

University of *Ljubljana*
Faculty of *Mathematics and Physics*



Modelska Analiza 2

Zaključna naloga - Metoda končnih elementov: lastne rešitve

Avtor: Matic Lubej
Asistent: dr. Simon Čopar
Predavatelj: prof. dr. Alojz Kodre

Ljubljana, 11.7.2014

Naloga:

Pri zaključni nalogi smo obravnavali lastna nihanja sistemov, ki niso evklidsko povezani. Kvadratno mrežo smo zaključili z različnimi robnimi pogoji, ki ustrezajo nekemu konstrukt, in našli lastne rešitve takšnega področja. V nalogi smo iskali lastne nihajne načine za cilindar, torus, Möbiusov trak in pol-prijet Möbiusov trak, rešitve pa predstavili kot prikaz na 2D kvadratnem področju in kot nihanje 3D objekta.

1 Naloga

Pri metodi končnih elementov nismo omejeni na evklidsko povezane sisteme. Trianguliraj kvadratno področje in izenači segment roba na levi stranici z enako dolgim segmentom na desni, vendar v zrcaljenem vrstnem redu. V primeru, da je ta segment cel rob, dobimo Möbiusov trak. Poišči lastna nihanja in lastne vrednosti tega področja. Poskusiš lahko tudi z bolj domiselno povezanimi definicijskimi območji, ki zadevajo vse štiri robove.

2 Uvod

Variacijski funkcional za reševanje problema lastnih vrednosti $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, zapišemo v obliki

$$\mathcal{S}(u) = \frac{1}{2} \langle \nabla u, \nabla u \rangle - \frac{1}{2} \lambda \langle u, u \rangle. \quad (1)$$

Približno rešitev nastavimo kot vsoto testnih funkcij:

$$u = \sum_{i=1}^N a_i w_i, \quad (2)$$

kjer so w_i piramidalne funkcije z amplitudo 1 in s točko i v središču, do vsake sosednje točke pa pada s konstantnim naklonom. Stacionaren pogoj funkcionala v En. (1) vodi do homogenega sistema enačb za koeficiente a_i :

$$\sum_{j=1}^N (A_{ij} - \lambda B_{ij}) a_j = 0, \quad (3)$$

$$A_{ij} = \langle \nabla w_i, \nabla w_j \rangle \quad B_{ij} = \langle w_i, w_j \rangle. \quad (4)$$

Delitev mreže na točke podamo s koordinatami (x_i, y_i) , $i \in [1, N]$. Točke povežemo v trikotnike $(i, j, k)_r$, $r \in [1, R]$. Njihove ploščine so:

$$S_r = \frac{1}{2} |x_i(y_j - y_k) + \text{cikl. perm.}|. \quad (5)$$

Velikost ∇w_i na r -tem trikotniku je $d_{j,k}/(2S_r)$, kjer je $d_{j,k}$ razdalje med točko j in k . A_{ij} je vsota skalarnih produktov gradientov $((x_j - x_k)(x_k - x_i) + (y_j - y_k)(y_k - y_i)) / (4S_r)$ po trikotnikih ob zveznici $i - j$. Za diagonalne elemente A_{ii} se gornji izraz poenostavi na $d_{j,k}^2 / (4S_r)$, seštet po vseh trikotnikih s točko i v oglišču. Za diagonalne elemente prekrivalne matrike \mathbf{B} dobimo $B_{ii} = \sum_r S_r / 6$, seštet po vseh trikotnikih s točko i v oglišču. Za izven-diagonalne elemente dobimo $B_{ij} = \sum_{i \sim j} S_r / 12$, seštet po vsakem od trikotnikov ob zveznici $i - j$.

Za diagonalizacijo uporabimo dekompozicijo Choleskega preko „korenjenja“ matrike $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. Z nekaj aritmetike dobimo:

$$\mathbf{C}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \mathbf{C} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{L}^{-1})^T, \quad \mathbf{b} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{a},$$

kjer na koncu ne smemo pozabiti rekonstruirati rešitve \mathbf{a} s še enim sistemom enačb $\mathbf{L}^T\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

3 Reševanje

Najprej smo morali ustvariti mrežo trikotnikov. To smo storili tako, da smo ustvarili točke po notranjosti polkrožne cevi, ki so ustrezno odmaknjene od roba. Sode in lihe vrstice so pri tem bile zamaknjene za 1/2, tako da je bila ustvarjena mreža enakokrakih trikotnikov. Točke po robu so bile generirane ločeno. Na točkah smo potem uporabili funkcijo `DelaunayTriangulation[]` iz paketa `ComputationalGeometry`, ki vrne relacije med povezanimi točki v zelo uporabnem formatu naslednje oblike:

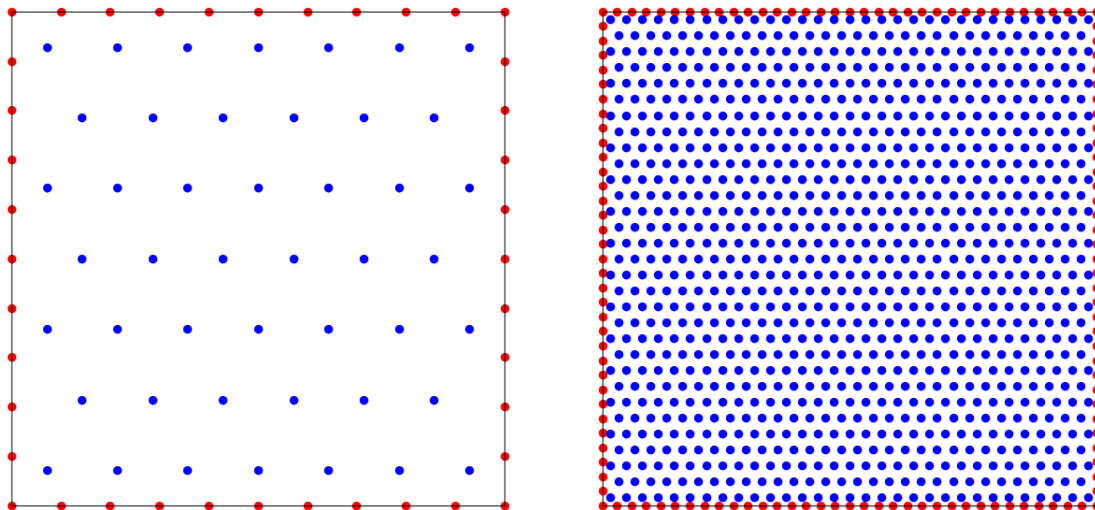
$$\begin{array}{c} \vdots \\ \{i, \{j_1, j_2, \dots, j_{N_r}\}\}, \\ \vdots \end{array} \tag{6}$$

kjer indeks i predstavlja indeks trenutne točke, indeksi j_1, \dots, j_{N_r} pa predstavljajo indekse vseh točk, ki so povezani s točko i v obratni smeri urinega kazalca.

Ko je bila mreža ustvarjena in matrike skonstruirane, smo lahko hitro izračunali lastne vrednosti in vektorje. Glavna razlika med to nalogo in nalogo pri pouku je ta, da imamo pri tej nalogi lahko sklenjene robove ali pa še kakšne dodatne zanimivosti, kot jih bomo videli tekom poročila. Iz naloge pri pouku vemo da so pri kvadratni membrani relevantne le točke iz notranjosti mreže trikotnikov, kjer ima vsaka točka tudi svoje mesto v matriki. Robne točke so upoštewane v kalkulacijah, vendar pa v matriki nimajo mesta, razen če je rob sklenjen.

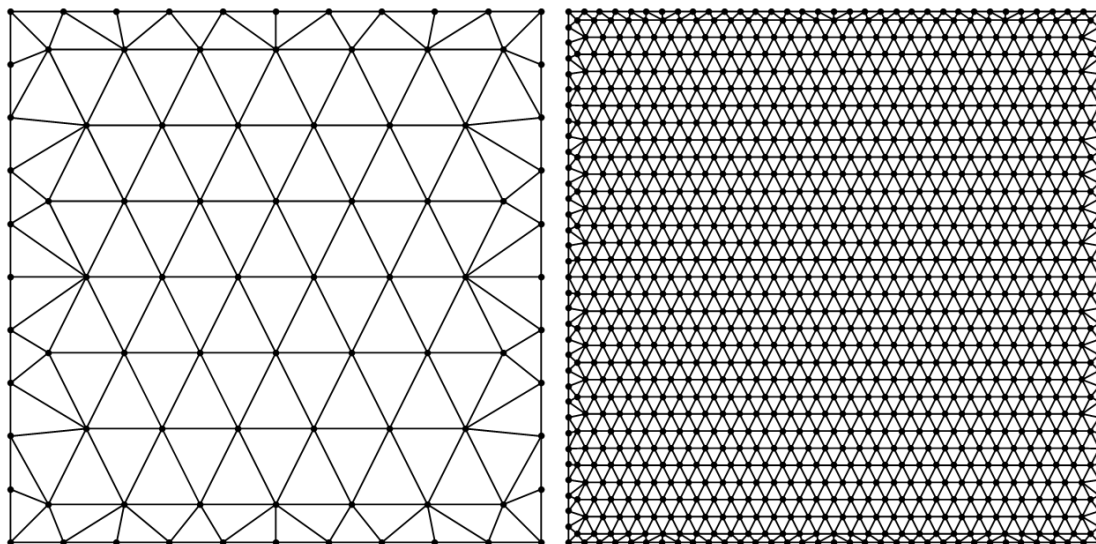
4 Rezultati

Najprej si oglejmo razdelitev mreže:

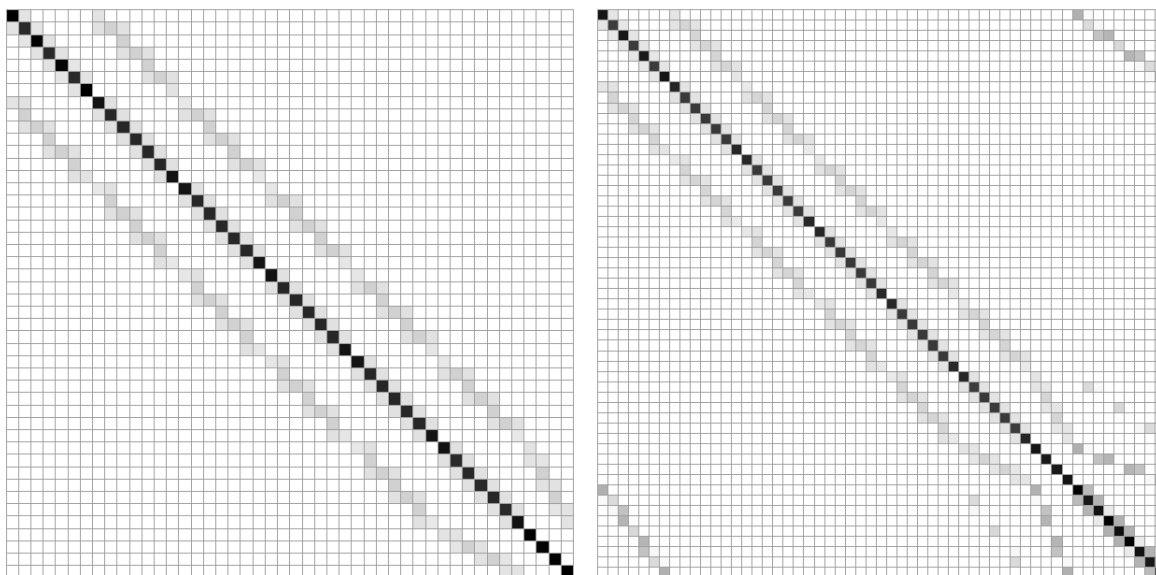


Z rdečo so označene točke na robu, z modro pa točke iz notranjosti. Vidimo, da je sredinsko območje enakomerno posejano s točkami, kjer smo točke razvrstili tako, da tvorijo heksagonalno mrežo, pri robovih pa se pravilnost trikotnikov poruši z zahtevo po opisu roba.

Delaunayeva triangulacija nam da naslednjo mrežo trikotnikov:



Dobimo trikotnike v takšnem formatu, ki smo ga opisali zgoraj. Na tem mestu smo za vsako točko izračunali ustrezne matrične elemente in napolnili matrice. Za občutek strukture matrik si oglejmo matrice \mathbf{A} za različne primere:



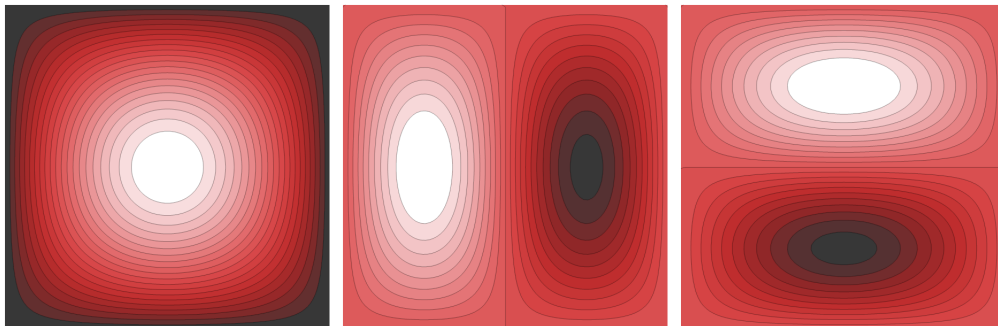


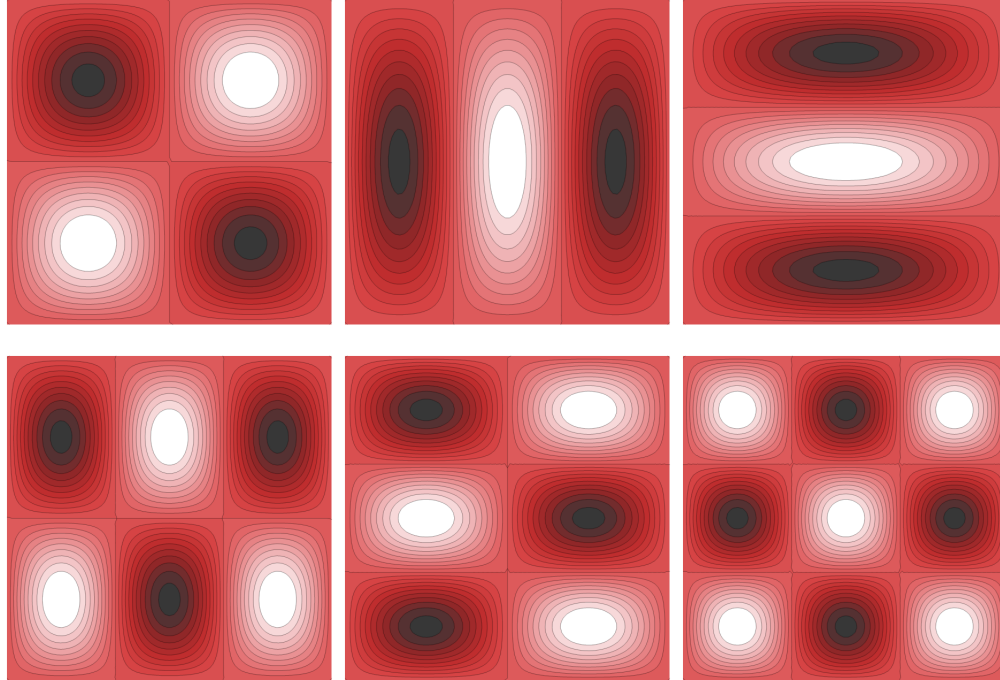
Matrika zgoraj levo predstavlja matriko za primer navadne kvadratne membrane s 4 robovi in tu služi za primerjavo. Vidimo, da imamo močno diagonalo, šibkejši elementi ob diagonali pa opisujejo povezave med točkami. Zgoraj desno je prikazana matrika za primer cilindra. Vidimo, da se je matrika povečala za število točk na robu. Rob je povezan tako sam s sabo kot s točkami iz notranjosti, kot vidimo na anti-diagonalnih delih matrike, kjer se pojavijo novo nastale povezave z notranjostjo mreže. Spodaj levo je prikazana matrika za primer Möbiusovega traku, kar vidimo kot nespremenjene povezave med notranjimi točkami na anti-diagonalnih delih matrike, in kot spremenjene povezave roba s samim sabo, saj se spremeni le način povezave roba. Primer spodaj desno prikazuje matriko v primeru torusa, kjer imamo matriko še večjih dimenzij zaradi dodatnih robnih in vogalne točke. V tem primeru so vse točke iz originalne mreže aktivne, tako da je velikost matrike enaka številu točk.

V vseh primerih sem lastne vrednosti in funkcije iskal na mreži okoli 5500 točk. Število točk se je razlikovalo le na račun vrste povezave. V naslednjih razdelkih so prikazane lastne rešitve za različne robne pogoje.

4.1 Kvadratna membrana

Spodaj so prikazana lastna nihanja membrane za primer, ko imamo pripete vse 4 robove. Te rešitve poznamo in smo jih že večkrat obravnavali:





Na zgornjih slikah prepoznamo že znane rešitve, ki smo jih producirali večkrat tekom šolskega leta. To so lastna nihanja običajne kvadratne membrane, ki ima vse štiri robove pripete. Analitično so to lastna nihanja naslednjih oblik in naslednjih lastnih vrednosti:

$$g_{n,m}(x,y) = \sin(n\pi x) \sin(m\pi y), \quad (n,m) \in \mathbb{N},$$

$$\lambda_{n,m} = (\pi n)^2 + (\pi m)^2.$$

V tem primeru imamo torej lastna nihanja, ki so kombinacija katerih koli naravnih števil n in m . Na sliki desno je prikaz zasedenosti lastnih nihanj kvadratne opne v odvisnosti od števil n in m .

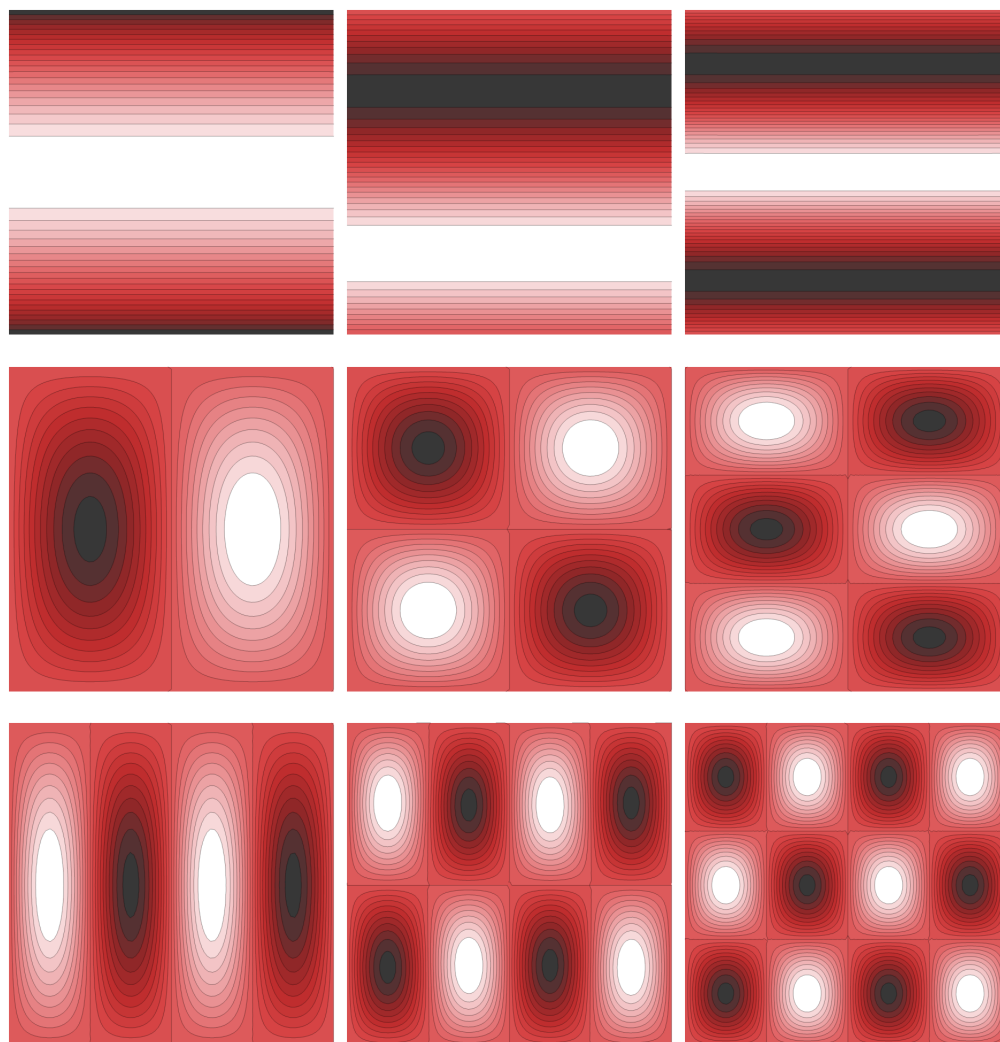
5	K	K	K	K	K	
4	K	K	K	K	K	
3	K	K	K	K	K	
2	K	K	K	K	K	
1	K	K	K	K	K	
0						
	0	1	2	3	4	5

4.2 Cilinder

Če sklenemo desni in levi rob kvadratne membrane, potem membrana predstavlja plašč cilindra. Točke se morajo na obeh straneh ujemati po poziciji, obravnavamo pa jih kot iste točke iz levega in desnega robu. Takšna sklenitev v matriko prinese nove elemente, tako da se matrika razširi za toliko mest, kolikor je točk na enemu robu, brez štetih vogalnih točk. Pri konstrukciji matrike moramo paziti na geometrijo trikotnikov in njihov vrstni red, še posebej ko prehajamo iz enega na drug rob. Orientacija trikotnikov v tem primeru ostane nespremenjena, ker nismo napravili nobenih zrcaljenj.

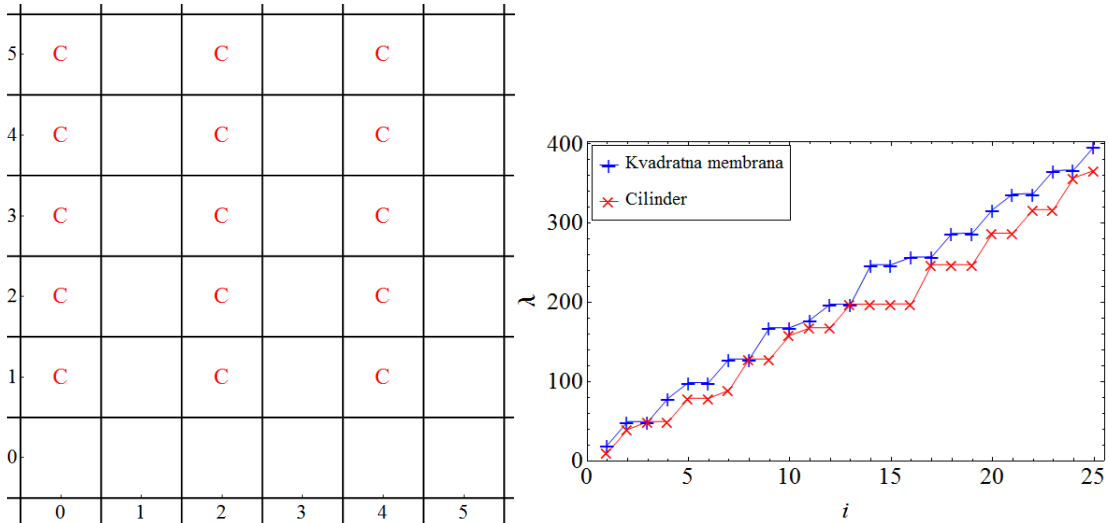
Dobimo lastna nihanja, ki jih lahko apliciramo tako na lastna nihanja skalarnega polja preko reševanja enačbe $\nabla^2 p = \lambda^2 p$ kot tudi na lastna nihanja vektorskega polja v smeri normale preko reševanja enačbe $\nabla^2 \mathbf{n} = \lambda^2 \mathbf{n}$, kjer je p skalar, \mathbf{n} pa normalni vektor v smeri pravokotno na površino telesa.

Spodaj so prikazana lastna nihanja kvadratne membrane za primer cilindra:

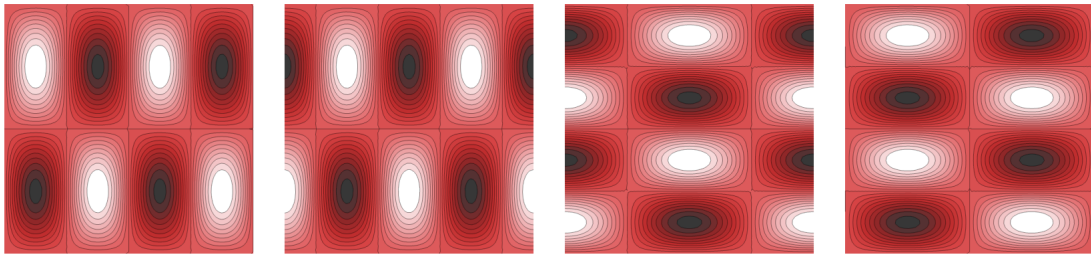


Na zgornjih slikah vidimo nekaj novih in prepoznamo nekaj starih lastnih nihajnih načinov. Novi so tisti, ki se v smeri osi x ne spreminjajo in se zaključijo sami vase. Opazimo tudi, da so vsi nihajni načini v smeri x sodi, kar je smiselna posledica periodičnega robnega pogoja, saj se mora „hrib“ vedno preliti v „dolino“. V smeri y ostane situacija nespremenjena in so možni vsi nihajni načini kot v primeru pripete kvadratne membrane. V tem primeru so torej vsa nihajna števila n soda, nihajni načini z lihimi n pa so prepovedani.

Lastne nihajne načine cilindra lahko prikažemo na mreži kot prisotnost v odvisnosti od števil n in m . Kot smo videli, ustrezajo nihajni načini cilindra sodim številom n , vključno z 0, in naravnim številom m , kot je prikazano spodaj levo. Zanimivo si je ogledati tudi lastne vrednosti nihajnih načinov v primerjavi s tistimi od navadne pripete membrane:



Na desni sliki vidimo, da imajo začetni nihajni načini cilindra manjše lastne vrednosti kot nihanja pripete kvadratne membrane. Kot smo že pravilno opazili, se nekateri nihajni načini res pojavijo v obeh primerih, saj so enake tudi ustrezne lastne vrednosti, ki jih vidimo na grafu na enakih višinah. Posebej zanimiva je dodatna degeneracija nihajnih načinov cilindra, saj se ponekod pojavijo tudi 3 ali celo več enakih lastnih vrednosti. Ti ustrezajo nihajnim načinom enakih oblik, kjer se poleg simetričnih $(n, m) \rightarrow (m, n)$ načinov pojavijo še prostorsko zamaknjeni načini. V takšnih primerih imamo enkrat na spoju vozle, drugič pa dolino ali hrib. Spodaj je prikazanih par značilnih primerov:

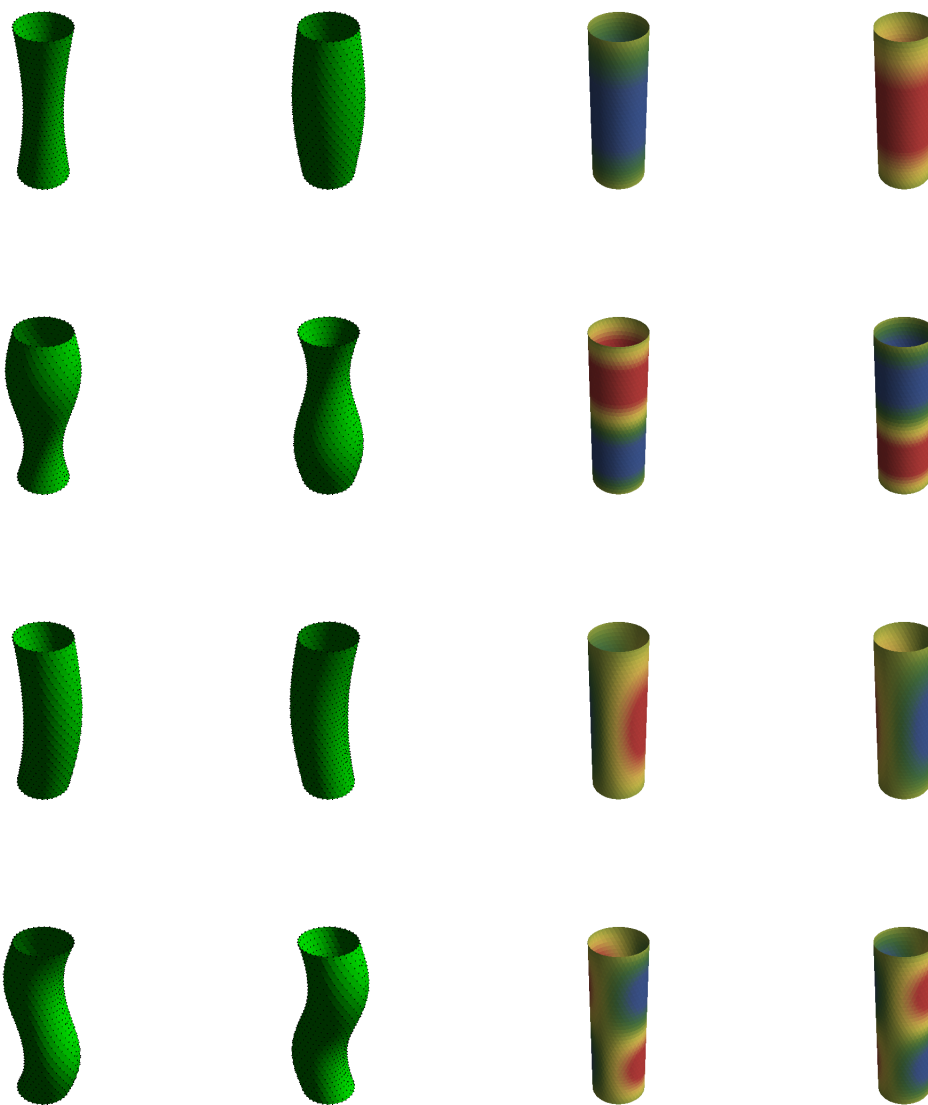


Na tej točki že pridemo do težav s predstavo v 3D. Membrano lahko kot plašč cilindra, parametriziramo v 3D preko transformacij:

$$\begin{aligned} x' &= r \cos(2\pi x), \\ y' &= r \sin(2\pi x), \\ z' &= y, \end{aligned}$$

kjer je r radij cilindra, (x', y', z') so koordinate cilindra v 3D, (x, y) pa koordinate membrane v 2D. S takšno parametrizacijo si je precej lažje predstavljati lastna nihanja v 3D. Na koncu strani so priložene tudi povezave do animacij, kjer zaradi prikaza nisem upošteval lastnih frekvenc.

Spodaj je prikazanih nekaj značilnih primerov lastnih nihanj za vektorsko polje v smeri normale (levo) in skalarno polje (desno):



Lastna nihanja skalarnega polja: <http://gfycat.com/UniqueConventionalAnhinga>

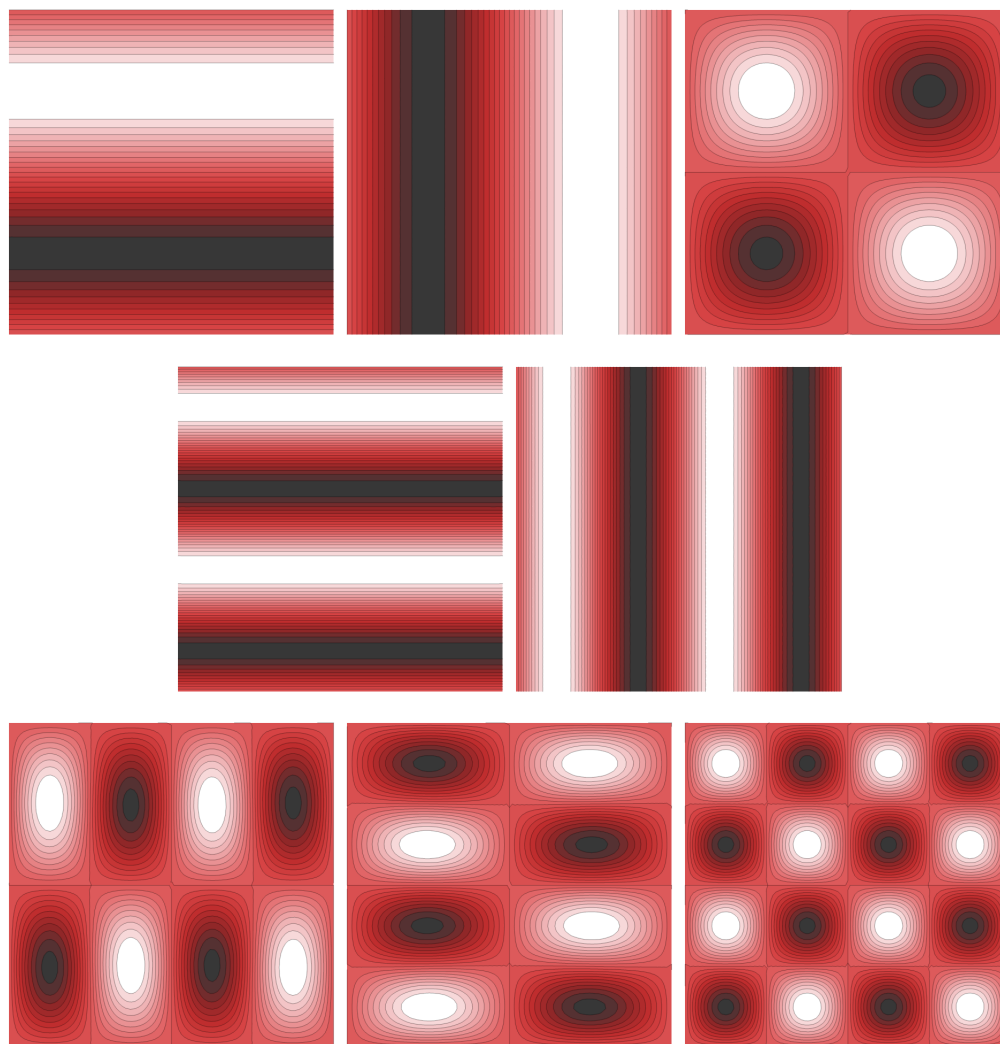
Lastna nihanja vektorskega polja: <http://gfycat.com/DampOpenBeauceron>

Z animacijskega vidika so zanimivi tudi primeri, ki so kombinacija degeneriranih stanj v obliki $\psi(t) = \psi_1 \cos(\omega_1 t) + \psi_2 \cos(\omega_2 t)$:

<http://gfycat.com/ImmediateDarkBuzzard>

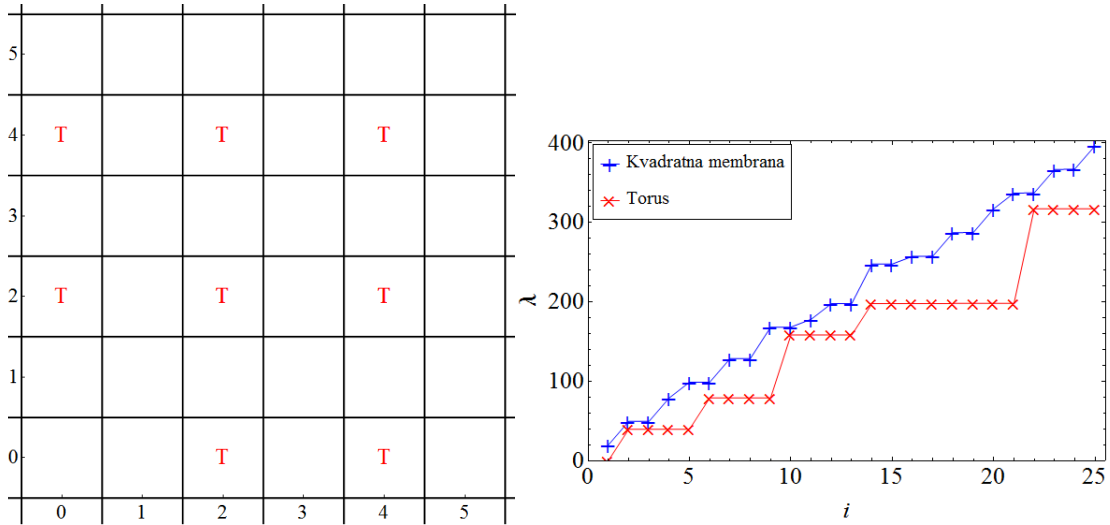
4.3 Torus

Torus je le razširjen primer cilindra, kjer smo sklenili še spodnji in zgornji rob. Stranski efekt te sklenitve je, da vogalna točka tudi postane aktivna, tako da v tem primeru dobimo v matriki še eno dodatno mesto. Kalkulacije po trikotnikih ostanejo nespremenjene, potrebna je le še dodatna pazljivost zaradi vogalne točke in njenih sosedov v vseh 4 vogalih kvadratne membrane. Spodaj so prikazana lastna nihanja membrane za primer, ko združimo levi in desni ter prav tako zgornji in spodnji rob membrane. Dobimo lastna nihanja torusa, ki enako kot prej opišejo lastna nihanja skalarnega polja in vektorskega polja v smeri normale:

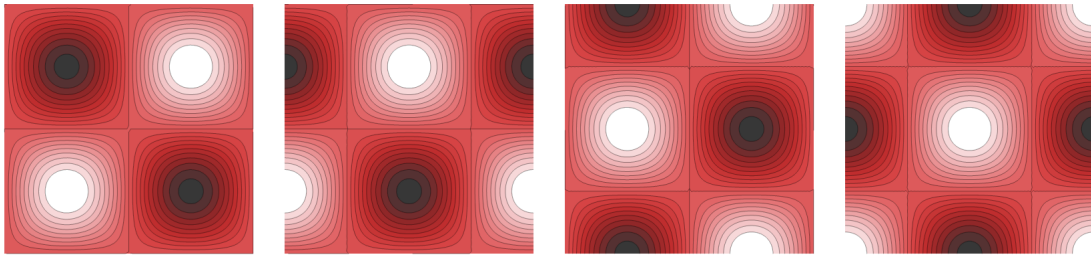


V tem primeru imamo periodičnost v smereh levo-desno in gor-dol, zato so si lastne rešitve simetrične v smeri x ter y . Za razliko od primera s cilindrom imamo to še ustrezno več novih nihajnih načinov, spet pa nekateri od starejših manjkajo. Opazimo, da so vsi nihajni načini v smeri x ali y sodi, kar je le posplošitev prejšnjega primera, kjer smo imeli sode nihajne načine le v eni smeri. Dodatna zanimivost pri torusu je prvi lastni nihajni način, ki pa ima lastno vrednost 0, torej ne spada ravno pod nihajne načine. To stanje je posledica tega, da celo membrano povežemo med sabo, tako da na koncu nimamo nobene proste robne točke. Posledično torus nima neke reference na „zunanost“.

Če si ogledamo lastne nihajne načine torusa spodaj levo kot reprezentacijo na mreži v odvisnosti od n in m , ustrezajo nihajni načini sodim številom n in m , vključno z 0, kjer pa je stanje $(0, 0)$ izrojeno. Na desni strani je prikaz lastnih vrednosti torusa v primerjavi z lastnimi vrednostmi pripete kvadratne membrane:



Na desni sliki vidimo prvo ničelno lastno vrednost, ki smo jo že prej omenili. Opazimo, da se vse ostale lastne vrednosti pojavljajo v gručah po 4 ali več in nikoli manj, kar je direktna posledica periodičnosti v obeh smereh. Za razliko od prej se lahko zdaj pojavijo še prostorsko zamaknjeni načini v drugi smeri. Spodaj je prikazanih par značilnih primerov:

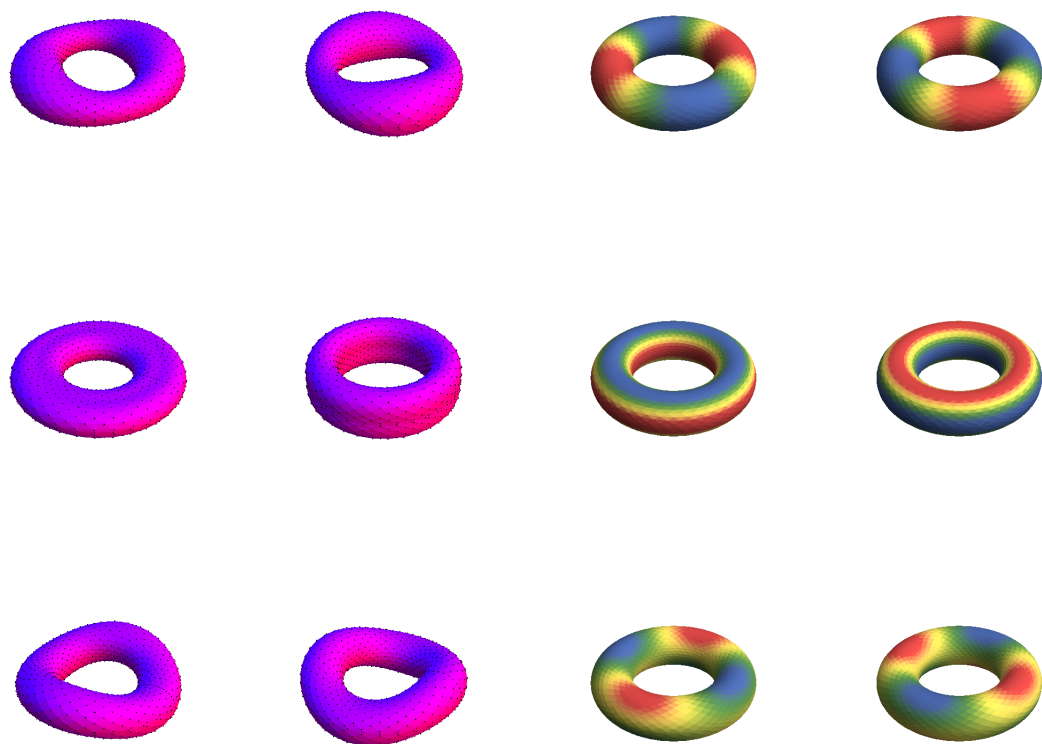


Plašč torusa lahko v 3D parametriziramo kot:

$$\begin{aligned} x' &= (c + a \cos(2\pi y)) \cos(2\pi x), \\ y' &= (c + a \cos(2\pi y)) \sin(2\pi x), \\ z' &= a \sin(2\pi y), \end{aligned}$$

kjer je c polmer središčnice torusa, a pa polmer njegove širine. Spodaj je prikazanih nekaj značilnih primerov lastnih nihanj za vektorsko polje v smeri normale (levo) in skalarno polje (desno):





Lastna nihanja skalarnega polja: <http://gfycat.com/BlandHideousHorseshoeCrab>

Lastna nihanja vektorskega polja: <http://gfycat.com/AptWhirlwindIncaterm>

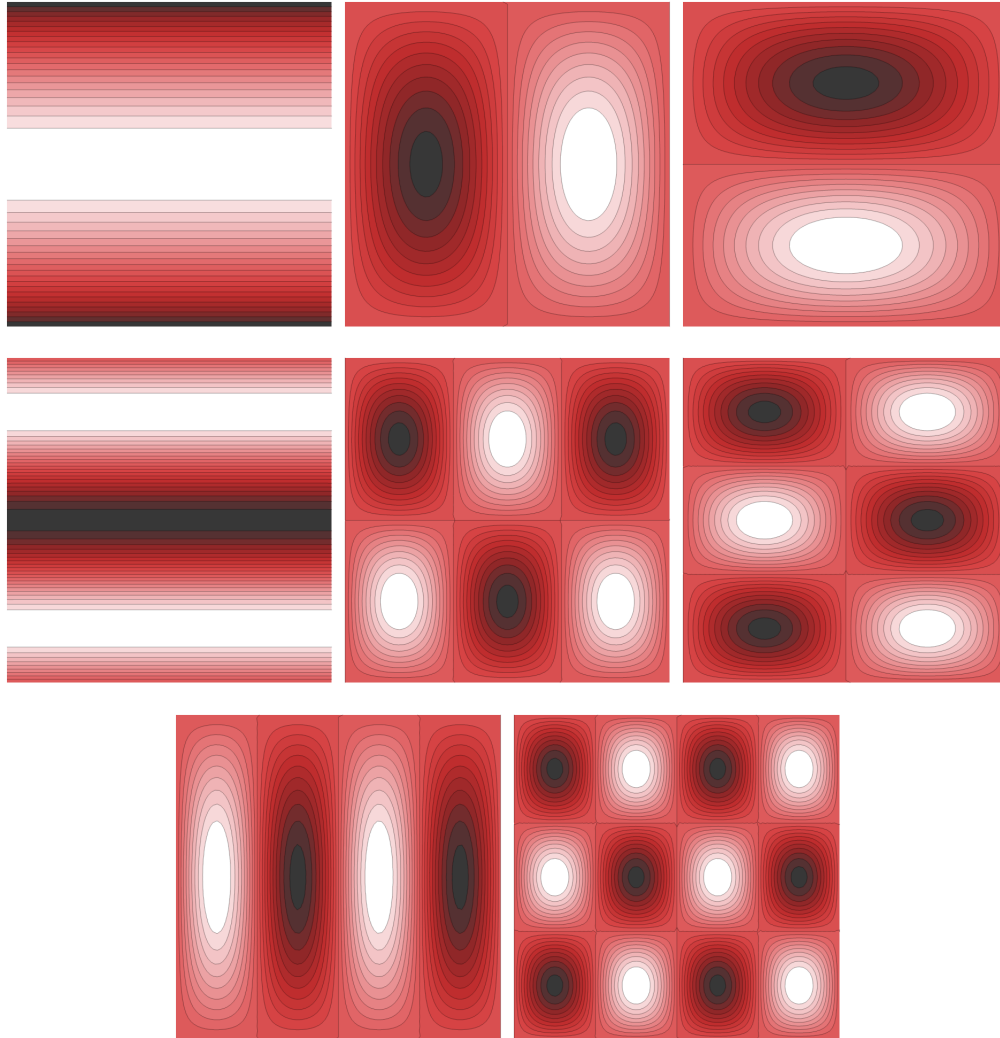
Kombinacije degeneriranih stanj: <http://gfycat.com/CourteousRadiantLarva>

4.4 Möbiusov trak

Möbiusov trak je zelo podoben primeru s cilindrom, razlika je le v tem, da rob zasukamo za kot π preden ga sklenemo z drugim. Pri tem moramo paziti na pravilno parjenje trikotnikov in še posebej na njihovo orientacijo, saj se pri zrcaljenju njihova obrne. Iskanje lastnih nihajnih načinov je v primeru Möbiusovega traku bolj zapleteno. Kot vemo, tak trak ni orientabilen, saj se vektor normale pri prehodu čez rob obrne, oz. po drugi strani rečeno, trak ima samo eno stran. Posledica tega je, da lastne rešitve niso enake za nihanje skalarnega in vektorskega polja, saj zasuk na skalarno polje ne vpliva, v primeru vektorskega polja pa se pri zasuku normalni vektor prezrcali na drugo stran. Skalarni robni pogoj se glasi $p(0, y) = p(1, 1 - y)$, saj vrednost skalarja ne spremeni predznaka pri prehodu čez rob. Vektorski robni pogoj je po drugi strani enak $p(0, y) = -p(1, 1 - y)$, kjer dobimo minus po tem ko prestopimo rob. Ta minus v programski kodi implementiramo kot minus na ustreznih mestih pri konstrukciji matrike, kjer en rob vidi drugega na nasprotni strani.

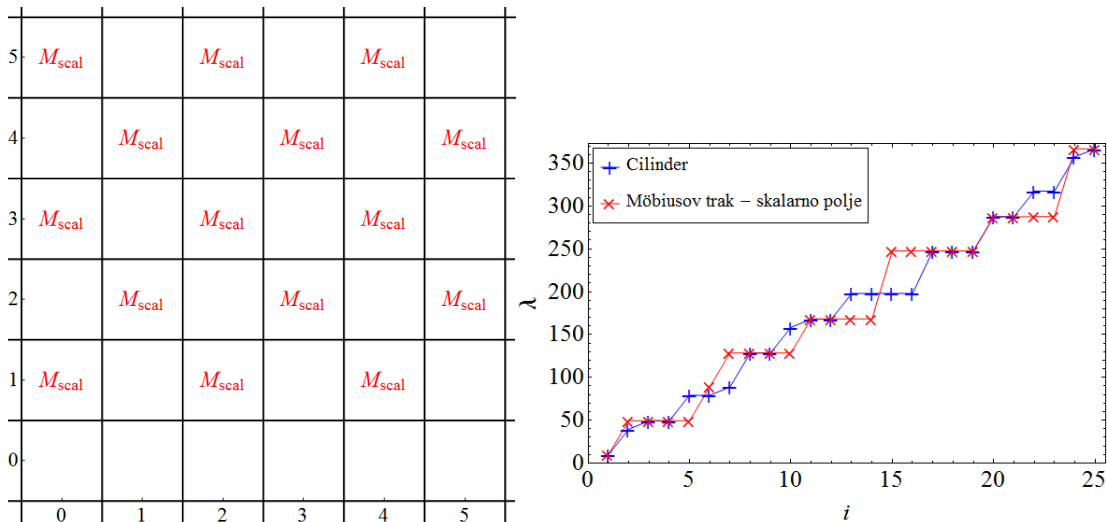
4.4.1 Skalarno polje

Če upoštevamo skalarni robni pogoj, dobimo lastna nihanja, ki veljajo izključno za skalarno polje, saj pride do zlomov in nezveznosti, če bi ta nihanja prikazali z odmiki v smeri, ki je pravokotna na površino. Spodaj so prikazana lastna nihanja membrane za primer skalarnega polja pri Möbiusovem traku.

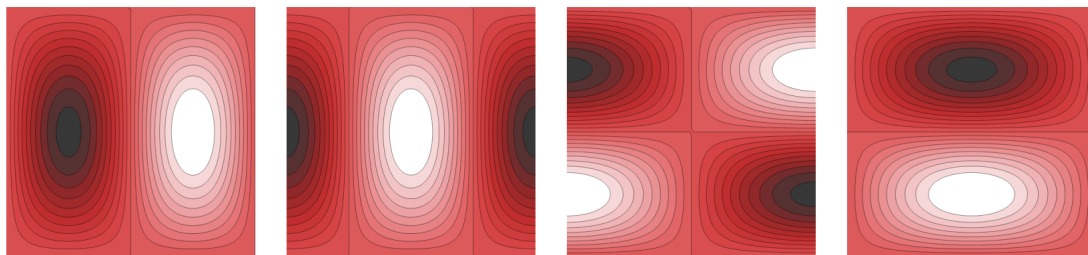


V primeru lastnih nihanj skalarnega polja Möbiusovega traku so vse funkcije spet določeni nihajni načini nihanj kvadratne membrane, ki ustrezajo pravim izbirnim pravilom. V tem primeru so možni vsi načini, kjer je vsota nihajnih števil $n + m$ enaka lihemu številu, kot lahko preverimo na zgornjih slikah.

Če lastne nihajne načina skalarnega polja na Möbiusovem traku predstavimo z mrežo zasedenosti v odvisnosti od števil n in m , dobimo šahovsko pobarvano območje. Vidimo, da imamo v y smeri nihajne načine šele pri $m > 0$, kar je posledica tega, da trak v y smeri ni periodično zaključen, tako kot ni v primeru cilindra. Desna slika prikazuje primerjavo med lastnimi vrednostmi za primer cilindra in Möbiusovega traku, saj sta si bolj sorodna in je zato primerjava bolj na mestu.



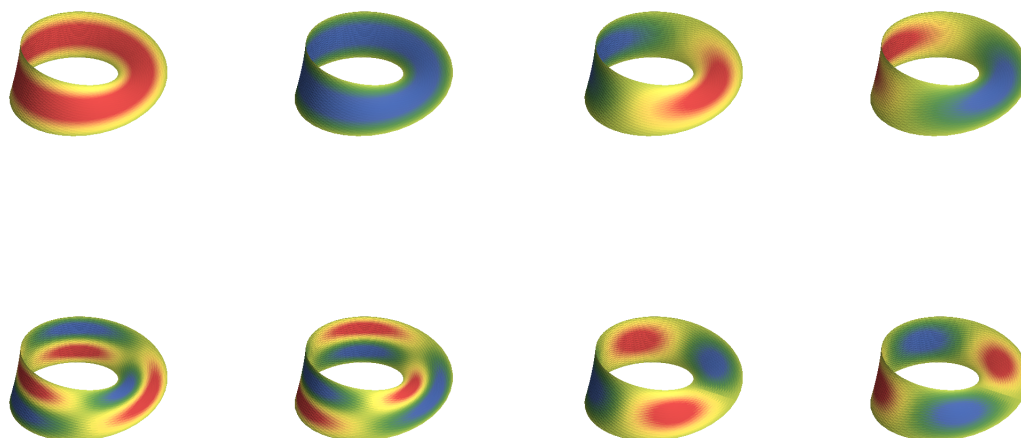
Vidimo, da so lastne vrednosti Möbiusovega traku za primer skalarnega polja enkrat večja in enkrat manjša od lastnih vrednosti cilindra. Opazimo tudi, da se lastne vrednosti in lastni nihajni načini podobno pojavljajo v grupah, kot so se pri torusu, vendar pa grupiranje ni nujno, saj imamo tudi primere po 1 ali 2 lastne vrednosti na kupu. Zanimivo je, da se nekatere grupe traku ujemajo z grupami od cilindra, nekatere pa ne. Prav tako ni povsem intuitivno, zakaj bi bil Möbiusov trak večjo stopnjo degeneracije kot cilinder, glede na to da sta oba v enaki meri periodično zaključena, vendar je takšno obnašanje moč opaziti iz zgornjega grafa. Spodaj je prikazanih par značilnih primerov:



Plašč Möbiusovega traku lahko v 3D parametriziramo kot:

$$\begin{aligned} x' &= (r + c(y - 1/2) \cos(\pi x)) \cos(2\pi x), \\ y' &= (r + c(y - 1/2) \cos(\pi x)) \sin(2\pi x), \\ z' &= c(y - 1/2) \sin(\pi x), \end{aligned}$$

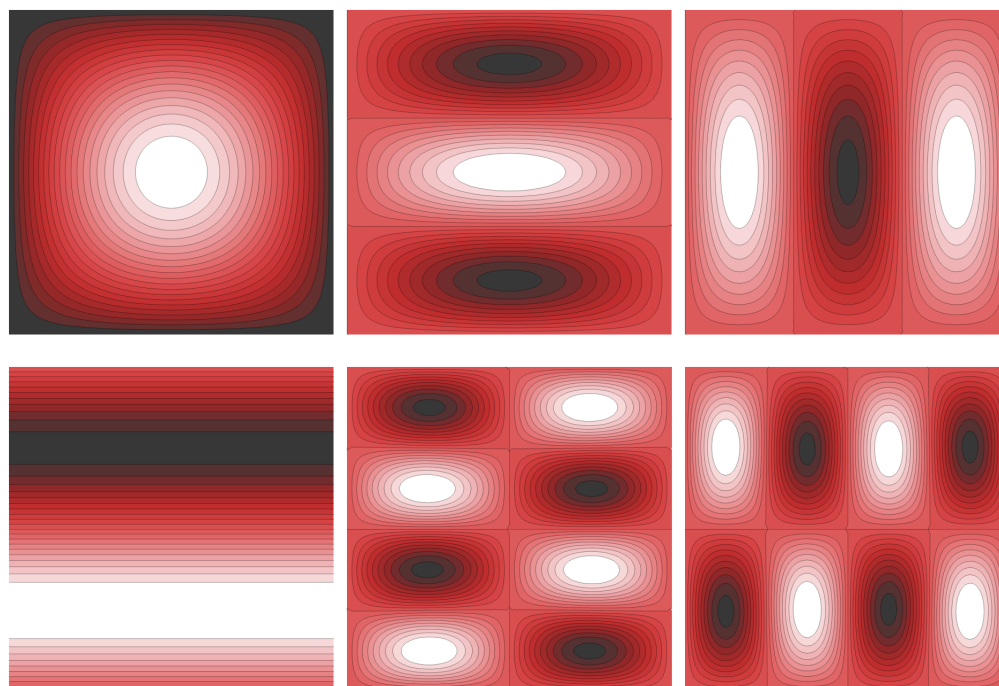
kjer je r polmer središčnice traku, c pa njegova širina. Spodaj je prikazanih nekaj značilnih primerov lastnih nihanj za skalarno polje:

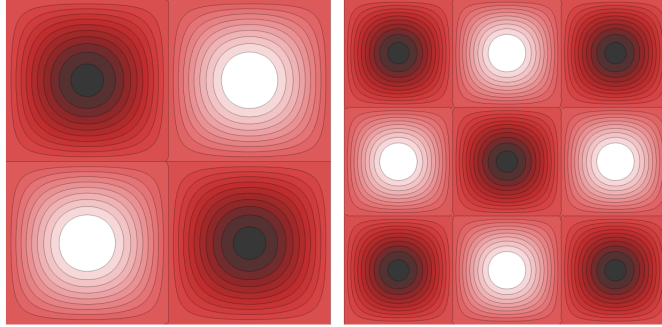


Lastna nihanja skalarnega polja: <http://gfyat.com/GrimWindingAmericanriverotter>

4.4.2 Vektorsko polje

Če upoštevamo vektorski robni pogoj, dobimo lastna nihanja, ki veljajo izključno za vektorsko polje. Že prej smo omenili, da se ta lastna nihanja med sabo izključujejo. Spodaj so prikazana lastna nihanja membrane za primer vektorskega polja pri Möbiusovem traku.

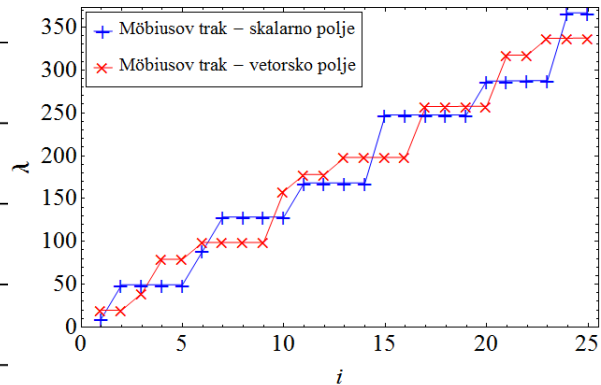




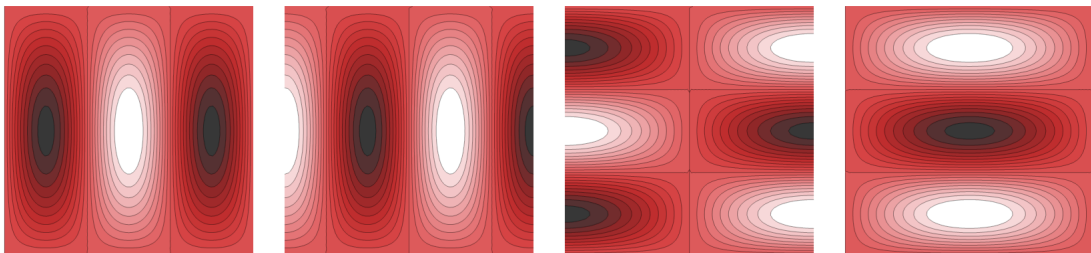
Vidimo, da so v tem primeru lastna nihanja istega traku povsem drugačna, saj skalarno in vektorsko valovanje nimata skupnega niti enega nihajnega načina. V primeru lastnih nihanj vektorskega polja Möbiusovega traku so vse funkcije spet točno določeni nihajni načini nihanj kvadratne membrane, vendar pa mora v tem primeru biti vsota nihajnih števil $n + m$ enaka sodemu številu.

Če lastna nihanja vektorskega polja prikažemo v kvadratni mreži, zopet dobimo šahovnico, vendar so polna mesta ravno tam, kjer so bila pri nihanju skalarnega polja ta mesta prazna. Ničta vrstica je zopet prazna zaradi prostih robov v smeri y . To je še en prikaz, kako se lastna nihanja skalarnega in vektorskega polja pri Möbiusovem traku izključujeta, medtem ko se pri orientabilnih ploskvah mreža za ta dva primera povsem prekriva.

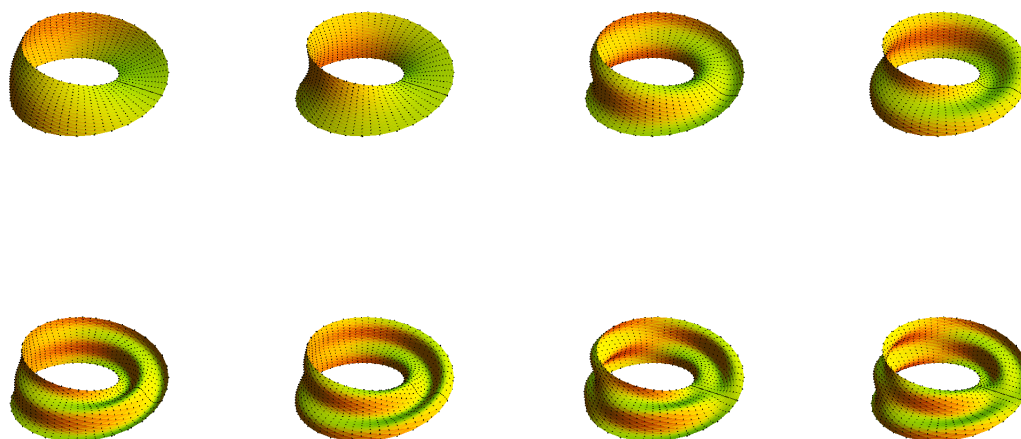
5	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}
4	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}
3	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}
2	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}
1	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}	M_{scal}	M_{vec}
0						
	0	1	2	3	4	5



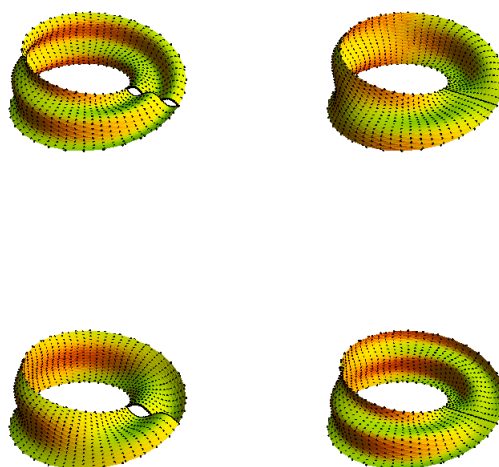
Na desni sliki vidimo primerjavo lastnih vrednosti Möbiusovega traku za primer nihanja skalarnega in vektorskega polja. Vidimo, da trenda lastnih vrednosti za vsakega od primerov opletata en okoli drugega, vendar pa lastni vrednosti nikoli nista na enaki višini, kar je še en dokaz, da se vsa stanja med skalarnimi in vektorskimi nihanji izključujejo. Spodaj je prikazanih par značilnih primerov:



Spodaj je prikazanih nekaj značilnih primerov lastnih nihanj za vektorsko polje:



V primeru Möbiusovega traku je še posebej izrazito dogajanje okoli zlepk robov. Na zgornjih slikah in na spodnjih animacijah lahko opazimo, da obstajata na teh mestih 2 primera. Ali je tu vozle, ali pa hrib/dolina. Še posebej zanimivo je, če pozabimo upoštevati vektorski robni pogoj, če bi radi predstavili nihanja z odmiki v pravokotni smeri na površino. Če pride do tega, potem na teh zlepkih pride do zloma v vseh primerih, kjer na zlepku ni vozla. Spodaj je prikazanih par primerov omenjenih zlomov:

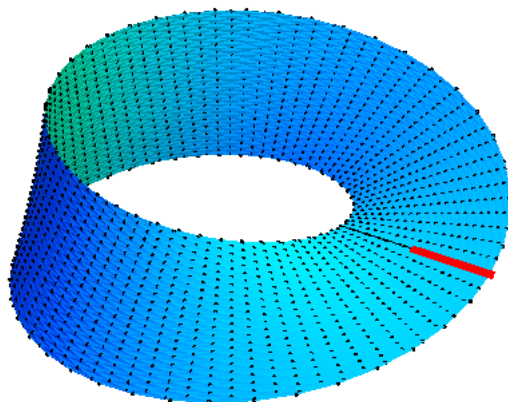


Lastna nihanja vektorskega polja: <http://gfycat.com/EasyInsignificantHyracotherium>

Kombinacije degeneriranih stanj: <http://gfycat.com/GlisteningAgedCapybara>

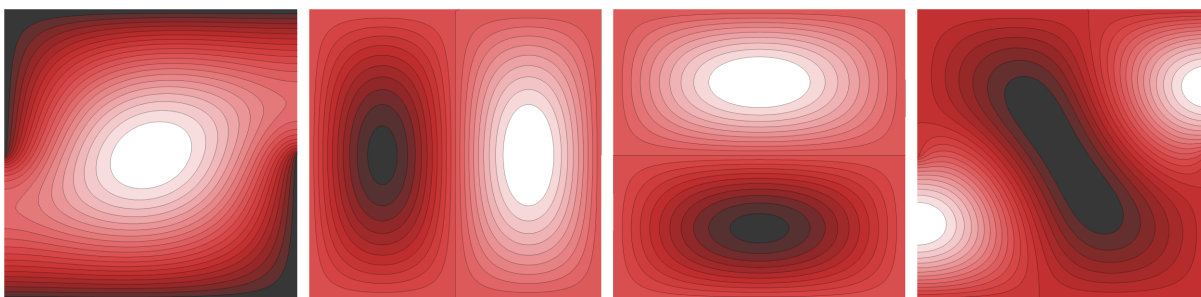
4.5 Pol-pripet Möbiusov trak

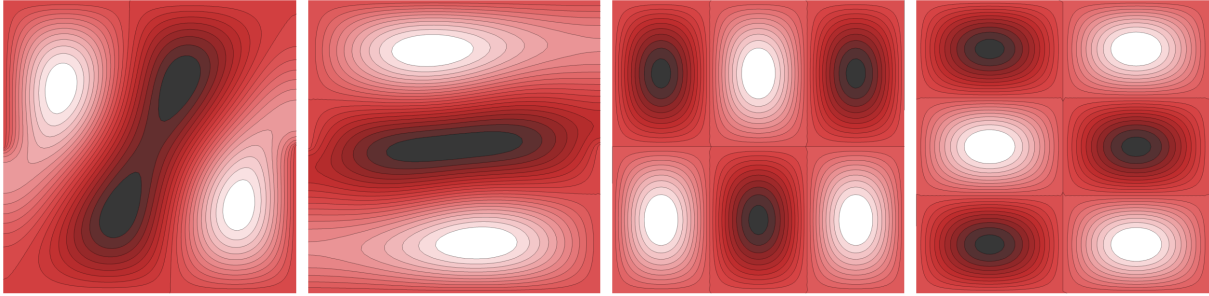
Iščemo lahko tudi lastne vrednosti bolj zapletenih objektov, kot na primer Möbiusov trak, ki je le na pol sklenjen, druga polovica pa ostane pripet rob, tako kot pri kvadratni membrani. Takšen konstrukt ni v celoti povezan, zato bodo v zbirki lastnih nihajnih načinov tudi takšni, ki „puščajo“, oziroma so „poškodovani“. Numerično ta del ni bil zahteven, saj je bilo potrebno le prirediti programsko kodo za Möbiusov trak tako, da upošteva le pravo polovico roba. Še vseeno pa to ne spremeni dejstva, da moramo obravnavati rešitve vektorskega in skalarnege polja ločeno. Na spodnji skici je pripet rob označen z rdečo črto.



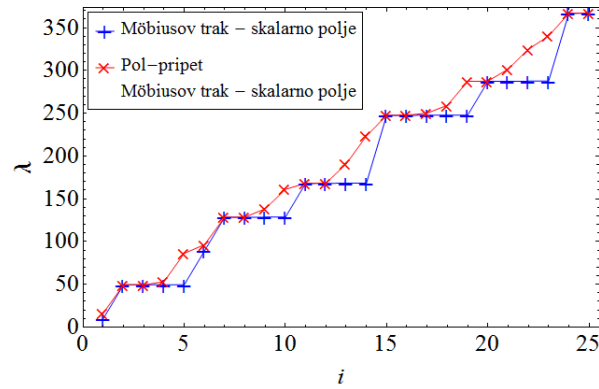
4.5.1 Skalarno polje

V tem primeru pričakujemo, da se bodo pojavili tudi takšni nihajni načini, ki se do sedaj še niso pojavili, kar je posledica prirezanega roba. Oglejmo si nekaj prvih lastnih nihajnih načinov za nihanje skalarnege polja:





Res opazimo nekaj novih načinov, poleg tistih znanih, ki v tem primeru izpolnjujejo robne pogoje, kljub delno pripetemu robu. Pravzaprav to v resnici niso novi nihajni načini, ampak so stari, ki pa so poškodovani. Posebej zanimiv je prvi nihajni način, ki je pri Möbiusu za skalarno polje precej drugačen, kot bi tu sklepali o njegovi prvotni obliki. Pripet rob povzroči tudi, da sedaj degenerirani lastni nihajni načini, ki so prostorsko zamaknjeni, niso več prisotni, saj zaradi pripetega roba ne morejo več izpolnjevati robnega pogoja. Po drugi strani, nihajni načini ki ohranjajo robni pogoj, ostanejo nespremenjeni. Ti efekti so najočitnejši na naslednjem grafu, ki prikazuje lastne vrednosti skalarnega polja za primer ne-pripetega in pripetega Möbiusovega traku:



Na zgornjem grafu vidimo, da se lastne vrednosti za primer pripetega Möbiusa „odlepijo“ od tistih vrednosti za v celoti povezan Möbiusov trak. Tiste lastne vrednosti, ki ostanejo pripete, pripadajo nihajnim načinom, ki niso prostorsko zamaknjeni glede na območje kvadrata. Spodaj je prikazanih nekaj značilnih primerov lastnih nihanj prirezanega traku za skalarno polje:



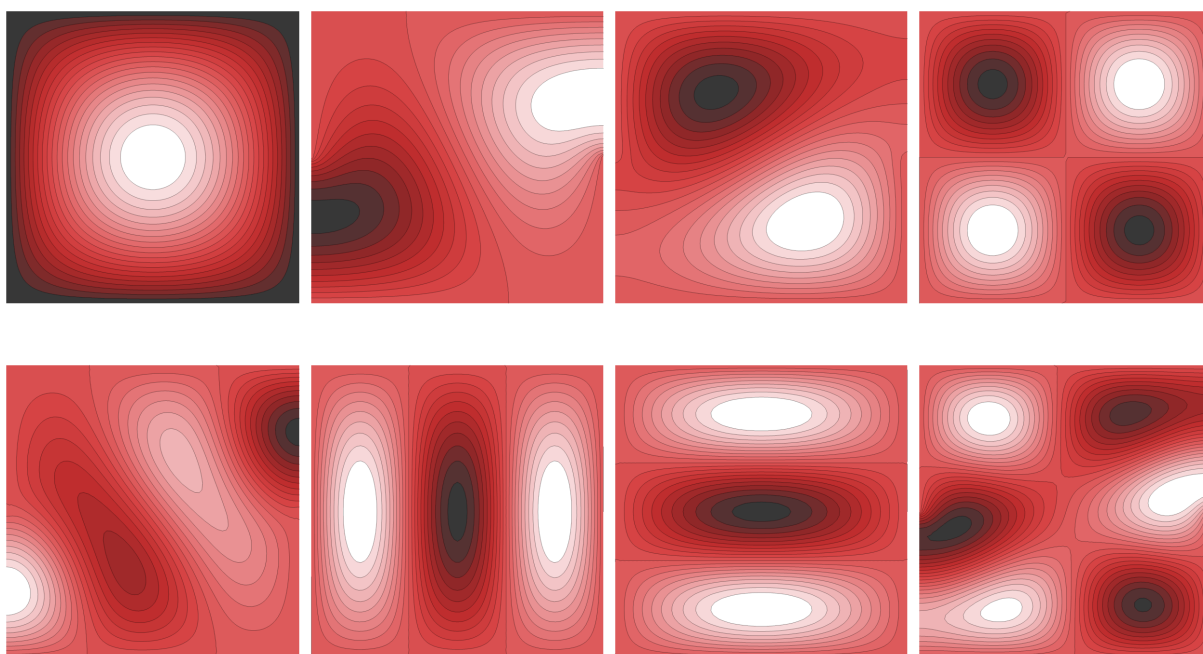


Pri nekaterih nihajnih načinih je opazna razlika med sedaj in prej, saj pripeti rob „duši“ nihanje na tistem področju. Po drugi strani nekatera nihanja očitno ostanejo nedotaknjena, ker imajo vozle na območju zleпка, kot je bilo že omenjeno.

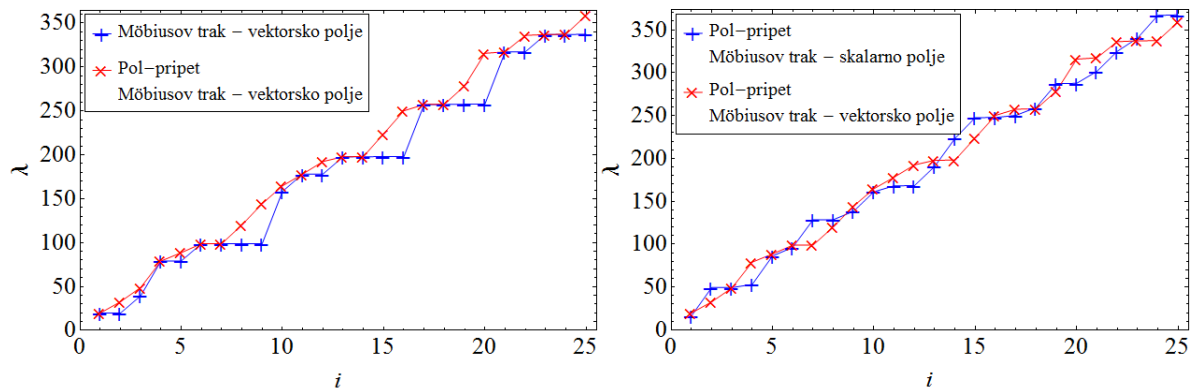
Lastna nihanja skalarne polja: <http://gfycat.com/AjarEvilCamel>

4.5.2 Vektorsko polje

V primeru lastnih nihanj vektorskega polja imamo podobno situacijo kot v primeru nihanj skalarne polja. Zopet imamo Lastne nihajne načine, ki so se ohranili poleg tistih, ki so zdaj poškodovani.

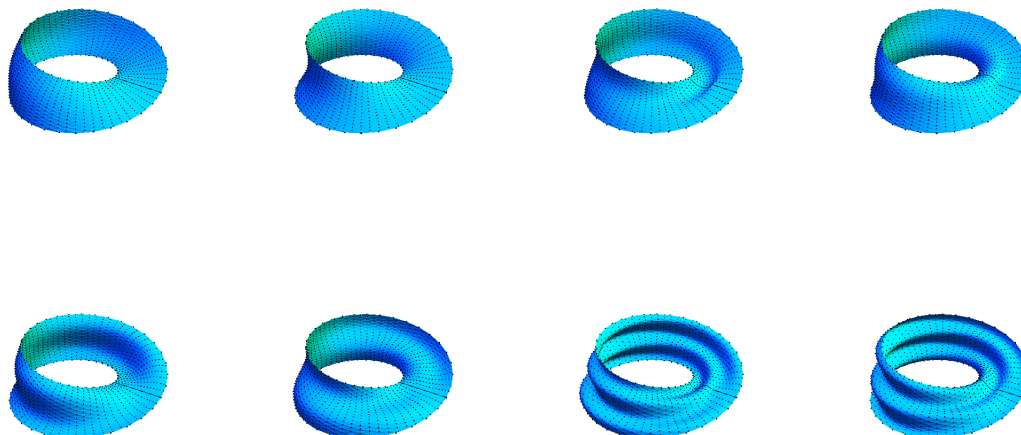


Oglejmo si te efekte še za primer lastnih nihanj vektorskega polja na spodnjem levem grafu, ki prikazuje primerjavo med lastnimi vrednostmi prej in sedaj. Desna slika prikazuje primerjavo med lastnimi vrednostmi za nihanja skalarne in vektorskega polja oboje za primer pripetega Möbiusovega traku.



Tudi v tem primeru se lastne vrednosti za primer pripetega Möbiusa „odlepijo“ od tistih vrednosti za v celoti povezan Möbiusov trak, kot vidimo na levem grafu. Po drugi strani lahko na desnem grafu vidimo, da so si nekatere lastne vrednosti bližje kot prej. Lahko bi naivno pričakovali, da so si kakšni nihajni načini postali enaki, vendar je to zgolj slučaj, saj so si nihajni načini med sabo še vseeno precej različni. Ne moremo pa več trditi, da se obe vrsti lastnih nihanj izključujeta, saj poškodovane lastne funkcije niso več pravokotne med seboj.

Oglejmo si še nekaj značilnih lastnih nihanj vektorskega polja za pripet Möbiusov trak:



Tudi v tem primeru vidimo, da so nekateri lastni nihajni načini poškodovani, kjer je jakost nihanja na območju pripetega roba oslABLJENA. Kot pri nihanju skalarne polja so tudi tu lastna nihanja vektorskega polja, ki so ostala nespremenjena, zaradi dejstva, ker ima nihanje na zlepku voz. Lastna nihanja vektorskega polja: <http://gfycat.com/OilyScarceBlackcrappie>