

University of *Ljubljana*  
Faculty of *Mathematics and Physics*



## Modelska Analiza 2

### 5. naloga - Parcialne diferencialne enačbe: robni problemi in relaksacija

Avtor: Matic Lubej  
Asistent: dr. Simon Čopar  
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 25.3.2014

---

#### Naloga:

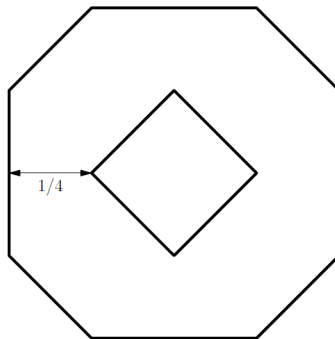
Pri tej nalogi smo se spoznali z numeričnim reševanjem parcialnih diferencialnih enačb, ki so definirane z robnimi problemi. Reševali smo z metodo pospešene relaksacije in iskali optimalne pospeške za določene primere. V prvem delu naloge smo imeli cev s posebnim presekom, za katero smo iskali hitrostni profil tekočine skozi takšno cev. Izračunali smo tudi Poiseuillov koeficient. V drugem delu naloge smo iskali temperaturni profil kovinskega valja, ki smo ga grela na spodnjem robu, na plašču smo držali konstantno temperaturo, na zgornjem robu pa je bil valj izoliran. Ogledali smo si še rešitve za različne robne pogoje.

## Del I

# Pretok viskozne tekočine po cevi

## 1 Naloga

Z metodo pospešene relaksacije (SOR) določi Poiseuillov koeficient za pretok viskozne tekočine po cevi z obliko preseka, podano na spodnji sliki:



Preveri uspešnost Čebiševga pospeška k relaksaciji. Za primerjavo vzemi namesto zaporedja vrednosti  $\omega$  v algoritmu SOR kar stalno asimptotično vrednost:

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_{\text{Jacobi}}^2}} \approx \frac{2}{1 + \frac{\pi}{J}}, \quad (1)$$

kjer je  $J$  število točk po enem robu. Zgornja ocena za  $\omega$  velja za poln kvadrat; pri našem problemu dobimo boljšo oceno z nastavkom:

$$\omega = \frac{2}{1 + \alpha \frac{\pi}{J}}. \quad (2)$$

Poišči optimalno vrednost parametra  $\alpha$ .

## 2 Uvod

Izračunati želimo Poiseuillov koeficient za preok nestisljive viskozne tekočine po cevi z nekim presekom. Po predpostavki o stacionarnem toku in gibanju le v smeri  $x$ , lahko zapišemo našo enačbo gibanja kot:

$$\eta \nabla^2 u = \frac{dp}{dx}, \quad (3)$$

kjer je  $\eta$  koeficient viskoznosti,  $p$  tlak tekočine in  $u$  hitrost tekočine v neki točki  $(z, y)$ . Po preureditvi dobimo Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 u = \rho, \quad \rho = \frac{|\Delta p|}{\eta \Delta x}, \quad (4)$$

kjer zahtevamo robni pogoj, da je hitrost tekočine  $u$  ob robu cevi enaka 0. Poiseuillov koeficient za poljuben presek je definiran kot razmerje volumnskega pretoka skozi to cev in volumnskega pretoka za okroglo cev, torej:

$$C = \frac{\Phi_V}{\Phi_V^0}, \quad \Phi_V^0 = \frac{\rho S^2}{8\pi} \quad (5)$$

kjer je volumnski pretok definiran kot:

$$\Phi_V = \int_S u dS. \quad (6)$$

### 3 Reševanje

Reševanja sem se lotil v matematičnem orodju Matlab, risal pa sem v Mathematici. Čev sem zaradi lažje implementacije v orodje zavrtel za kot  $45^\circ$ . Prvi korak k reševanju problema je bil diferenčni zapis enačbe (3). V primeru enako velikih korakov v vseh smereh, se ta glasi:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}}{h^2} = \rho, \quad (7)$$

kjer  $h$  predstavlja širino koraka,  $i$  indeks v smeri  $x$ ,  $j$  pa v smeri  $y$ . Če bi se reševanja lotili matrično, bi lahko  $u$  zapisali kot vektor in skonstruirali matriko,  $\mathbf{A}$ , ki opisuje enačbo (7). Shemo

$$\mathbf{A}u = f, \quad (8)$$

bi tako reševali iterativno. Uporabnost enačbe se hitro zmanjšujemo, če povečujemo dimenzijo polja  $u$ , saj moramo obračati velike matrike. Nekoliko hitrejša metoda ponuja kar „in-place“ računanje povprečja sosednjih prispevkov. Če matriko  $\mathbf{A}$  razbijemo na matrike  $\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U}$ , kjer po vrsti predstavljajo spodnje trikotno, diagonalno in zgornje trikotno matriko, lahko to metodo zapišemo v obliki:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})u = -\mathbf{U}u + f \quad (9)$$

Če upoštevamo, da so matrike v splošnem zelo prazne, je bolj smiselno zapisati sistem v takšni obliki, ki bo uporabna za numerično reševanje. Iz enačbe (7) izrazimo  $u_{i,j}$  in desni strani prištejemo ter odštejemo  $u_{i,j}$ . Dobimo iterativno shemo:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{4} \left( -\rho h^2 - 4u_{i,j}^{(k)} + \left( \sum_{i \neq j, \{|i|, |j|\} \leq 1} u_{i,j}^{(k)} \right) \right), \quad (10)$$

ki jo lahko elegantneje zapišemo kot:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{4} \xi_{i,j}^{(k)}. \quad (11)$$

Robne pogoje sem upošteval tako, da sem polje obdal z navidezno plastjo ničel. Za takšno shemo stoji nekaj teorije. Če to teorijo preučimo, se izkaže, da lahko takšno shemo „pospešimo“, kjer upoštevamo obnašanje porazdelitve napake po polju v svoj prid. Definiramo pospešeno shemo s Chebishevimi pospeškovi v obliki:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{(1 + \beta)}{4} \xi_{i,j}^{(k)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{\omega}{4} \xi_{i,j}^{(k)}, \quad 1 \leq \beta < 2, \quad (12)$$

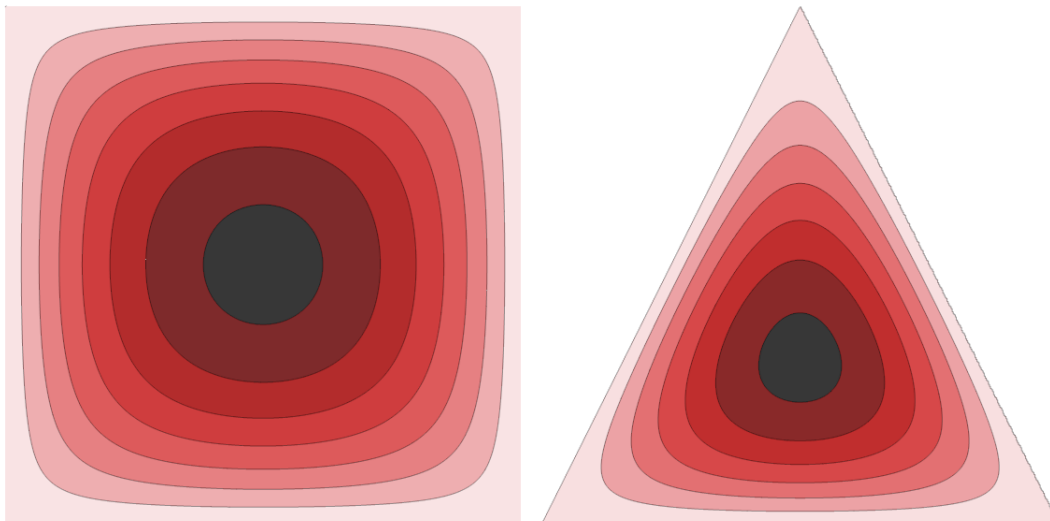
kjer  $\beta$  predstavlja pospešek sheme, za optimalno delovanje pa moramo najti pravo vrednost parametra. Faktor  $\omega$  je v takšni obliki odvisen od velikosti mreže, zato je priročneje, če definiramo:

$$\omega = \frac{2}{1 + \alpha \frac{\pi}{J}}, \quad (13)$$

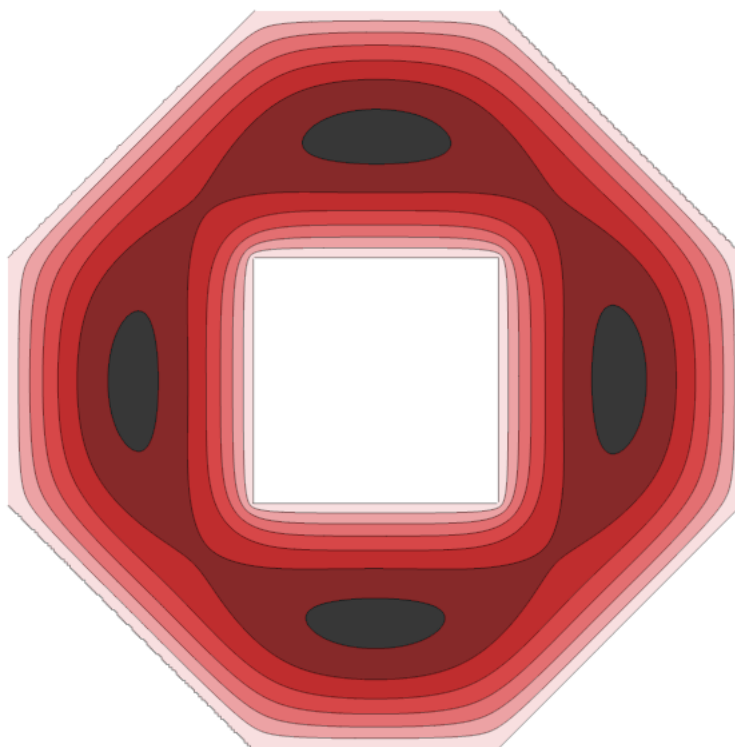
kjer  $\alpha$  predstavlja skaliran pospešek,  $J$  pa dimenzijo mreže. Naloga sem se lotil tako, da sem definiral nehomogen del naše enačbe kot matriko iz 0 in 1, kjer je položaj 0 predstavljal mesto, kjer toka ni. Vrednosti raznih parametrov sem tekom naloge spreminjal, zato jih bom poročal ob rezultatih. Rešitev  $u$  sem propagiral toliko časa, dokler največji zaporedni popravek ni bil manjši od mejne vrednosti  $\epsilon$ .

## 4 Rezultati

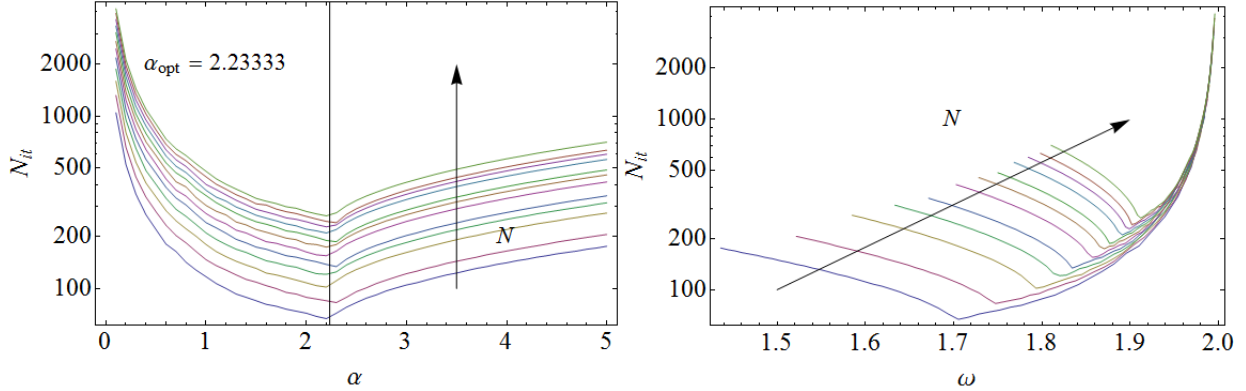
Najprej sem se želel prepričati, da program deluje pravilno, zato sem za prvi  $f$  vzel matriko samih enic, kar predstavlja cev z navadnim kvadratnim presekom, za drugega pa cev s trikotnim presekom. Rezultata za  $500 \times 500$  mrežo pri natančnosti  $\epsilon = 10^{-10}$  sta prikazana spodaj:



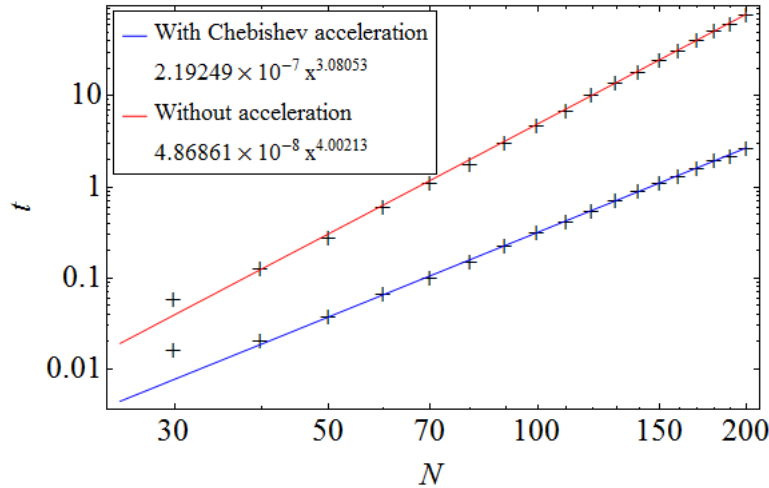
Res smo se prepričali, da metoda deluje pravilno. Sedaj se lahko lotimo našega prvotnega problema z bolj kompliciranim presekom cevi:



Kar se tiče fizikalnih rezultatov, je najpametnejši prvi korak seveda iskanje optimalnega parametra  $\alpha_{opt}$ , saj tako skrajšamo čas nadaljnjih računov. Oglejmo si število potrebnih iteracij, da dosežemo neko natančnost, v odvisnosti od parametra  $\alpha$ . Računal sem z velikostjo mrež  $200 \times 200$ , željena natančnost pa je bila  $10^{-6}$ . Omenjeno sem izračunal za več različnih vrednosti  $J$  iz intervala  $J \in [40, 150]$ . Leva slika prikazuje  $N(\alpha)$ , desna pa  $N(\omega)$ :

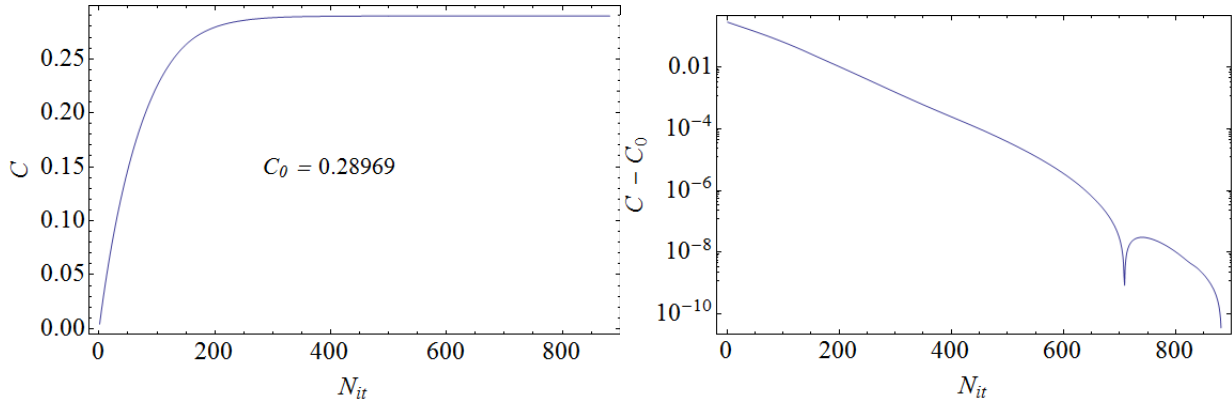


Opazimo, da na nekem intervalu obstaja minimum števila iteracij, tu se nahaja naš optimalni  $\alpha_{opt}$ . Vidimo, da je slika res neodvisna od parametra  $J$ , saj so vse optimalne vrednosti na isti poziciji. Na desni sliki lahko vidimo prejšnjo interpretacijo Chebishevega pospeška. Vidimo, da se raste z  $J$  in da ima pol pri  $\omega = 2$ . Optimalna vrednost parametra je  $\alpha_{opt} = 2.233$ , v računih pa sem vzel kar  $\alpha_{opt} = 2.25$ . Za bolj intuitivno sliko efekta optimalnega parametra  $\alpha$  je spodaj prikazana še odvisnost časa, ki je potreben, da dosežemo natančnost  $\epsilon$ , v odvisnosti od  $\alpha$ :



Slika razločno prikazuje, da za mrežo velikosti  $200 \times 200$  s Chebishevim pospeškom računalnik porabi čas reda velikosti  $\sim 1$  s, medtem ko za metodo brez pospeška ta vrednost hitro skoči za dva velikostna razreda višje na čas  $\sim 100$  s. Opazimo, da metoda brez pospeška ni le premaknjena višje glede na metodo s pospeškom, ampak ima še večjo potenčno odvisnost. Iz nekolinearosti premic lahko sklepamo, da je optimizirana metoda pri neki vrednosti  $N$  slabša od neoptimizirane, vendar se to zgodi pri zelo majhnih vrednostih parametra  $N$ , če ne celo pri ne-fizikalnih.

Za konec si oglejmo še konvergenco Poiseuilovega koeficienta za cev s takšnim presekom za velikost mreže  $500 \times 500$  in  $\epsilon = 10^{-6}$ :



Leva slika prikazuje vrednost koeficienta v odvisnosti od števila iteracij, približevanje končni vrednosti, v logaritmski skali. Opazimo, da vrednost koeficienta hitro s prvimi iteracijami hitro narašča, nato pa se ustali. Preko tega koeficienta lahko vidimo, da so se največje spremembe rešitve dogajale v prvih par sto iteracijah, potem pa so sledili le še minimalni popravki.

## Del II

# Temperaturni profil valja

## 1 Naloga

Enakostranični kovinski valj ( $2r = h$ ) grejemo na spodnji ploskvi s konstantnim toplotnim tokom, zgornjo plast izoliramo, plašč pa držimo na konstantni temperaturi. Kakšen je temperaturni profil v valju? Kaj pa, če je zgornja polovica plašča pri drugi temperaturi kot spodnja?

## 2 Reševanje

Reševanje se v tem primeru ni veliko spremenilo, saj se je spremenila le fizika problema in še ta je v večji meri ostala enaka. Če obravnavamo stacionarne razmere, se naša enačba glasi:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (14)$$

ki je 2D problem, saj so rešitve simetrične v  $\varphi$ . V polarnih koordinatah ima operator  $\nabla^2$  drugačno diferenčno obliko, ta se glasi:

$$\frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial r^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad (16)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} = \frac{1}{r_i} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad (17)$$

$$r_i = h \left( -\frac{J}{2} - \frac{1}{2} + i \right). \quad (18)$$

kjer smo pazljivo definirali  $r_i$ , saj se moramo izogniti polu v  $r = 0$ . Sedaj je potrebno vse prispevek sešteti in enačiti z 0. Ko vse to storimo in izpostavimo  $u_{i,j}$ , dobimo podobno iterativno shemo kot prej:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{4r_i} \left( -4r_i u_{i,j}^{(k)} + r_i (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + u_{i-1,j} \left( r_i - \frac{h}{2} \right) + u_{i+1,j} \left( r_i + \frac{h}{2} \right) \right). \quad (19)$$

V splošnem tako rešujemo problem na enak način kot prej:

$$u_{i,j}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{4r_i} \xi_{i,j}^{(k)}. \quad (20)$$

Upoštevati moramo še robne pogoje, s katerimi je malce več opravka kot prej. Najenostavneši robni pogoj je robni pogoj plašča. Tega sem upošteval tako, da sem, tako kot prej, dodal navidezno plast na mestih, kjer je plašč. Na spodnjem robu, ki ga grejemo, velja pogoj, da je gradient toplotnega toka konstanten, na zgornjem robu, ki je izoliran, pa velja, da je gradient toplotnega toka enak 0, torej:

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = K \longrightarrow u_{i,1} - u_{i,0} = Kh, \quad (21)$$

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=h} = 0 \longrightarrow u_{i,J} - u_{i,J-1} = 0. \quad (22)$$

Robni pogoj sem upošteval tako, da sem en  $u_{i,j}$  iz  $-4u_{i,j}$  preobrazil preko (21) ali (22). Tako za oba robova dobimo novi enačbi:

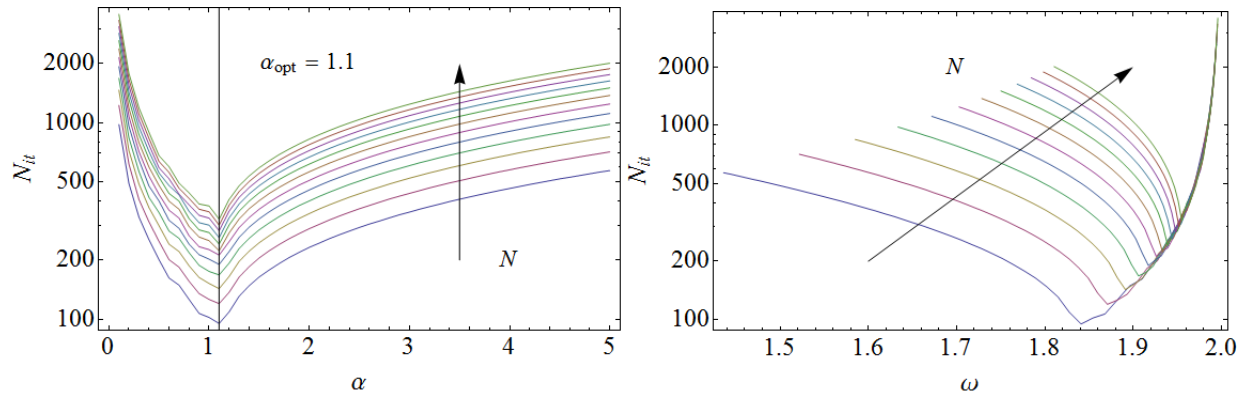
$$u_{i,1}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{3r_i} \left( -Khr_i - 3r_i u_{i,j}^{(k)} + r_i u_{i,j+1} + u_{i-1,j} \left( r_i - \frac{h}{2} \right) + u_{i+1,j} \left( r_i + \frac{h}{2} \right) \right), \quad (23)$$

$$u_{i,J}^{(k+1)} = u_{i,j}^{(k)} + \frac{1}{3r_i} \left( -3r_i u_{i,j}^{(k)} + r_i u_{i,j-1} + u_{i-1,j} \left( r_i - \frac{h}{2} \right) + u_{i+1,j} \left( r_i + \frac{h}{2} \right) \right). \quad (24)$$

Tudi v tem primeru sem na enak način definiral natančnost in pa Chebishev pospešek.

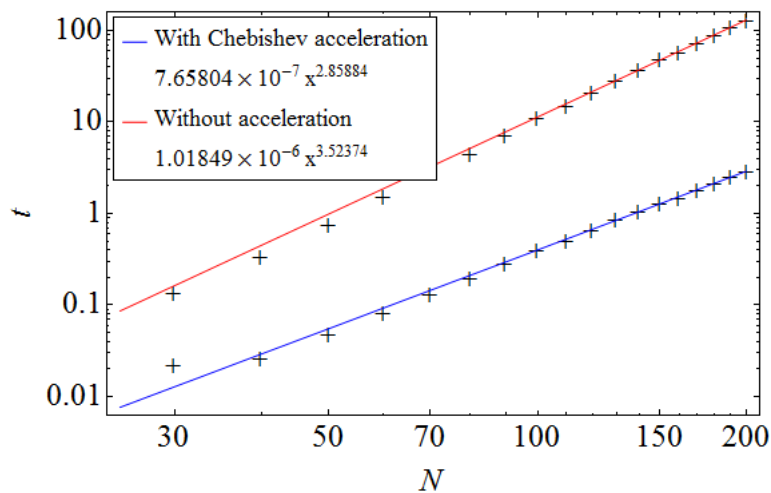
### 3 Rezultati

Razen končnih slik, so si odvisnosti fizikalnih parametrov precej podobne, zato jih ne bom ponovno komentiral. Zopet sem najprej poiskal vrednost optimalnega parametra  $\alpha$ . Računal sem z velikostjo mrež  $200 \times 200$ , željena natančnost pa je bila  $10^{-8}$ . Omenjeno sem izračunal za več različnih vrednosti  $J$  iz intervala  $J \in [40, 150]$ . Leva slika prikazuje  $N(\alpha)$ , desna pa  $N(\omega)$ :



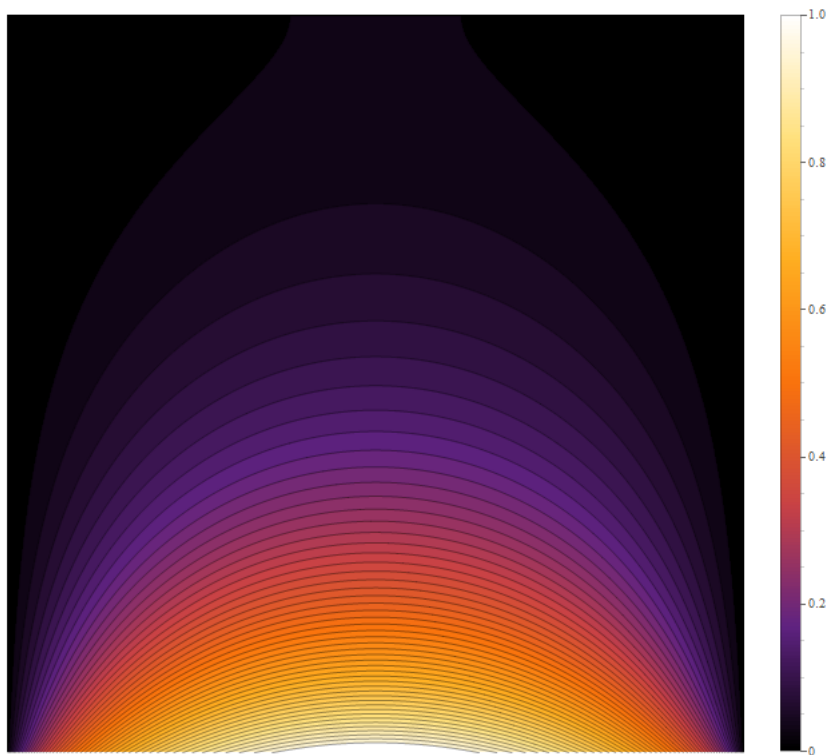
Vidimo, da je optimalna vrednost parametra v tem primeru  $\alpha_{opt} = 1.1$ .

Spet sem za bolj intuitivno sliko efekta optimalnega parametra  $\alpha$  je izmeril še odvisnost časa, ki je potreben, da dosežemo natančnost  $\epsilon$ , v odvisnosti od  $\alpha$  :



Situacija je podobna prejšnji.

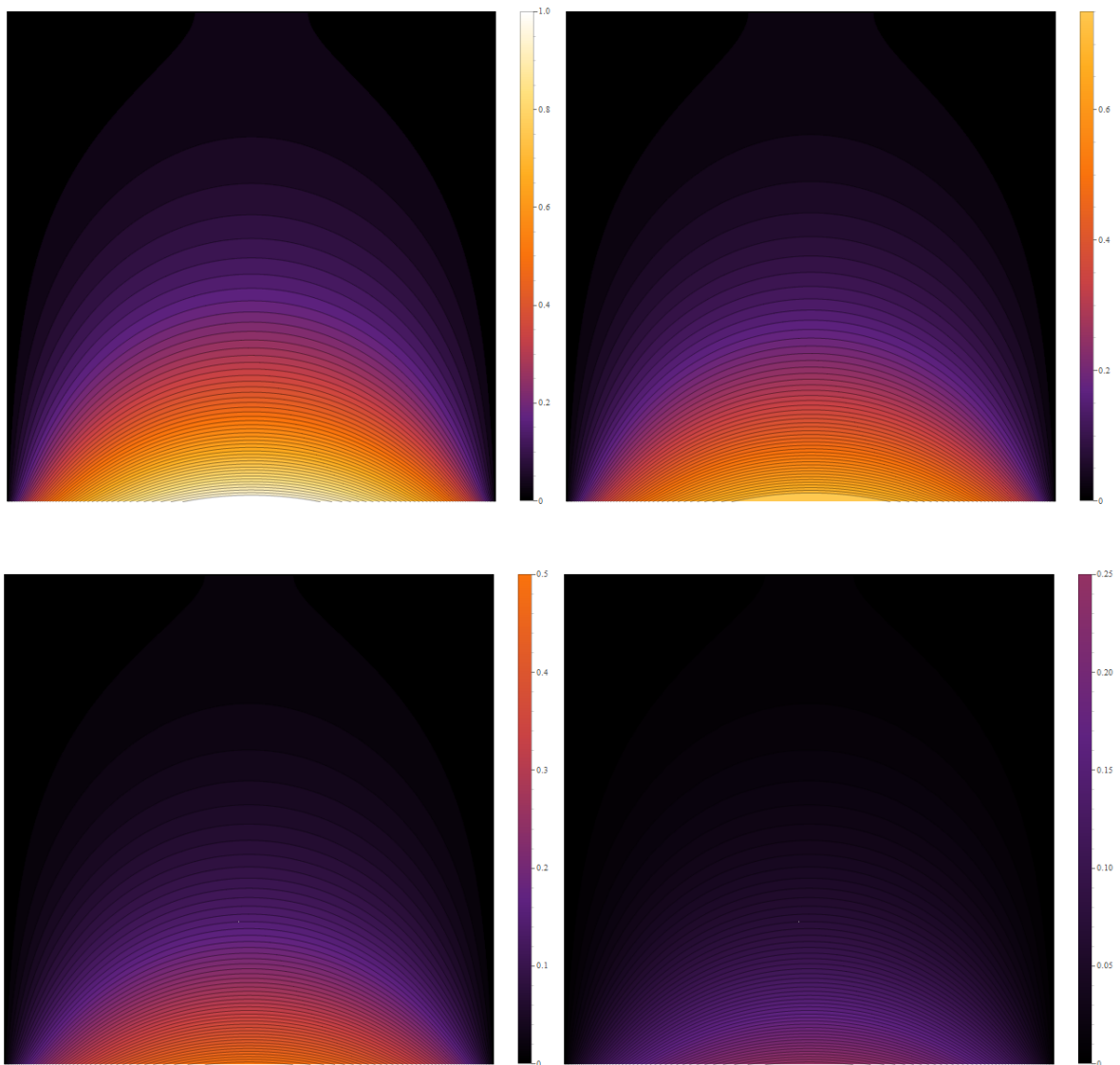
Sedaj si lahko ogledamo končni rezultat za primer, kjer je na plašču konst. temperatura 0. Spodaj je prikazan primer za mrežo  $500 \times 500$  pri  $\epsilon = 10^{-10}$  v relativni skali glede na maksimalno vrednost:



Rezultat je smiseln, imamo celo segreto spodnjo ploščo, kjer je videti prehodne pojave blizu roba. Z višino se temperatura ustrazno manjša.

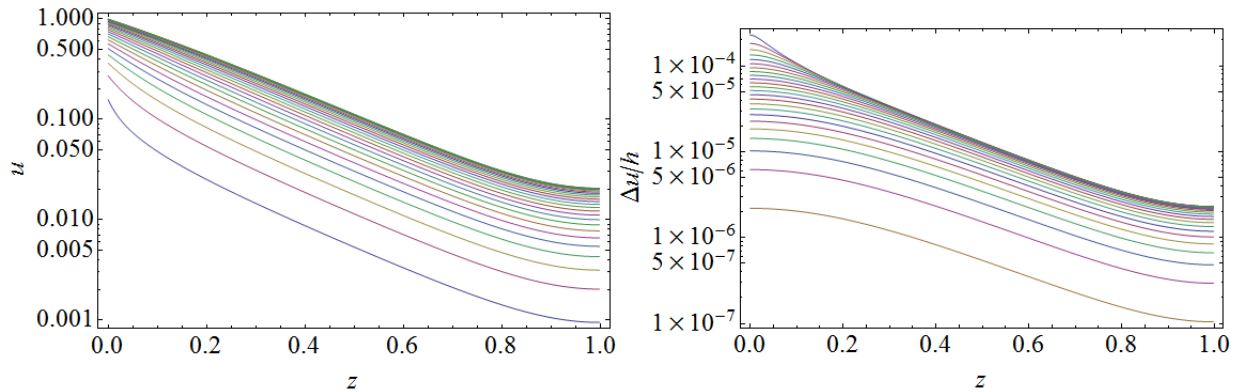


Poglejmo si še različne primere, kjer spreminjamo vrednost gradienta  $K$  glede na zgornji primer:



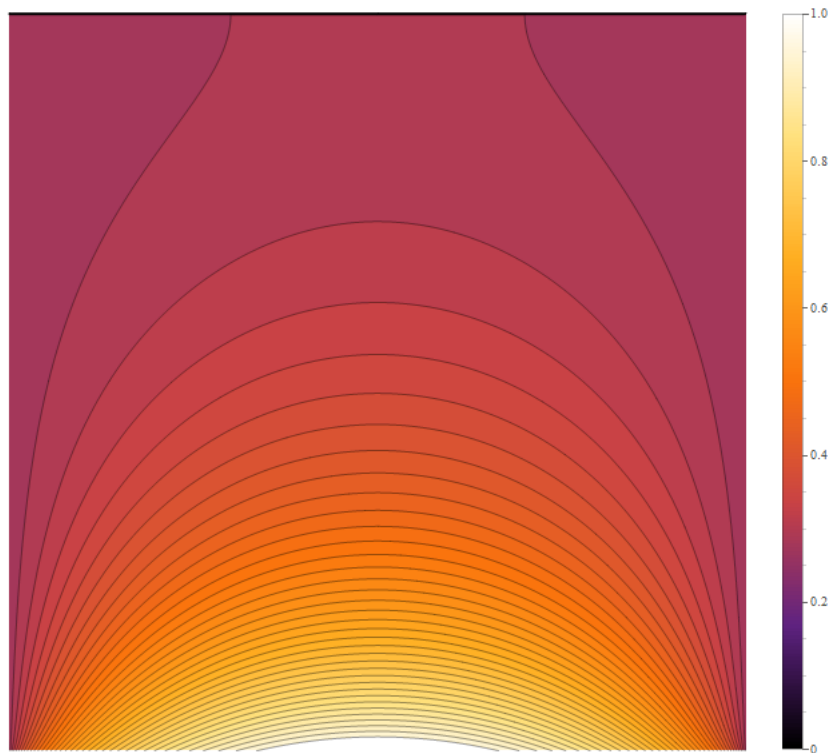
Vidimo, da se temperaturni profil spreminja ustrezno z gradientom toplotnega toka.

Zelo informativno je obnašanje temperature vzdolž koordinate  $z$  za različne vrednosti  $r$ :



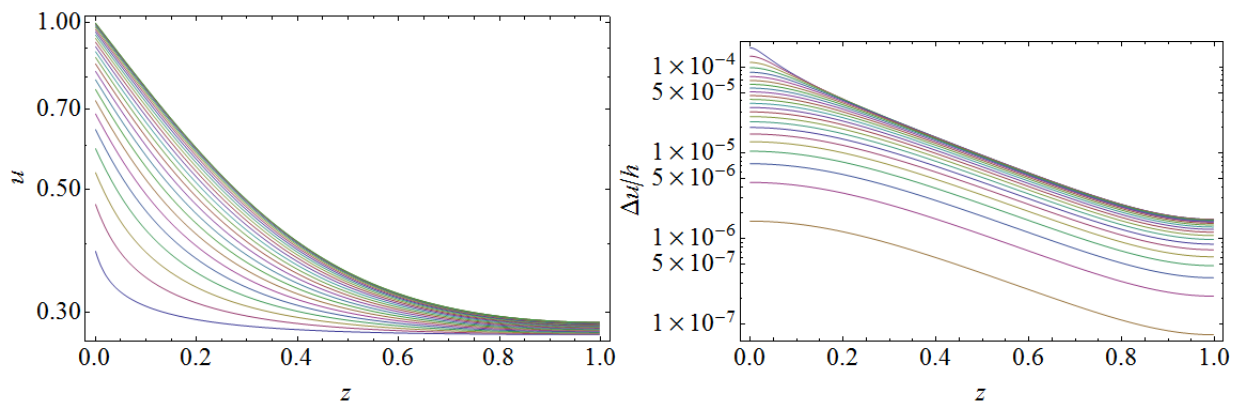
Namen obeh slik je prikaz pravilnega upoštevanja konstantnega gradienta na spodnji ploskvi in ničelnega gradienta na zgornji ploskvi. Prikazane so funkcije za  $r \in [-R/2, 0]$ , kjer višje funkcije predstavljajo  $r$  bližje ničli. Vidimo, da je začetni naklon zgornjih funkcij res povsod enaka konstanta, razen pri robu, kjer pridejo do izraza prehodni pojavi zaradi robnega pogoja plašča. Da je začetni naklon res konstanten se lahko prepričamo na desni sliki, ki prikazuje odvod temperature, in ta je enak 0. Naklon na koncu je v obeh primerih enak 0, kar je smiselno.

Poglejmo si sedaj primer, ko je temperatura na plašču še vedno konstantna, a različna od 0:



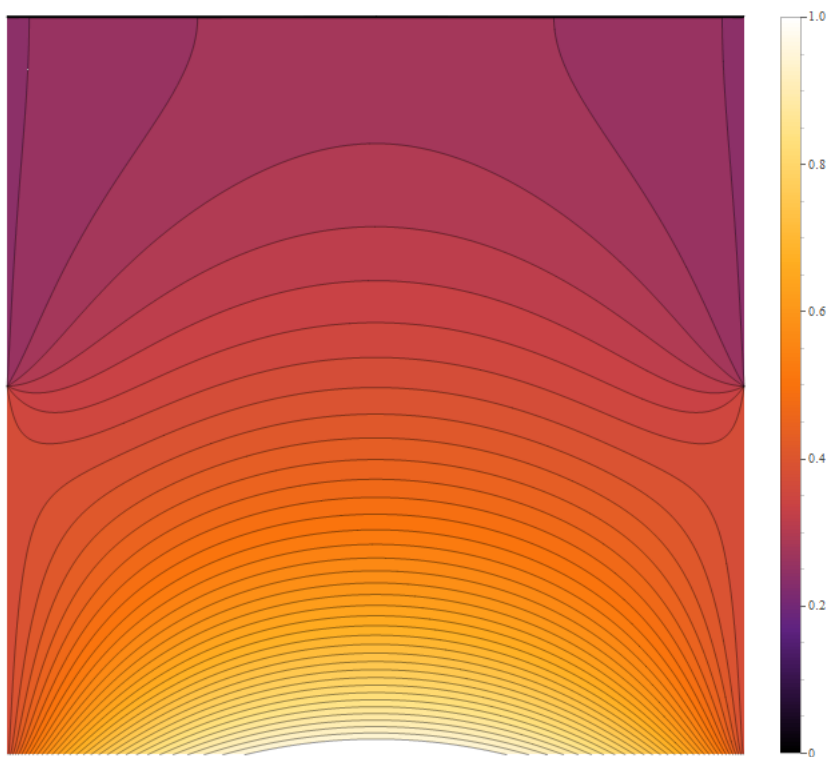
Vidimo, da se vrednost temperature po celem profilu enakomerno dvigne.

Oglejmo si še vrednosti temperatur vzdolž koordinate  $z$ :

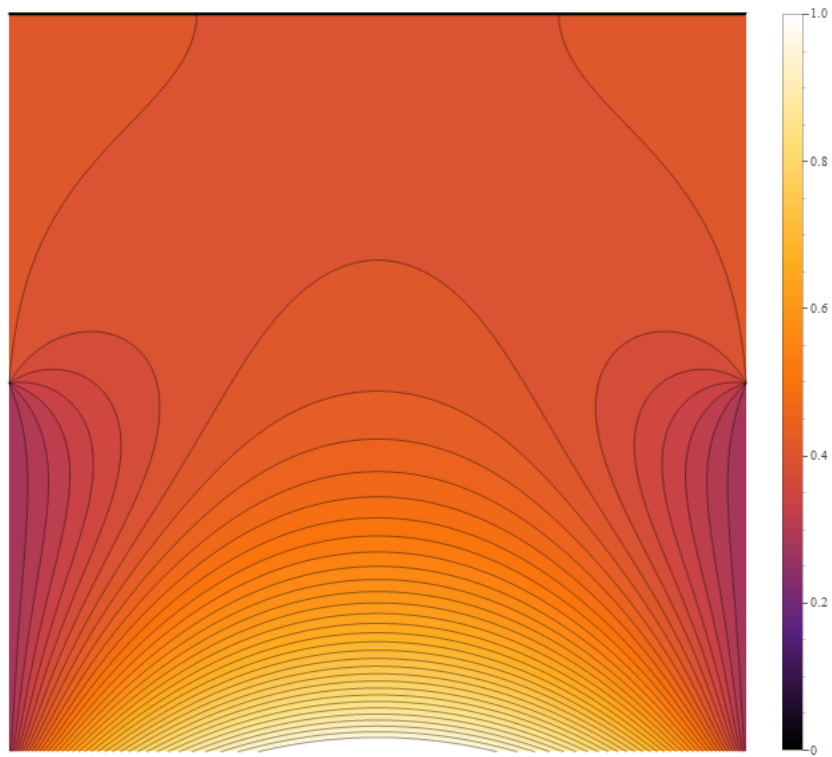


Vidimo, da je začetni naklon večji kot v prejšnjem primeru, kar se sklada z našim primerom.

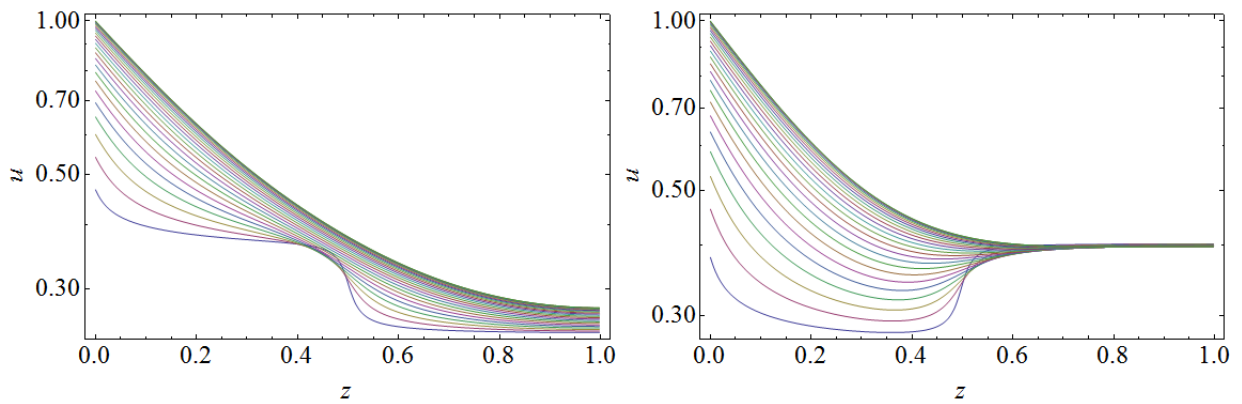
Za konec si oglejmo še primera, kjer je spodnja polovica plašča na višji temperaturi kot zgornja:



in obratno:



Opazimo zanimivo dogajanje v okolici plašča na polovični širini. Oglejmo si še vrednosti temperatur za ta dva primera:



Vidimo, da so največje spremembe seveda na robovih, kjer pri prvem primeru na robovih vrednosti temperature naenkrat upade, pri drugem pa naraste.