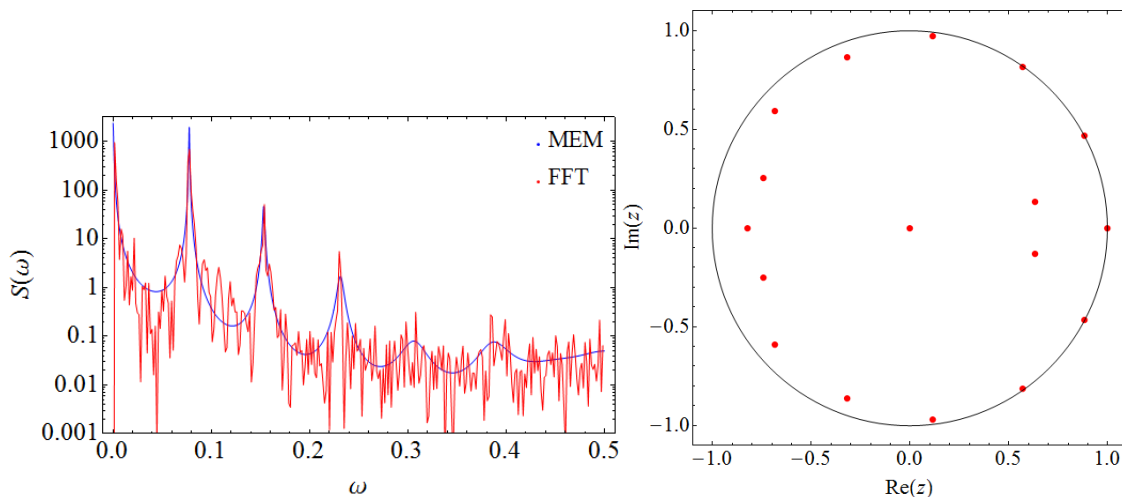


Vidimo, da obstaja možnost, da trend v splošnem ni linearen, imamo dodan šum ali pa je prisotna neka nižja periodičnost pri koncentraciji, vendar ne poznamo ozadja, zato obravnavamo le podatke, kjer smo odšteli premico. Oglejmo si rezultate, ki nam jih da metoda MEM:



Tudi pri teh podatkih se odvisnost od števila polov in gostote točk ne spremeni. Velja enako kot pri prejšnjih primerih. Opazimo, da nam metoda MEM da kar nekaj polov, v splošnem 6, vendar se moramo zavedati, da je skala logaritemska, zato nekaj vrhov v resnici ne pride v upoštevanje.

To pride bolj do izraza pri primerjavi z metodo FFT:



Vidimo, da sta v tem primeru 2 vrhova res skrita v šumu. Desna slika prikazuje tudi pozicije polov za ta primer. Vidimo, da jih je 16 in da vsi ležijo znotraj enotskega kroga. Če pol leži zunaj enotske krožnice v kompleksni ravnini je potrebno to popraviti in jih preslikati v notranjost.

Del II

Linearna napoved

1 Naloga

Koeficiente metode maksimalne entropije na signalih iz prve naloge uporabi za linearno napoved. Koeficiente določi iz prve polovice zapisa signala, drugo polovico pa uporabi za primerjavo z napovedjo. Priporočljivo je majhno število polov. Ugotovi, kako vpliva na napoved šum. Podobno preuči datoteko `borza.dat` in podatke za lunine efemeride v `luna.dat`, oziroma sončni cikel `Wolf_number.dat`. Preveri, ali so vsi koreni preslikavne funkcije znotraj enotske krožnice, in jih po potrebi preslikaj vanj.

2 Uvod in reševanje

V tem poglavju bomo naredili linearno napoved signala na podlagi preteklosti, kjer bomo uporabili znanje metode MEM. V linearnem približku je n -ti izmerek podan z značbo:

$$y_n = \sum_{j=0}^{M-1} d_j y_{n-j-1} + \epsilon_n, \quad (3)$$

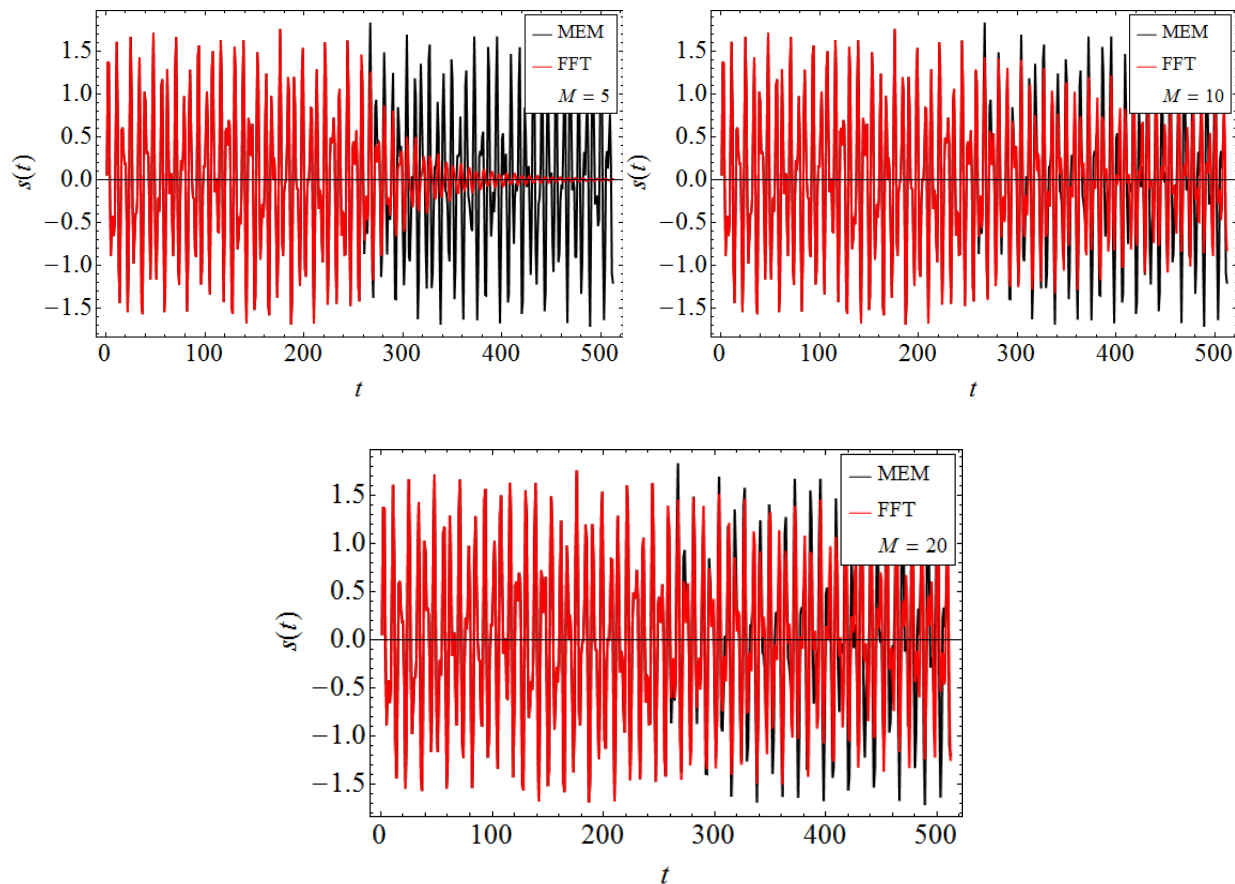
kjer ϵ_n predstavlja odstopanje od prave vrednosti y_n in ga moramo minimizirati. Na podlagi te minimizacije izberemo koeficiente d_j . Potrebno je opomniti, da metoda naredi linearno predikcijo na podlagi zadnjih M točk, kjer je M število polov. Za stabilno rešitev morajo vsi poli ležati znotraj enotskega kroga, oz. $|z| < 1$. Nalogo sem reševal v C++ s pomočjo knjižnic in funkcij definiranih v Numerical Recipes. Izračunane podatke sem prikazal v orodju Mathematica.

3 Rezultati

Linearno napoved sem naredil na vseh do sedaj predstavljenih podatkih, na osnovi prve polovice. Pri vseh podatkih sem si ogledal linearno napoved za različno število polov.

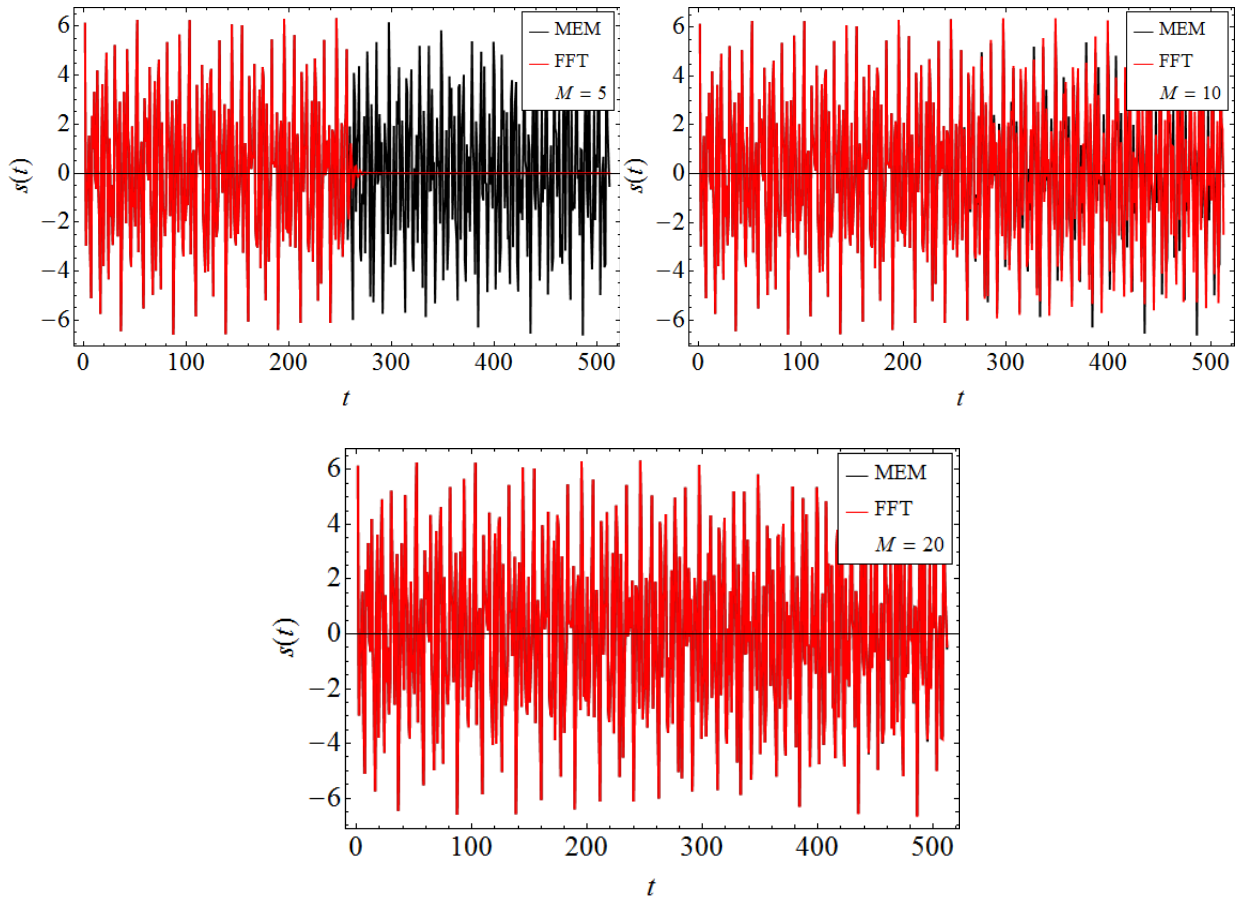
3.1 Datoteki val2.dat in val3.dat

Oglejmo si rezultate linearne napovedi za števila polov po vrsti 5 (levo), 10 (desno) in 20 (spodaj):

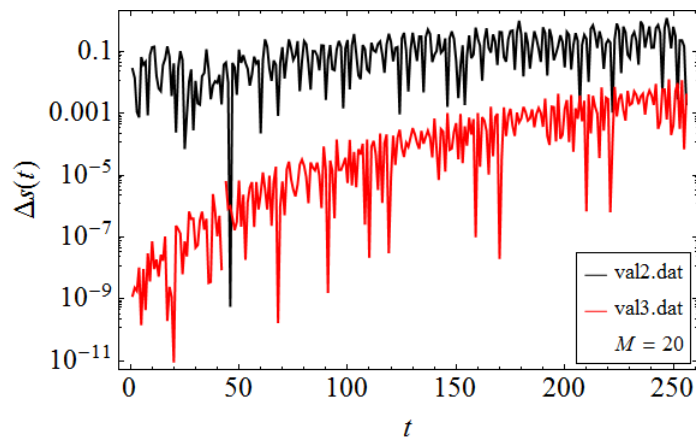


Vidimo, da je število polov $M = 5$ premalo za dober opis signala, torej moramo število polov povečati, kar nam da bolj smiselno napoved. Z dodatnim večanjem stanja ne izboljšujemo več kaj dosti, sja je tudi pri $M = 60$ situacija zelo podobna zgoraj prikazanim.

Poglejmo si sedaj še drugo datoteko, kjer pričakujemo podobno situacijo:



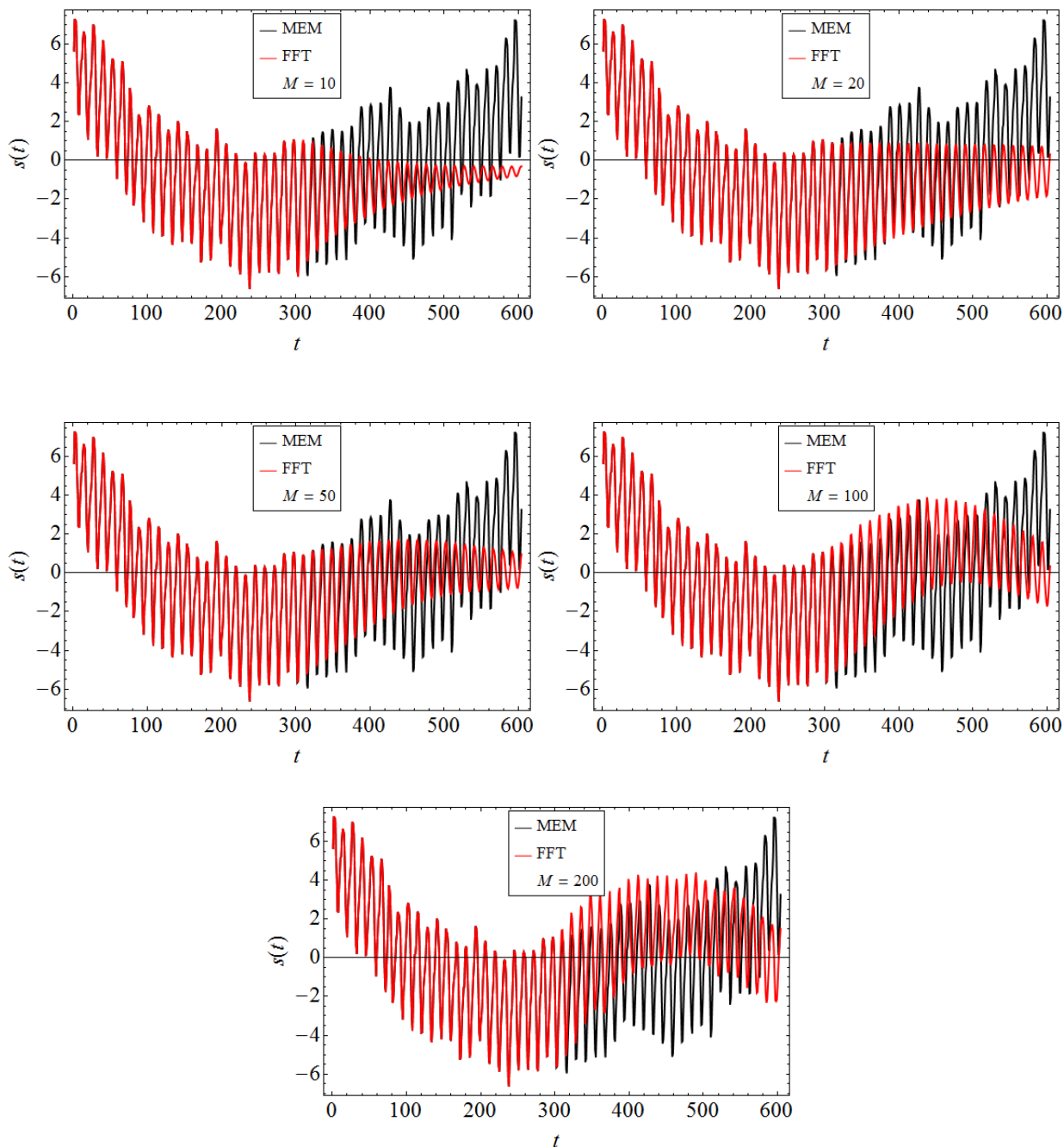
Pri najmanjšem številu polov je v tem primeru situacija še bolj porazna, rezultati pa nas presenetijo v primeru večjega števila polov, saj se napoved zelo dobro ujema z dejanskimi podatki. Poglejmo si razliko za primer $M = 20$ pri obeh datotekah:



Res imamo veliko večjo natančnost pri drugi datoteki. To je zelo dober primer, kjer vidimo „magičnost“ števila M . Morda bi lahko našli kakšno vrednost, ki bi bolj ustrezala prvim podatkom ali pa ne, v vsakem primeru velja, da tak M dobro ustreza tem podatkom.

3.2 Koncentracija CO₂ v zraku

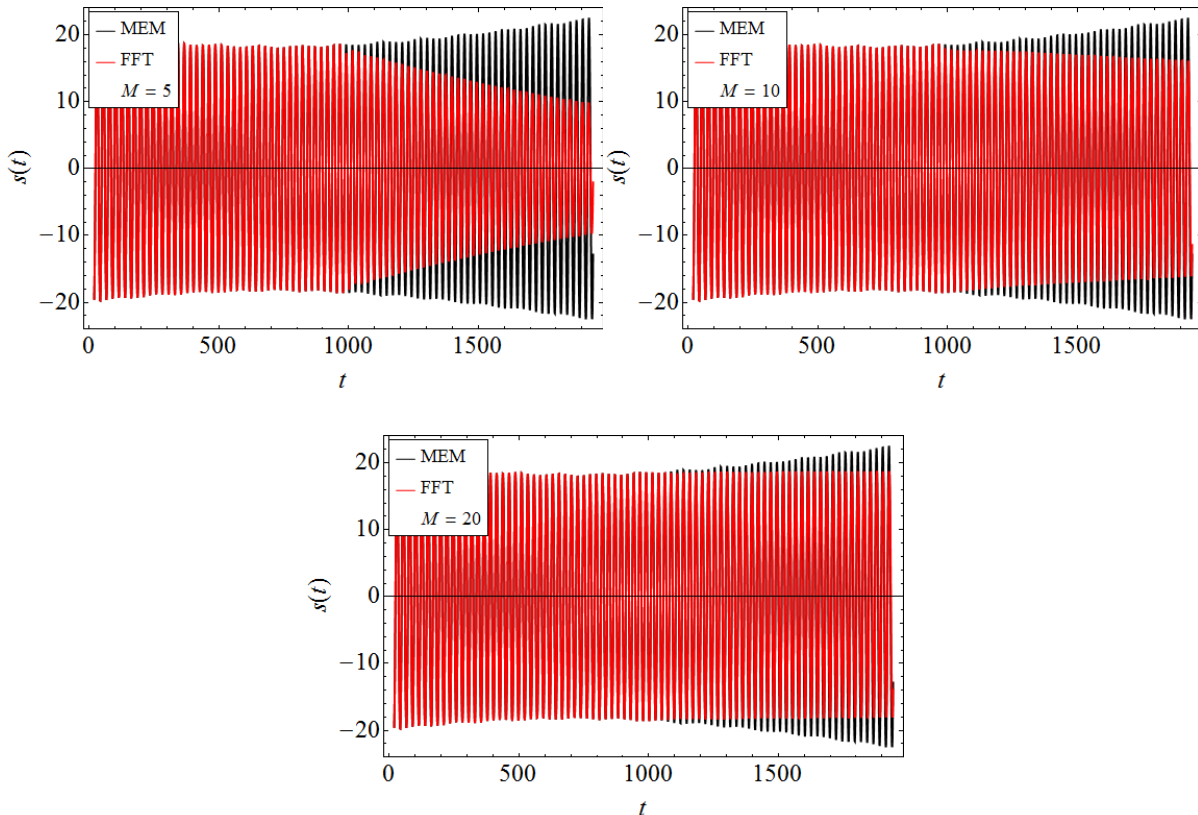
Poglejmo si še kvaliteto linearne napovedi za primere $M = \{10, 20, 50, 100\}$:



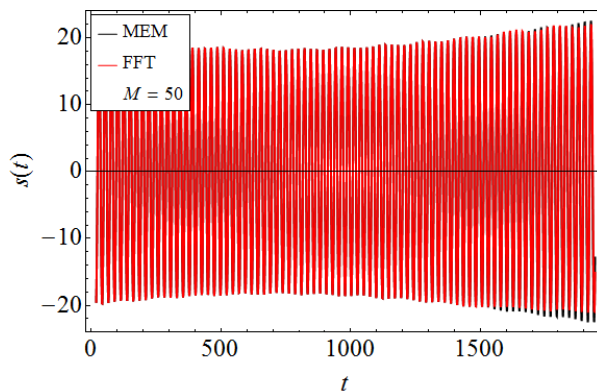
V tem primeru smo $M = 5$ kar preskočili, saj ne daje smiselnih rezultatov. Vidimo, da je pri teh podatkih tudi $M = 10$ še vedno nekoliko premajhna vrednost, pri večjih pa se napoved že kar dobro ujema s podatki. Opazimo, da večanje števila polov povzroči boljše ujemanje splošnemu trendu, vendar ne preveč dobro tudi pri $M = 100$. Kljub temu, da amplitude ne ujamejo, pa je frekvenca še vedno dobro definirana.

3.3 Lunine efemeride

Ogledali smo si še lunine efemeride, oziroma položaj lune v odvisnosti od časa. Podatki so bili dani v obliki rektascenzije in deklinacije. Rektascenzija se meri v urah in ima periodo 24 h, tako da sem moral tem podatkom prišteti 24h pri vsakem obratu. Deklinacija je tista količina, ki nas v resnici zanima. Oglejmo si linearno napoved za ta primer:



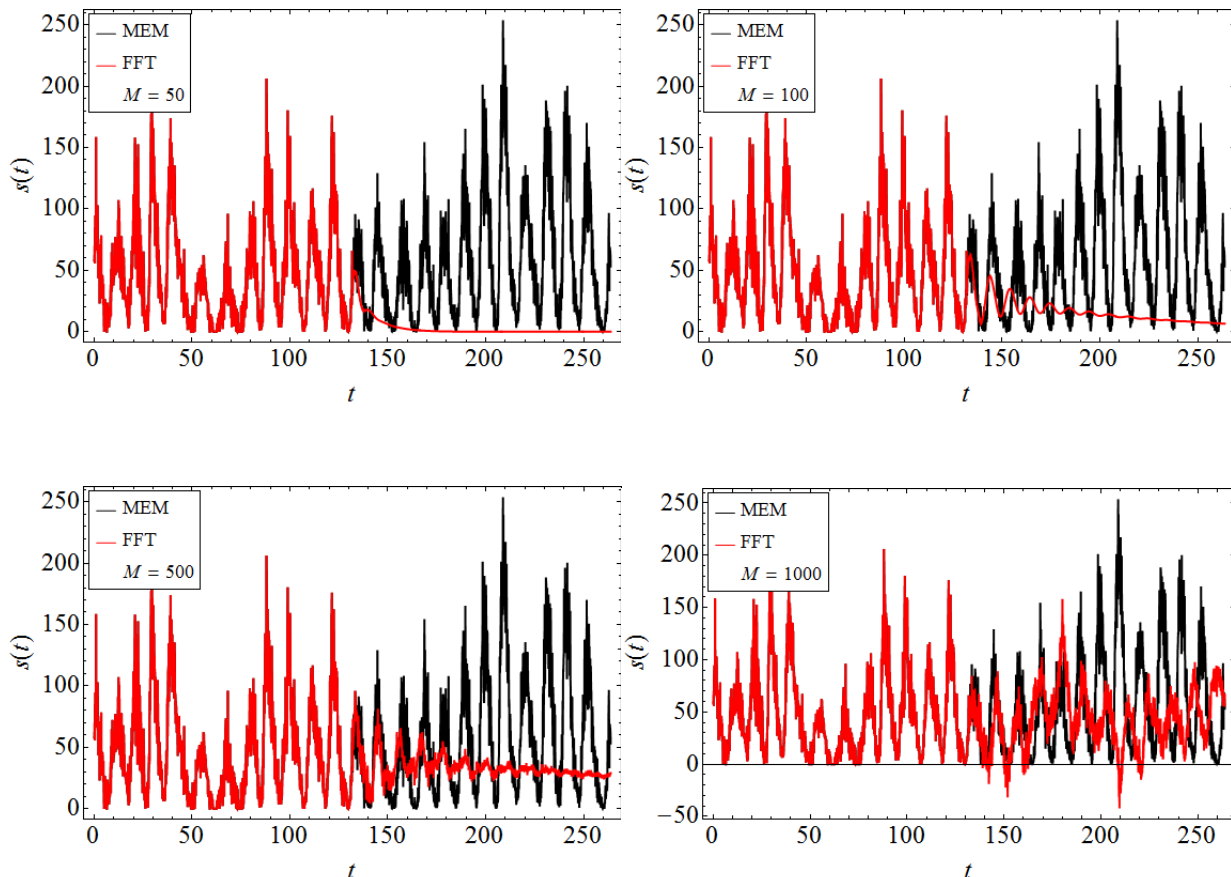
Izkaže se, da je situacija dobro opisana že pri $M = 5$, torej že zadnjih 5 točk dovolj dobro opiše frekvenco gibanja lune. Če višamo število polov se rešitev do neke mere bolj približa podatkom. Razlog tiči v tem, da amplituda lunine deklinacije pride do izraza šele v drugi polovici signala, tako da te informacije z metodo MEM nismo mogli zajeti z nobenim številom polov. To lahko preverimo tako, da pri $M = 50$ vzorčimo prve 3/4 podatkov in napovemo zadnjo 1/4:



Vidimo, da smo sklepali pravilno, saj je sedaj napoved zelo blizu dejanskim vrednostim.

3.4 Wolfovo število

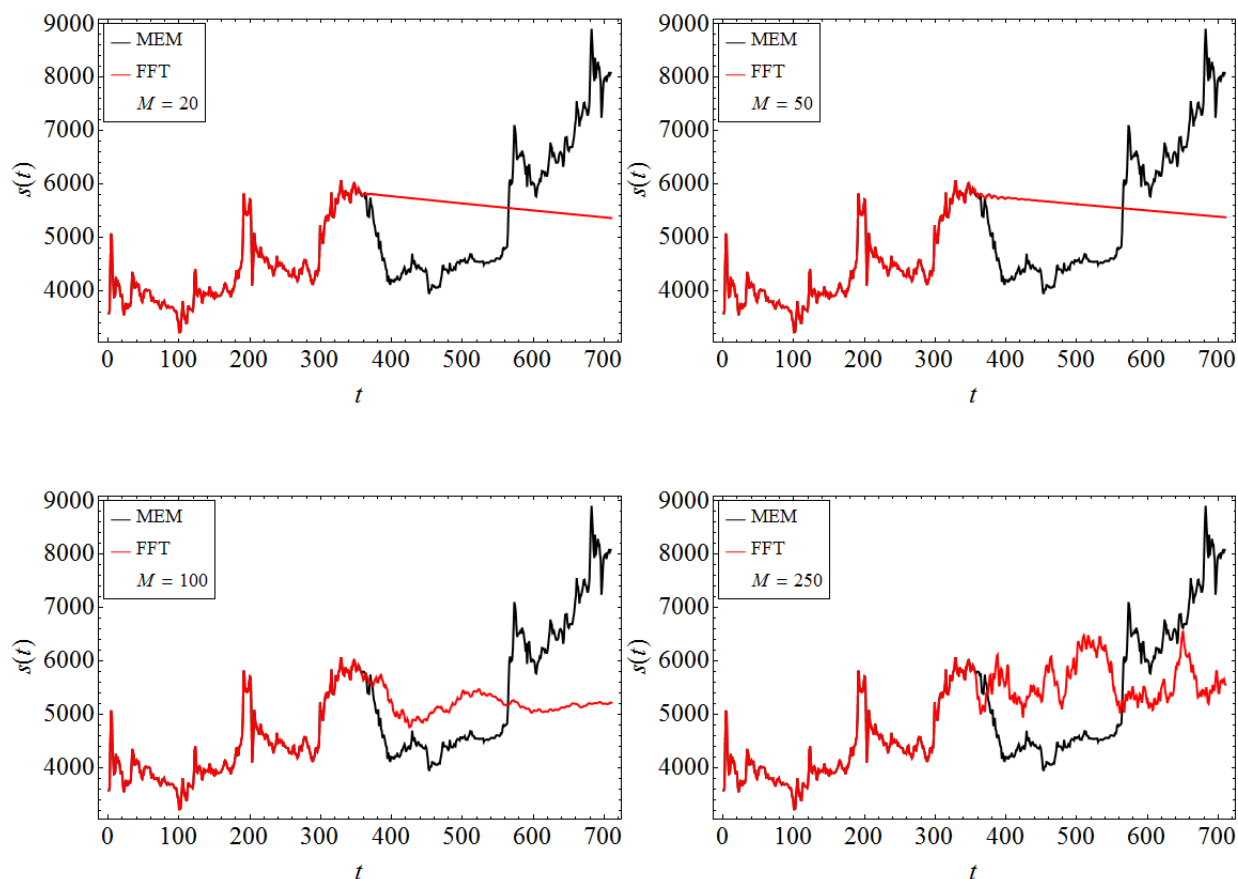
Wolfovo število je količina, ki meri število sončnih peg na površju Sonca. Na podatkih, ki so nam bili dani, smo naredili linearno napoved:



Opazimo, da pri teh podatkih tudi $M = 50$ ni dovolj veliko število polov. Frekvenco ujamemo šele pri $M = 100$ in 500, vendar se amplituda ne ujema. Malce bolj obetajoče amplitude dobimo pri $M = 1000$, vendar se tu že prične kvariti tudi frekvenca, zato ni smiselno še dodatno večati število polov. Dodaten razlog za to je tudi ta, da Wolfovo število leze v negativno območje. Razlog za tako obnašanje je veliko število podatkov in majhne spremembe med točkami, zato rabimo veliko število polov, da zajamemo znatno informacijo.

3.5 Borza

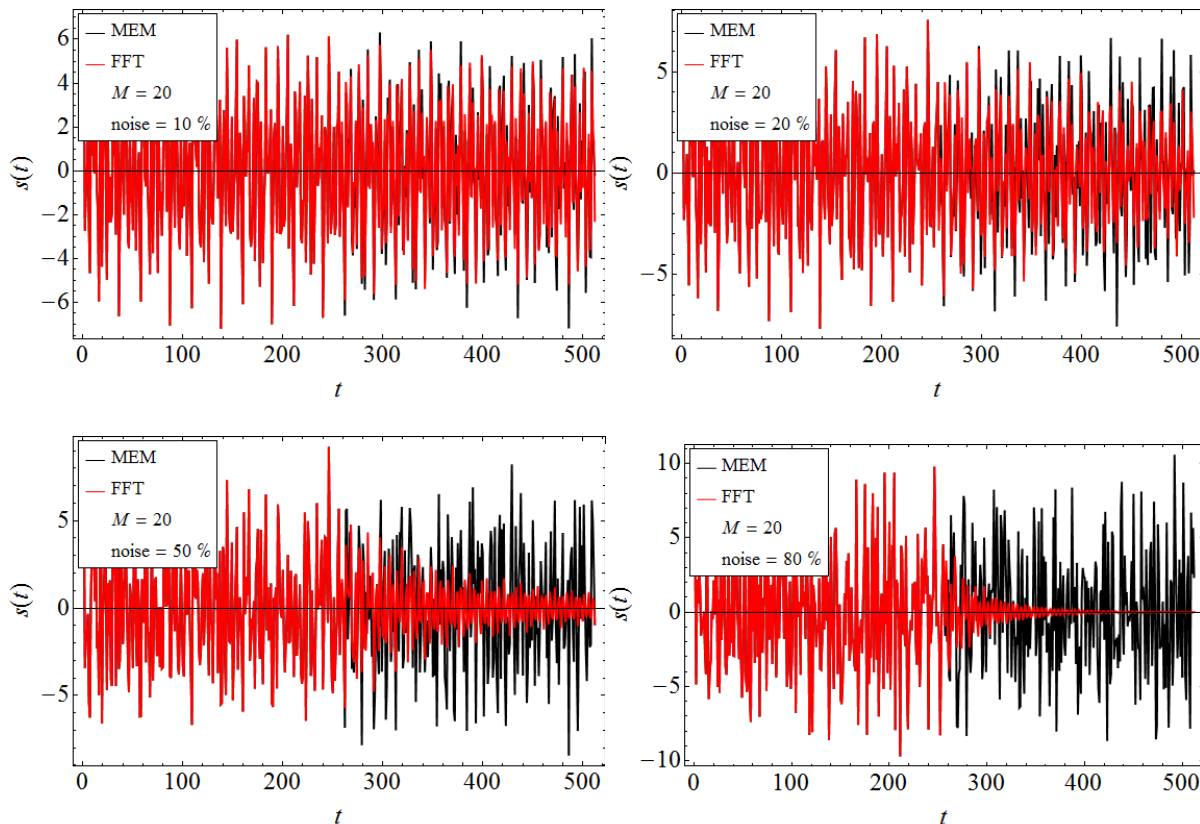
Zanimivo si je tudi ogledati linearno napoved pri borzi. Morda lahko tako vsaj približno ocenimo padec ali vzpon vrednosti neke delnice in si s tem povečamo možnost zaslужka ali preprečimo morebitno izgubo:



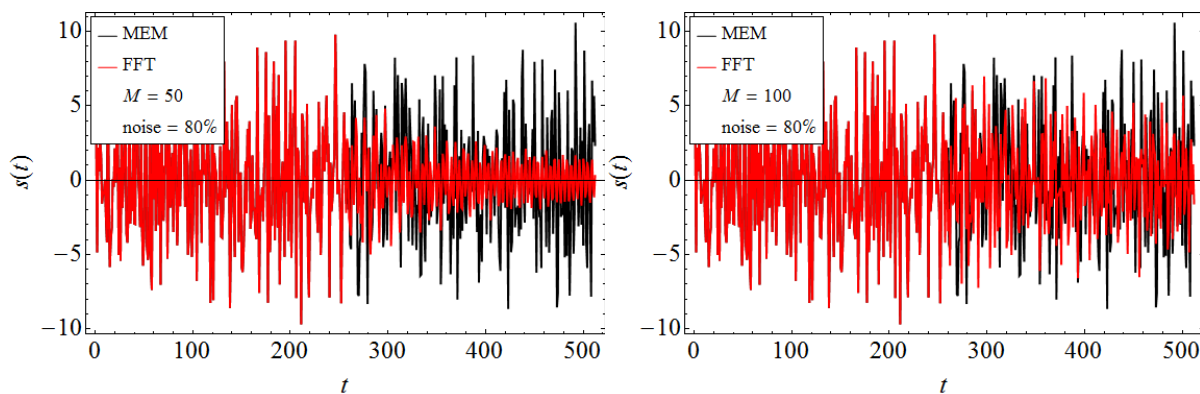
Tudi pri teh podatkih $M = 50$ ni dovolj veliko število polov. Smiselne rešitve začnemo dobivati pri nekoliko višjih vrednostih, vendar pa opazimo, da so bolj kot ne naključne. Opazimo, da smo pri $M = 100$ pravilno napovedali padec, kar je lahko spet naključje ali ne, saj tega ne dobimo pri večjem številu polov. Zaključimo, da takšna metoda ne da zanesljivih napovedi v svetu delnic. V tem primeru to tudi pričakujemo, saj ni nekega trenda v gibanju vrednosti delnic, zato je tak rezultat smiseln.

4 Vpliv šuma na linearno napoved

Z metodo MEM lahko preverimo še kako se obnaša linearna napoved na podatkih, katerim je primešan šum. Storimo to na signalu iz datoteke `val3.dat`, kjer smo dobili tako dobro ujemanje pri linearni napovedi. Najboljše ujemanje smo dobili pri številu polov $M = 20$, zato si oglejmo pri isti vrednosti M še linearno napoved za podatke, kjer smo primešali 10 %, 20 %, 50 % in 80 % šuma:



Vidimo, da že pri mali količini primešanega šuma napoved začne odstopati od podatkov, čeprav pa se jim v prvem primeru še vedno dobro prilega. Ko šum povečujemo, začne kvaliteta napovedi zaradi napačnih amplitud in primešanih višjih frekvenc. Opazimo, da pri šumu $\geq 50\%$ nimamo več smiselne napovedi. Poglejmo, če povečanje števila polov pri zadnji sliki kaj izboljša napoved:



Izkaže se, da amplitudo napovedi s tem malo izboljšamo, kar pomeni da smo s tem zajeli več informacije o preteklem dogajanju in s tem bolje spoznali šum.