

University of *Ljubljana*
Faculty of *Mathematics and Physics*



Modelska Analiza 2

12. naloga – Navier-Stokesov sistem

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 28.5.2014

Naloga:

Pri tej nalogi smo se spoznali z Navier-Stokesovo enačbo za tekočine. Obravnavali smo vsiljeni tok viskozne tekočine v kvadratni votlini, kjer smo poganjali eno ali več sten v neki smeri. Opazovali smo rešitev v odvisnosti od časa in od Reynoldsovega števila. Izračunali smo silo na pokrov in si ogledali še razne zanimive animacije.

1 Naloga

Eden od standardnih problemov za testiranje računskih shem za Navier-Stokesov sistem je vsiljeni tok v votlini (driven cavity). Viskozno tekočino v dolgi posodi s kvadratnim presekom poganjamo tako, da s stalno hitrostjo vlečemo pokrov posode. pri večjih Reynoldsovih številih opazimo poleg glavnega še stranske vrtnice v nasprotni smeri. Določi hitrostni profil in silo na pokrov v odvisnosti od Re .

2 Uvod

Gibanje nestisljive tekočine v 2D opisuje sistem enačb v brezdimenzijskih spremenljivkah $\mathbf{v}/v_0 = (u, v)$, $\mathbf{r}/a = (x, y)$, $p/\rho v_0^2 \rightarrow p$ in $Re = a\rho v_0/\eta$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uv}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial uv}{\partial x} - \frac{\partial v^2}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0.\end{aligned}$$

Računsko je najpreprostejša metoda z vrtničnostjo $\zeta = -(\nabla \times \mathbf{v})_z = \partial u/\partial y - \partial v/\partial x$, ki ima v 2D problemih eno samo komponento. Gibalno enačbo za ζ dobimo tako, da na Navier-Stokesovi enačbi uporabimo operacijo rotorja:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \frac{\partial (v\zeta)}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (1)$$

Znebili smo se spremenljivke p .

Hitrostno polje dobimo iz tokovne funkcije, $\mathbf{v} = \nabla \times \psi$, ki ima spet eno samo komponento. Velja $u = \partial\psi/\partial y$ in $v = -\partial\psi/\partial x$. Tokovna funkcija je z vrtničnostjo povezana s Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \psi = \zeta.$$

Reševanje poteka po eksplicitni shemi. Časovni korak omejijo s pogojem $\Delta t < 0.4\Delta x/v_{max}$. Za ψ velja v Poissonovi enačbi robni pogoj prve vrste, s čimer je zagotovljeno, da ni hitrosti v steno. Ker mora biti tudi tangentska hitrost ob steni enaka hitrosti stene, bi moral za ψ istočasno veljati še robni pogoj druge vrste. Iz njega izpeljemo robni pogoj za vrtničnost, ki svojih pogojev nima. V najnižjem redu dobimo za vrednost na desni togi steni:

$$\zeta_{i,j} = \frac{2}{(\Delta x)^2} (\psi_{i-1,j} - v_{stene}\Delta x).$$

Ena od količin, ki si jih lahko tudi ogledamo, je sila tekočina na pokrov v odvisnosti od Re . Sio na pokrov izračunamo preko integracije viskoznega tenzorja \mathbf{p} po zgornjem robu posode. Ker nas zanima samo sila v x smeri, potrebujemo le komponento:

$$p_{xy} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Drugi člen je v našem primeru enak 0 in ga lahko izpustimo. Brezdimenzijska sila na pokrov je potem podana z:

$$F_x = \frac{1}{Re} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} dx \approx \frac{1}{Re} \sum_i (u_s - u(x_i, y_{max} - \Delta y)).$$

3 Reševanje

Numeričen postopek reševanja je sestavljen iz več korakov. V prvem koraku nastavimo začetne pogoje, potem pa izvršujemo časovno zanko, kjer izvajamo naslednje korake:

1. Iz hitrosti u_t in v_t ter iz trenutne vrtinčnosti ζ_t določimo vrtinčnost ob novem času $\zeta_{t+\Delta t}$ preko diferencialne oblike enačbe (1):

$$\begin{aligned} \zeta_{i,j}^{t+\Delta t} &= \zeta_{i,j}^t - \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1,j} \zeta_{i+1,j} - u_{i-1,j} \zeta_{i-1,j} + v_{i,j+1} \zeta_{i,j+1} - v_{i,j-1} \zeta_{i,j-1} - \\ &\quad - \frac{1}{Reh} (\zeta_{i+1,j} + \zeta_{i-1,j} + \zeta_{i,j+1} + \zeta_{i,j-1} - 4\zeta_{i,j})). \end{aligned}$$

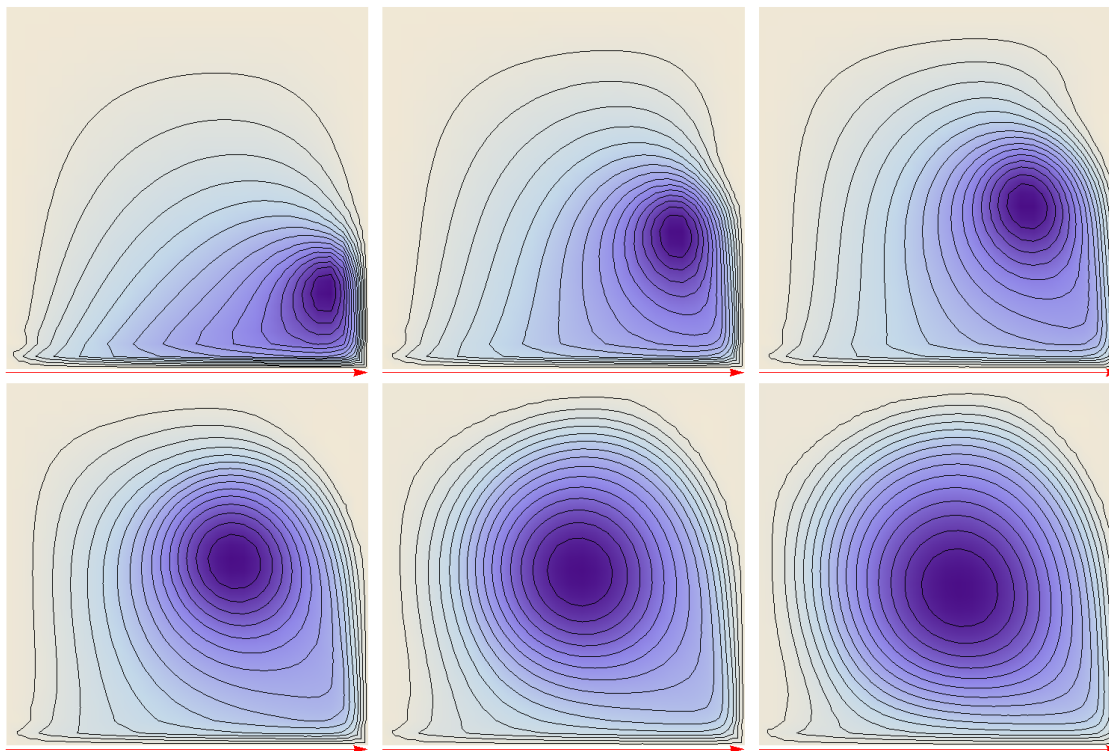
2. Nato iz novo dobljene vrtinčnosti ζ izračunamo hitrostni potencial ψ preko Poissonove enačbe. Za reševanje te enačbe sem uporabil metodo SOR z asimptotskim pospeškom za kvadratno mrežo. SOR iteracije sem ponavljal, dokler ni bila zaporedna sprememba manjša od 10^{-6} .

3. Iz hitrostnega potenciala ψ lahko določimo hitrosti u in v preko enačb:

$$u_{i,j} = v_{i,j} \frac{1}{2h} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \quad v_{i,j} = \frac{1}{2h} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}).$$

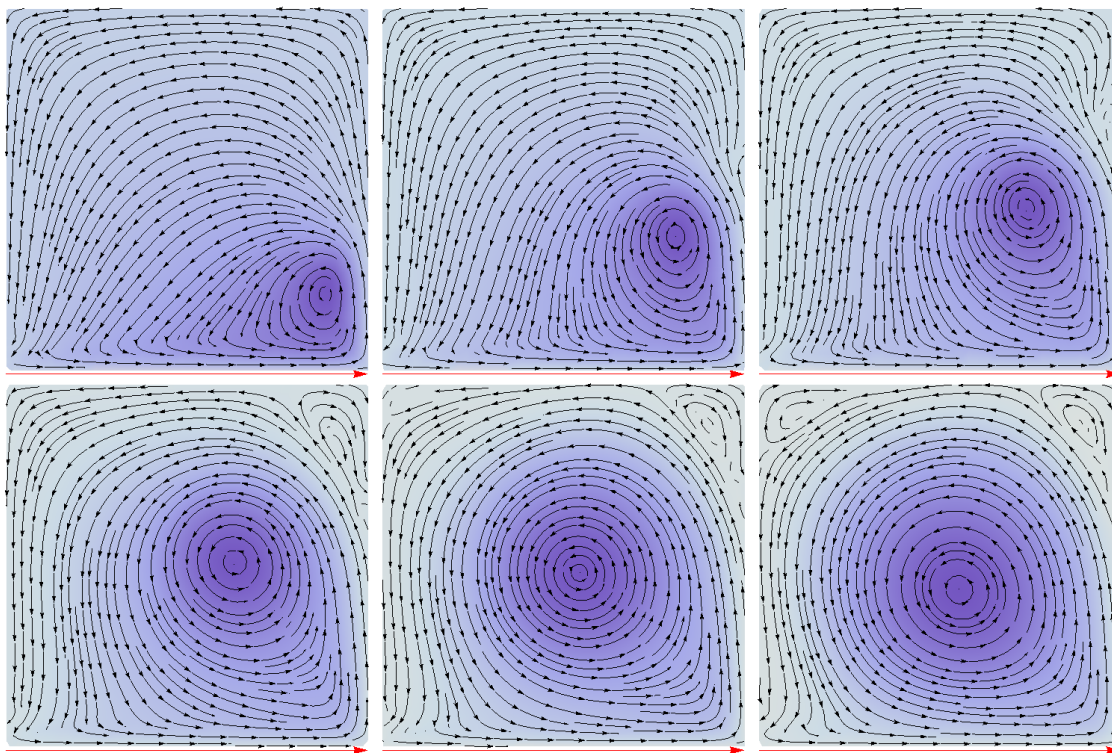
4 Rezultati

Najprej si oglejmo (psevdo) časovno odvisnost hitrostnega potenciala in hitrosti pri $Re = 2000$:



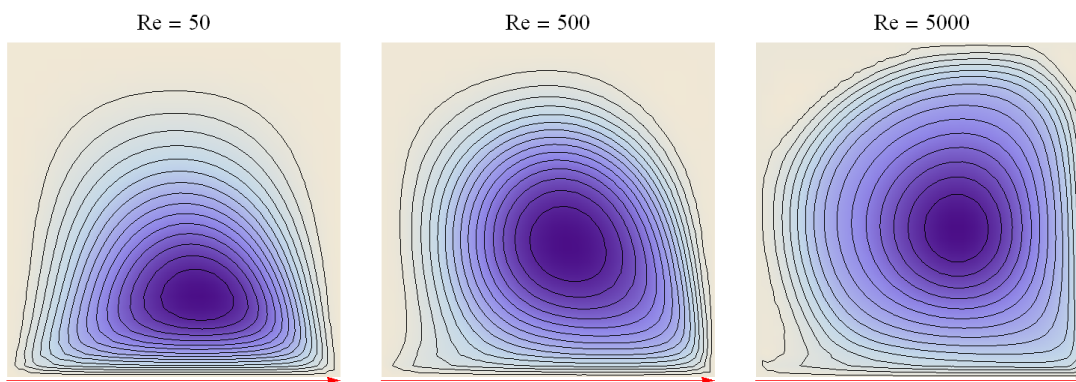
Vidimo, da začetno premikanje stene povzroči spremembo. Pri hitrostnem potencialu vidimo velikost hitrosti v posamezni točki, kjer je tudi središče vrtinca.

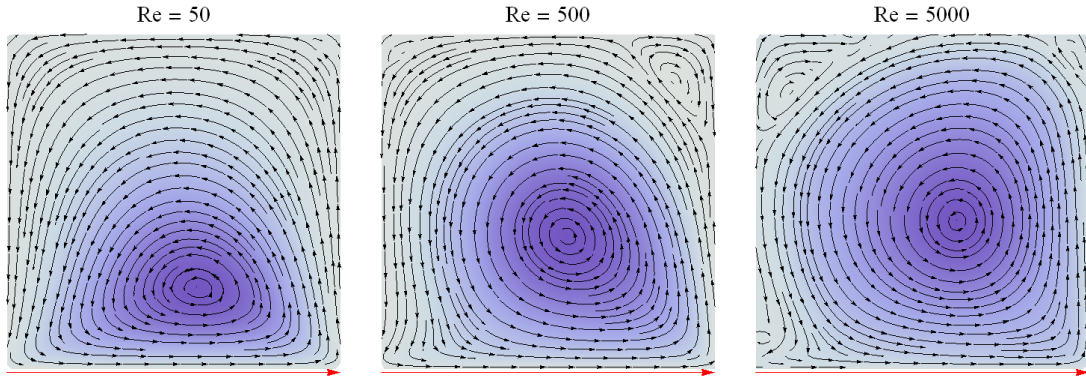
Za ogled vrtincev si moramo ogledati vektorsko polje hitrosti:



Nastane vrtinec, ki se počasi premakne v stacionarno stanje. Prikazane so tudi tokovnice in njihova smer, za lažjo predstavo premikanja tekočine. Možen je tudi nastanek stranskih sekundarnih vrtincev, ki pa so bolj očitni pri višjih Reynoldsovih številih.

Oglejmo si hitrostni potencial in hitrosti še pri treh različnih Reynoldsovih številih $Re = \{50, 500, 5000\}$ za primer, ko poganjamo le eno od sten. Rezultati so prikazani s slikami končnih stanj:





Vidimo, da se vrtinci pri nižjih Reynoldsovih številih bolj držijo stene, kar je zaradi nizke viskoznosti smiselno. Če Reynoldsovo število povečamo, se vrtinec premakne višje in se poveča, hkrati pa nastanejo še sekundarni vrtinci, ki smo jih omenili tudi prej.

Kot zanimivost prilagam še povezavo do treh različnih animacij, ki prikazujejo zgornjo situacijo pri treh različnih vrednostih Re :

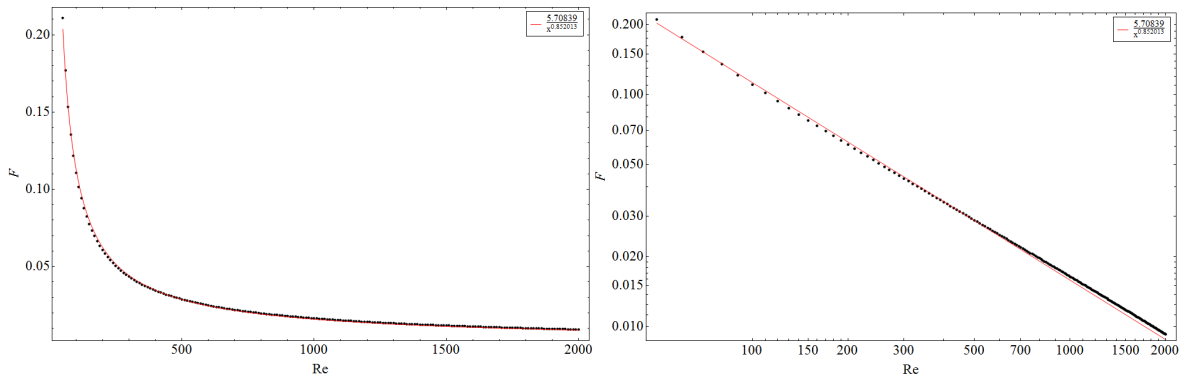
https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/1_100.gif

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/1_2000.gif

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/1_5000.gif

4.1 Sila na pokrov

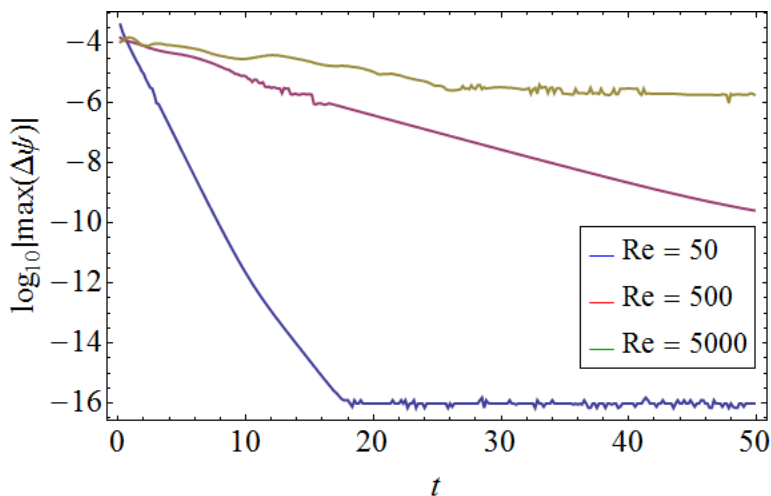
V razdelku zgoraj smo definirali silo na pokrov votline, ki jo lahko izračunamo pri različnih vrednostih Re :



Leva slika prikazuje silo v odvisnosti od Re v linearni skali, desna pa v log-log skali. Vidimo, da je odvisnost res potenčna in gre sicer v teoriji kot $1/Re$. V našem primeru imajo vrednosti nekolikošen odmik, ki pa ga lahko pripišemo premajhni velikosti kvadratne mreže (30×30) in pa seveda prekratnemu času propagacije, sicer pa je rezultat v splošnem zadovoljiv.

4.2 Natančnost metode

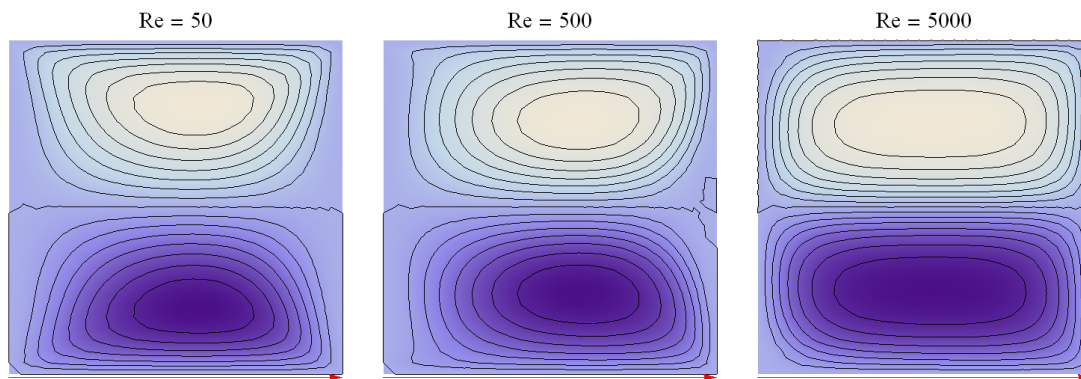
Preverjal sem tudi natančnost metode v odvisnosti od časa pri različnih Reynoldsovih številih 50, 500 in 5 000. Oglejmo si maksimalno vrednost zaporedne spremembe v odvisnosti od časa:

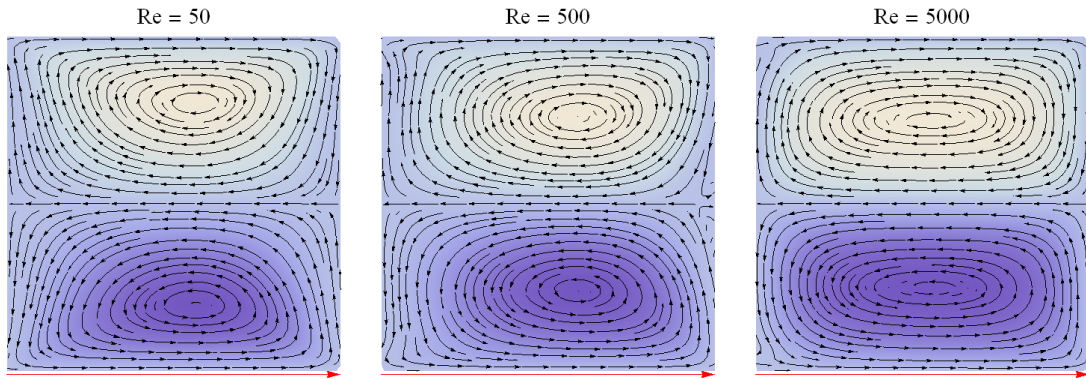


Opazimo, da rešitev z $Re = 50$ hitro konvergira in se zaporedne rešitve vedno manj razlikujejo, kar pomeni da se vrtinec hitro doseže stacionarno stanje in tam tudi ostane. Konvergenca se kmalu konča, saj dosežemo numerično natančnost. Pri $Re = 500$ se izkaže, da je ta konvergenca počasnejša, vendar bi lahko dosegli boljše natančnosti, če bi počakali dlje časa. Enako ne moremo reči za rešitev z $Re = 5000$, saj se izkaže, da pri višjih vrednostih Re vrtinec začne poplesavati in se nikoli ne ustavi, ali pa se ustavi po zelo velikem času. To je razlog za omejeno konvergenco, saj se vrtinec kroži okoli centralne točke s konstantno hitrostjo, oziroma s konstantno veliko spremembo v vsakem koraku.

5 Dodatni primeri

Metoda nam omogoča svobodno izbiro robnih pogojev, kar privede do raznih zanimivih rešitev. Spodaj si lahko ogledamo še hitrost in hitrostni potencial za primera, kjer premikamo 2 steni: V prvem primeru premikamo zgornjo in spodnjo steno v isti smeri:



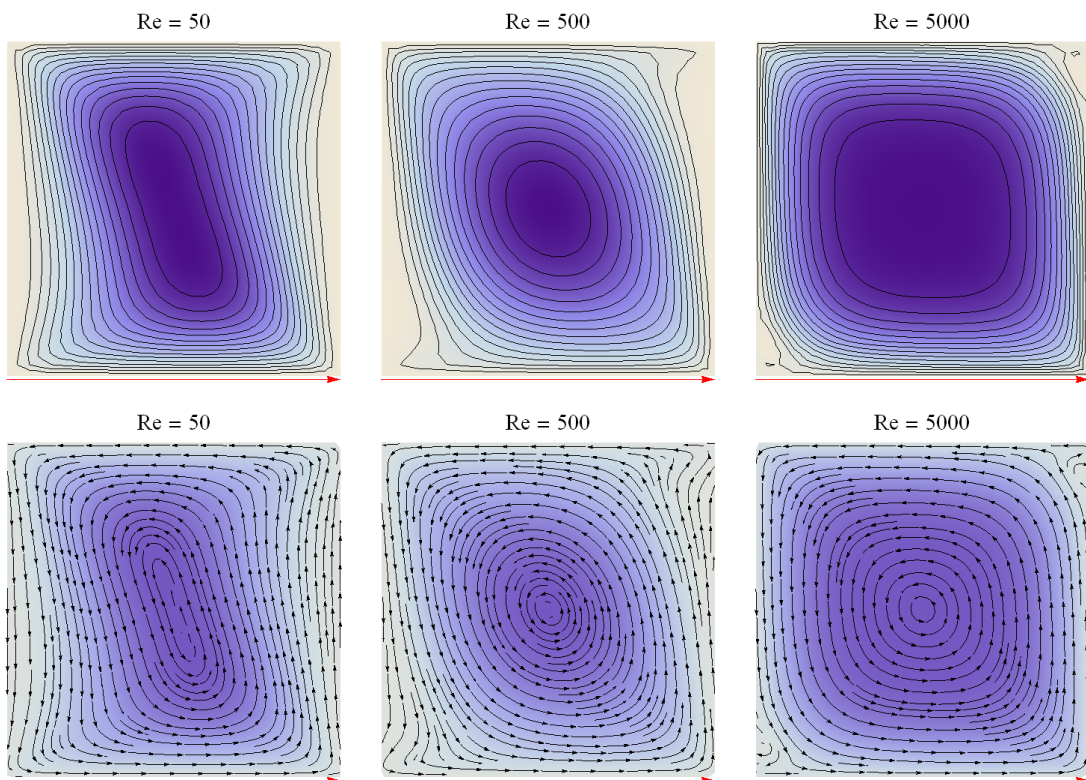


V tem primeru vidimo, da se rešitev razdeli na dva zrcalna dela, kjer hitrost na polovični višini nima komponente v smeri y . Končna rešitev je vedno bolj simetrična pri večjih Re , saj se tam tekočina manj drži stene. Prilagam še povezavo do dveh animacij, ki prikazujejo zgornjo situacijo pri dveh različnih vrednostih Re :

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/2diff_100.gif

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/2diff_7000.gif

V drugem primeru premikamo zgornjo in spodnjo steno v nasprotnih si smereh:



V tem primeru je ozadje nekoliko prikrito. Pri času $t = 0$ imamo v resnici 2 ločena vtinca, ki se vrtita v različnih smereh, na koncu pa se združita, kar je opazno v priloženih animacijah, tu pa imamo le končno stanje. Tu vidimo rešitev, ki je usmerjeno po diagonali, ki kaže v izvorni smeri prvotnih vrtincev, z večjo vrednostjo Re pa se to območje razširi v simetričen kvadrat.

Prilagam še povezavo do dveh animacij, ki prikazujejo zgornjo situacijo pri dveh različnih vrednostih Re :

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/2same_100.gif

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/2same_2000.gif

Prilagam še 2 dodatna primera, ker pa smo povedali že večinoma vse, kar je bilo potrebno, prilagam le animacije. V prvem primeru vrtimo vse štiri stene v cikličnem zaporedju. Opazimo, da se na koncu vsi vrtinci združijo v enega samega:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/4same_2000.gif

V drugem primeru premikamo 2 po 2 steni skupaj v isto točko, kar privede do zanimive situacije, ki pa je precej stacionarna in zato nezanimiva kot animacija:

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/4diff_100.gif

https://dl.dropboxusercontent.com/u/12747812/Animacije/4diff_2000.gif