



Modelska Analiza 2

10. naloga – Direktno reševanje Poissonove enačbe

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 3.5.2014

Naloga:

Pri tej nalogi smo se spoznali s t.i. direktnimi metodami reševanja Poissonove enačbe. Ugotovili smo, da če lahko prevedemo problem na območje pravokotnika in ustrezne robne pogoje, se lahko poslužimo zgoraj omenjenih metod, ki so mnogo cenejše in učinkovitejše. V prvem delu naloge smo se vrnili na star problem iz 6. naloge, kjer smo iskali povse neenakomerno obtežene opne. V drugem delu naloge smo iskali temperaturni profil enakostraničnega valja, ki ima eno konstantno temperaturo na osnovnih ploskvah in drugo na plašču.

Del I

Kvadratna opna

1 Naloga

Določi povos v središču kvadratne opne, napete na vodoraven okvir, zaradi obtežbe, ki je enaka kot v 6. nalogi. Metodo lahko preizkusiš na neobteženi opni, kjer lahko uporabiš SOR, 2D FFT in 1D FFT.

2 Uvod

Relaksacijske metode so primerne za reševanje splošne enačbe eliptičnega tipa na dokaj poljubnih defini-cijskih področjih in pri dokaj splošnih robnih pogojih. Kadar pa lahko prevedemo problem na eliptično enačbo s konstantnimi koeficienti (Poissonovo enačbo) in so meje področja koordinatne črte katerega od separabilnih koordinatnih sistemov, robni pogoji pa linearni, tedaj lahko uporabimo direktne metode, ki dajo eksaktno rešitev s končnim algoritmom. Take rešitve so seveda mnogo učinkovitejše.

Osnova direktnih algoritmov je Fourierova metoda, ki jo poznamo iz Matematične fizike. Metoda reši enačbo $\nabla^2 u(x, y) = g(x, y)$ v frekvenčnem prostoru. Za pravokotnik z robovoma a in b ter z robnimi pogoji I. vrste se rešitev glasi:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \sum A^{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b}, \\g(x, y) &= \sum B^{mn} \sin \frac{\pi mx}{a} \sin \frac{\pi ny}{b},\end{aligned}$$

$$A^{mn} = -B^{mn}/k_{mn}^2, \quad k_{mn}^2 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2).$$

Pri numeričnem reševanju seveda uporabimo algoritem FFT. Za običajni razvoj FFT v eksponentne valove moramo območje sicer v obeh smereh liho podaljšati, da vzpostavimo periodične robne pogoje. Zato je ceneje uporabiti hitro sinusno transformacijo:

$$G^{mn} = \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{l=1}^{L-1} g_{jl} \sin \frac{\pi mj}{J} \sin \frac{\pi nl}{L}.$$

Transformiranka rešitve se potem dobi kot:

$$U^{mn} = \frac{h^2}{2} \frac{G^{mn}}{\cos(\pi m/J) + \cos(\pi n/L) - 2},$$

rešitev sama pa z obratno transformacijo:

$$u_{jl} = \frac{2}{J} \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{J-1} \sum_{n=1}^{L-1} U^{mn} \sin \frac{\pi mj}{J} \sin \frac{\pi nl}{L}.$$

Za učinkovitost metode dvodimenzionalna FFT pravzaprav ni potrebna. Če opravimo FFT v eni smeri, nam za delne transformiranke U_j^m preostane v vsakem stolpcu tridiagonalni sistem enačb, ki ga znamo rešiti z zahtevnostjo reda J . Sledi:

$$U_{l-1}^m - U_l^m(4 - 2 \cos(\pi m/J)) + U_{l+1}^m = h^2 G_l^m, \quad m = 1, 2, \dots, (J-1).$$

3 Reševanje

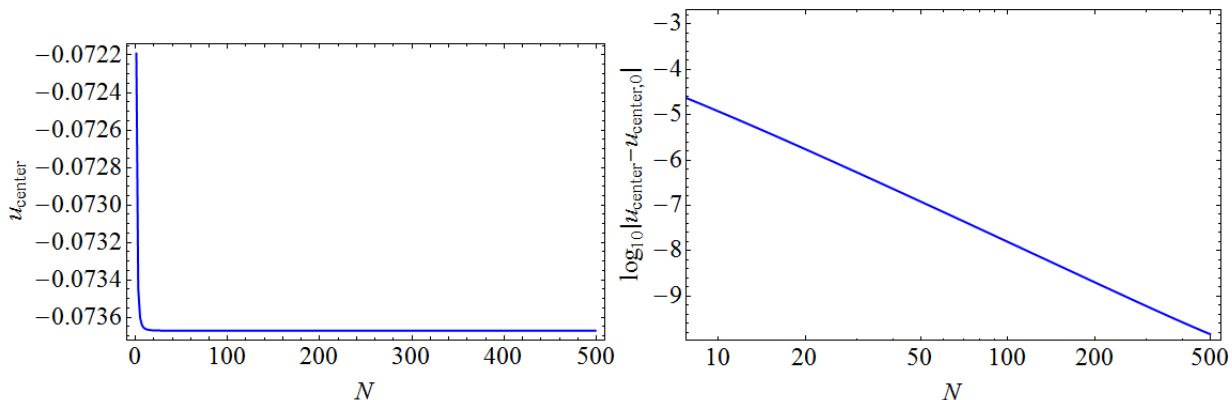
Reševanja sem se lotil v matematičnem orodju Matlab, kjer sem uporabil funkcijo `dst`, ki napravi diskretno sinusno transformacijo na vektorju, če pa vstavimo matriko, naredi to operacijo po stolpcih. Rešitve sem primerjal z analitično rešitvijo, ki jo že dobro poznamo preko enačb:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_{2k+1,2l+1} g_{2k+1,2l+1}(x, y)}{c_{2k+1,2l+1}^2}, \\ g_{k,l}(x, y) &= \sin(\pi kx/a) \sin(\pi ly/a), \\ A_{k,l} &= \frac{16}{\pi^2 kl}, \\ c_{k,l}^2 &= (k^2 + l^2) \pi^2 / a^2. \end{aligned}$$

V vseh primerih sem vzel vrednost $a = 1$.

4 Rezultati

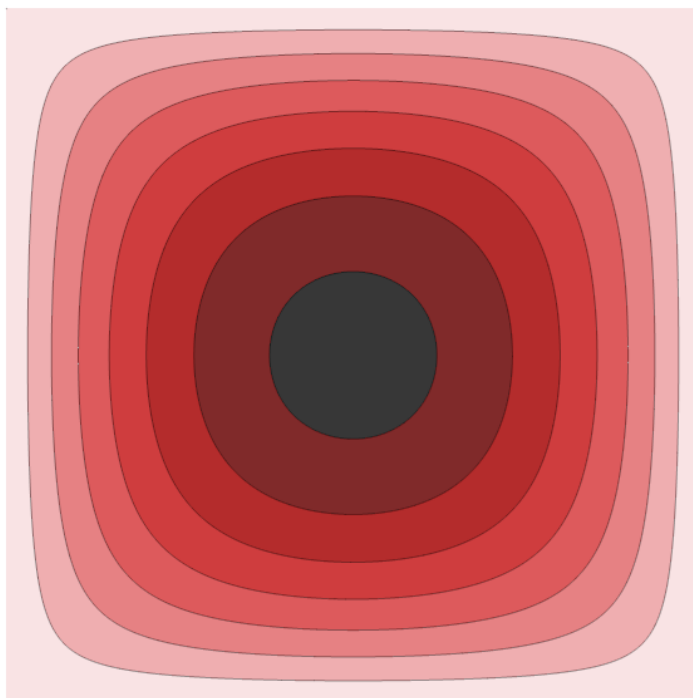
Najprej sem si ogledal, kolikšno število členov v zgornji vsoti je potrebno, da naš analitičen rezultat doseže zadovoljivo natančnost. Temu primerno si oglejmo konvergenco povesa v središču kvadratne enakomerno obtežene opne:



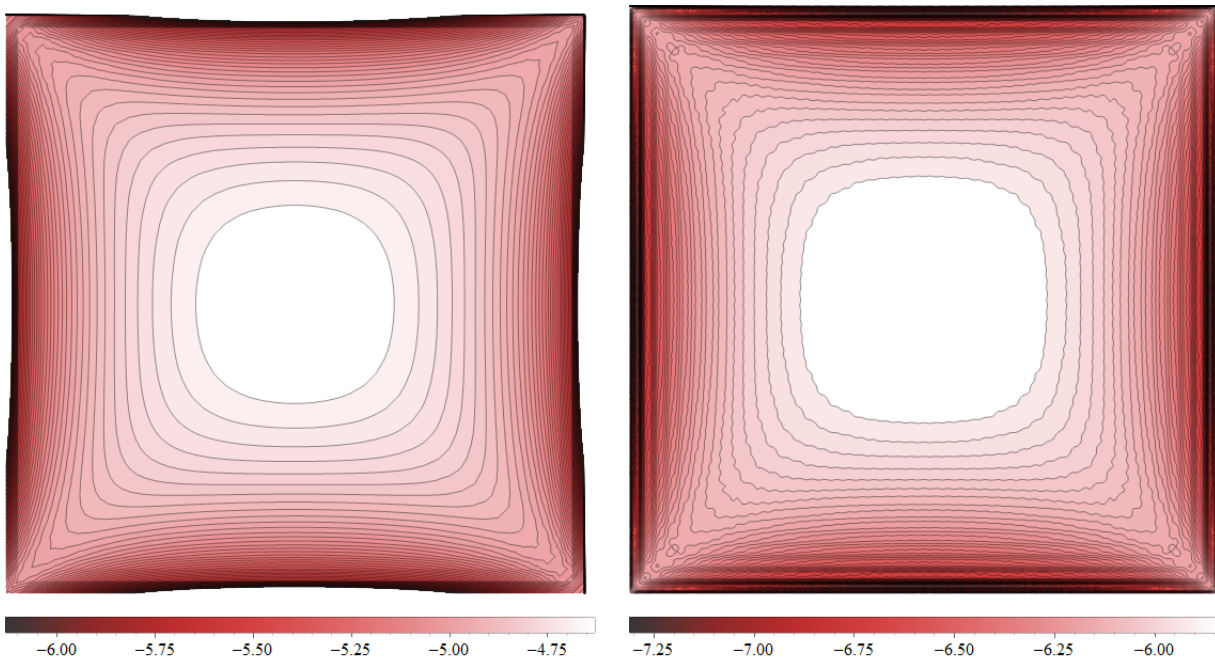
Na levi sliki vidimo, da vrednost povesa hitro skonvergira, vendar pravo sliko prikaže desni graf. z izbiro 150 členov v vsoti v obeh smereh napravimo optimalno izbiro med natančnostjo in hitrostjo izračunov. Vrednost povesa opne pri 5000 členih vsote je:

$$u(0.5, 0.5) = -0.07367135328.$$

Oglejmo si rešitev, ki jo narišemo z metodo 2D FFT pri 1000 točkah v eni smeri:

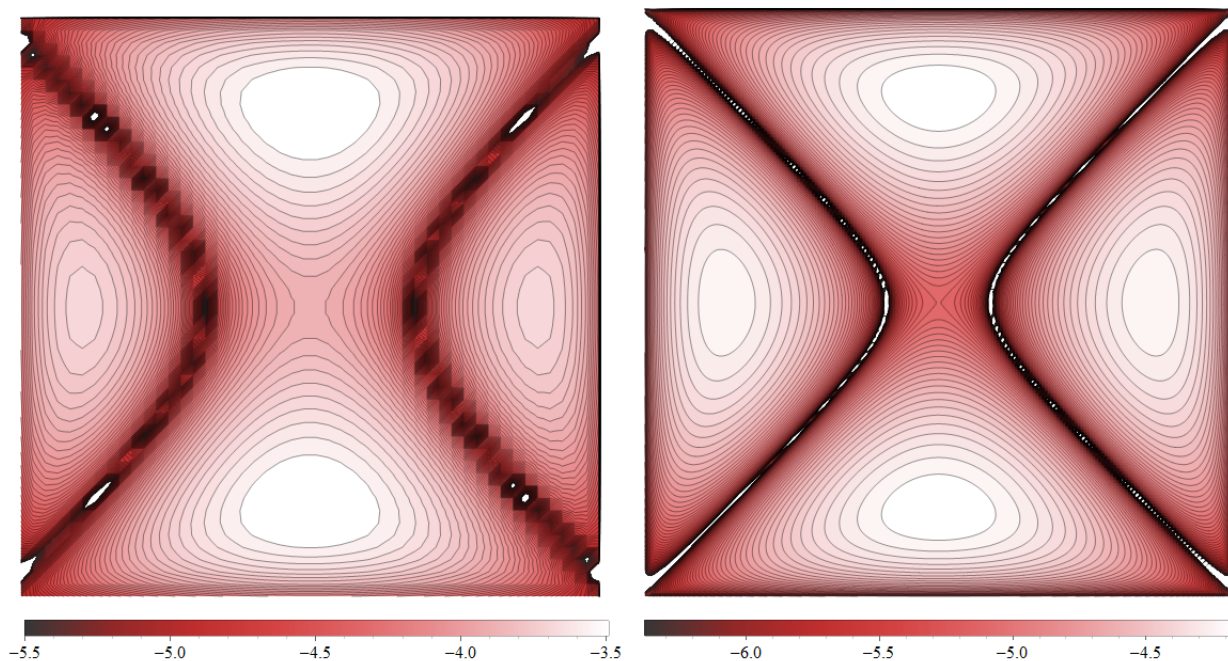


Dobimo rešitev, ki jo že dobro poznamo, tako da iz tega vidika ne izvemo nič novega. Raje se posvetimo napakam:



Leva slika prikazuje napako rešitve, dobljeno z metodo 2D FFT, na mreži velikosti 50×50 , desna slika pa na mreži velikosti 200×200 . Po pričakovanem dobimo večjo natančnost pri finejši delitvi, dosežemo pa natančnosti na okoli 6 decimalnih mest. Opazimo, da imamo na robovih večjo natančnost kot v sredini.

Rešitev lahko dobimo tudi že na prej omenjen način, s kombinacijo 1D FFT in rešitvijo tridiagonalnega matričnega sistema. Oglejmo si napako še v tem primeru:



Vidimo, da izbira metode vpliva na obliko napake. Simetrija zgornje slike ustreza uporabljeni metodi. V tem primeru bi lahko naredili FFT tudi v drugi smer, saj imamo v obeh smereh kartezičen operator ∇^2 , dobili pa bi transponirano sliko.

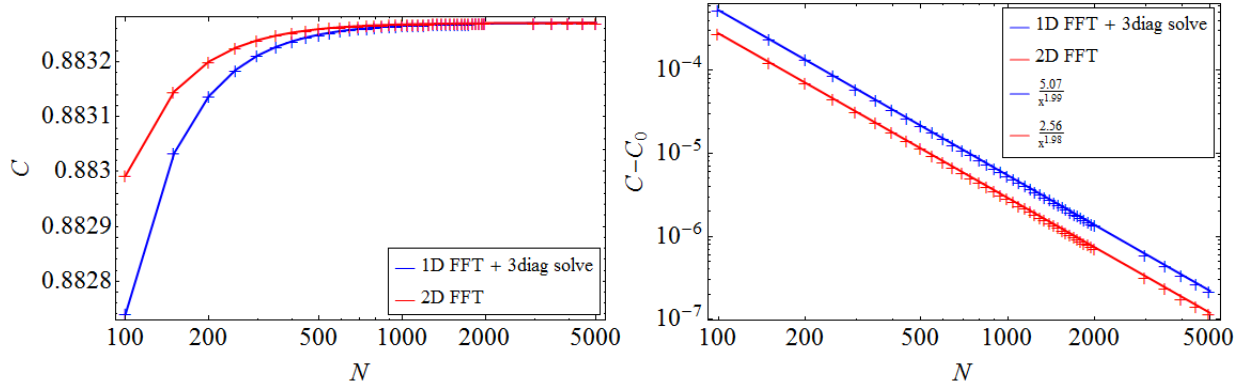
5 Poiseuillov koeficient in čas izračuna

Že v prejšnjih nalogah smo računali Poiseuillov koeficient za poljubno cev. Spomnimo se formule:

$$C = \frac{8\pi}{S_0^2} \int u dS,$$

kjer je v našem primeru $S_0 = 1$.

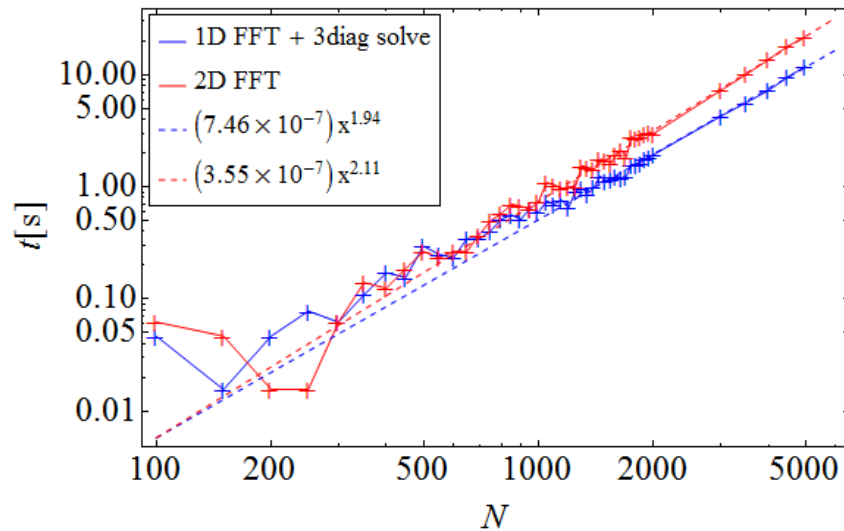
Oglejmo si konvergenco koeficienta za primer obeh metod:



Opazimo, da je metoda 2D FFT učinkovitejša, saj proti končni vrednosti konvergira hitreje. Oblika konvergence je potenčna, in sicer s potenco -2. Izračune koeficienta sem primerjal z natančnejšo vrednostjo, ki sem jo našel na spletu:

$$C_\square = 0.883271435.$$

Oglejmo si še časovno porabo algoritmov:



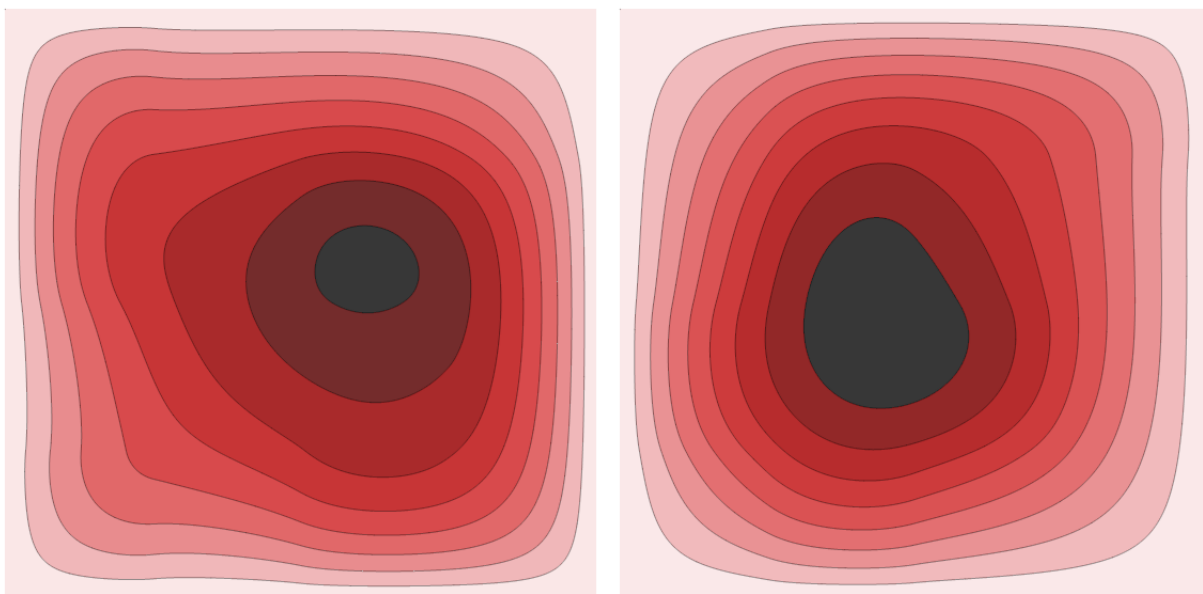
Tudi časovna poraba ima potenčno obliko s potenco približno 2. Časovna poraba algoritma 1D FFT + matrični sistem je zelo odvisna od implementacije, saj pri večjih vrednostih N lahko naredimo veliko razliko, če uporabljamo sparse matrike, vendar bi naklon zgornjih funkcij moral ostati kljub temu enak.

6 Poves v središču obtežene opne

Oglejmo si zdaj rezultate, ki nas pri tej nalogi zanimajo. Iščemo torej poves neenakomerno obtežene opne naslednje oblike:

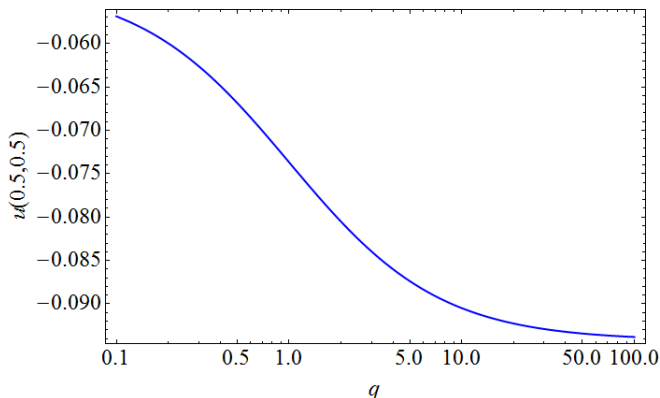


Oglejmo si obliko opne v primeru, ko je območje črke „f“ $\times 4$ lažje in $\times 4$ težje:



Opazimo, da je v primeru, ko je območje črke lažje, poves najnižji v tisti točki, kjer je težji del opne najbolj v sredini, kar tudi pričakujemo. To je seveda nad prečno črto črke „f“. Obratno vidimo, da če je črka težja od preostalega dela opne, imamo najnižjo poves okoli „križa“ v črki.

Oglejmo si, kako se spreminja vrednost najnižje točke povesa, v odvisnosti od razmerja gostot opne na območju črke „f“ in izven nje, kjer držimo maso celotne opne konstantno:



Vidimo, da se na začetku, ko je opna na območju črke lažja, vrednost povesa zelo spreminja, nato pa začne upočasnjevati in konvergirati proti neki konstantni vrednosti. Za lažjo predstavo prilagam tudi animacijo, ki opiše zgornje dogajanje:

<https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/poves.gif>

Del II

Temperaturni profil

1 Naloga

Enakostranični kovinski valj ($2r = h$) hladimo na zgornji in spodnji ploskvi na stalno temperaturo T_1 , plašč valja pa na višjo temperaturo T_2 . Določi temperaturni profil.

2 Reševanje

V tem delu naloge se potek reševanja nekoliko spremeni. Kot vemo, operator ∇^2 v cilindričnih koordinatah nima več prave oblike, da bi lahko uporabili 2D FFT metodo, še vedno pa se poslužimo FFT transformacije v smeri z , kjer ohranimo kartezično obliko operatorja. Pri tej nalogi torej uporabimo 1D FFT in reševanje matričnega sistema. Ko izvedemo transformacijo v smeri z , nam ostane sistem enačb:

$$\left(1 + \frac{h}{2r_i}\right) U_{i+1}^n + \left(1 - \frac{h}{2r_i}\right) U_{i-1}^n - (4 - 2 \cos(\pi n/J)) U_i^n = h^2 G_i^n.$$

Ko rešimo tak sistem enačb napravimo še obratno transformacijo.

Tudi v tem primeru lahko problem rešimo analitično in primerjamo kvaliteto uporabljene metode. Poissonova enačba lahko zapišemo v diferencialni obliki kot:

$$\frac{1}{r} \frac{R'}{R} + \frac{R''}{R} = -\frac{Z''}{Z}.$$

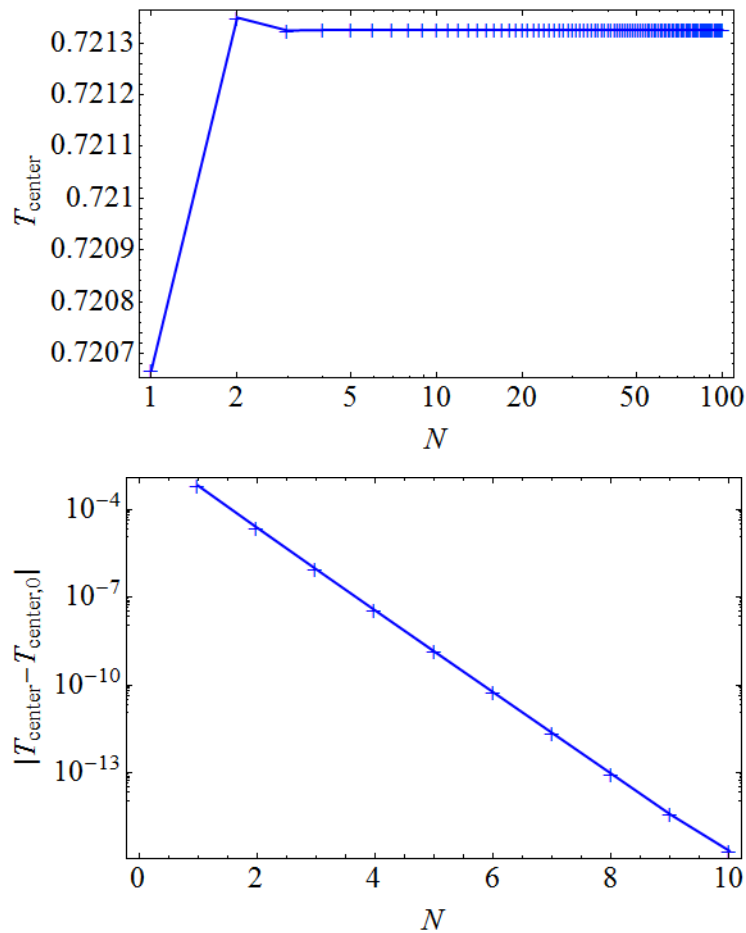
Zgornji problem rešimo s separacijo spremenljivk. Reševanje te diferencialne enačbe nas ne zanima, zato zapišimo le končno rešitev:

$$T(r, z) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{I_0(\pi(m+1/2)) (m+1/2)} I_0(\pi(2m+1)r) \sin(\pi(2m+1)z),$$

kjer je I_0 modificirana Besselova funkcija ničtega reda.

3 Rezultati

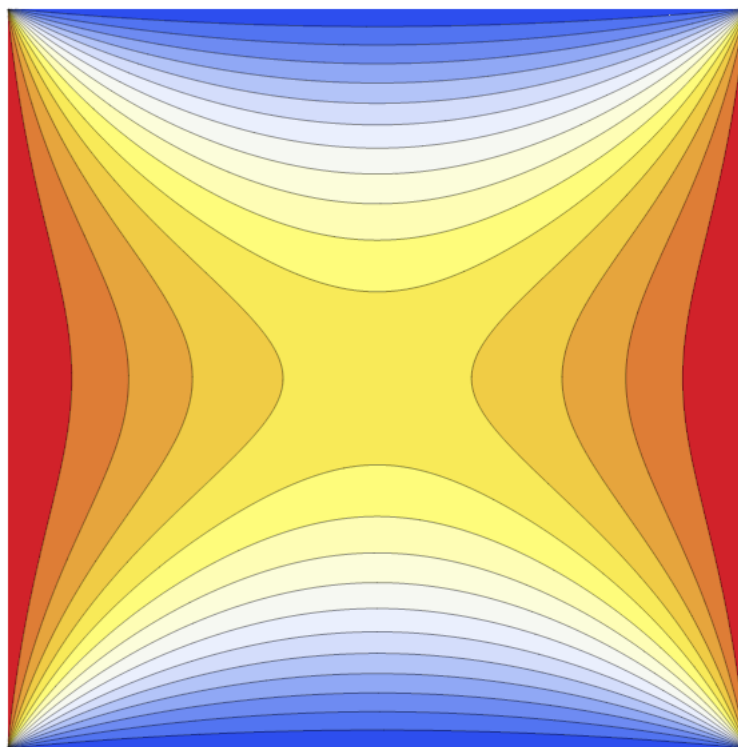
Spet si najprej oglejmo število členov v analitični rešitvi, ki je potrebno, da dosežemo željeno natančnost. Temu primerno si oglejmo vrednost temperature v središču valja v odvisnosti od števila členov v zgornji vsoti:



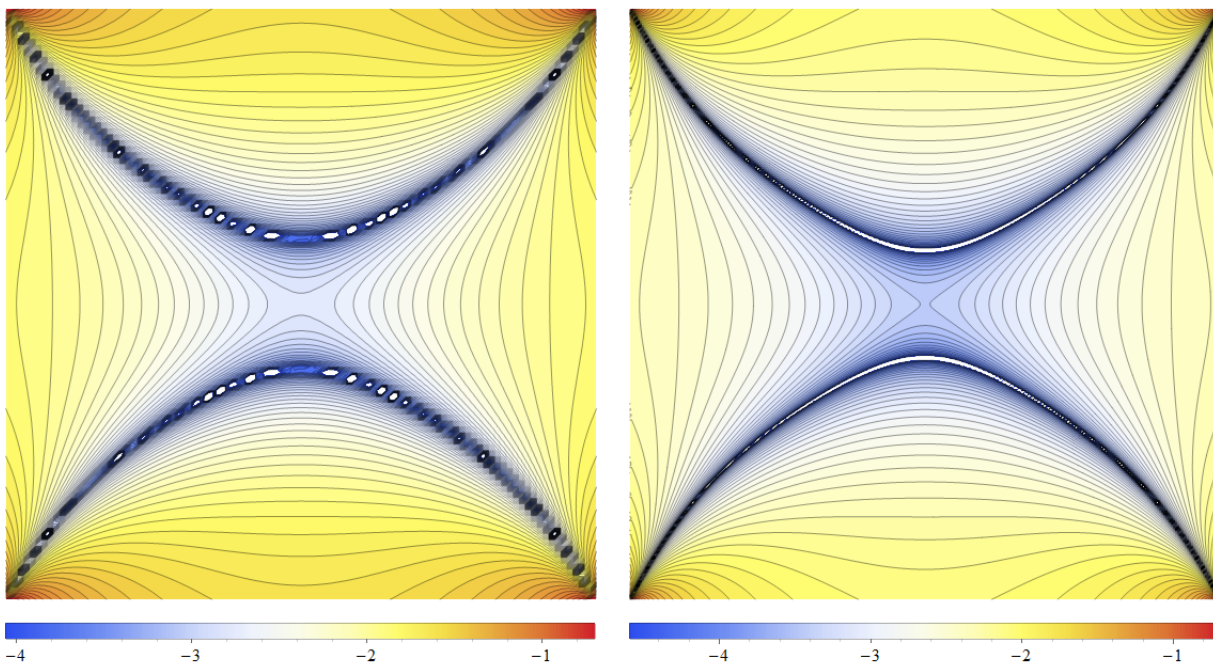
Vidimo, da vrednost že po 10 členih vsote preseže natančnost računalnika. Vrednost povesa opne pri toliko členih vsote je:

$$T(0, 0.5) = 0.721325632778052.$$

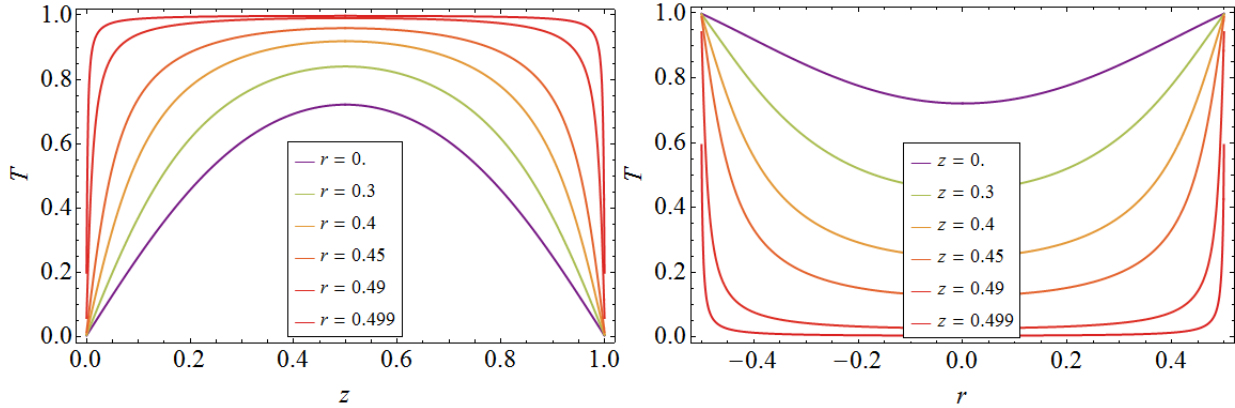
Oglejmo si rešitev, ki jo narišemo z drugo metodo pri 1000 točkah v eni smeri:



V zgornjem primeru sem vzel zgornjo in spodnjo temperaturo $T_1 = 0$ in temperaturo plašča $T_2 = 1$. Oglejmo si še napako:

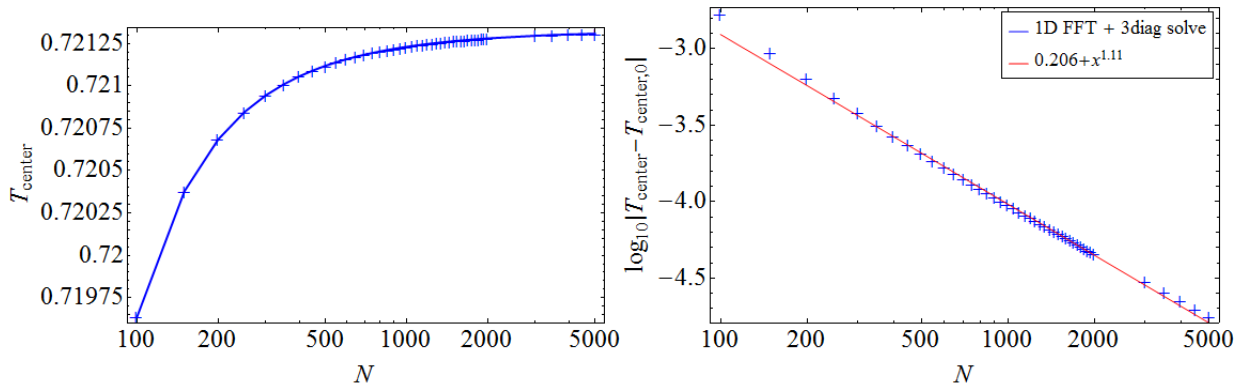


Leva slika prikazuje napako rešitve na mreži velikosti 100×100 , desna slika pa na mreži velikosti 300×300 . V tem primeru natančnost ni tako dobra v primerjavi s prejšnjim delom naloge, za kar bi lahko bila kriva napaka v kodi, ki pa je nisem uspel odkriti. Kljub temu vidimo, da je rešitev natančna na 2 do 3 decimalna mesta. Oglejmo si še vrednosti temperatur po prerezih v smeri r in z :



Vidmo, da so profili simetrični v obeh smereh, na kar mogoče ne bi ravno sklepali po obliki temperaturnega profila. Na sredini imamo zmerno spreminjanje temperature, medtem ko imamo na robovih „stiskanje“ temperaturnih črt, zaradi robov.

Za konec si oglejmo še konvergenco vrednosti temperature v centru valja, v primerjavi z analitično vrednostjo od prej:



Tu ima konvergenco potenčno obnašanje s potenco približno 1. Vidimo, da pri istem številu točk, kot v prejšnjem delu naloge, dosežemo za vsaj 3 velikostne ređe slabšo natančnost, verjetno zaradi prej omenjenih razlogov.