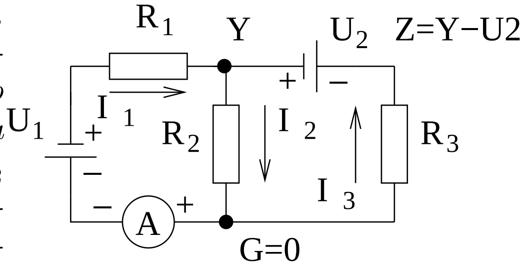
1 naloga

V vezje na sliki vežemo ampermeter. Podatki U_1=5 V, U_2=3 V, R_1=32 Ω, R_2=15 Ω, R_3=72 Ω. Koliko bi moral kazati ampermeter? No, dejansko pokaže tok 80 mA. Če privzamemo da je vpliv notranje upornosti izvora U_2 zanemarljiv – kakšna je notranja upornost baterije U_1? Ampermeter ima zanemarljivo notranjo upornost.



To nalogo se da rešiti na tri načine. Ilustriram samo za prvi del naloge. Tokovi tečejo v smereh označenih na skici.

- Kirchoffov izrek za napetosti. Izvor U_1 , upor R_1 in R_2 sestavljajo električni krog, zato bo vsota padcev napetosti na uporih enaka gonilni napetosti. Podobno velja za U_2 , R_2 in R_3 . Poleg tega imamo še Kirchoffov izrek za tokove v točki Y - $I_1 + I_3 = I_2$, kjer smo upoštevali, da je tok skozi upor R_3 in napetostni izvor U_2 enak. Imamo torej sistem treh enačb s tremi neznankami (I_1 ,I_2 ,I_3):

$$U_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \tag{1}$$
$$U_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \tag{2}$$
$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{3}$$

Zdaj rešimo za I_1 :

$$(1): \; R_2 I_2 = U_1 - R_1 I_1 \text{ in } (2): \; R_2 I_2 = U_2 - R_3 I_3 \rightarrow U_1 - R_1 I_1 = U_2 - R_3 I_3$$
$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = U_1 - U_2 \quad (\star)$$
$$(1): \; R_1 I_1 + R_2 I_2 = U_1 \text{ in } (3): \; I_2 = I_1 + I_3 \rightarrow R_1 I_1 + R_2(I_1 + I_3) = U_1$$
$$(R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_3 = U_1 \qquad (\circ)$$
$$(\star) \cdot R_2/R_3 \rightarrow \frac{R_1 R_2}{R_3} I_1 - R_2 I_3 = \frac{R_2}{R_3}(U_1 - U_2)$$
$$(\star) \cdot R_2/R_3 + (\circ) \rightarrow (R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}) I_1 = U_1 + \frac{R_2}{R_3}(U_1 - U_2)$$
$$\frac{32 \cdot 15}{72} = 6.7 \qquad (32 + 15 + \frac{32 \cdot 15}{72})\Omega \; I_1 = (5 + \frac{15}{72}(5 - 3))\text{V}$$
$$(53.7 \; \Omega) I_1 = 5.42 \text{ V} \rightarrow I_1 = \frac{5.42}{53.7} \text{ A} = 101 \text{ mA}$$

- Kirchoffov izrek za tokove in Ohmov zakon. Postavimo še potencial točke G na 0, kot kaže slika, Y pa je hkrati ime in potencial točke Y. Premisliti velja še, da bo tok skozi napetostni izvor U_2 enak toku I_3 (Kirchoff za tokove v točki Z) in da bo potencial točke Z=Y-U_2 . Začnemo s (3) prejšnje naloge in tokove napišemo kot razliko potencialov deljeno z upornostjo:

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{4}$$

$$\frac{U_1 - Y}{R_1} + \frac{0 - (Y - 3)}{R_3} = \frac{Y}{R_2} \tag{5}$$

Kar rešimo za Y:

$$\frac{U_1 - Y}{R_1} + \frac{3 - Y}{R_3} = \frac{Y}{R_2} \rightarrow Y(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}) = \frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_3}$$

$$Y(\frac{1}{72} + \frac{1}{32} + \frac{1}{15})\frac{1}{\Omega} = (\frac{5}{32} + \frac{3}{72})\frac{\mathrm{V}}{\Omega} \rightarrow Y\frac{20 + 45 + 96}{1440} = \frac{5 \cdot 45 + 3 \cdot 20}{1440}\ \mathrm{V}$$

$$Y = \frac{285}{161}\ \mathrm{V} = 1.77\ \mathrm{V}$$

Tok pa je $I_1 = (U_1 - Y)/R_1$=3.23 V/32 Ω=101 mA (enako kot prej). Iz akademskih razlogov bomo pokazali, da pridemo do povsem iste enačbe za tok:

$$R_1 I_1 = U_1 - Y = U_1 - \frac{\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_2}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{U_1}{R_2} + \frac{U_1}{R_3} - \frac{U_2}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$R_1 I_1 = \frac{U_1 + \frac{R_2}{R_3}(U_1 - U_2)}{\frac{R_2}{R_1} + 1 + \frac{R_2}{R_3}} \rightarrow I_1 = \frac{U_1 + \frac{R_2}{R_3}(U_1 - U_2)}{R_2 + R_1 + \frac{R_1 R_2}{R_3}},$$

kar pa je enako kot poprej.

- Tretji način pa je tako imenovana superpozicija. Najprej določimo tok, ki ga skozi R_1 poriva U_1 , potem pa še prispevek baterije U_2. Ko računam prispevke posamezne baterije, moramo preostalo (ali preostale, če jih je več) kratko skleniti oziroma nadomestiti z žico.

  Kakšen bo torej tok skozi R_1 , ko je U_1 priključena, U_2 pa kratko sklenjena? Baterija U_1 vidi upor R_1 zaporedno vezan z vzporednima uporoma R_2 in R_3 . Nadomestna upornost bo torej:

$$R'_n = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 32 + \frac{15 \cdot 72}{87}\Omega = 44,4\Omega \tag{6}$$

Zaradi tega pa bo tekel tok I'_1=U_1 /R'_n=5 V/44,4 Ω=112,6 mA.

Zdaj pa kratko sklenemo U_1 in povežemo U_2 . Nadomestna upornost sta vzporedno vezana R_1 in R_2 za njima pa zaporedno vezan R_3 :

$$R''_n = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + R_3 = (\frac{15\cdot 32}{47} + 72)\Omega = 82,2\ \Omega \tag{7}$$

in celoten tok I''_3=U_2/R''_n=3 V/82,2Ω=36,5 mA. Skozi R_1 teče le del tega toka – ta se deli sorazmerno med R_1 in R_2 . Ker bo padec napetosti na R_1 in R_2 enak, bo $R_1I''_1 = R_2I''_2$ in $I''_2 = R_1/R_2 \cdot I''_1$, hkrati pa bo vsota enaka $I''_1+I''_2 = I''_3$. Vstavimo izraz za I''_2 in dobimo $(1+R_1/R_2)I''_1 = I''_3$ in $I''_1 = (R_2/(R_1+R_2))I''_3 = (15/47)\ 36.5\ \text{mA} = 11.6\ \text{mA}$.

Ko je priključena U_2 , teče tok ravno v drugo smer kot takrat, ko je priključena U_1 . Skupni tok bo torek razlika $I'_1-I''_1$=112.6-11.6 mA=101 mA. Rezultat je spet enak. Spet preverimo še enakost enačb:

$$\begin{aligned}
I_1 = I'_1 - I''_1 = \frac{U_1}{R'_n} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{U_2}{R''_n} &= \frac{U_1}{R_1+\frac{R_2R_3}{R_2+R_3}} - \frac{R_2}{R_1+R_2}\frac{U_2}{R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \\
&= \frac{U_1(R_2+R_3)}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} - R_2\frac{U_2}{R_3(R_1+R_2)+R_1R_2} \\
&= \frac{U_1(R_2+R_3)}{R_3(\frac{R_1R_2}{R_3}+R_1+R_2)} - R_2\frac{U_2}{R_3(R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3})} = \\
&= \frac{1}{R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3}}(U_1\frac{R_2+R_3}{R_3} - U_2\frac{R_2}{R_3}) = \frac{U_1+\frac{R_2}{R_3}(U_1-U_2)}{R_1+R_2+\frac{R_1R_2}{R_3}},
\end{aligned}$$

kar lahko primerjamo s prejšnjimi rezultati.

Ker sta tok skozi ampermeter in R_1 enaka (Kirchoffov izrek za tokove), se odgovor na prvi del naloge glasi **Teči bi moral tok 101 mA.**.
Drugi del naloge bomo rešili le z drugim načinom. Naloga pravi, da zares teče tok I_A=80 mA, ki je manjši od pričakovanega (101 mA). Nadomestimo zato U_1 z pokvečenim izvorom z notranjo upornostjo R_g. R_g in R_1 sta vezana zaporedno, zato ju nadomestimo z uporom $R_x = R_1 + R_g$. V drugem načinu

smo računali potencial v točki Y, ki ga zdaj označimo z Y':

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad \text{upoštevamo merjen tok!} \quad \rightarrow I_A + I_3 = I_2$$

$$I_A + \frac{U_2 - Y'}{R_3} = Y'R_2 \rightarrow I_A + \frac{U_2}{R_3} = Y'(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})$$

$$(0,08 + \frac{3}{72})\frac{\mathrm{V}}{\Omega} = Y'(\frac{1}{15} + \frac{1}{72})\frac{1}{\Omega} = Y'\frac{24+5}{360}\frac{1}{\Omega}$$

$$Y' = \frac{360}{29}(0,08 + \frac{1}{24})\ \mathrm{V} = \frac{360}{29} \cdot 0,122 = 1,51\ \mathrm{V} \quad \text{prej} \quad 1,77\ \mathrm{V}.$$

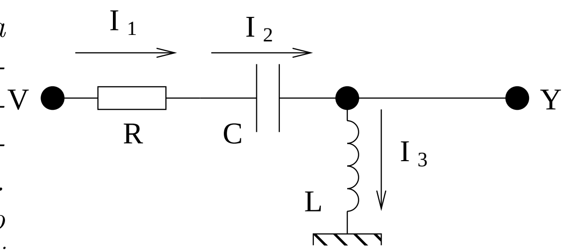
Upornost nam da Ohmov zakon:

$$R_x = \frac{U_1 - Y'}{I_A} = \frac{5 - 1,51\ \mathrm{V}}{0,08\ \mathrm{A}} = \frac{3,49}{0,08}\Omega = \frac{349}{8}\Omega = 43,6\ \Omega \tag{8}$$

in notranjo upornost $R_g = R_x - R_1 = 43,6 - 32$ Ω=11,6 Ω.

2 naloga

Upor, tuljava in kondenzator so vezani kot kaže slika. Doloi upornost upora R, tako da bo resonanca vsaj kritino dušena ($A(\omega)$ bo povsod manj kot 1). Na vhod V priključimo izmenično napetost s frekvenco 50 Hz in amplitudo 12 V. Kakšna bo vrednost na izhodu ko bo na vhodu napetost 12 V? Podatki L=20 mH, C=2200 μF.



Elementi sestavljajo delilec napetosti, vsi so vezani zaporedno:

$$T(\omega) = \frac{Y}{V} = \frac{Z_L}{(Z_R + Z_C) + Z_L} = \frac{i\omega L}{R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L} = \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC} \tag{9}$$

Izberemo si konstante ω_0=1/$\sqrt{LC}$ in τ=RC. Amplituda A(ω)=$\sqrt{T(\omega) \cdot T^*(\omega)}$

bo:

$$A(\omega) = \sqrt{(-(\omega/\omega_0)^2)^2}\sqrt{\frac{1}{1-\omega^2 LC + i\omega RC}\frac{1}{1-\omega^2 LC - i\omega RC}} =$$
$$= \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_0)^2\right)^2 + \omega^2\tau^2}}$$

Za τ=0 bo A(ω=ω_0) očitno več od 1. Če naj bo A(ω) povsod manjša od 1, bo morala biti tudi v maksimumu manjša od 1. Maksimum od A(ω) poiščemo z odvodom. Še prej pa naredimo premeno spremenljivke: $x = (\omega/\omega_0^2)$, $C = \tau^2\omega_0^2$. Z novimi spremenljivkami je:

$$A(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x)^2 + Cx}}$$

Odvajajmo A(x) po x in poiščimo ničlo odvoda (=lego maksimuma):

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)^2 + Cx}} + (-1/2)\frac{x(-2(1-x)+C)}{\sqrt{\left((1-x)^2 + Cx\right)^3}} = 0 \quad \text{množimo z } \sqrt{\left((1-x)^2 + Cx\right)^3}$$

$$(1-x)^2 + Cx + x(1-x) - C/2x = 0$$
$$(1-x)(1-x) + x(1-x) + C/2x = 0$$
$$1 - x + C/2x = 0$$
$$x(1-C/2) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{1-C/2} = \frac{1}{1-C'} \quad \text{s} \quad C' = C/2$$

Kolikšen je ta maksimum?

$$A_{max} = A(x = \frac{1}{1-C'}) = \frac{1}{1-C'}\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{1-C'})^2 + C\frac{1}{1-C'}}} =$$
$$= \frac{1}{(1-C')}\frac{1}{\sqrt{\frac{(1-C'-1)^2}{(1-C')^2} + \frac{2C'(1-C')}{(1-C')^2}}} =$$
$$= \frac{1}{(1-C')}\frac{(1-C')}{\sqrt{C'^2 + 2C'(1-C')}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{C'^2 - 2C'^2 + 2C'}} = \frac{1}{\sqrt{-C'^2 + 2C' - 1 + 1}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-((C')-1)^2}}$$

Imenovalec zgornjega izraza bo v najboljšem primeru 1, sicer bo vedno manjši, kar pomeni, da bo maksimum v najboljšem primeru 1, sicer pa vedno veji kot 1. Edina smiselna rešitev je, da mora biti $C' = 1$, A_{max}=1 in frekvenca x, kjer je ta maksimum dosežen, neskončno velika. Ker je $C' = C/2 = \tau^2\omega_0^2/2$, nam da to pogoj za najmanjši upor R:

$$\frac{(RC\omega_0)^2}{2} = 1 \rightarrow RC\omega_0 = \sqrt{2} \rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{C\omega_0}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{10^3}{\sqrt{20 \cdot 2,2\frac{As}{V}\frac{Vs}{A}}} = \frac{1000}{\sqrt{44s^2}} = \frac{1000}{6,6s} = 150s^{-1}$$

$$R = \frac{\sqrt{2} \cdot 10^3}{2,2\frac{As}{V}150s^{-1}} = \frac{1410 \text{ V}}{165 \text{ A}} = 8,4\ \Omega$$

Izberimo raje upor R=10 Ω, τ=22 ms.
Ojačanje za f_1=50 Hz, ω_1=2$\pi$$f_1$=314 s^{-1}.

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{314s^{-1}}{150s^{-1}} = 2,1; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = 4,4$$

$$\omega_1\tau = 314s^{-1} \cdot 22\ 10^{-3}\ s = 6,9 \quad (\omega_1\tau)^2 = 47,8$$

$$A(\omega_1) = \frac{(\omega_1/\omega_0)^2}{\sqrt{(1-(\omega_1/\omega_0)^2)^2 + \omega_1^2\tau^2}} = \frac{4,4}{\sqrt{(1-4,4)^2 + 47,8}} =$$

$$= \frac{4,4}{\sqrt{3,4^2 + 47,8}} = \frac{4,4}{\sqrt{11,4 + 47,8}} = \frac{4,4}{\sqrt{59,2}} = \frac{4,4}{7,7} = 0,57$$

Faza pri f_1=50 Hz. Računanje faze si poenostavimo s pravilom, da bo FAZA[cz]=FAZA[z] za poljuben nabor kompleksnega števila z in realnega števila c. Tako bo:

$$FAZA\left[\frac{-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + i\omega RC}\right] = FAZA\left[\frac{1}{1-\omega^2 LC + i\omega RC}\right] = FAZA\left[\frac{1}{1+i\frac{\omega RC}{1-\omega^2 LC}}\right]$$

Torej iščemo fazo kompleksnega števila oblike 1/1+ia=(1-ia)/(1+a^2) z realnim delom 1/1+a^2 in imaginarnim delom -a/1+a^2. Potem bo tangens faznega kota $\tan\delta$ =-a, oziroma v našem primeru:

$$\tan\delta(\omega) = -\frac{\omega\tau}{1-(\omega/\omega_0)^2} \tan\delta(\omega_1) = -\frac{6,9}{1-4,4} = +\frac{6,9}{3,3} = 2,1$$

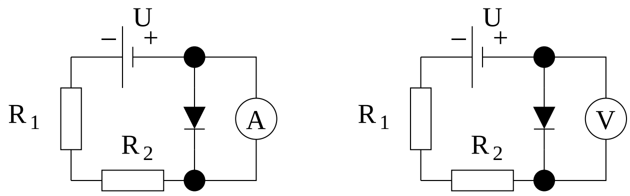
Vrednost na izhodu. Vhod U=U_0cos $(\omega_1$t). Izhod Y=A$(\omega_1)$$U_0cos(\omega_1$t+$\delta(\omega_1))$. Ko je vhod enak U_0=12 V, je t=0, in bo izhod samo Y(t=0)=A$(\omega_1)$$U_0cos(\delta)$. Če poznamo $\tan\delta$, bo $\cos\delta$=$\sqrt{1/(1+\tan^2\delta)}$, oziroma za naš primer:

$$\cos\delta = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\delta}} = \sqrt{\frac{1}{1+4,4}} = \sqrt{\frac{1}{5,4}} = 0,4$$

vrednost na izhodu pa bo Y=0,57·12 V · 0,4=2,9 V.

3 naloga

Tok in napetost skozi diodo naivno merimo z vzporedno vezanim ampermetrom in voltmetrom. Najprej izračunaj, kakšne vrednosti bosta pokazala amper- oziroma voltmeter in določi tok, ki teče skozi upor R_1. Potem izračunaj še tok in napetost na diodi, ko merilni inštrument odstranimo, ter vrednosti primerjaj s prej izračunanimi. Komentiraj rezultat (en stavek bo zadostoval). Podatki R_1=1 kΩ,R_2=2 kΩ, U=12 V. Vzemi, da je upornost ampermetra 0,5 Ω, upornost voltmetra pa 100 MΩ.



- **Vezava z ampermetrom**. Ker ima ampermeter zanemarljivo upornost, bo padec napetosti preko inštrumenta enak 0. Ob takem padcu teče skozi diodo tok I_D=0. Vseh 12 V napetosti izvora pade prek zaporedno vezanih R_1 in R_2 z nadomestno upornostjo $R_n = R_1 + R_2$=3 kΩ. Tok bo torej $I = U/R_n$ =12 V/3 kΩ=4 mA, in enak upor teče tudi skozi R_1.

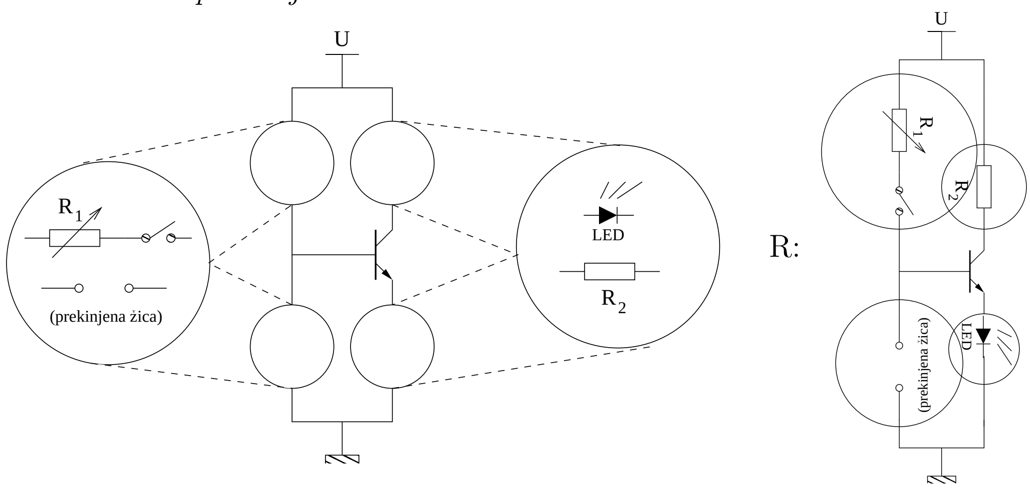
- **Vezava z voltmetrom**. Zdaj ima voltmeter neskončno upornost - tok teče skozi diodo. Zato je na diodi padec napetosti 0,6 V, kolikor kaže tudi instrument. Padec napetosti na zaporedno vezanih R_1 in R_2 bo $U_R = U - U_D$=12-0,6 V=11,4 V, tok skozi njiju pa $I = U_D/R_n$ =11,6 V/3 kΩ=3,87 mA.

- **Vezava brez inštrumenta**. Ker skozi diodo teče tok, bo padec na diodi 0,6 V. Tok skozi upora bo $(U - U_D)/R_n$=11,4 V/3 kΩ=3,87 mA.

- **Komentar**. Presenetljivo je, da vzporedno vezani ampermeter pravzaprav pokaže pravilni tok, čeprav bi zares moral biti vezan zaporedno s tokom. To je še ena od lastnosti diod, ki si jo je vredno zapomniti.

4 naloga

S tranzistorjem bomo zmanjšali tokovno obremenitev na stikalu za svetlečo diodo. Pravilno razporedi elemente v vezje (iz vsakega nabora gre en element v zgornji in en element v spodnji prostor), da bo ob sklenjenem stikalu LED svetila, ob izklopljenem pa počivala. Vzemi, da je preko LED padec napetosti 2.6 V, ko dioda prevaja, pri toku večjem od 20 mA pa moramo v trgovino po novo, napajalna napetost pa je 4.5 V. Določi največjo vrednost spremenljivega upora R_1 in navadnega upora R_2 da bomo tok v diodi lahko spreminjali med 1 in 20 mA!



Elemente postavimo tako kot kaže skica. Ker imamo npn tranzistor, bo tok tekel v bazo, zato bomo tranzistor odprli z vezavo baze na pozitivno napetost in ne zemljo. Zato gre stikalo proti U, prekinjena žica pa na zemljo. Na desni strani je razporeditev poljubna, v obeh primerih ob LED svetila, regulacija pa je lažja (in lažje razumljiva) pri prikazani vezavi.
Računanje parametrov. Napetost na bazi bo $U_B = U_{LED} + U_D$=2,6+0,6 V=3,2 V. Tok skozi bazo bo $I_B = I_C/\beta$, kjer je β =100 za tipičen tranzistor. Skozi LED pa bo tekel emitorski tok $I_E = I_B + I_C \approx I_C$ za zgoraj omenjeno β. Ko se bo I_E spreminjal od 1 do 20 mA, se bo I_B spreminjal od 0,01 do 0,2 mA. Najmanjša upornost spremenljivega upora bo 0, o razmerah takrat

malo kasneje - največjo pa moramo izbrati tako, da bo dajala najmanjši tok, ki si ga še želimo - torej 0,01 mA. Takrat bo $R_1^{max} = (U - U_B)/I_B^{min}$ =(4,5-3,2) V/ 0,01 mA=130 kΩ. Ko bo upornost R_1 enaka nič, bo tranzistor v nasičenju. Takrat si mislimo, da sta emitor in kolektor povezana z žico z upornostjo nič. Spodnji konec upora R_2 bo tako na potencialu $U = U_{LED}$, tok skozenj pa bo (po Ohmovem zakonu) $I_2 = (U - U_{LED})/R_2$. Tok I_2 bo tekel tudi skozi LED, zato naj ne bo večji od 20 mA. V najslabšem primeru, ko bo kar enak, bomo imeli upor $R_2 = (U - U_{LED})/I_2^{max}$=(4,5-2,6 V)/20 mA=95 Ω.