

University of Ljubljana
Faculty of *Mathematics and Physics*



Modelska Analiza 2

11. naloga – Gibanje neraztegljive vrvice

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 14.5.2014

Naloga:

Pri tej nalogi smo obravnavali gibanje neraztegljive vrvice v polju teže, ki je z enim koncem pritrjena na stropu in prosto niha. Dane enačbe iz navodil smo diskretizirali ter rešili tridiagonalni matrični sistem, da smo lahko določili silo tekom vrvi, ki jo potrebujemo za napoved kotov v naslednjem časovnem koraku. Nihanje vrvi sem izračunal za začetno stanje, ko je vrv ravna in odklonjena za nek kot φ_0 ter ko ima vrv na začetku obliko verižnice. Na koncu sem si ogledal še ohranjanje celotne energije vrvi in pa vpliv parametrov vrvi na stabilnost ohranjanja energije.

1 Naloga

Simuliraj gibanje vrvice, če je začetni pogoj ravna mirujoča vrvica pri $\varphi = \varphi_0$.

2 Uvod

Obravnavamo gibanje neraztegljive vrvice v polju teže. Vrvica je z enim koncem pritrjena na stropu in prosto niha. Najprej zapišemo enačbi gibanja za vrvico:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial x}{\partial s} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(F \frac{\partial y}{\partial s} \right) + 1, \quad (2)$$

kjer smo vse spremenljivke napravili brezdimenzijske in normirane tako, da smo upoštevali lastnosti vrvi. Za opis krivulje smo uporabili naravno parametrizacijo. V zgornjem primeru štejemo y os navzdol. Za neraztegljivo vrvico mora veljati še:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 = 1. \quad (3)$$

Kot že v eni od prejšnjih nalog, tudi tu uvedemo novo spremenljivko - kot naklona vrvice φ . Velje, da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= \cos \varphi, \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Na tak način dobimo avtomatsko izpolnjeno kontinuitetno enačbo (3), iz prvih dveh enačb pa dobimo zvezi:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} - F \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial F}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + F \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}. \quad (6)$$

Enačba (5) predstavlja enačbo za silo, kjer desno stran obravnavamo kot partikularni del, enačba (6) pa predstavlja enačbo za kote v novem časovnem koraku. Zapišemo lahko še robne pogoje za vrvico. Za levo strani pri $s = 0$, velja preko enačbe (1):

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \sin \varphi = 0, \quad F \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \cos \varphi = 0. \quad (7)$$

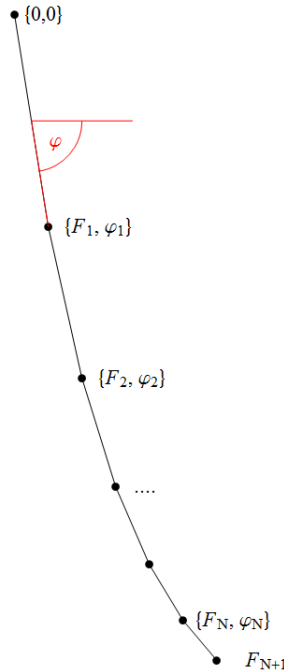
Na desni strani pri $s = 1$ pa velja, da sta sila in drugi odvod kota enak 0:

$$\begin{aligned} F &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} &= 0. \end{aligned}$$

Omeniti moramo, da je začetni pogoj ravne vrvice pri nekem kotu φ_0 nefizikalen, saj bi za takšno stanje vrvice morali vrvico napeti z neskončno silo.

3 Reševanje

Vrv sem z $N + 2$ točkami razdelil na $N + 1$ enako dolgih intervalov dolžine Δs . Kote φ in sile F sem računal v istih točkah, kot je prikazano na skici:



Vidimo, da imamo, poleg začetne točke, N kotov in $N + 1$ sil. Oglejmo si diskretizacijo zgornjih enačb. Z indeksom n sem označil diskretizacijo v času kot $t = n\Delta t$, z indeksom i pa diskretizacijo po dolžini vrvi kot $s = i\Delta s$. Enačbo za silo v (5) diskretiziramo kot:

$$\begin{aligned} \frac{F_{i+1}^n - 2F_i^n + F_{i-1}^n}{\Delta s^2} - F_i^n \left(\frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2\Delta s} \right)^2 &= - \left(\frac{\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1}}{\Delta t} \right)^2, \\ F_{i+1}^n + F_{i-1}^n - F_i^n \left(2 + \frac{1}{4} (\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n)^2 \right) &= - \frac{\Delta s^2}{\Delta t^2} (\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1})^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Za približek prvega odvoda sem vzel simetrično diferenco. Zgornji sistem rešujemo matrično, za rešitev pa dobimo vektor sil. Enačba ne velja za sile na robu vrvi, temveč le za F_i , $i \in [2, N]$. Začetni robni pogoj upoštevamo z diskretizacijo leve enačbe v (7):

$$\frac{1}{\Delta s} (F_2 - F_1) + \sin \left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) = 0. \quad (9)$$

Enačbo lahko kar dodamo v matrični sistem. Robni pogoj za silo na koncu vrvi je preprost, in sicer:

$$F_{N+1} = 0. \quad (10)$$

Tako izračunamo vektor sil preko poznanih kotov ob času t in $t - \Delta t$.

Ko imamo vektor sil, lahko izračunamo nov vektor kotov ob naslednjem času preko diskretizirane enačbe za kot v (5):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_i^{n+1} - 2\varphi_i^n + \varphi_i^{n-1}}{\Delta t^2} &= 2 \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2\Delta s} \frac{\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n}{2\Delta s} + F_i^n \frac{\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n}{\Delta s^2}, \\ \varphi_i^{n+1} &= 2\varphi_i^n - \varphi_i^{n-1} + \\ &+ \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} \left(\frac{1}{2} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) (\varphi_{i+1}^n - \varphi_{i-1}^n) + F_i^n (\varphi_{i+1}^n - 2\varphi_i^n + \varphi_{i-1}^n) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Tudi tu smo za prvi odvod uporabili simetrizirane diference. Zgornja enačba je ob poznavanju vektorja sil F preprost začetni problem. Tako kot prej, tudi ta enačba ne velja za kote na robu. Začetni robni pogoj upoštevamo z diskretizacijo desne enačbe v (7):

$$F_2 \frac{1}{2\Delta s} (\varphi_3 - \varphi_1) + \cos(\varphi_2) = 0. \quad (12)$$

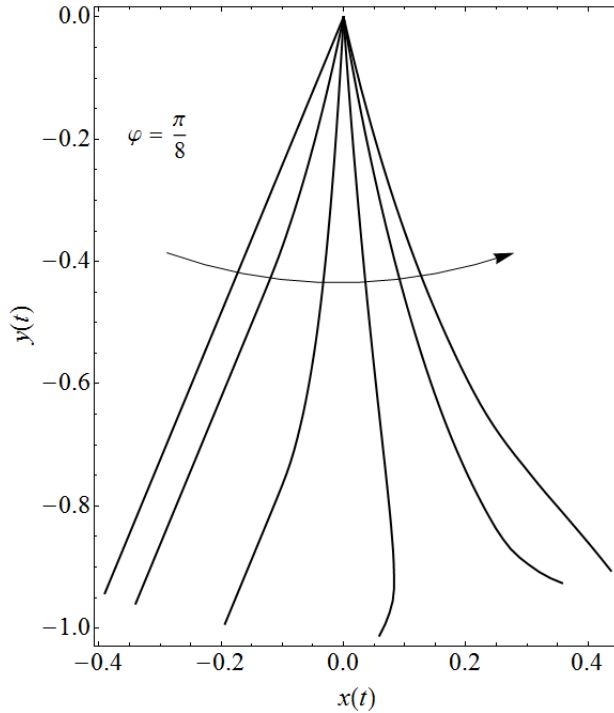
Tu smo izkoristili simetrično diferenco, da se izognemo reševanju transcendentne enačbe. Na koncu upoštevamo še robni pogoj na koncu, kjer je drugi odvod kota enak 0:

$$\varphi_N - 2\varphi_{N-1} + \varphi_{N-2} = 0.$$

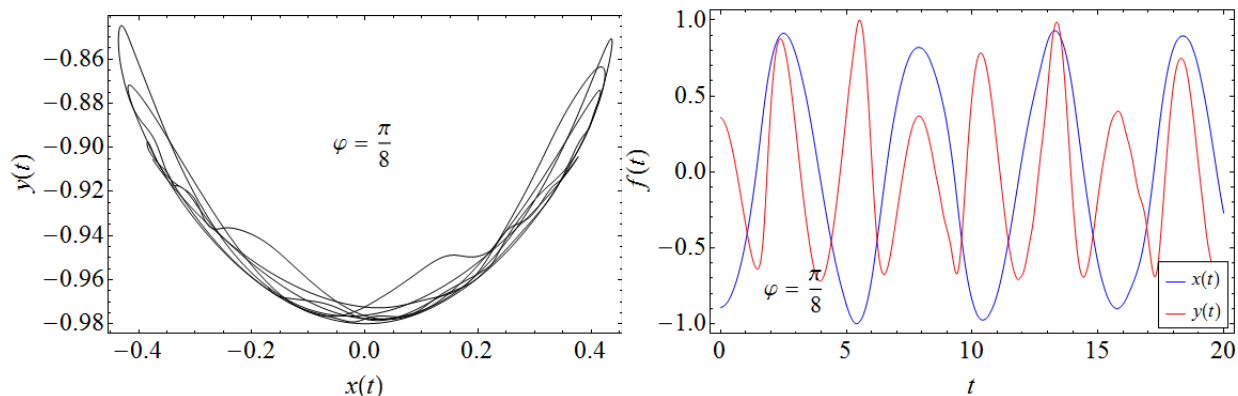
Tako smo izračunali kote v naslednjem časovnem koraku in zaključili računski postopek ene zanke, zanko pa ponavljamo do poljubnega časa, v kolikor rešitev ne začne divergirati.

4 Rezultati

Za ravno vrstico na začetku sem naredil časovni razvoj nihanja, ki je po delih prikazan na spodnji sliki:



Vrv začne nihati, pri tem pa se zvija, kot ji narekuje sila. Zgornji primer prikazuje animacijo vrvi pri začetnem odklonu od navpične osi $\varphi_0 = \pi/8$, številu členkov $N = 50$ in časovnem koraku $\Delta t = 5 \times 10^{-3}$. Kot zanimivost si oglejmo še pot, ki jo opiše konec vrvi, v odvisnosti od časa, ter ločeno še njegove koordinate:

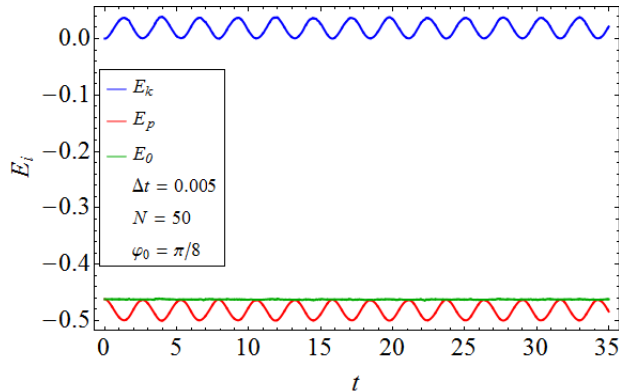


Vidimo, da je slika precej drugačna, kot če bi imeli nitno nihalo, kjer bi bila opisana pot konca vedno enaka. V povprečju vrv opisuje neko predpisano pot, hkrati pa valuje, tako da konec opiše nekakšno „vinjeno“ vožnjo. Desna slika prikazuje posamezno koordinato x in y . Opazimo podobno dogajanje kot pri navadnem nihalu, s tem, da imamo tu še valovanje vrvi.

Ogledamo si lahko še ohranjanje energije, kjer celotno energijo izračunamo kot:

$$E_0 = E_k + E_p = \int \left(\frac{1}{2} (\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2) + y(s) \right) ds.$$

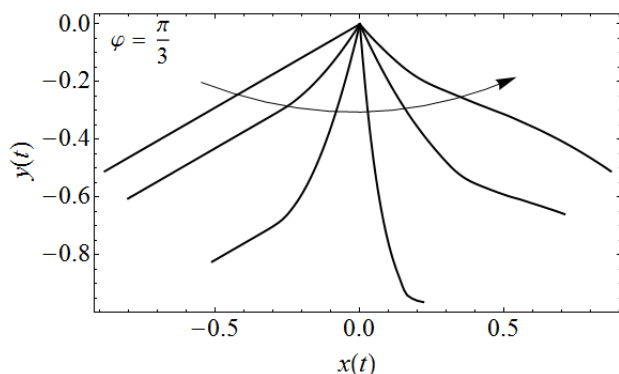
Prisotni sta kinetična in potencialna energija, katerih vsota bi morala biti konstantna:



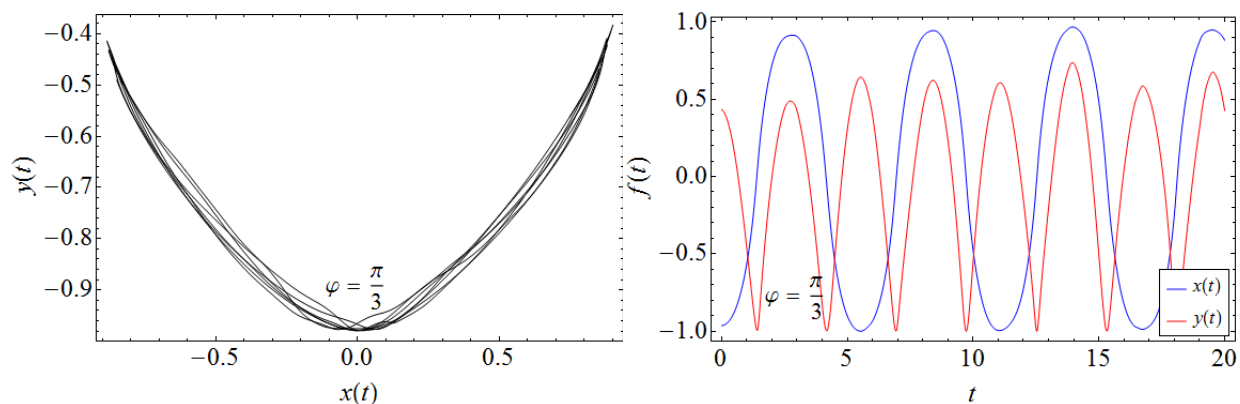
Situacija je kot pričakovana. Imamo kinetično in potencialno energijo, ki obe nihata, vsota pa je konstantna in negativna, saj je sistem vezan. Natančnost energije si bomo podrobneje ogledali kasneje. Za boljšo predstavbo prilagam še animacijo za dani primer, kjer je prikazano tudi časovno obnašanje sile:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/vrv_fi_pi_8.gif

Oglejmo si še zgoraj prikazane količine pri nekoliko večjem začetnem odkliku $\varphi = \pi/3$:



Vidimo, da je odklon v tem primeru ustrezno večji, nihanje pa bolj „divje“. Oglejmo si še pot, ki jo opiše konec:



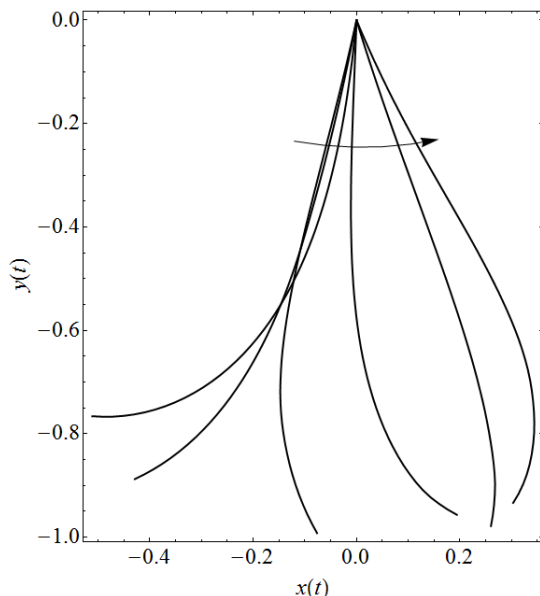
Tu vidimo, da opisana pot ni več podobna krožnici. Situacija je podobna gunganju na gugalnici, ki je pripeta z vrvjo in ne z železnimi palicami, kjer pri velikih odklikih sila povzroči, da se začnemo gibati v smeri proti osi vrtenja, in ne le pravokotno na njo, kar je sicer nekoliko neprijetna izkušnja. Na desni strani zdaj tudi oblika funkcije ni več sinusna, kot je bila prej, čeprav popačena, kar je pri velikih odklikih tudi pričakovano.

Tudi tu prilagam zraven še animacijo za boljšo predstavbo:

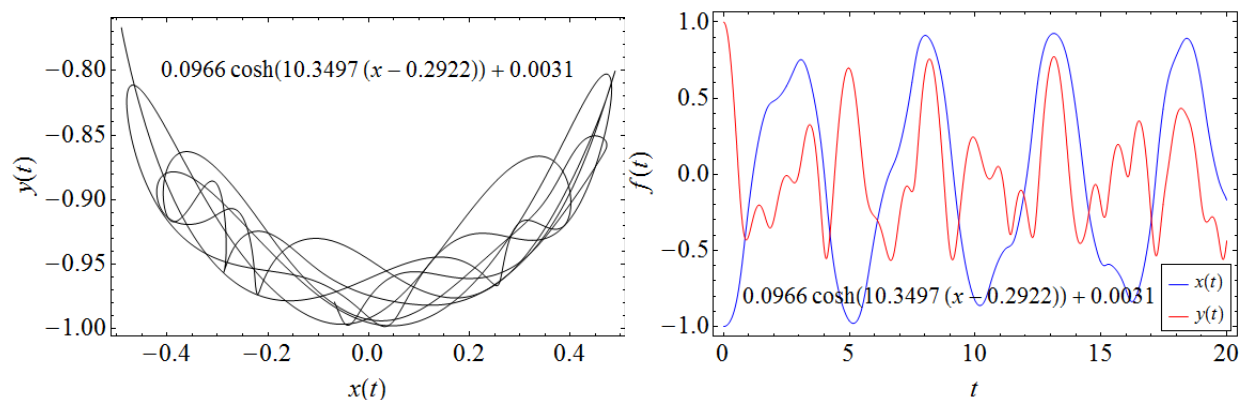
https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/vrv_fi_pi_3.gif

5 Verižnica

Kot smo omenili, je začetno stanje ravne vrvice nekoliko nefizikalno, saj jo v teoriji napenja neskončna sila. Bolj realna situacija je oblika verižnice. Oglejmo si primer, kjer zanihamo vrh iz takšne pozicije, kjer vrh ni v celoti napeta:



Tudi v tem primeru je nihanje precej divje in predvsn nekonstantno, saj se en konec vrvi giblje drugače kot drug del. Oglejmo si še pot, ki jo opiše konec:



Iz leve slike ne znamo razbrati pametnih informacij, opisana pot konca vrvi ima v tem primeru le estetski pomen, saj o periodičnosti gibanja ne moremo veliko sklepati. To pa ne drži za desno sliko, kjer se da periodo nihanja lepo razbrati. Tudi tu prilagam zraven še animacijo za boljše predstavo:

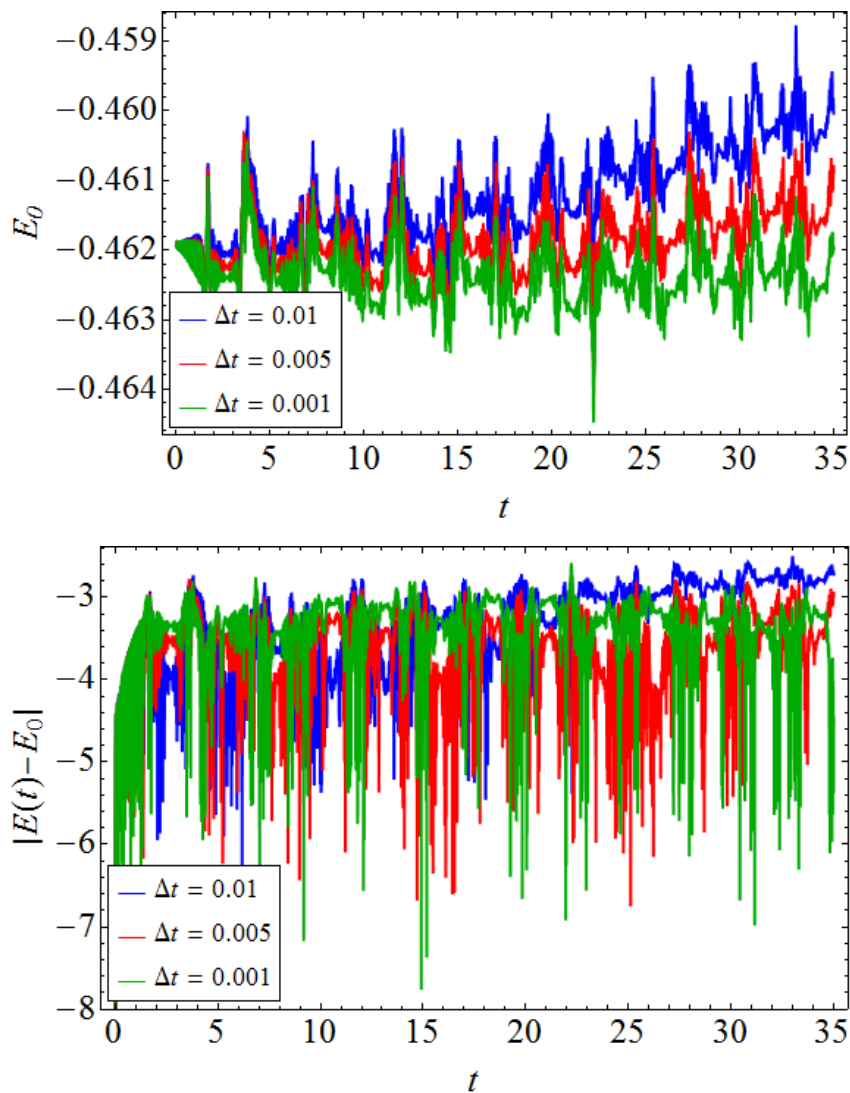
https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/vrv_veriga.gif

Kot zanimivost prilagam še animacijo, kjer je začetno stanje verižnice preveč ekstremno in se stabilnost računanja poruši:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/vrv_veriga_bad.gif

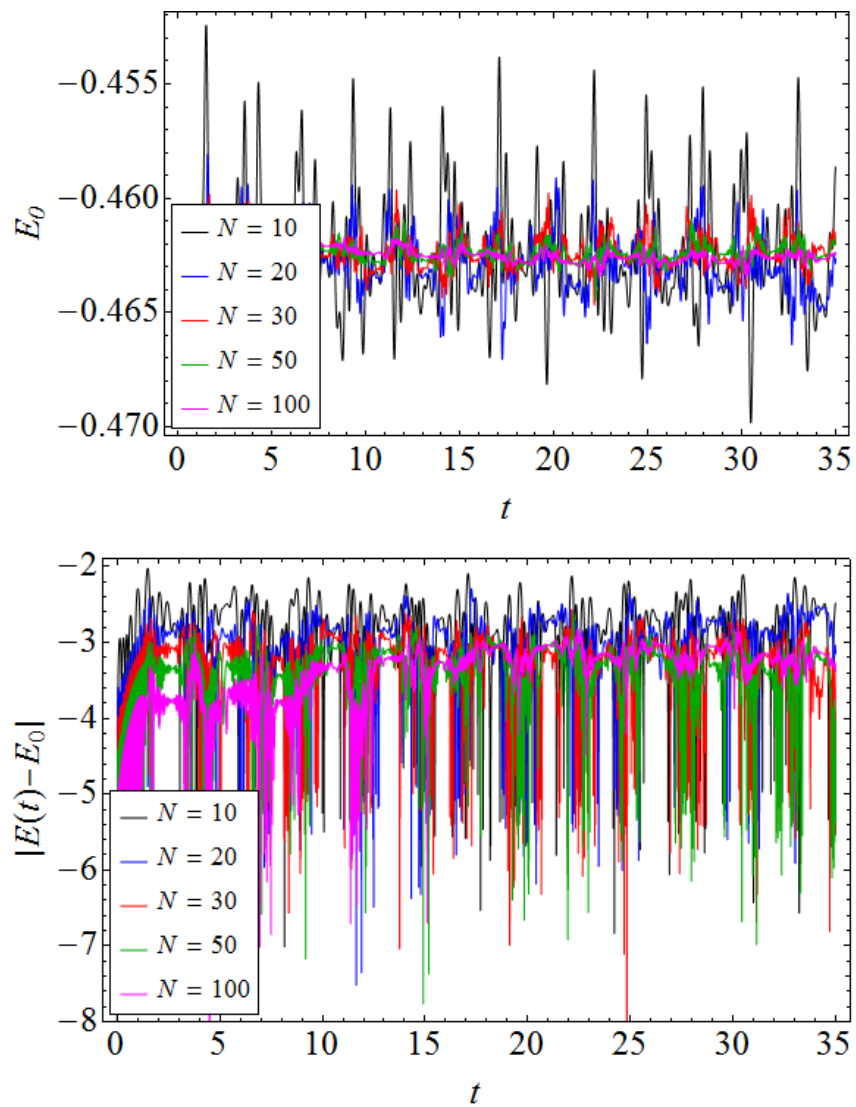
6 Vpliv parametrov na ohranjanje energije

V tem razdelku si bomo ogledali, kako časovni korak, število členov in izbira začetnega kota vpliva na ohranjanje energije skozi čas. Najprej si oglejmo vpliv izbire časovnega koraka, kjer sem izbral časovne korake $\Delta t \in [10^{-2}, 5 \times 10^{-3}, 10^{-3}]$:



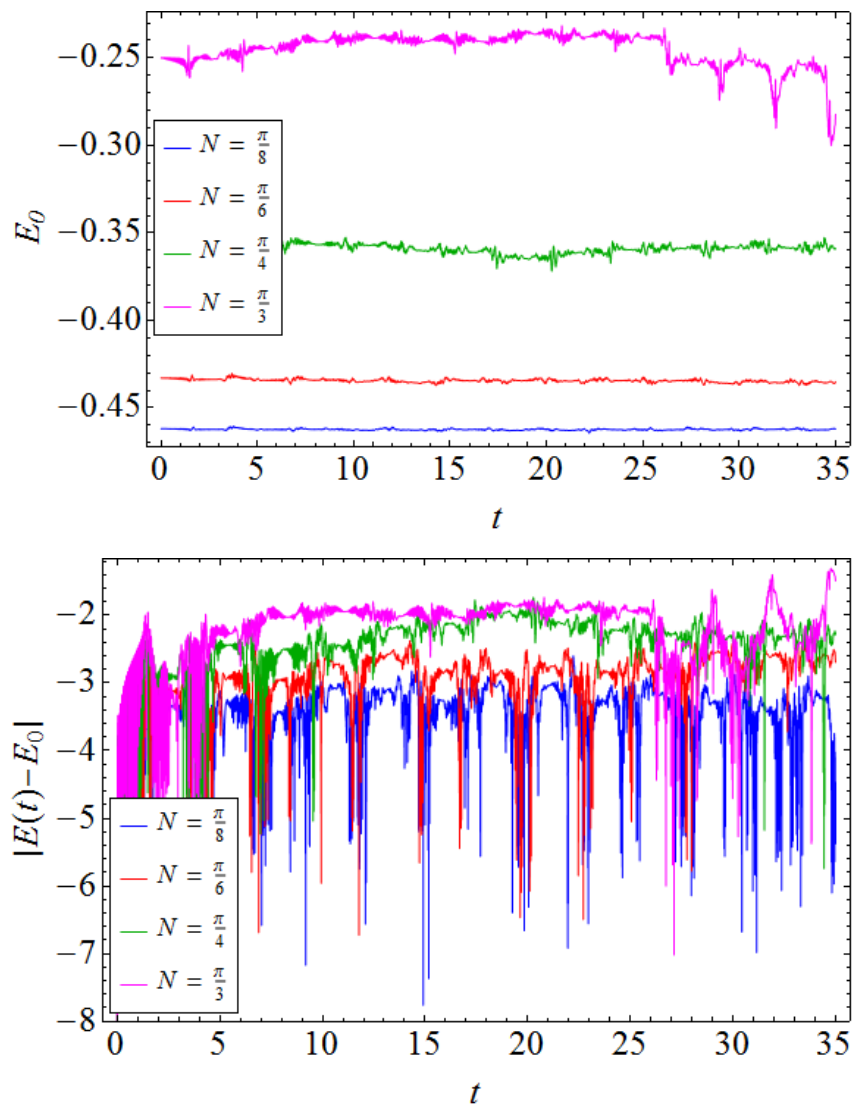
Leva slika prikazuje energijo v odvisnosti od časa. Vidimo, da večji časovni korak povzroči naraščanje energije skozi čas, kar je seveda posledica akumulacije numerične napake. Desna slika prikazuje odmik od začetne vrednosti energije v logaritmski skali. Vidimo, da se natančnosti giblje nekje na 3 decimalnih mestih, potem pa s časom narašča, še sploh tam, kjer imamo večji časovni korak.

Oglejmo si še vpliv števila členkov v vrvi, kjer sem izbral med števili členkov $N \in [10, 20, 30, 50, 100]$:



Na levi sliki vidimo, da so fluktuacije energije precej nižje pri večjem številu členkov, tako da lahko ponekod v nekem časovnem obdobju dosežemo natančnost tudi na 4 decimalna mesta.

Za konec si oglejmo še vpliv začetne kota, kjer sem izbral med koti $\varphi_0 \in [\pi/8, \pi/6, \pi/4, \pi/3]$:



Tokrat dobimo seveda različne energije, saj spustimo vrv iz višje začetne lege. Opazimo, da se pri večjih začetnih odklonih numerična napaka hitreje akumulira, zato je pri teh začetnih stanjih natančnost slabša.