



Modelska Analiza 2

2. naloga - Navadne diferencialne enačbe: robni problemi

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 6.3.2014

Naloga:

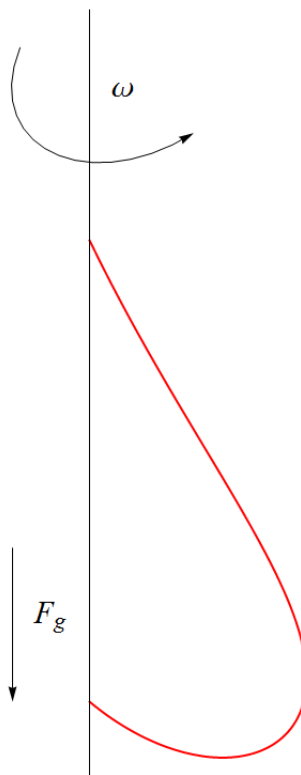
Pri tej nalogi smo se spoznali z navadnimi diferencialnimi enačbami s splošnimi robnimi pogoji, kar imenujemo tudi robni problem. Razlika v tem primeru je, da enačbo težje numerično rešimo, ker nimamo vseh začetnih pogojev, imamo pa zato končne. V teh primerih se poslužimo strelske metode, kjer ugibamo manjkajoče začetne parametre, tako da zadostimo robnim pogojem. V prvem delu naloge smo reševali obliko vrvi, ki je z obema koncema pripeta na palico, ki se vrti okoli centralne osi. V drugem delu naloge smo imeli dan potencial v dvodimenzionalnem kristalu, kjer smo morali s strelsko metodo poiskati orbite takšnega potenciala znotraj osnovne celice.

Del I

Oblika vrteče se vrvice

1 Naloga

Izračunaj obliko vrvi, ki je obešena v dveh točkah na vrteči se navpični osi. Pretvori enačbe v brezdimenzijske enote. Razišči mnogoterost dobljenih rešitev.



2 Uvod

Zanima nas oblika vrvice, ki je obešena v dveh točkah na vrteči se navpični osi. Upoštevamo da se vrvica nahaja v gravitacijskem polju. Zapišimo 2. Newtonov zakon za del vrvice dolžine ds na dolžini s . V kartezičnem koordinatnem sistemu zapišemo enačbi za vsako koordinato:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d^2x}{dt^2} &= [F_x(s+ds) - F_x(s)] + \rho ds \omega^2 x, \\ \rho \frac{d^2y}{dt^2} &= [F_y(s+ds) - F_y(s)] + \rho g ds,\end{aligned}\tag{1}$$

kjer je ρ povsod enaka dolžinska gostota vrvice. Upoštevati moramo neraztegljivost vrvice, kar zapišemo kot:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.\tag{2}$$

Če enačbe parametriziramo z $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha$ in $\frac{dy}{ds} = \sin \alpha$, jih lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(F \frac{dx}{ds} \right) + \rho \omega^2 x &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(F \frac{dy}{ds} \right) - \rho g &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Končno obliko enačb lahko predstavimo s štirimi enačbami 1. reda in jih pretvorimo v brezdimenzijsko obliko, kar dosežemo s substitucijami:

$$s \rightarrow s/l, \quad x \rightarrow x/l, \quad y \rightarrow y/l, \quad F \rightarrow F/(\rho gl), \quad \beta = \omega^2 l/g. \quad (4)$$

Naš končni sistem enačb je:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \cos \alpha, \\ \frac{dy}{ds} &= \sin \alpha, \\ \frac{dF}{ds} &= -\beta x \cos \alpha + \sin \alpha, \\ F \frac{d\alpha}{ds} &= \beta x \sin \alpha + \cos \alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

začetni pogoji pa so

$$x(0) = y(0) = x(1) = 0, \quad y(1) = h, \quad F(0) = F_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad (6)$$

kjer sta F_0 in α_0 začetna parametra, ki jih ne poznamo in jih moramo določiti, da bodo veljali robni pogoji.

3 Reševanje

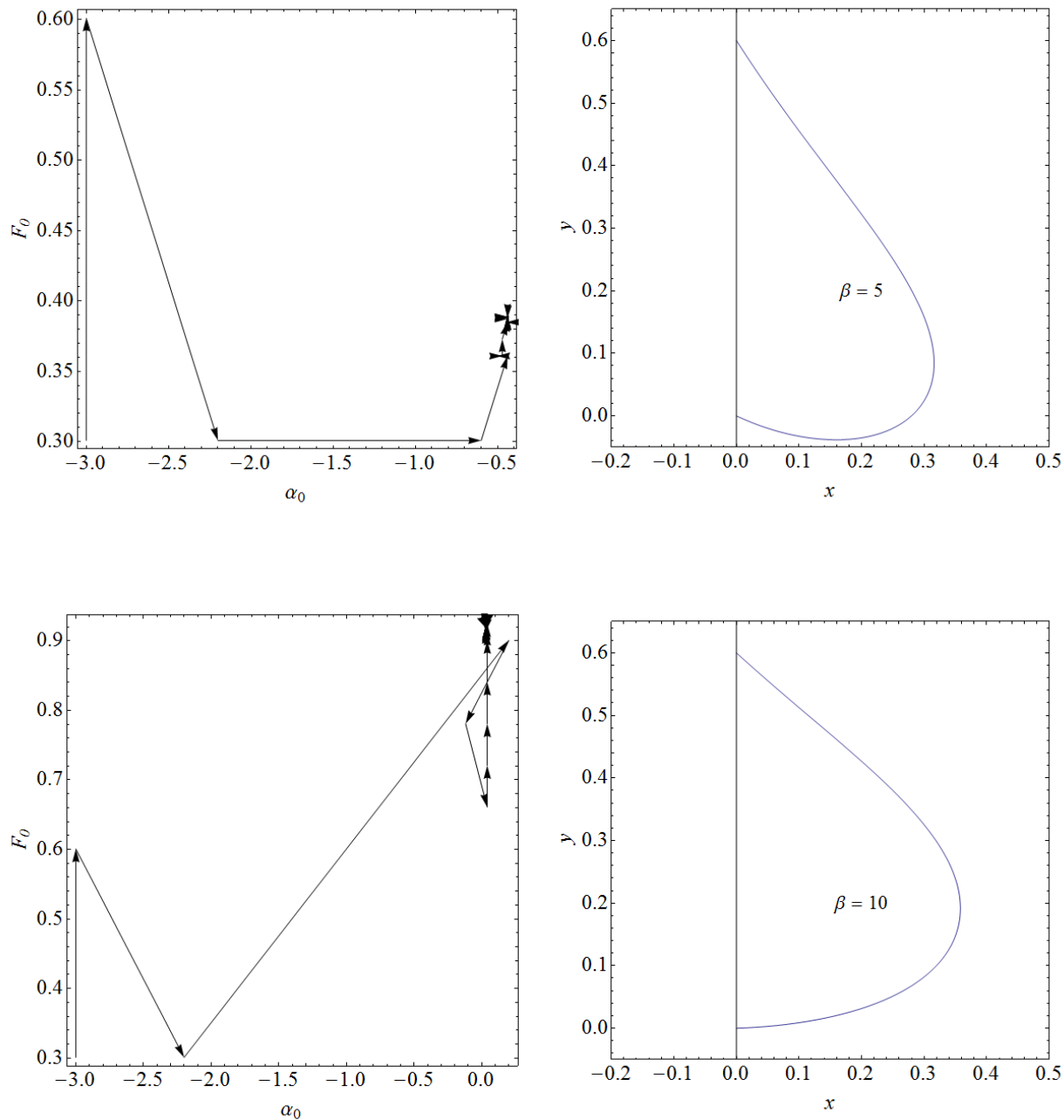
Nalogo sem reševal v orodju Mathematica. Ker v Mathematici nisem našel nobene metode, ki sama od sebe najde optimalne parametre za rešitev diferencialne enačbe z robnimi pogoji, sem se rešitve lotil malo po svoje. V obeh primerih sem uporabil vgrajeno funkcijo NDSolve, ki sem jo vsakič reševal za določen set parametrov $\{\alpha_0, F_0\}$ in za vsako rešitev definiral karakteristično količino $g = \sqrt{x(1)^2 + (y(1) - h)^2}$, ki mora za pravilni set parametrov biti enaka 0.

V prvem primeru sem naredil 2D bisekcijo, kjer sem na grobo prečesal vrednosti parametrov po velikem intervalu, se nato ustavil v najbolj optimalni točki in okolico te točki spet razdelil na manjše intervale, in tako naprej, dokler nisem dobil neke zadovoljive natančnosti, oziroma dokler je metoda dobro delovala. Nad natančnostjo rezultatov sem bil presenečen.

V drugem primeru sem karakteristično količino definiral kot funkcijo in to funkcijo minimiziral z minimizacijsko metodo v Mathematici. Opazil sem, da FindMinimum deluje veliko hitreje kot NMinimize, zato sem uporabil prvo. Ta način je veliko bolj natančen kot prvi, vendar pa sta zanimiva oba pristopa.

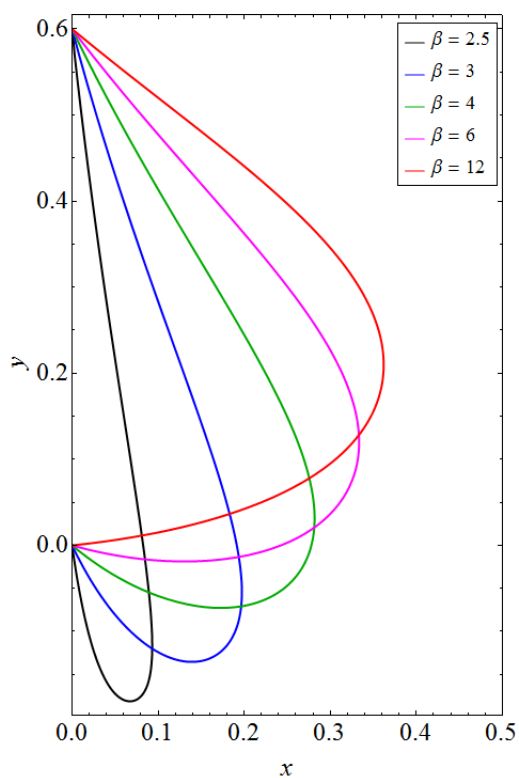
4 Rezultati

Pri obeh pristopih sem dobil enak končni rezultat, tako da so razlike le v metodah, v kar pa se ne bom spuščal. Pri prvem pristopu si lahko ogledamo delovanje prve metode, ki sem jo implementiral sam:



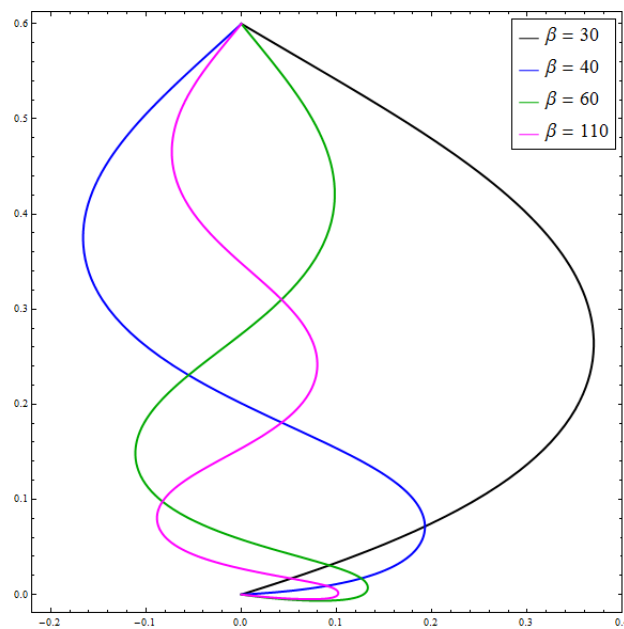
Prikazana sta dva primera za vrednost parametre $\beta = 5$ in $\beta = 10$. Vidimo, da metoda skače po korakih, ki se manjšajo. Tako vedno bolj natančno določi optimalni set parametrov. V večjih primerih je ta metoda določila optimalni set parametrov tako, da je bila karakteristična dolžina enaka 0 na 5 decimalnih mest natančno.

Oglejmo si rešitve oblike vrvi pri različnih hitrostih vrtenja in na višini $h = 0.6$:



Vidimo, da so na prvi pogled rešitve zadovoljive, saj ima vrv v vseh primerih oba robova pritrjena. Opazil sem, da za nekatere vrednosti β metoda ne deluje dobro, ampak takšne vrednosti sem potem ignoriral.

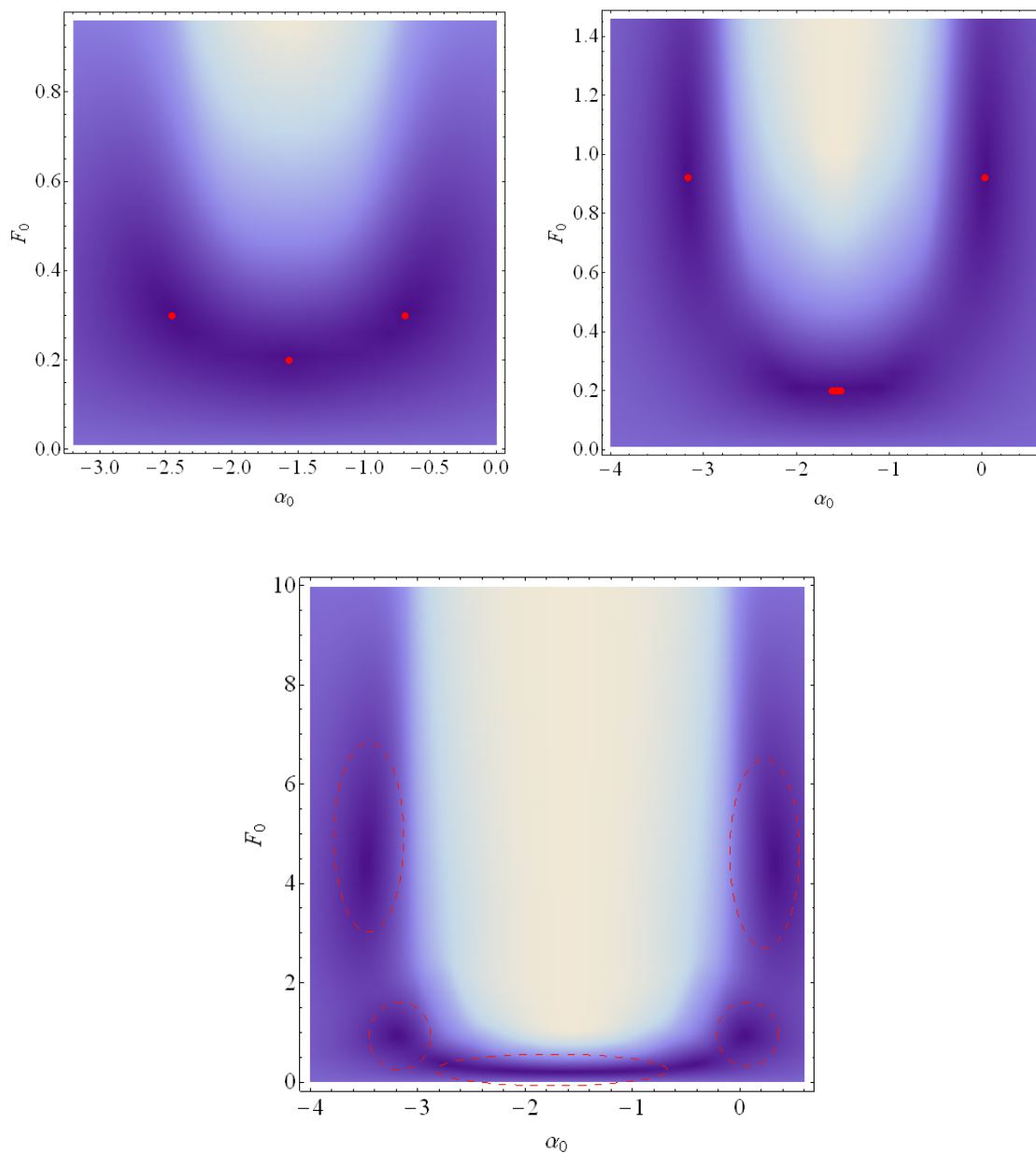
Zanimive stvari se začnejo dogajati pri višjih hitrostih, oglejmo si par teh primerov:



Dobimo neke vrste višje harmonike, ki pa ne predstavljajo smiselnih rešitev, saj takšna rešitev v 3D ni možna.

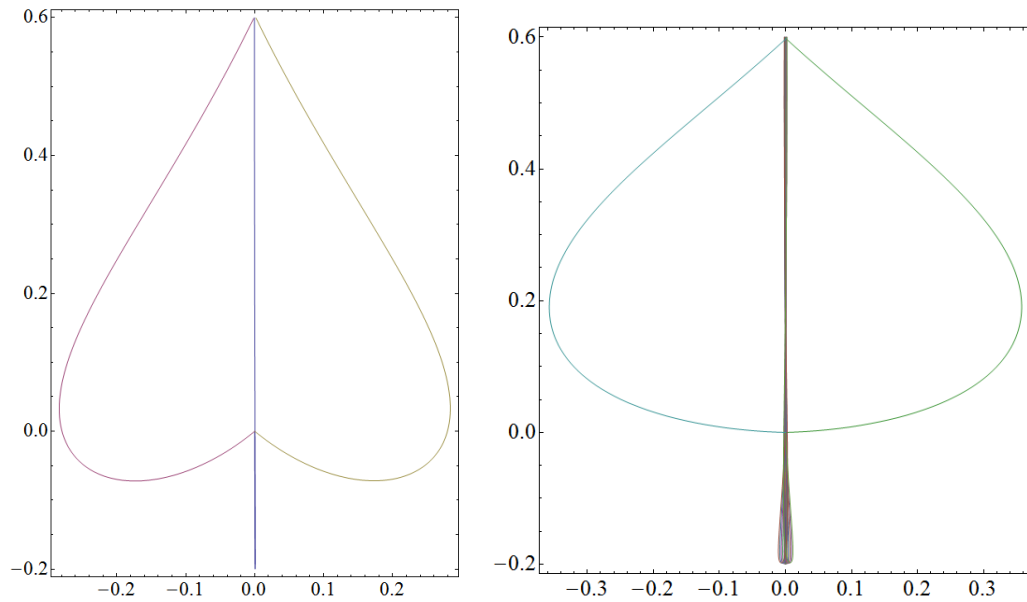
5 Degeneriranost rešitev

Oglejmo si kako izgleda polje karakteristične količine na nekem intervalu parametrov α_0 in F_0 za $\beta = 4$ (levo), $\beta = 10$ (desno) in $\beta = 40$ (spodaj):



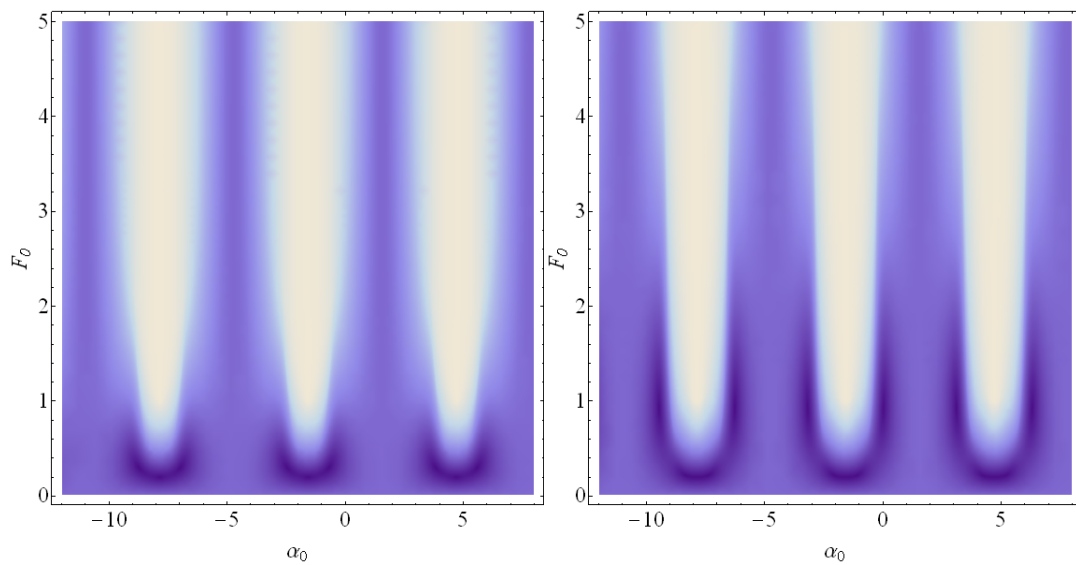
Rdeče pike predstavljajo nekaj najnižjih točk v polju, ki so blizu ali enaka 0. Vidimo, da pri večjih vrednostih β dobimo območja nekajh minimumov. Če je vrednost minimuma enaka 0, potem točka minimuma predstavlja optimalen set naših parametrov. Opazimo, da so rešitve očitno degenerirane, saj so simetrične glede na levo-desno okoli neke centralne točke, ki verjetno tudi predstavlja rešitev.

Oglejmo si obliko teh degeneriranih rešitev:



Minimumi, ki so simetrični levo-desno, torej predstavljajo isto simetrične rešitve. Opazimo da minimum v centru slike pripada rešitvi, kjer se vrvi vrta okoli osi, kar je smiselna rešitev, vendar ne v fizikalnem smislu.

Poglejmo kaj se zgodi, če povečamo območje parametra α_0 :



Opazimo, da so rešitve periodične, kar ni presenečenje, saj smo parameter α postavili v periodične funkcije.

Del II

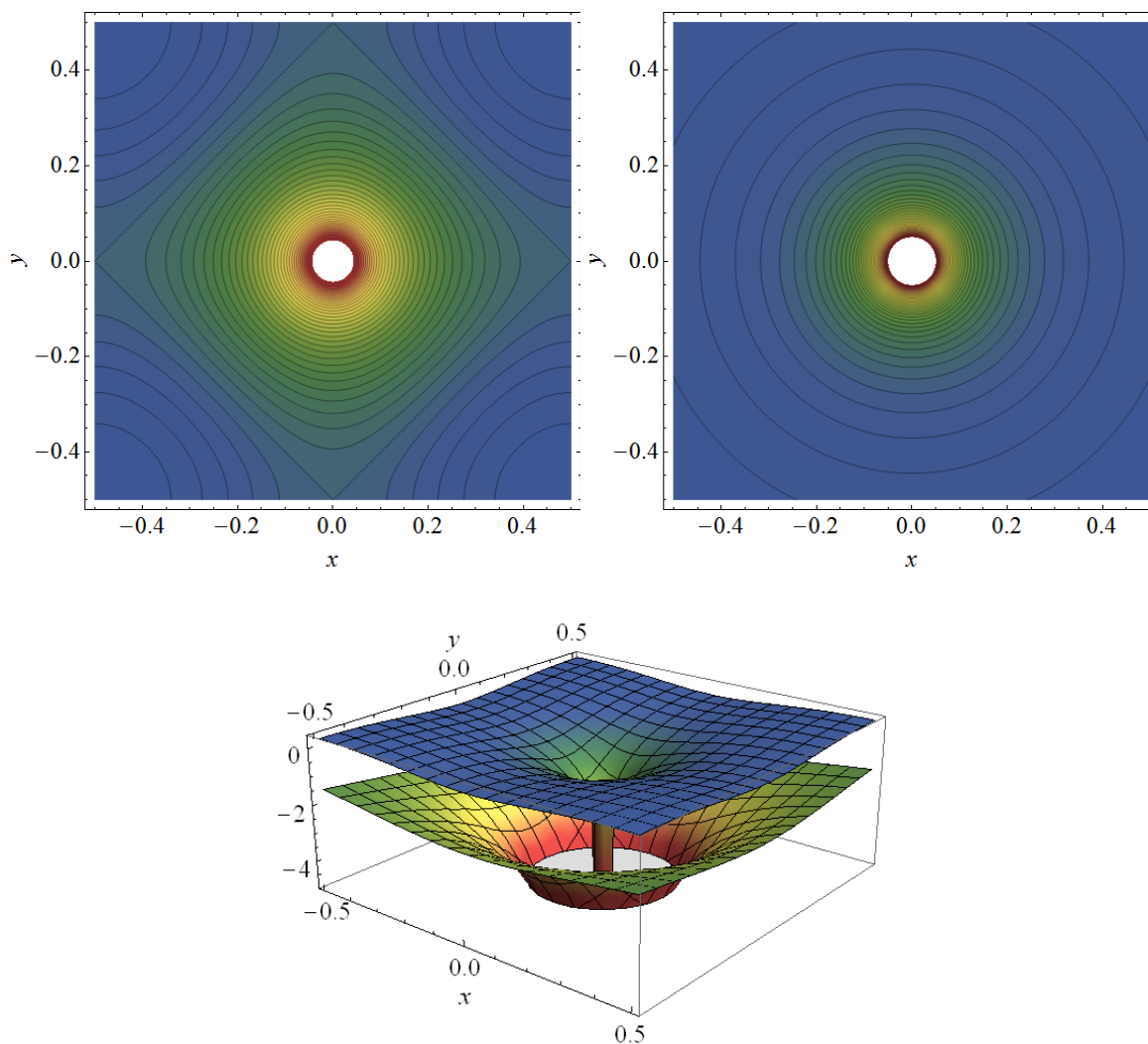
Dvodimenzionalni kristal

1 Naloga

V dvodimenzionalnem kristalu, kjer imajo delci privlačen potencial oblike $\ln r$, lahko prispevke seštejemo in v približku dobimo periodičen potencial

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \ln(\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)). \quad (7)$$

Potencial tega tipa bi veljal za nabito žico v kvadratnem plašču, podobne sisteme pa najdemo v fiziki kvantnih pik. S strelsko metodo poišči sklenjene orbite v tem potencialu za različne začetne točke na diagonalni simetrijski osi. Gibanje obravnavaj znotraj osnovne celice $(x, y) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Potencial je prikazan na levi spodnji sliki, na desni pa je za primerjavo prikazan gravitacijski potencial $U(r) = -\frac{1}{r}$:



Medtem ko je gravitacijski potencial venomer negativen, je naš potencial $U(x, y)$ bolj razgibane oblike, zato bodo tudi orbite bolj eksotičnih oblik.

2 Reševanje

Zanimajo nas sklenjene orbite v periodičnem potencialu $U(x, y)$. Za delec v takšnem potencialu lahko zapišemo Lagrangeovo funkcijo:

$$L = T - U = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} \ln (\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)). \quad (8)$$

Če tak lagrangian vstavimo v Euler-Lagrangeove enačbe, dobimo enačbe gibanja, ki se glasijo:

$$\ddot{x} = -\pi \frac{\sin(\pi x) \cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)}, \quad (9)$$

$$\ddot{y} = -\pi \frac{\sin(\pi y) \cos(\pi y)}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)}. \quad (10)$$

Takšen sistem sedaj prevedemo na sistem 4 enačb 1. reda z vmesnimi količinami:

$$\dot{x} = u, \quad (11)$$

$$\dot{y} = v. \quad (12)$$

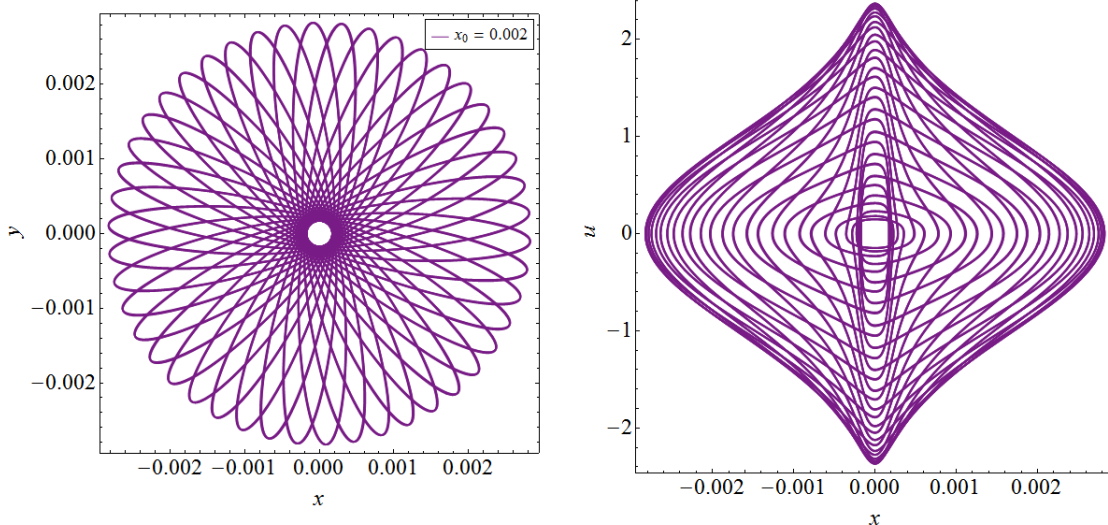
Nalogo sem reševal v orodju Mathematica z uporabo funkcij `NDsolve` in `FindMinimum`. Naši robni pogoji so takšni, da se delec na začetku nahaja na glavni diagonali $x = y$, ostali parametri sistema pa so prosti, torej hitrosti u_0, v_0 in čas obhoda τ . Želimo poiskati takšne vrednosti prostih parametrov, da se bodo končne lastnosti delce ujemale z začetnimi. Tako lahko zapišemo karakteristično količino, ki jo bomo postavili v minimizacijsko funkcijo:

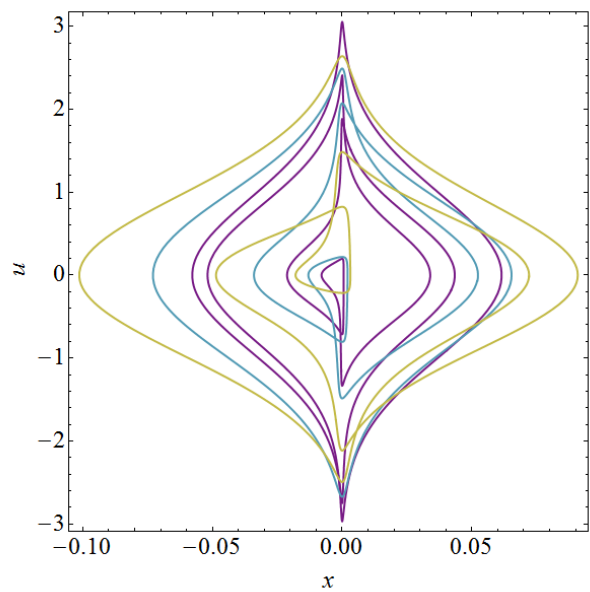
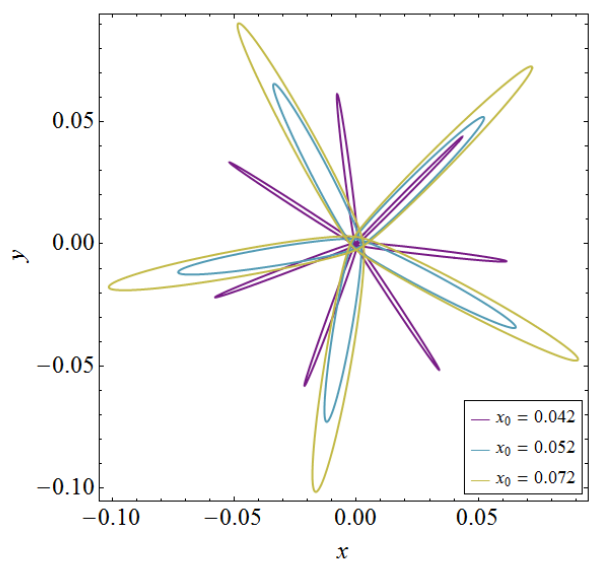
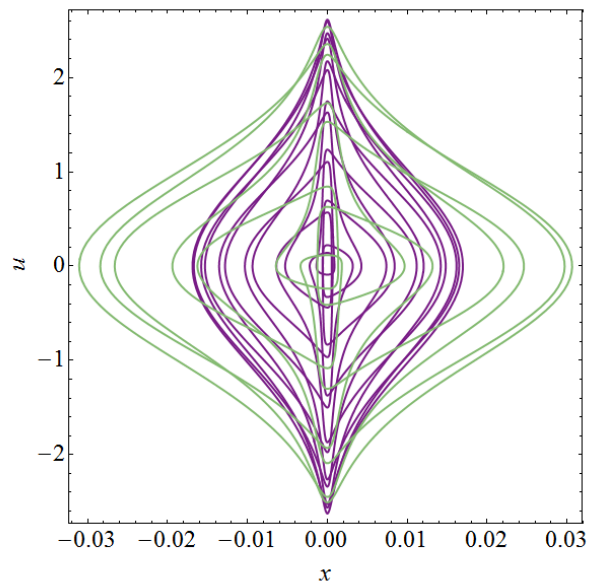
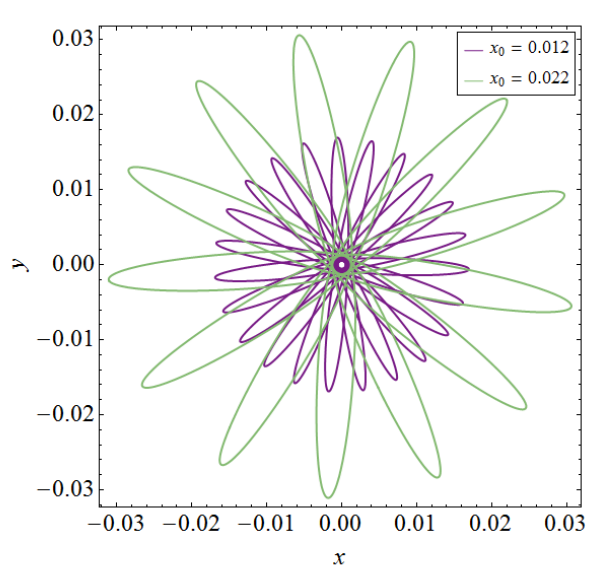
$$g = \sqrt{\left(\frac{x(\tau) - x_0}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y(\tau) - x_0}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{u(\tau) - u_0}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{v(\tau) - v_0}{v_0}\right)^2}, \quad (13)$$

kjer sem normiral kvadrate odstopanj, saj količine niso na istih velikostnih skalah.

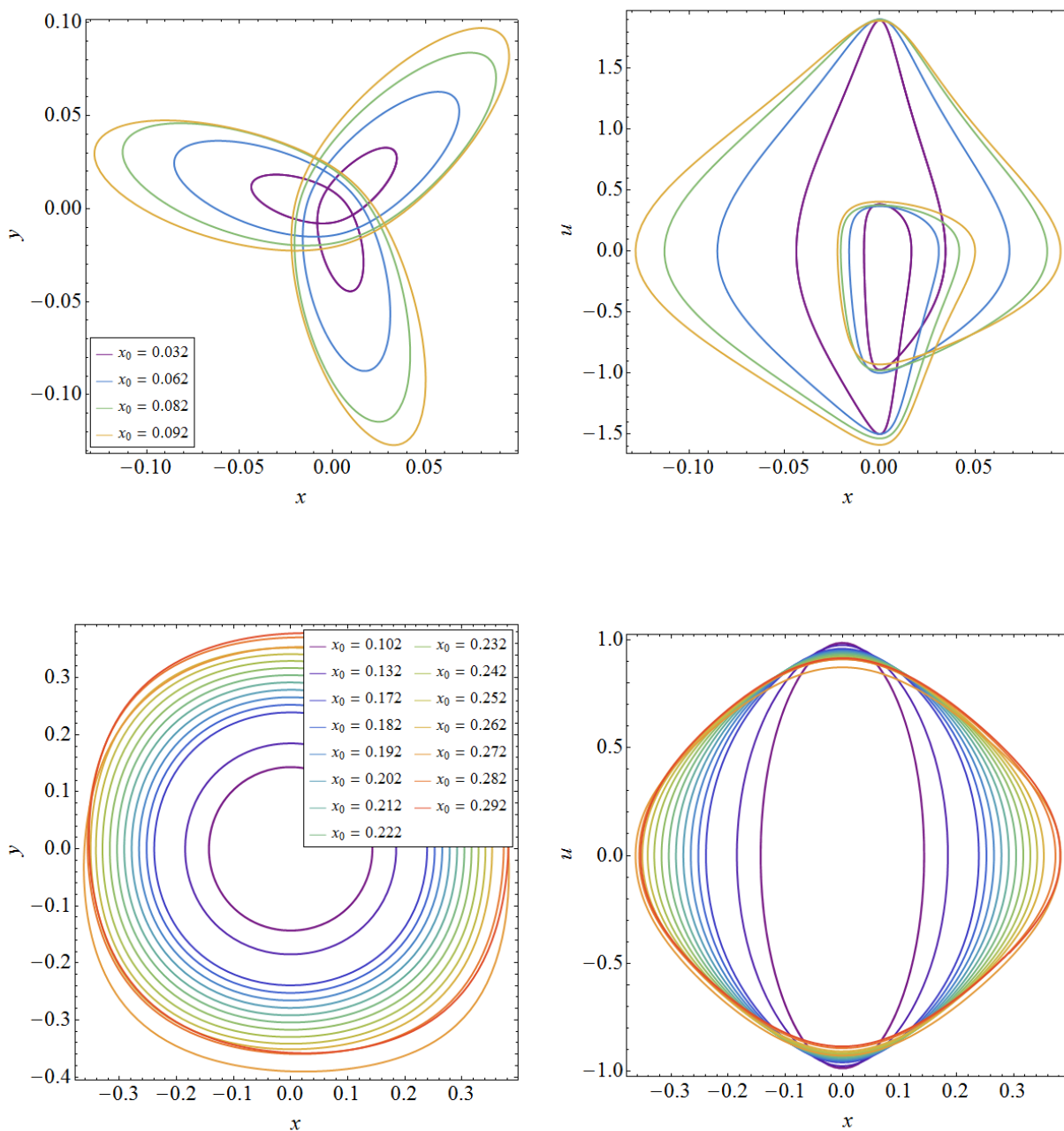
3 Rezultati

S premikanjem po glavni diagonali sem raziskoval oblike orbit. Spodaj so prikazani skupki grafov za neke sklope vrednosti x_0 , kjer njihova leva stran prikazuje orbito, desna pa projekcijo faznega portreta na dimenzijo x :





Opazimo, da orbite izražajo lepo simetričnost, fazni portreti pa ne.



Vidimo, da je sistem zelo bogat, saj nam ponuja veliko število orbit različnih oblik. Potrebno je omeniti, da je eksotične oblike orbit moč najti le v bližini sredšča potenciala, torej za majhne odmike, ko pa se z odmiki večamo, postanejo orbite kar naenkrat krožne. Če odmik še povečujemo, se krožnice začnejo deformirati, v še daljših območjih pa metoda ni več našla rešitev. Lahko, da je to posledica nenatančnosti, velikosti potenciala na tistem območju, ker se orbita zelo približa robu osnovne celice, ali pa posledica obojega.