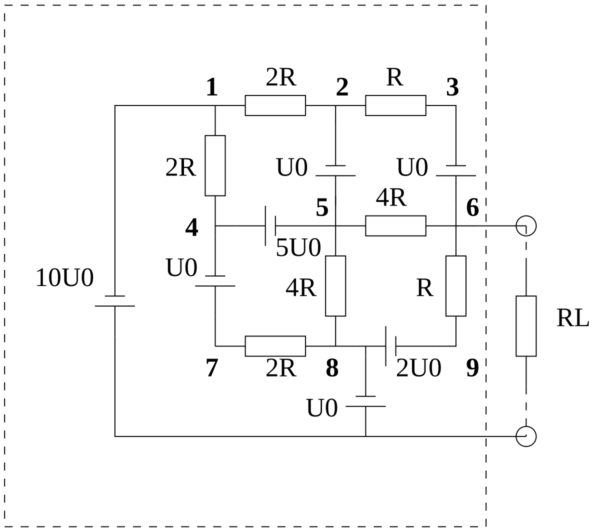
# 1. izpit iz Elektronike za študente fiz. mer. tehnike, 2007/8 Rešitve




1. Označimo oglišča kot kaže slika. Tokove bomo označevali s parom indeksov ($I_{12}$ teče od točke 1 do točke 2), napetosti pa z enim indeksom ($U_1$ je napetost v točki 1).

   Poglejmo najprej napetosti:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 10U_0 \\
U_2 &= a \\
U_3 &= b \\
U_4 &= a - 6U_0 \\
U_5 &= a - U_0 \\
U_6 &= b - U_0 \\
U_7 &= a - 7U_0 \\
U_8 &= U_0 \\
U_9 &= 3U_0
\end{aligned}
$$

   Za dve neznani napetosti $U_2$ in $U_3$ smo uporabili par neznank $a, b$. Poiskati moramo torej dve enačbi za par neznank. Te bomo dobili z 2. Kirchoffovim izrekom. Poglejmo v točko 6. Velja:

$$I_{56} + I_{36} = I_L + I_{69} \qquad \text{in} \qquad I_{36} = I_{23}$$

   Izrazimo tokove z napetostmi, pa imamo prvo enačbo; upoštevamo, da je $R_L$=R.

$$
\begin{aligned}
\frac{(a - U_0) - (b - U_0)}{4R} + \frac{a-b}{R} &= \frac{b - U_0}{R} + \frac{(b - U_0 - 3U_0)}{R} \\
\frac{5}{4}a - \frac{13}{4}b + 5U_0 &= 0 \qquad | \times 4 \\
5a - 13b + 20U_0 &= 0
\end{aligned}
$$

   Za drugo enačbo se moramo malo bolj potruditi. Gremo v točko 5:

$$I_{45} + I_{25} = I_{56} + I_{58}$$

Zdaj pa zapišimo nekaj zvez, ki nam bodo dale manjkajoče tokove:

$$
\begin{aligned}
I_{45} &= I_{14} - I_{47} \\
I_{47} &= I_{78},
\end{aligned}
$$

podobno še za $I_{25}$:

$$I_{25} = I_{12} - I_{23}$$

Zberemo vse skupaj:

$$\frac{10U_0 - (a - 6U_0)}{4R} - \frac{(a - 7U_0) - U_0}{2R} + \frac{10U_0 - a}{2R} - \frac{a - b}{R} = \frac{(a - U_0) - (b - U_0)}{4R} + \frac{(a - U_0) - U_0}{4R}$$

$$
\begin{aligned}
-2\frac{3}{4}a + \frac{5}{4}b + 13\frac{1}{2}U_0 &= 0 \qquad | \times 4 \\
-11a + 5b + 54U_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Množimo zgornjo enačbo z 2 in seštejemo:

$$
\begin{aligned}
-a - 21b + 94U_0 &= 0 \qquad \rightarrow a = 94U_0 - 21b \\
490U_0 - 118b &= 0 \\
b &= \frac{490}{118}U_0 = 4.15U_0 = 8.3\ V \\
a = 94U_0 - 87.2U_0 &= 6.8U_0 = 13.6\ V
\end{aligned}
$$

In posledično

$$I_L = \frac{b}{R} = \frac{8.3\ V}{3\ k\Omega} = 2.8\ mA.$$

Še za Thenevinov izrek. Brez upora $R_L$ velja enačba za oglišče 5 kot zapisana zgoraj, iz enače za oglišče 6 pa brišemo prispevek toka skozi $R_L$. Dobimo:

$$\frac{(a - U_0) - (b - U_0)}{4R} + \frac{a - b}{R} = \frac{(b - U_0 - 3U_0)}{R}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{4}a - \frac{9}{4}b + 5U_0 &= 0 \qquad | \times 4 \\
5a - 9b + 20U_0 &= 0 \\
&\text{in} \\
-11a + 5b + 54U_0 &= 0
\end{aligned}
$$

Spet množimo zgornjo enačbo z 2 in seštejemo:

$$
\begin{aligned}
-a - 13b + 94U_0 &= 0 \qquad \rightarrow a = 94U_0 - 13b \\
490U_0 - 74b &= 0 \\
b &= \frac{490}{74}U_0 = 6.6U_0 = 13.2\ V \\
a = 94U_0 - 86U_0 &= 8U_0 = 16\ V
\end{aligned}
$$

Thenevinova napetost bo napetost v ogliščcu 6 brez upora $R_L$, torej $5.6U_0$=11.2 V. Thenevinov upor bo vezan zaporedno z bremenom, pa bo tekel tok kot izračunan zgoraj. Skupni nadomestni upor je:

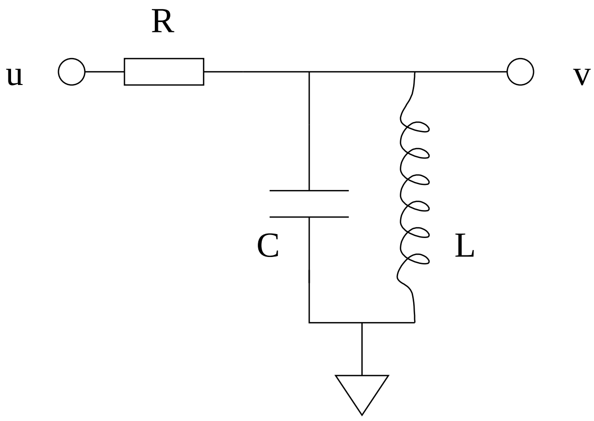
$$R_N = \frac{11.2\ V}{2.8\ mA} = 4\ k\Omega$$

in Thenevinov upor $R_{th}=R_N-R_L=1\ k\Omega$. FIN

2. Šum upora nadomestimo z napetostjo u na vhodu RLC člena. RLC vezje omeji frekvenčno območje šuma; za amplitudo na izhodu velja:

$$v_n^2 = 4kTR \int_0^\infty A^2(\omega)\, d\omega,$$

kjer je $A(\omega)$ razmerje amplitud signalov na izhodu ($v$) in vhodu ($u$) RLC vezja.




Najprej torej določimo $A(\omega)$ za vezje na sliki. Imamo delilnik napetosti, v spodnji veji sta vzporedno vezana dušilka L in kondenzator C, na zgornji pa je šumeči upor. Torej:

$$\frac{v}{u} = \frac{Z_C||Z_L}{Z_C||Z_L + R};$$

$$Z_C||Z_L = \frac{\cancel{i\omega} L/\cancel{i\omega} C}{1/i\omega C + i\omega L} = \qquad \Big| \cdot \frac{i\omega C}{i\omega C}$$

$$= \frac{i\omega L}{1-\omega^2 LC} = \frac{i\omega L}{1-\big(\omega/\omega_0\big)^2}; \qquad \omega_0^2 = 1/LC$$

$$\frac{v}{u} = \frac{i\omega L}{i\omega L + R(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2)} = \qquad \Big| \cdot \frac{C}{C}$$

$$= \frac{i\omega/\omega_0^2}{i\omega/\omega_0^2 + \tau(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2)} = \qquad \tau = RC$$

$$= \frac{i\omega/\omega_0}{i\omega/\omega_0 + \tau\omega_0(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2)};$$

$$A(\omega) = \sqrt{(\frac{v}{u})(\frac{v}{u})^*} = \frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{\big(\omega/\omega_0\big)^2 + \big(\tau\omega_0\big)^2\Big(1-\big(\omega/\omega_0\big)^2\Big)^2}}$$

Vidimo, da bi bil integral $A^2(\omega)$ precej zapleteno izračunati. Naloga svetuje, da namesto tega integrala izračunajmo raje integral škatlaste funkcije med $\omega_1$ in $\omega_2$, za kateri velja A($\omega_{1,2}$)=0.5:

$$\frac{\omega/\omega_0}{\sqrt{\left(\omega/\omega_0\right)^2+\left(\tau\omega_0\right)^2\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2}}=0.5$$

$$\frac{\left(\omega/\omega_0\right)^2}{\left(\omega/\omega_0\right)^2+\left(\tau\omega_0\right)^2\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2}=\frac{1}{4}$$

$$4\left(\omega/\omega_0\right)^2=\left(\omega/\omega_0\right)^2+\left(\tau\omega_0\right)^2\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2$$

$$3\left(\omega/\omega_0\right)^2=\left(\tau\omega_0\right)^2\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)^2$$

$$\pm\sqrt{3}(\omega/\omega_0)=\tau\omega_0\left(1-\left(\omega/\omega_0\right)^2\right)\qquad|\cdot\frac{\omega_0^2}{\tau}$$

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{\tau}\omega=\omega_0^2-\omega^2$$

$$\omega^2\pm\frac{\sqrt{3}}{\tau}\omega-\omega_0^2=0$$

$$\omega_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\tau}\pm\frac{\sqrt{3+4\omega_0^2\tau^2}}{2\tau}$$

Pozitivne rešitve za frekvenco $\omega$ dobimo le, če je drugi predznak vedno pozitiven. Razlika bo potem enaka:

$$\Delta\omega=\omega_2-\omega_1=2\frac{\sqrt{3}}{2\tau}=\frac{\sqrt{3}}{\tau}$$

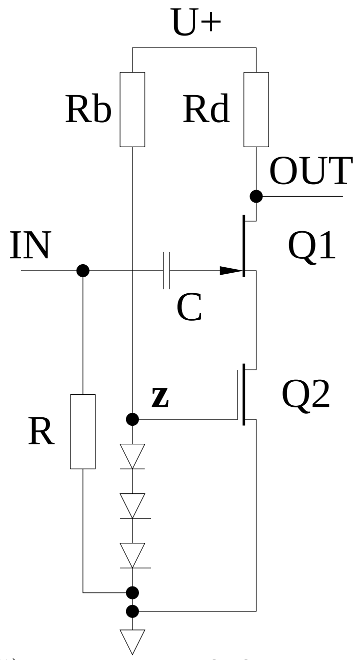
in še amplituda šuma:

$$v_n^2=4kTR\int_0^\infty A^2(\omega)\,d\omega=4kTR\Delta\omega=4kT\cancel{R}\frac{3}{\cancel{R}C}$$

$$v_n^2=\frac{4\cdot 0.025V\cdot 1.6\cdot 10^{-19}As\sqrt{3}}{10^{-9}As/V}=2.77\cdot 10^{-11}V^2$$

$$v_n=\sqrt{2.77\cdot 10^{-11}V^2}=5.3\cdot 10^{-6}V$$

3. Pri tej nalogi je treba najprej ugotoviti napetost v točki označeni s črko z. Ker imamo tri diode vezane zaporedno, z upora $R_b$ pa teče skozi njih tok vsaj 10 mA, bo na vsaki padec napetosti približno 0.6 V, oziroma skupaj 1.8 V. Iz enačbe za MOSFET torej lahko izračunamo tok skozi tranzistor $Q_2$:




$$I_d(Q_2) = \frac{I(ON, U_{REF})}{\big(U_{REF} - U_T(Q_2)\big)^2}\big(U_{GS}(Q_2) - U_T(Q_2)\big)^2$$
$$U_{GS}(Q_2) = U_z - 0 = 1.8\ V$$
$$I_d(Q_2) = \frac{500\ mA}{(10-1)^2\ \cancel{V^2}}\big(1.8 - 1\big)^2\ \cancel{V^2}$$
$$I_d(Q_2) = 3.95\ mA\ \approx\ 4\ mA$$

Kaj se zgodi z majhno motnjo $u = \Delta U_{GS,1}$ na vratih (G) tranzistorja $Q_1$? Zaradi nje se malce spremeni tok skozi $Q_1$. Za koliko? Poglejmo v enačbo za n-JFET in naredimo majhno spremembo $U_{GS}$:

$$I_{d,1} = \frac{I_{DSS}}{U_{T,1}^2}\big(U_{GS,1} - U_{T,1}\big)^2$$
$$\Delta I_{d,1} = \frac{I_{DSS}}{U_{T,1}^2}2\big(U_{GS,1} - U_{T,1}\big)\Delta U_{GS,1} = g_{m,1}u$$

Zdaj moramo vedeti dve dejstvi. Prvič, tok skozi $Q_2$ in $Q_1$ je enak ($I_d$=$I_{d,1}$=$I_{d,2}$=4 mA). To sledi po Kirchoffu. Drugič: transkonduktanca $g_{m,1}$ je odvisna od toka skozi tranzistor. Kako? Poglejmo:

$$I_{d,1} = \frac{I_{DSS}}{U_{T,1}^2}\big(U_{GS,1} - U_{T,1}\big)^2$$
$$\big(U_{GS,1} - U_{T,1}\big) = \sqrt{\frac{I_{d,1}}{I_{DSS}}U_{T,1}^2}$$
$$g_{m,1} = 2\frac{I_{DSS}}{U_{T,1}^2}\big(U_{GS,1} - U_{T,1}\big) = 2\frac{I_{DSS}}{U_{T,1}^2}\sqrt{\frac{I_{d,1}}{I_{DSS}}U_{T,1}^2} =$$
$$= 2\sqrt{\frac{I_{DSS}^{\cancel{2}}}{U_{T,1}^{\cancel{4}\,2}}\frac{I_{d,1}}{\cancel{I_{DSS}}}\cancel{U_{T,1}^2}} = 2\sqrt{\frac{I_{DSS}I_{d,1}}{U_{T,1}^2}} = 2\sqrt{\frac{1\ mA \cdot 4\ mA}{(-2)^2\ V^2}} = 2\ mS$$

Zaradi majhne spremembe toka $\Delta I_{d,1}$ se spremeni napetost na izhodu:

$$U_{OUT} = U_+ - R_d\ I_d$$
$$\Delta U_{OUT} = -R_d\ \Delta I_d = -R_d\ g_{m,1}\ u$$

Vstavimo zgoraj izračunani $g_{m,1}$=2 mS in $R_d$=1 kΩ, pa dobimo za signal $u$ z amplitudo 50 mV na izhodu napetost:

$$\Delta U_{OUT} = -R_d\ g_{m,1}\ u = -1\ k\Omega \cdot 2\ mS \cdot 50\ mV = -100\ mV.$$

Določimo še upor $R_b$:

$$R_b = \frac{U_+ - U_z}{I_{diode}} = \frac{(10 - 1.8)\ V}{10\ mA} = 820\ \Omega$$

4. Poglejmo, kaj se dogaja v točki z, kot skozi $Q_1$ teče (zaenkrat neznani) tok I. Iz zlatega pravila za tranzistorje sklepamo, da teče ves tok I skozi kondenzator. Za kondenzator pa velja:

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

kjer je U padec napetosti na kondenzatorju. Padec napetosti pa je enak napetosti na levi strani kondenzatorja minus napetosti na desni strani kondenzatorja. Na levi strani je zaradi zlatega pravila napetost enaka kot na + vhodu ojačevalca, torej 0. Na desni strani pa je napetost enaka z. Torej U=0-z in dU/dt=-dz/dt. Velja torej:

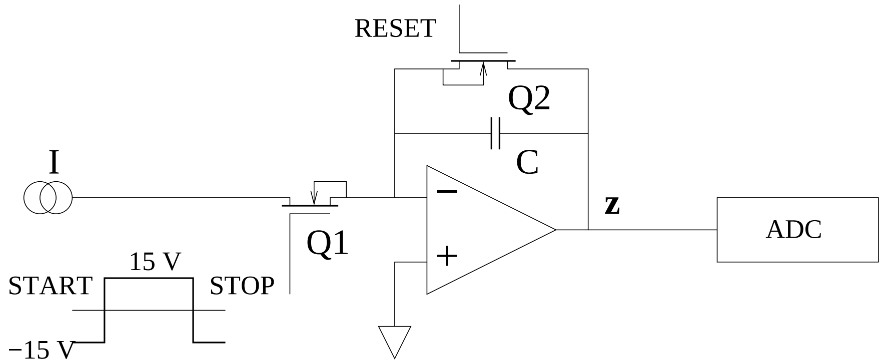
$$I = -C\ \frac{dz}{dt}$$

Rešimo to diferencialno enačbo po z:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{I}{C}$$
$$dz = -\frac{1}{C}I\ dt$$
$$z(t) = -\frac{1}{C}\int_{t=0}^{t} I(t)\ dt$$

Vendar je tok konstanten; integral bo kar enak $\int I\ dt = I \cdot t$ in

$$z(t) = -\frac{I}{C}\ t$$



S stikalom RESET najprej izpraznimo kondenzator. V trenutku, ko bo začel teči tok, bo torej napetost z enaka 0. Za največjo natančnost hočemo izkoristiti vso območje analogno-digitalnega pretvornika. Torej bomo napetost z$_{max}$, ki ustreza zgornjemu robu območja ADC (+2 V) dosegli po t$_{max}$ časa. Izrazimo neznani tok I:

$$z_{max} = -\frac{I}{C}\, t_{max}$$
$$I = -C\, \frac{z_{max}}{t_{max}} = -1\; nF\, \frac{2\; V}{200\; ns} = -10\; mA$$

Predznak pomeni, da tok teče v tokovni izvor; tokovni izvor je pravzaprav tokovni ponor, kot ga na primer lahko sestavimo iz npn tranzistorja.

Določimo še natančnost. Najmanjša razlika v napetosti, ki jo bo še prepoznal ADC je $\Delta z = z_{max}/2^n$, kjer je n število bitov. Pri 12-bitnem ADC bomo imeli:

$$\Delta z = \frac{z_{max}}{2^n} = \frac{2\; V}{2^{12}} = \frac{2\; V}{4096} \approx 0.25\; mV$$

Kakšni časovni razliki ustreza taka sprememba napetosti? Tudi za spremembe velja enaka enačba kot za maksimume; vstavimo nove vrednosti in dobimo rezultat:

$$\Delta z = -\frac{I}{C}\, \Delta t$$
$$\Delta t = -\frac{C}{I}\, \Delta z = -\frac{1\; nF}{-10\; mA}\, 0.25\; mV = 0.025\; ns.$$