



Modelska Analiza 2

1. naloga - Navadne diferencialne enačbe: začetni problem

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 26.2.2014

Naloga:

Pri tej nalogi smo se spoznali z navadnimi diferencialnimi enačbami z začetnimi pogoji, kar poznamo pod imenom začetni problem. V prvem delu naloge smo natančnost diferencialnih enačb uporabili na sistemu planeta in zvezde in preučili njuno interakcijo. Sistem ponuja veliko konstant gibanja, kar smo lahko uporabili za določitev natančnosti metode, s katero smo numerično reševali diferencialne enačbe. V drugem delu naloge smo imeli sistem treh teles, kjer je tretje telo bila mimobežna zvezda, ki je našemu sistemu vnesla motnjo. Opazovali smo stabilnosti in različnost končnih rešitev za različne postavitve planeta, ko je na sistem delovala mimobežna zvezda. Dobili smo precej zanimive rezultate.

Del I

Sistem dveh teles

1 Naloga

S pomočjo podprogramov za metodo Runge-Kutta zasleduj gibanje planeta na tiru okrog zvezde. Opazuj stabilnost razdalje obeh teles pri krožnem gibanju. Preveri točnost obhodnega časa. Preveri natančnost povrata pri eliptičnih tirih, zlasti pri tistih z majhno začetno hitrostjo. Opazuj stalnost energije in vrtilne količine.

2 Uvod

V nalogi obravnavamo keplersko gibanje v 2D, za katerega velja Newtonov zakon o gravitaciji:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r}, \quad (1)$$

kjer je m masa planeta, M masa zvezde, r vektor razdalje med njima in G gravitacijska konstanta. Problem rešujemo v kartezičnem sistemu, kjer zapišemo $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ in $\dot{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Najprej enačbo (1), ki je sistem 2 enačb 2. reda prevedemo na sistem 4 enačb 1. reda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= -G\frac{Mx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \dot{v} &= -G\frac{My}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (2)$$

in začetnimi pogoji:

$$x(0) = a, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = v_0\omega a, \quad (3)$$

kjer je a začetna razdalja, $v_0\omega a$ pa začetna hitrost, kjer je v_0 brezdimenzijski parameter. Sistem je bolj eleganten v brezdimenzijski obliki, kjer upoštevamo transformacije:

$$\frac{\{x, y\}}{a} \rightarrow \{x, y\}, \quad \frac{\{u, v\}}{\omega a} \rightarrow \{u, v\}, \quad \omega t \rightarrow t \quad (4)$$

in uporabimo:

$$G = M = a = \omega = 1, \quad (5)$$

s čimer dobimo nov sistem enačb:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \dot{v} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (6)$$

z začetnimi pogoji:

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad u(0) = 0, \quad v(0) = v_0. \quad (7)$$

Izkaže se, da glede na različne vrednosti v_0 dobimo različne oblike tirov gibanja planeta:

- $v_0 < 1$, elipsa,
- $v_0 = 1$, krožnica,
- $v_0 > 1$, elipsa,
- $v_0 = \sqrt{2}$, hiperbola,
- $v_0 > \sqrt{2}$, parabola.

3 Reševanje

Nalogo sem reševal v orodju Mathematica z vgrajeno funkcijo NDSolve, ki sem ji priredil metodo Runge-Kutta s fiksnim širino koraka. Problem je zelo bogat, saj nam ponuja ogromn možnosti za preverjanje natančnosti rešitve, kot na primer:

- stabilnost razdalje pri krožnem gibanju:

$$\sigma_R = |1 - \sqrt{x^2 + y^2}|$$

- natančnost povratka pri krožnem in eliptičnem gibanju:

$$\sigma_0 = |1 - x(y = 0)|, \text{ kjer } x(y = 0) \text{ interpoliramo}$$

- stabilnost energije pri vseh gibanjih:

$$E = T + V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1$$
$$\sigma_E = |E - E_0|$$

- stabilnost vrtilne količine:

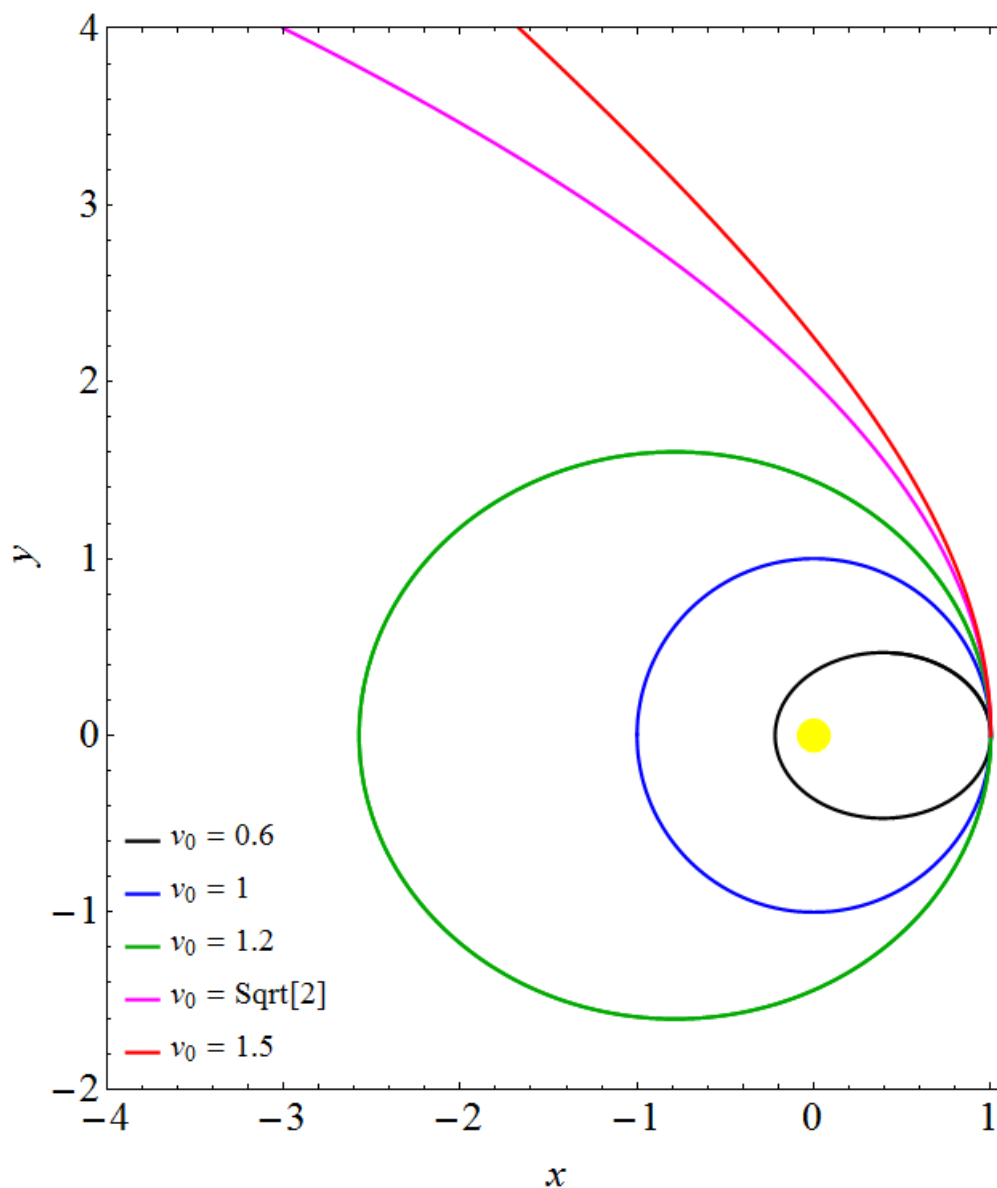
$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \Gamma_z = xv - yu$$
$$\sigma_\Gamma = |\Gamma_z - \Gamma_{z,0}|$$

- stabilnost Laplace-Runge-Lenzovega vektorja, katerega velikost predstavlja ekscentričnost tira gibanja:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \hat{\mathbf{r}}$$
$$\sigma_A = ||\mathbf{A}| - |\mathbf{A}_0||$$

4 Rezultati

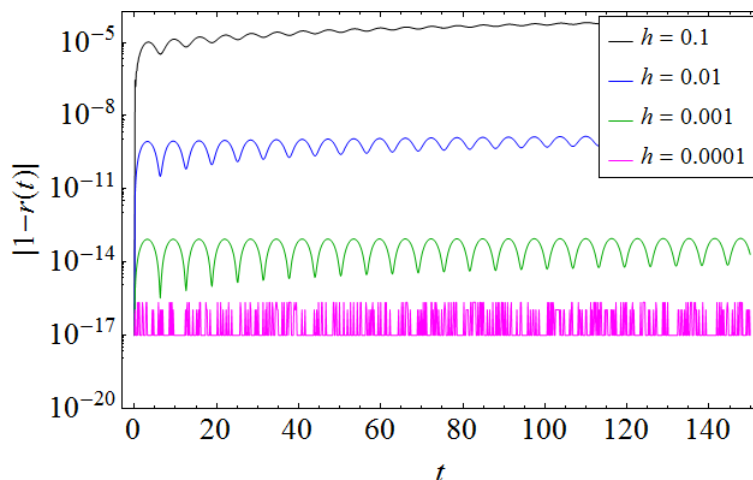
Oglejmo si primere z različnimi začetnimi hitrostmi. Dobimo ravno tiste trajektorije, ki smo jih našli zgoraj:



Vidimo, da se trajektorije ujemajo z naštetimi, saj po vrsti dobimo elipso, krožnico, elipso, parabolo in hiperbolo. O natančnosti rešitev pa preko te slike ne moremo kaj veliko reči, zato si moramo ogledati konstante gibanja, kot so npr. energija, vrtilna količina, Runge-Lenzov vektor, radij pri krožnici in natančnost povratka pri krožnici in elipsi. Oglejmo si te količine in natančnosti njihovih izračunov.

4.1 Stabilnost razdalje - krožnica

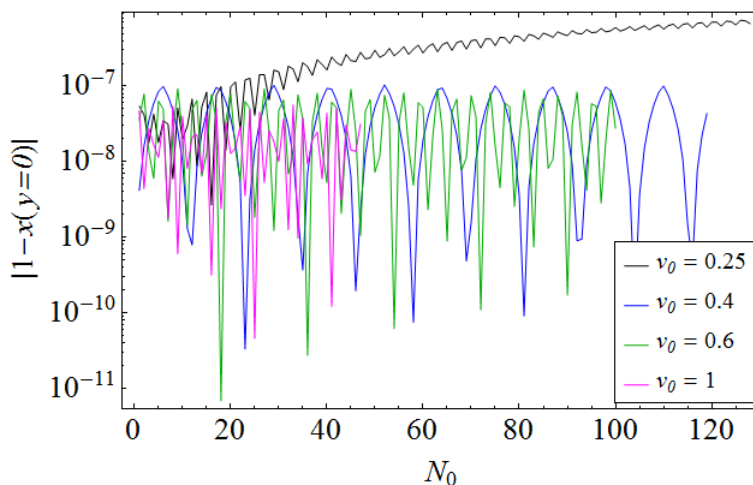
Razdalja je konstantna le v primeru krožnice, torej imamo pri krožnici na voljo test natančnosti numeričnega izračuna. Z zgoraj omenjeno metodo sem si v logaritmski skali ogledal absolutno razliko $|r - r_0| = |\sqrt{x^2 + y^2} - 1|$ za različne primere širin korakov $h = \{0.1, 0.01, 0.001, 0.0001\}$:



Vidimo, da se natančnost radija večja z manjšanjem koraka. Hitro dosežemo natančnosti na > 10 mest natančno. Pri širini koraka $h = 0.0001$ se celo približamo strojni natančnosti.

4.2 Natančnost povratka - krožnica, elipsa

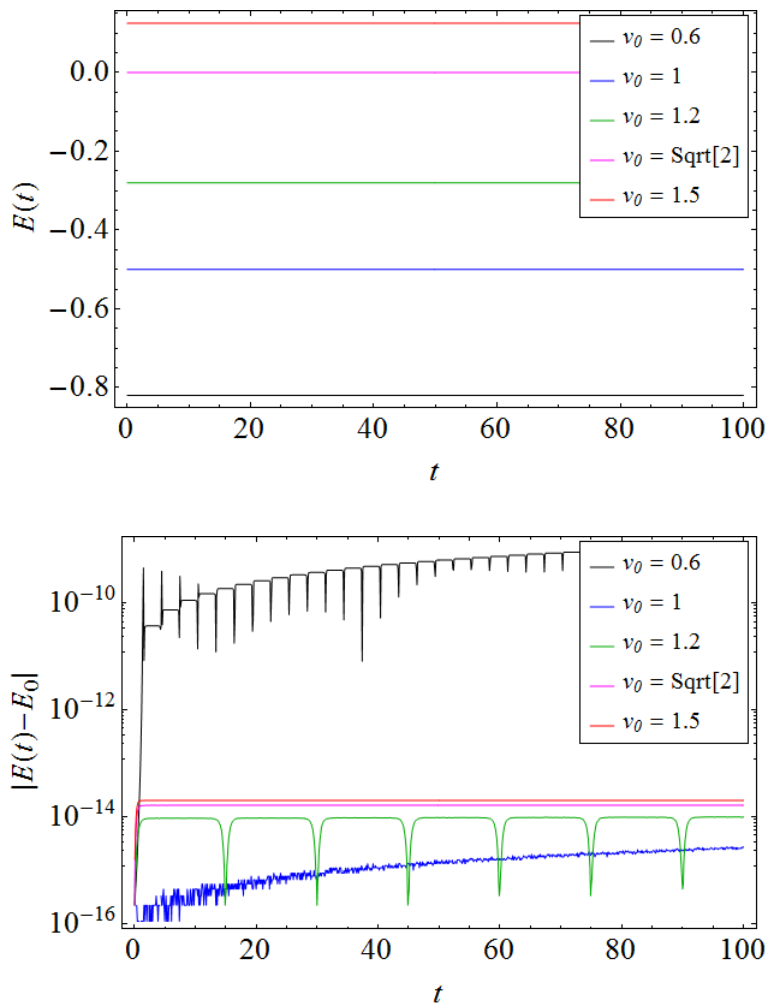
V primeru krožnice in elipse se planet vrne v začetno pozicijo. Preverimo lahko natančnost te začetne pozicije, kar storimo tako, da poiščemo točko z maksimalnim pozitivnim odmikom x in minimalnim odmikom y , nato pa z interpolacijskim polinomom in sosednjimi točkami izvednotimo $x_0 = p(y = 0)$. Računal sem s širino koraka $h = 0.0001$. Oglejmo si natančnost povratka za krožnico in 3 različne elipse:



Vidimo, da je natančnost približno enaka za vse trajektorije, razen za elipso z najmanjšo hitrostjo, kjer se napaka pri povratku povečuje. To je smiselno, saj je elipsa z majhno začetno hitrostjo zelo sploščena in gre zelo blizu vrednosti 0, kar povzroča večjo numerično napako, ki pa se skozi čas le akumulira, edino vprašanje je le pri kateri hitrosti za določen korak se to zgodi. Opazimo, da je za primer kroga natančnost povratka slabša kot v primeru natančnosti radija. To nenatančnost lahko pripišemo interpolacijskemu polinomu.

4.3 Stabilnost energije

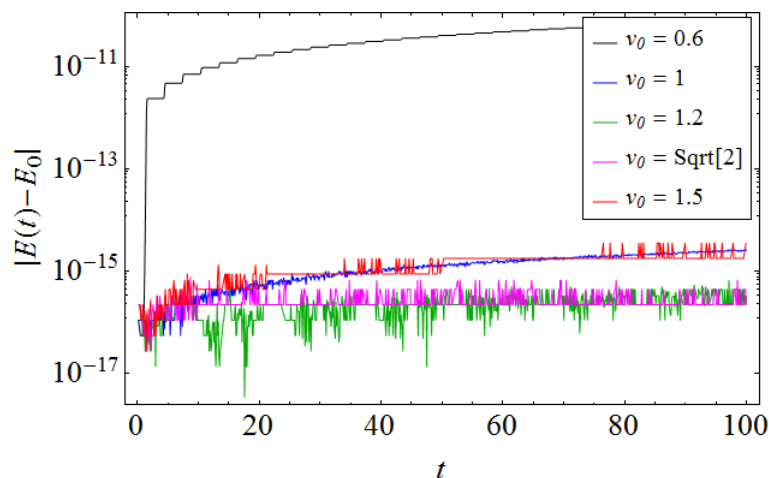
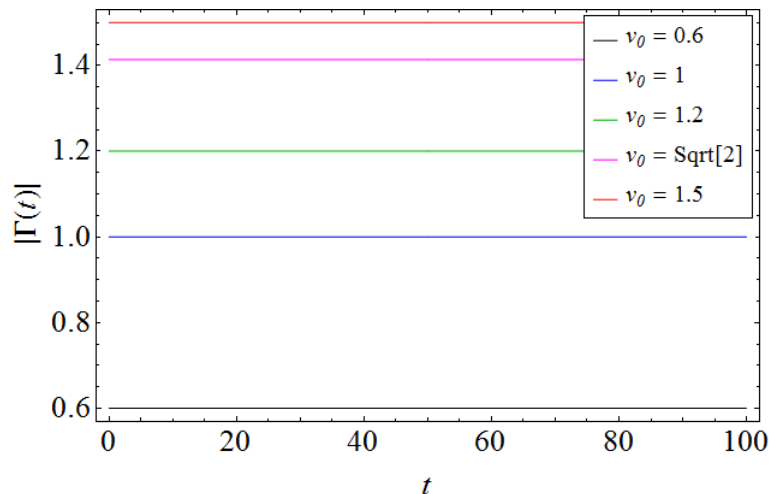
Stabilnost energije lahko izračunamo za vse trajektorije, kar sem storil za iste začetne hitrosti kot na prvi sliki, torej $v_0 = \{0.6, 1, 1.2, \sqrt{2}, 1.5\}$, to pa sem uporabil tudi v nadaljnjih primerih. Prav tako sem v vseh nadaljnjih primerih uporabil širino koraka $h = 0.01$. Energijo sistema izračunamo kot $E = T + V = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - \frac{1}{x^2 + y^2}$. Oglejmo si rešitve za vse oblike orbit:



Zgornja slika prikazuje vrednost energij, spodnja pa natančnost izračuna. Na zgornji sliki vidimo, da imajo elipsi in krožnica negativno energijo, kar pomeni, da je sistem vezan. Parabola ima energijo 0, hiperbola pa > 0 . Na spodnji sliki vidimo natančnost izračunane energije. Vidimo, da je najmanj natančna energija za elipso pri začetni hitrosti $v_0 = 0.6$, razlog pa je isti kot je bil opisan zgoraj. Zanimivo je, da sta energiji za parabolo in hiperbolo konstantni, vendar po premisleku to ni presenetljivo, saj se planeti na teh orbitah oddaljujejo od zvezde, kar pomeni, da se potencial zmanjšuje, hitrost pa postaja konstantna. Pri elipsi z $v_0 > 1$ opazimo večjo natančnost.

4.4 Stabilnost vrtilne količine

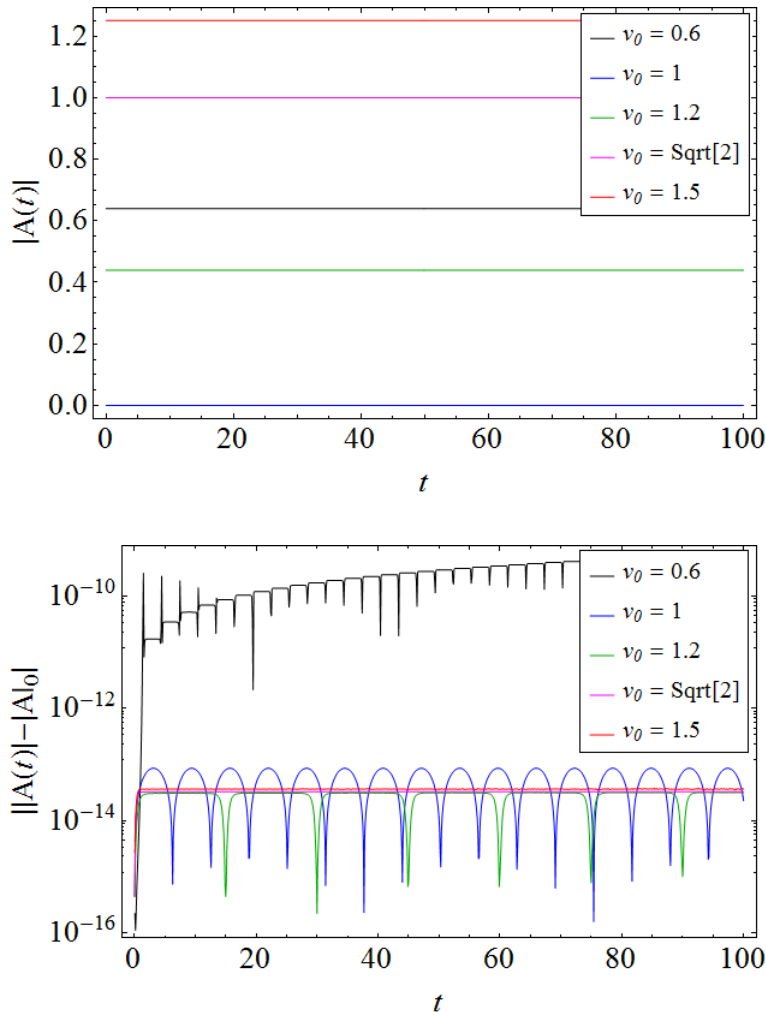
Stabilnost vrtilne količine lahko tudi v tem primeru izračunamo za vse trajektorije. Vrtilno količino sistema izračunamo kot $\Gamma = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ xv - yu \end{bmatrix}$. Oglejmo si rešitve za vse oblike orbit:



Zgornja slika prikazuje vrednost velikosti vrtilne količine, spodnja pa njeno natančnost. Na zgornji sliki vidimo, da imajo zaradi začetne pozicije vsi sistemi vrednost brezdimenzijske vrtilne količine kar enako začetni hitrosti v_0 , zato imajo sistemi z večjo začetno hitrostjo tudi večjo velikost vrtilne količine. Na spodnji sliki vidimo natančnost izračunane energije. Vidimo, da je ponovno najmanj natančna rešitev za elipso pri začetni hitrosti $v_0 = 0.6$. Ostale napake imajo približno enako obliko in vrednosti, vse pa so v okolici strojne natančnosti.

4.5 Stabilnost Runge-Lenzovega vektorja

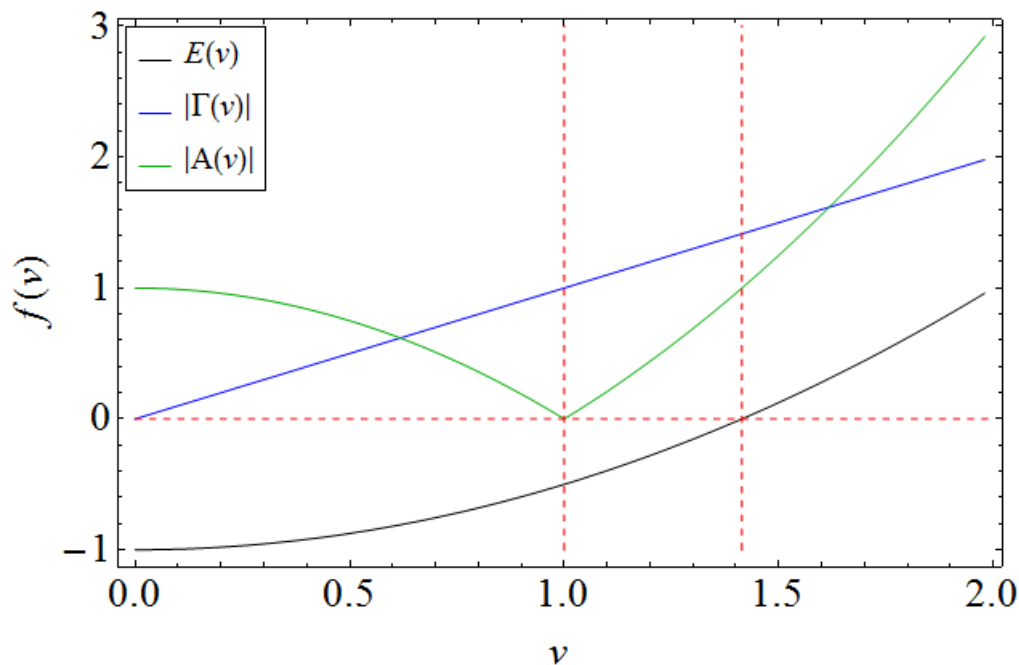
Runge-Lenzov vektor je vektor, ki opisuje velikost in usmerjenost orbite nekega sistema. Za primer 2 teles je tak vektor konstanta. Zanimivo je, da je norma RL vektorja v direktni povezavi z ekscentričnostjo orbite. V našem primeru velja kar $|\mathbf{A}| = e$, kjer je e ekscentričnost orbite. Runge-Lenzov vektor izračunamo kot $\mathbf{A} = \mathbf{r} \times \mathbf{L} - \hat{\mathbf{r}}$. Spet si oglejmo rešitve za vse oblike orbit:



Zgornja slika prikazuje vrednost velikosti RL vektorja, spodnja pa njegovo natančnost. Na zgornji sliki vidimo, da velikost RL vektorja res ustreza ekscentričnosti orbite, saj ima krožnica $e = 0$, elipsi imata $0 < e < 1$, parabola $e = 1$, hiperbola pa $e > 1$. Na spodnji sliki vidimo natančnost izračunane ekscentričnosti. Tudi v tem primeru ima najmanjšo natančnost elipsa z $v_0 = 0.6$, ki se le slabša, ostale vrednosti pa so v povprečju konstantne in precej natančne.

5 Zvezna odvisnost količin

Oglejmo si še splošno odvisnost od količin od velikosti začetne hitrosti. Ogleđal sem si energijo, velikost vrtilne količine in velikost RL vektorja, oz. ekscentričnost:



Opazimo vse mejne točke, ki smo jih omenili prej. Vidimo, da velikost vrtilne količine linearno narašča, kakor velja tudi za hitrost. Energija narašča kvadratno, opazimo pa, da je na začetku energija sistema negativna, kar prikazuje vezan sistem. Negativna je vse do $v = \sqrt{2}$, kjer zavzame vrednost 0, kar predstavlja parabolo, potem pa je pozitivna, kar predstavlja hiperbolo. Še zadnjič se prepričamo, da velikost RL vektorja predstavlja ekscentričnost, ki je pozitivna za elipso. Ko se približujemo $v = 1$, je orbita vse bolj podobna krožnici, ki pa ima ekscentričnost enako 0. Ekscentričnost potem spet narašča in je pozitivna tudi za parabolo in hiperbolo.

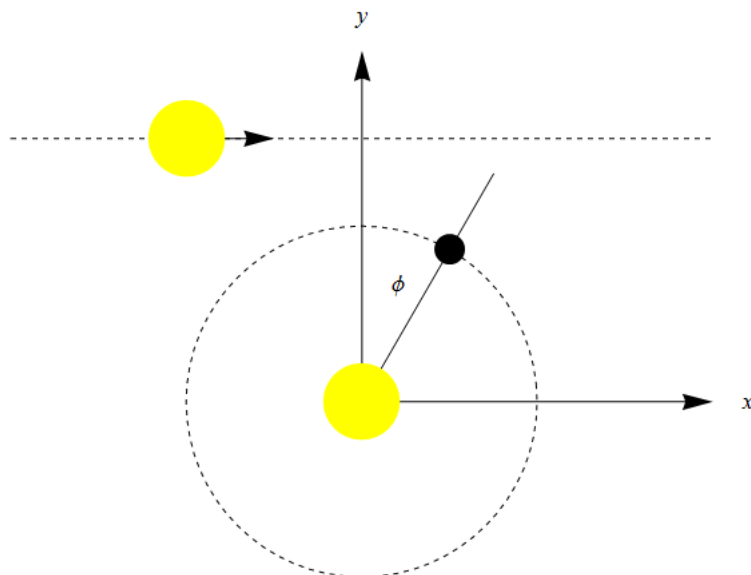
Del II

Sistem treh teles

1 Naloga

Mimo zvezde s planetom na krožnem tiru pridrvi v tirno ravnini druga zvezda z enako maso. Mimobežna zvezda vpada s hitrostjo, ki je enaka dvakratni obodni hitrosti planeta in potuje po ravni črti v razdalji 1.5 radija planetnega tira. Razišči končno usodo planeta v odvisnosti od njegove faze. Račun začnemo, ko je vpadna zvezda še 10 radijev planetnega tira daleč od svojega perihelija in ga končamo, ko se znajde v točki, ki je simetrična na začetno. Kaj se spremeni, če smer gibanja planeta obrnemo?

2 Uvod



Zopet zapišemo Newtonov zakon za ta sistem:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{mM}{r^3}\mathbf{r} - G\frac{mM}{|r-r_z|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_z), \quad (8)$$

kjer je \mathbf{r}_z radij mimobežne zvezde. Ponovno gremo v sistem $M = m = G = a = \omega = 1$ in sistem prevedemo na sistem 4 enačb 1. reda:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= v, \\ \dot{u} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x-x_z(t)}{\left((x-x_z(t))^2+(y-y_z(t))^2\right)^{3/2}}, \\ \dot{v} &= -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{y-y_z}{\left((x-x_z(t))^2+(y-y_z(t))^2\right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Tudi začetni pogoji se v tem primeru nekoliko spremenijo. Postavimo jih tako, da fazo začnemo šteti v točki, ki je najbližja tiru mimobežne zvezde:

$$x(0) = -\sin\varphi, \quad y(0) = \cos\varphi, \quad u(0) = \mp v_0 \cos\varphi, \quad v(0) = \mp v_0 \sin\varphi, \quad (10)$$

kjer kot in prvotno smer kroženja štejemo v obratni smeri urinega kazalca. Ker za planet zahtevamo krožni tir, velja $v_0 = v = 1$. Če zapišemo še enačbe gibanja mimobežne zvezde, opišemo celoten sistem treh teles:

$$x_z(t) = -10 + 2v_0t, \quad (11)$$

$$y_z(t) = 1.5, \quad (12)$$

kjer smo upoštevali, da je ob $t = 0$ zvezda oddaljena 10 radijev planetnega tira, giblje pa se hitrostjo $2v_0$.

3 Reševanje

Tudi tokrat sem uporabil integracijsko funkcijo NDSolve iz zbirke v orodju Mathematica. Spet sem uporabil metodo ExplicitRungeKutta, vendar sem pustil izbiro koraka, kar pomeni, da je metoda sama izbrala širino koraka in ga po potrebi spreminjala. Zanima nas dogajanje in končna usoda planeta v odvisnosti od njegove faze φ . Možnosti so v splošnem 3:

- planet se še vedno giblje okoli prvotne zvezde, vendar se mu deformira orbita,
- planet pobegne iz sončnega sistema in odleti v neskončnost,
- planet prevzame mimobežna zvezda.

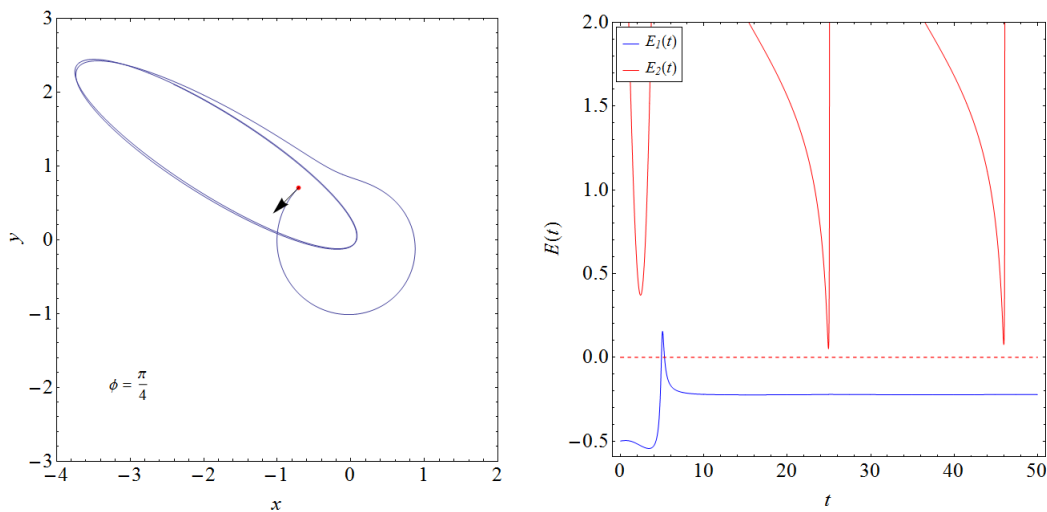
Poleg časovne odvisnosti koordinat, bom potek predstavil tudi preko barvnega diagrama, kjer bo prvo situacijo predstavljala modra, drugo rdeča, in tretjo zelena barva. Reševal sem na časovnem intervalu $t \in [0, t_{max}]$, kjer sem ročno določil maksimalni čas tako, da je ustrežal orbiti. V vseh primerih sem tudi izračunal vezavno energijo za prvi in drugi planet, E_1 in E_2 , ter s tem določil ali je planet vezan na prvotno ali mimobežno zvezdo, ali pa če sploh ni vezan.

4 Rezultati

Poleg faze planeta lahko spreminjamo tudi smer njegovega kroženja. S tem vplivamo na „čas kontakta“, ki ga ima planet z mimobežno zvezdo. Najprej si oglejmo negativno smer kroženja planeta, ki gre v obratni smeri urinega kazalca.

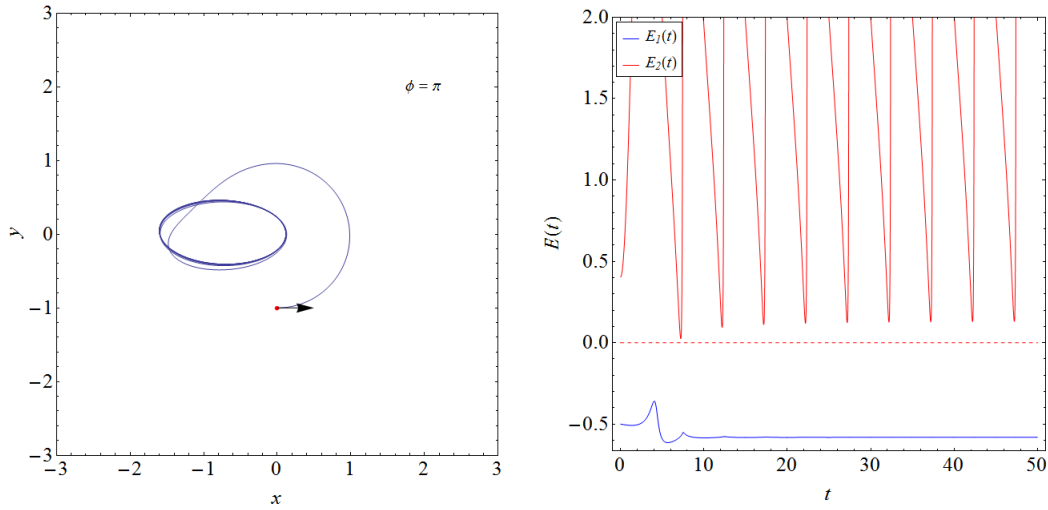
4.1 Negativna smer kroženja

Kot smo že omenili, v tem primeru ne pričakujemo eksotičnih rešitev, saj mimobežna zvezda le kratek čas vpliva na planet. Oglejmo si neka j značilnih rešitev za negativno smer kroženja planeta:



Leva slika prikazuje $\mathbf{r}(t)$ planeta za vsako točko časa iz intervala. Vidimo, da je mimobežna zvezda spremenila obliko tira, vendar je planet še vedno vezan, kot vidimo tudi na desni sliki, ki prikazuje vezavno energijo glede na prvotno in mimobežno zvezdo. Kot vidimo, je energija E_1 na koncu negativna, torej je sistem še vedno vezan na prvotno zvezdo. Energija planeta se je spremenila, oziroma še bolj natančno, povečala, kar je rezultat izbrane faze, ki je bila v tem primeru takšna, da je mimobežna zvezda planetu dodelila energijo.

Oglejmo si še en primer pri negativni smeri kroženja planeta:

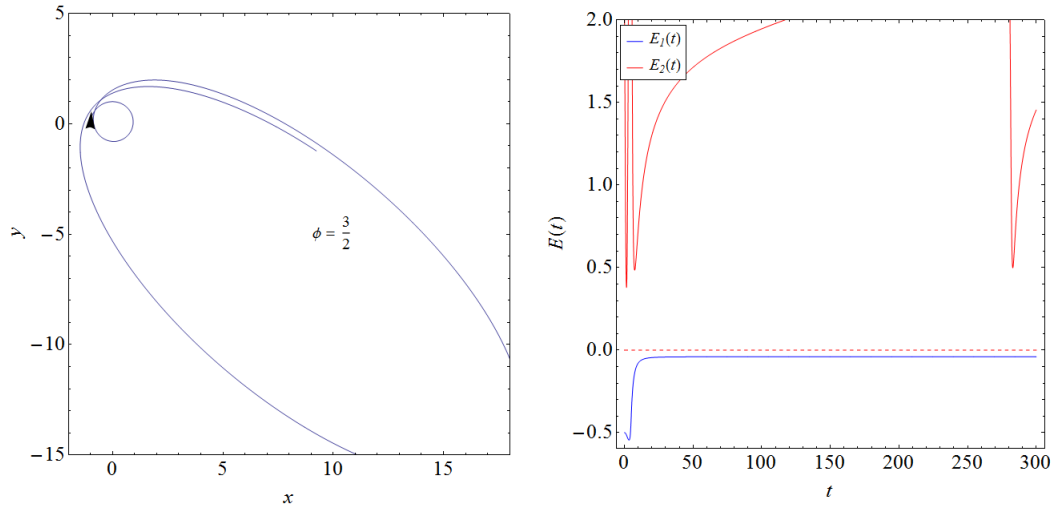


V tem primeru vidimo, da je izbrana faza takšna, da mimobežna zvezda zaustavi planet in mu s tem zmanjša energijo. S tem povzroči, da je planet še bolj vezan na prvotno zvezdo, kar vidimo tudi na desnem grafu. Prilagam še animacijo za prvi primer:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/tir_neg_1.gif

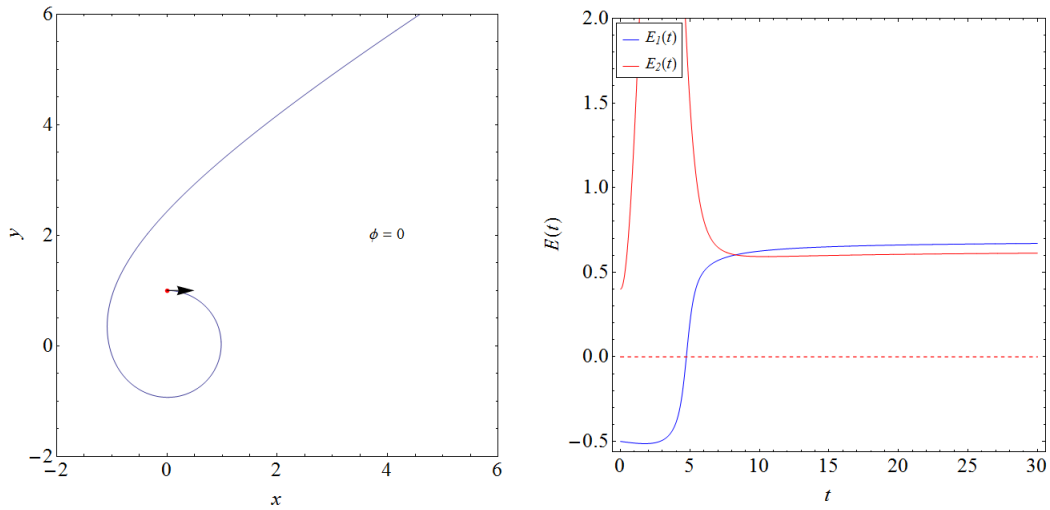
4.2 Pozitivna smer kroženja

Bolj zanimiv je primer, kjer je smer kroženja planeta pozitivna, saj s tem povečamo čas, ko je planet v stiku z mimobežno zvezdo. S tem dosežemo da ima zvezda večji vpliv na planet in s tem posledično bolj eksotične rešitve. Oglejmo si prvi značilni primer v tej situaciji:



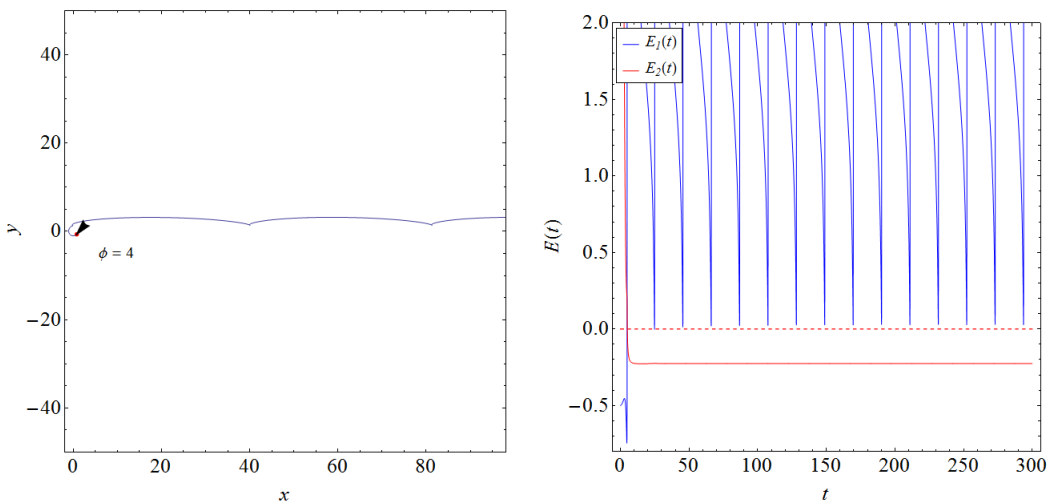
Prvi značilen primer v tej situaciji je podoben prejšnjemu. Čeprav sta smeri hitrosti enaki, gravitacijski vpliv še vedno obstajajo takšne faze planeta, kjer se planetu na koncu orbita spremeni, še vedno pa ostane vezan. Edina razlika je, da je predana energija lahko veliko večja kot prej, zato je tudi planetova orbita veliko bolj deformirana, kot je vidno v tem primeru. Z desno sliko se prepričamo, da je planet res še vedno vezan, saj je $E_1 < 0$ v končnem stanju.

Drug značilen primer je sledeč:



V tem primeru mimobežna zvezda tako zelo vpliva na planet, da ga odnese stran od obeh sistemov in tako poleti v neskončnost. Na desni sliki vidimo, da planet ni vezan na nobeno zvezdo, saj sta obe energiji pozitivni, planet je torej res prost in drvi v neskončnost.

Oglejmo si še zadnji primer tega podrazdelka:

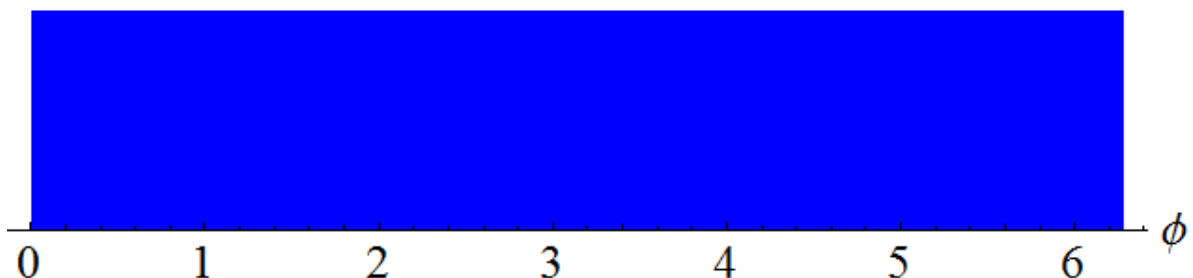


Vidimo, da se zgodi zelo zanimiva stvar. Faza planeta je ravno takšna, da mimobežna zvezda ukrade planet prvotni zvezdi. Planet tako ni več vezan na prvotno zvezdo, ampak na mimobežno zvezdo, kakor prikazujejo tudi energije na desni sliki, kjer vidimo, da je v končnem stanju $E_2 > 0$ in $E_1 > 0$. Prilagam še animaciji za zadnja dva primera:

- Prost planet: https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/tir_poz_1.gif
- Ukraden planet: https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/tir_poz_2.gif

5 Končna usoda planeta

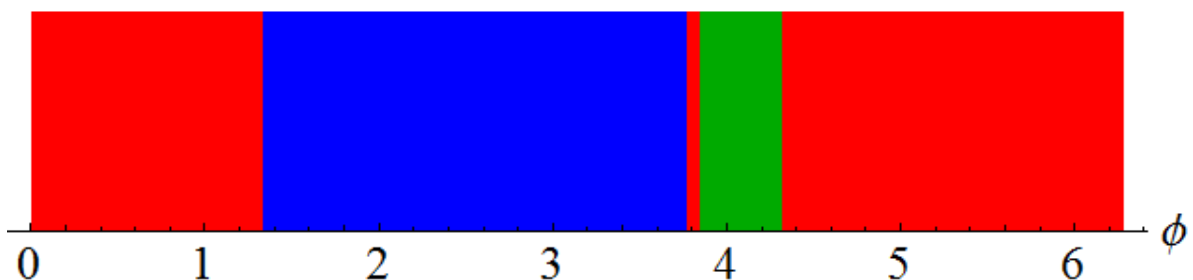
Poglejmo si sedaj končno usodo planeta v odvisnosti od faze planeta v večji natančnosti. Temu primerno sem interval $\varphi \in [0, 2\pi]$ razdelil na 80 delov in za vsakega izračunal rešitev. Za vsako rešitev sem izračunal energiji E_1 in E_2 v zadnjih trenutkih in tako določil eno od treh situacij, ki so bile opisane zgoraj. V primeru negativne smeri kroženja smo rekli, da je planet v stiku z mimobežno zvezdo kratek čas, zato sklepamo, da bo večinoma planet ostal vezan, saj drugih značilnih trajektorij tudi nismo opazili. Spodnja slika prikazuje časovni diagram končne usode planeta v odvisnosti od njegove faze za negativno smer kroženja:



Vidimo, da je končna usoda planeta v tem primeru takšna, kot smo napovedali, kjer modra barva prikazuje vezavo planeta na prvotno zvezdo. V vseh primerih planet ostane vezan na prvotno zvezdo. Prilagam še animacijo, ki prikazuje trajektorijo planeta za različne vrednosti faze. Na animaciji res vidimo, da je E_1 v vseh primerih negativna:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/usoda_tir_neg.gif

Že prej smo videli, da je situacija s pozitivno smerjo kroženja bolj zanimiva. Ogleдали smo si vse različne primere in videli, da so trije takšni primeri. Spodnja slika prikazuje časovni diagram končne usode planeta v odvisnosti od njegove faze za pozitivno smer kroženja:



V tem primeru je situacija res bolj pestra. Vidimo, da je v večini primerov planet prost, kar predstavlja rdeča barva. Naslednja najbolj pogosta situacija je, da je planet vezan na prvotno zvezdo, kar, tako kot prej, prikazuje modra barva. V nekaj primerih pa se celo zgodi, da mimobežna zvezda ukrade planet in ga tudi obdrži, kar prikazuje zelena barva. Prilagam še animacijo, ki prikazuje trajektorijo planeta za različne vrednosti faze. Pozoren gledalec opazi, da se pri zeleni barvi energija E_2 res preseli v negativno območje:

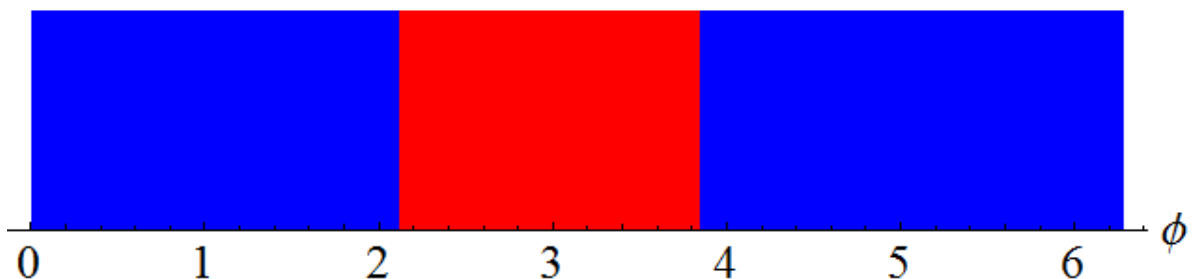
https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/usoda_tir_poz.gif

6 Različne hitrosti zvezde

Želel sem si ogledati še primere, ko mimobežna zvezda potuje z večjo ali manjšo hitrostjo, kot v prejšnji nalogi. Oglejmo si časovne diagrame končne usode planeta v odvisnosti od faze še za te primere, kjer sem poskusil najti še kakšne posebno zanimive orbite. Vsi primeri so narejeni za pozitivno smer kroženja planeta, saj se je pri negativni smeri kroženja izkazalo, da je situacija vedno enaka, le tirnice so drugih oblik.

6.1 Hitra mimobežna zvezda

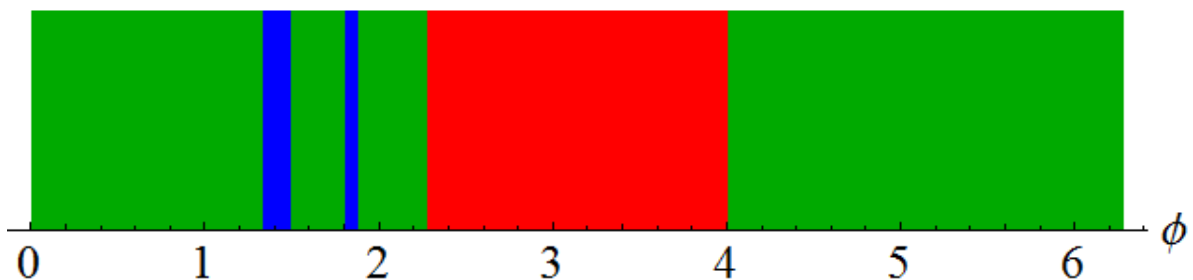
V tem primeru sem mimobežni zvezdi podelil hitrost $4v_0$. S tem povzročimo, da je planet tudi za pozitivno hitrost v kratek čas v stiku z mimobežno zvezdo. Oglejmo si časovni diagram:



Vidimo, da je mimobežna zvezda prehitra, da bi se planet lahko vezal nanjo, torej imamo le dve že znani situaciji. Posebno zanimivih orbit tu nisem našel.

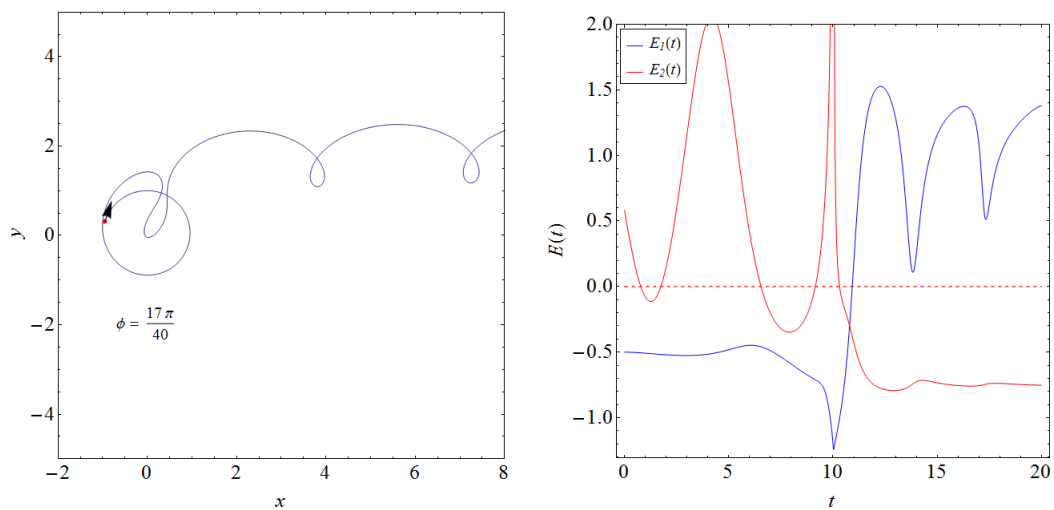
6.2 Zmerno hitra mimobežna zvezda

V tem primeru je mimobežna zvezda imela enako velikost hitrosti kot planet, torej v_0 . Pričakujemo zanimive rezultate, saj je sedaj planet v daljšem stiku z zvezdo kot kdajkoli prej. Oglejmo si časovni diagram:

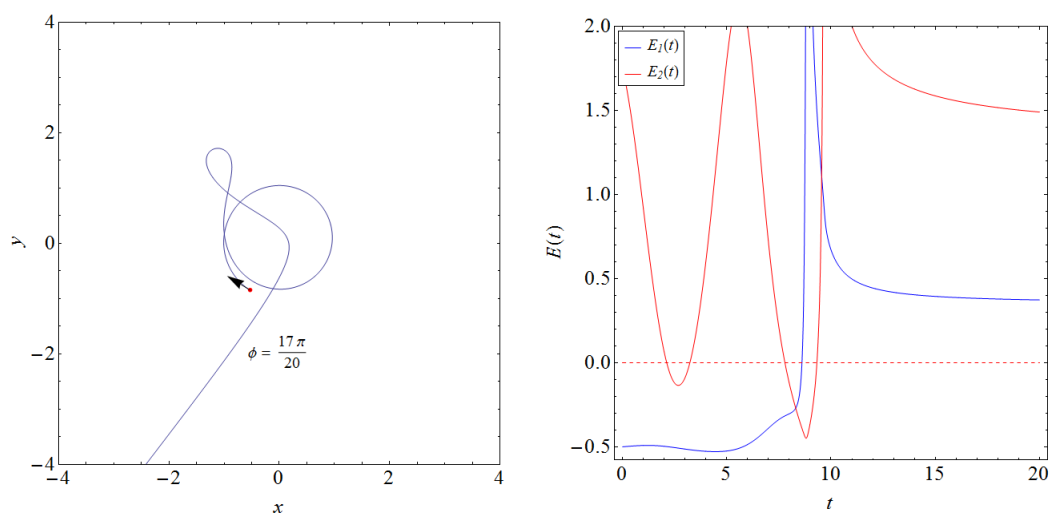


Opazimo, da v največ primerih mimobežna zvezda ukrade planet, ta pa se nanjo veže. Nekaj primerov je, ko planet postane prost, vseeno pa še vedno obstaja možnost, da planet ostane vezan na prvotno zvezdo.

Spodaj sta prikazana 2 značilna primera in časovni animaciji za primer zmerno hitre mimobežne zvezde:



https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/moderate_poz_1.gif

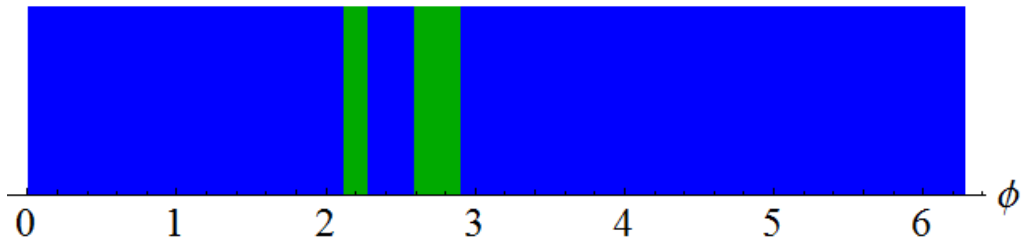


https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/moderate_poz_2.gif

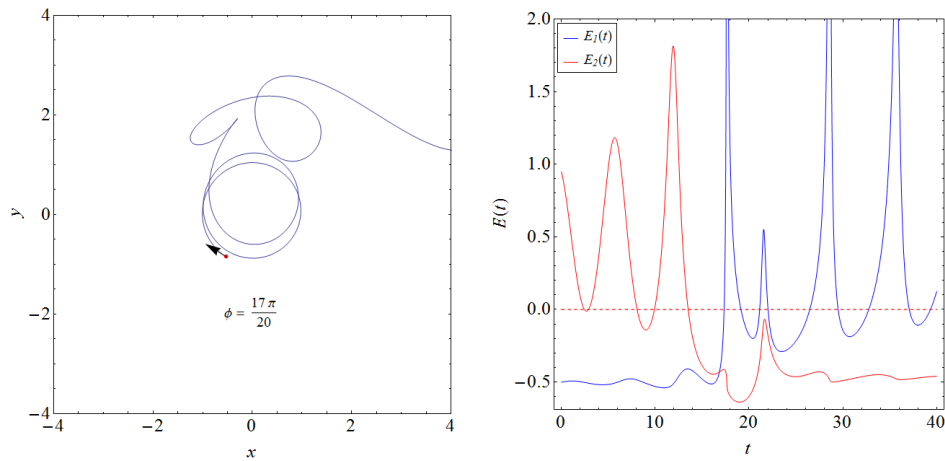
Na slikah in animacijah vidimo, da so tirnice zelo zanimivih oblik.

6.3 Počasna zvezda

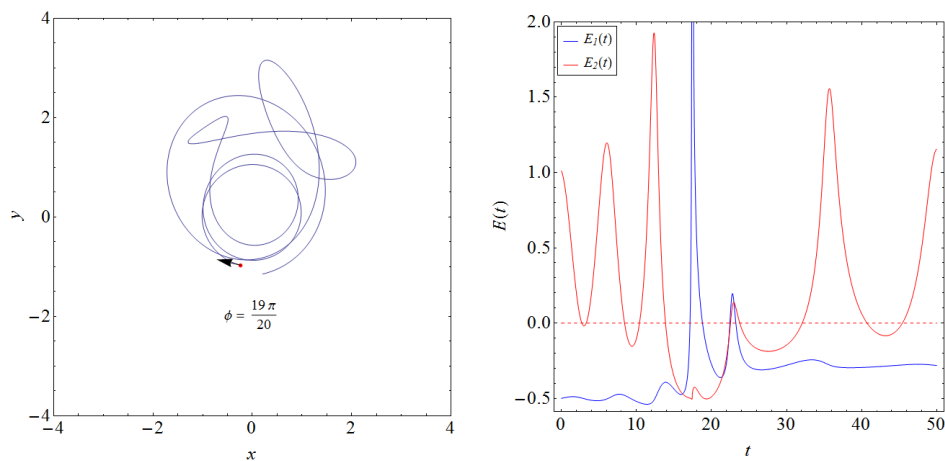
V zadnjem primeru je mimobežna zvezda imela polovično hitrost planeta, $v_0/2$. V tem primeru je časovni stik zvezde s planetom še daljši. Oglejmo si časovni diagram:



Vidimo, da daljši časovni stik ni edini pogoj za večjo motnjo sistema. Spodaj sta prikazana 2 značilna primera in časovni animaciji za primer počasne mimobežne zvezde:



https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/slow_poz_1.gif



https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/slow_poz_2.gif

Tudi tu vidimo, da so tirnice zanimivih oblik.