Modelska analiza I
1999/2000
3. naloga - Integriranje z metodo Monte-Carlo

Andrej Studen, MA-FI

27. oktober 1999

1 Iskanje volumna in težišča teles

To je ena najbolj izrabljanih metod integriranja po metodi Monte-Carlo. Namreč računanje v več dimenzijah. Še posebej, če je naše območje grdo in ga težko uženemo s klašično integracijo po ravnih mejah.

Računal sem volumen krogle, presekane z valjem. Naj seka os valja ravnino xy v točki $(p.q)$. Iskane točke so v krogli, a zunaj valja. Torej bo kriterij za sprejem točke kot dobre kar:

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 \leq r_{valj}^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 ,$$

kot zahteva naloga. Kriterij ni zelo strog. V najslabšem primeru (p=q=0) pokaže račun, da odvržemo kako tretjino točk (natančni rezultati v tabeli). Zato lahko generiramo točke kar po krogli:

$$r = R\sqrt[3]{\xi_1}, \quad \vartheta = Arc\cos(2\xi_2 - 1), \quad \varphi = 2\pi\xi_3.$$

Krogla ni nujno homogena. Če hočemo imeti njeno maso in težišče, moramo integrirati masni diferencial $d\,m$. Tega lahko vtaknem v funkcijo, ali pa spremenimo porazdelitev točk tako, da so enakomerne po masi in ne po prostornini. Za našo gostoto:

$$\rho = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \rho_0,$$

je dovolj preprosto narediti slednje. φ in ϑ žrebamo tako kot prej, radij pa malo drugače:

$$r = R\sqrt[5]{\xi},$$

pa imamo normirano masno porazdelitev (normirana je tako, da je masa krogle ravno 1, podobno kot pri homogeni krogli).

Tabela 1: Iskanje volumna z MC. Za presekano kroglo pravih volumnov sicer ne poznam, razen za centralen prerez, kjer se numerični rezultat ujema s pravim na željeno število mest. Tudi napaka je v okviru predvidene, še več, oba odmika se prav dobro ujemata. Povprečima na 100 vrednosti, pri vsaki žrebam 10000 točk.

(p,q)	Volumen	Napaka	Pričakovana napaka	x	y	z
(0 , 0)	0.649904	0.00443039	0.00476812	-1.60741e-05	1.20316e-05	0.000115992
(0.15 , 0.15)	0.660233	0.00444264	0.00472788	-0.0720247	-0.0711937	3.09074e-05
(0.5 , 0.5)	0.794037	0.00386118	0.00399474	-0.00107144	-0.00101629	6.38908e-06

Tabela 2: Še primerjava vrednosti za nehomogeno kroglo. Seveda lahko nehomogenost pospravimo kar v porazdelitev, ki ni več enakomrna po volumnu, pač pa je enakomerna po masi. Vidi se, da zaradi mase, nabrane na robu (gostota je sorazmerna z r^2 ni več minimum mase pri $(p, q) = (0, 0)$, pač pa bolj proti robu, ko odrežemo tudi težje dele krogle.

(p,q)	Volumen	Napaka	Pri/vcakovana napaka	x	y	z
(0 , 0)	0.758351	0.00402705	0.00428655	-0.000911186	-9.57043e-05	-7.84112e-05
(0.15 , 0.15)	0.749941	0.00455719	0.00435917	-0.0276015	-0.0274311	-0.000132856
(0.3 , 0.3)	0.738084	0.00411997	0.00440906	-0.036742	-0.0366835	-0.000152793
(0.45 , 0.45)	0.770428	0.00488594	0.00418042	-0.0311911	-0.0313948	-0.000104076
(0.6 , 0.6)	0.837355	0.00393089	0.00370548	-0.0202994	-0.0202102	-1.05638e-05

Tabela 3: Pri valju je že bolje, saj poznamo prave rezultate. Tako lahko vrednosti celo primerjamo. Vidimo, da MC dobro deluje, težav z iskanjem lastnih vrednosti pa ne bomo imeli. Vrednosti so podane brez enot, vzel sem $R = h = \rho = 1$.

	pravi	račun
volumen	0.889931	0.889859
x	-0.0801603	-0.0800812
y	0.324147	0.324333
z	0.263919	0.263716
x^2	0.115152	0.115249
y^2	0.155232	0.15526
z^2	0.10868	0.108499
xy	-0.0212372	-0.0212696
xz	-0.0104644	-0.01046
yz	0.0676237	0.067668

Natančnost pa bomo ocenili s številom točk (N) in razmerjem prostornin takole:

$$\sigma_{MC} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}$$

Za p sem vzel kar razmerje med dobrimi točkami in vsemi izžrebanimi točkami. To σ pa bomo primerjali z odmikom samega rezultata, ki ga podaja formula:

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2},$$

kjer so i indeksi zaporednih meritev točk. Rezultate podaja preglednica. Samo za ilustracijo sem dodal še prereze po ravnini xy.

2 Vztrajnostni moment

Za tak stožec je lepo to, da lahko integrale izračunamo tudi striktno analitično in jih primerjamo s pravimi vrednostmi. Tako lahko opazujemo tudi, kako se rezultat približuje pravemu.

Točke generiramo po stožcu tako kot pri prejsnji nalogi (`m1-02`), odvržemo pa le kako desetino točk. Tako napake kot tudi napako metode določimo kot pri prejšnji nalogi, a gledamo lahko tudi prave rezultate.

3 Rojevanje žarkov gama v krogli

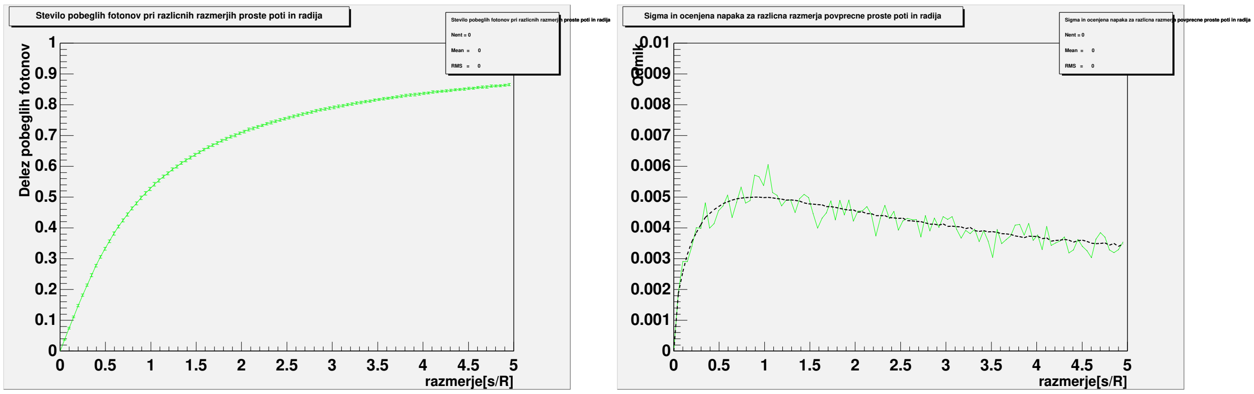
Žarek gama se lahko rodi kjerkoli v krogli in lahko odleti v katerokoli smer. Tako imao navidez kar pet prostostnih stopenj (tri za opis lege in še dve za opis smeri žarka), vendar je pač krogla neznansko simetrično

Tabela 4: Opazovanje napak. Vidimo, da se porazdelitve ožajo (to nam pove σ) z naraščajočim številom točk in da se dejanske napake ravnajo po napovednaih odstopanjih.

N	volumen	pričakovana napaka	σ	dejanska napaka povprečja
1000	0.89081	0.011065	0.00944452	0.000879
10000	0.889859	0.00332202	0.00310759	0.000072
100000	0.89003	0.000870864	0.000986243	0.000099

bitje. Tako lahko kar tri dimenzije pozabimo. Najprej povsem zadostuje, da opišemo to'ko rojstva samo z oddaljenostjo od izhodišča. Seveda je za vse točke na istem radijo potek poskusa povsem enak. Torej lahko postavimo točko z radijem r tudi na os z (dobili smo točko $(0, 0, r)$) in pridobimo še simetrijo po kotu φ. Ostane nam le še kot ϑ. Porazdelitve po obeh že poznamo. Zanima nas le še oddaljenost d od točke rojstva do roba. Izkaže se, da je:

$$d = -r\cos\vartheta + \sqrt{1 - r^2(1 - \cos^2\vartheta)}.$$



Slika 1: Rezultat tretje naloge. Krivulje narašča skoraj kot eksponent, a ze če izračunamo le najpreprostejši integral analitičnega računa, dobimo mešanico hiperboličnega sinusa, kosinusa in še racionalno funkcijo. A vseeno se zdi potek krivulje logičen, logična in pričakovana pa je tudi napaka, ki jo določa ravno razmerje na levi sliki (črtkano krivuljo na desni). Dejanska napaka skače, a prav lepo in v skladu s teorijo.

Analitično re'itev podaja integral:

$$\int_0^1 r^2\,dr \int_{-1}^1 e^{-\frac{\sqrt{1-r^2(1-t^2)}-rt}{\overline{s}}}\,dt,$$

ki pa ni preprosto izračunljiv, zato sem se zadovoljil z numeričnimi rezultati. Za te pa rabimo še generator dolžine žarka v absorbirajoči snovi. Ker gre za dogodke, neodvisne od lege in prejšnjih dogodkov, je dolžina čakanja dogodek eksponentno porazdeljena. Tako dobimo pot žarka iz verjetnostne porazdelitve:

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{\overline{s}} e^{-\frac{s}{\overline{s}}},$$

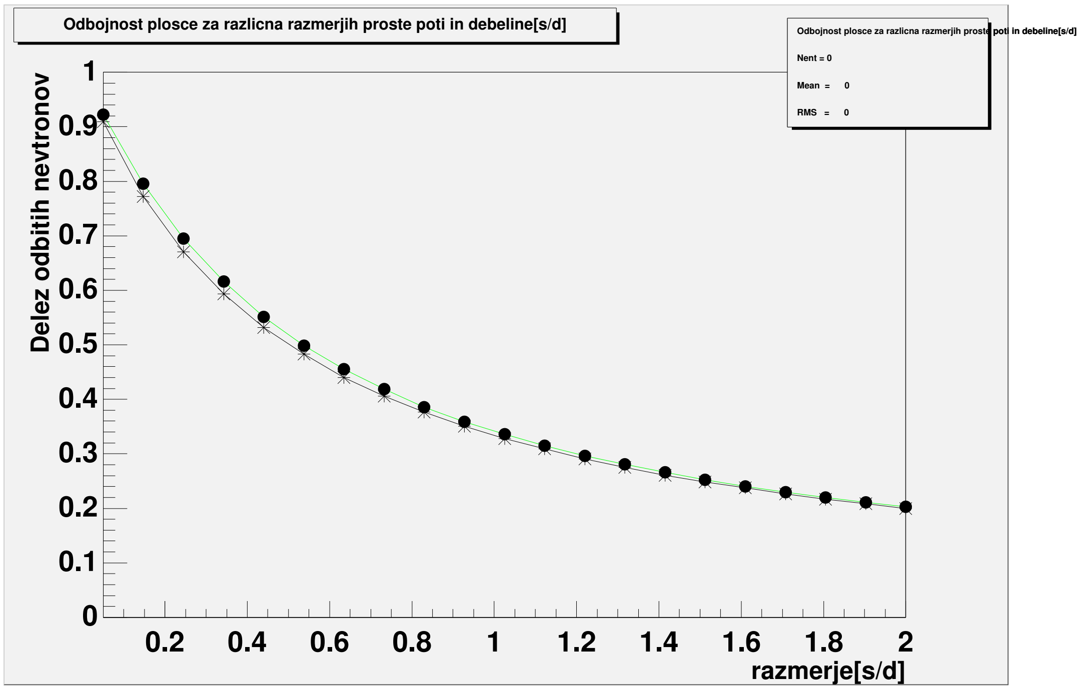
ki jo generirajo števila oblike:

$$s = \overline{s}\log(1 - \xi).$$

Za uspešne štejemo tisteżarke, katerih s je daljša od razdalje d za določen poskus, medtem ko so vsi ostali neuspešni. Variiral sem tudi $\overline{s}$, kar kaže graf.

4 Nevtronski reflektor

Tu pa imamo problem, ki je neskončno dimenzionalen. Pri krogli smo že po enem poskusu vedeli za izid, tu pa je od prejsnjega poskusa odvisno, kako nadlajujemo. Vsaka nova smer je lahko že zadnja ali pa nas odvede samo do novega poskusa.



Slika 2: Zvezdico nosi krivulja (naprej-nazaj) modela, medtem ko je s pikami opremljen izotropni model. Sliki sta si presenetljivo podobni, včasih celo v okviru napake, a so vrednosti vseeno dobljene na bistveno dugačen način,kar pokaže podrobnejša analiza. Tole ni samo eksponent, je gotovo še malo kakih hiperboličnih sinusov in podobne navlake.

Model nevtronskega reflektorja. Nevtroni vpadajo pravokotno na debelo ploščo iz snovi, v kateri se nevtroni sipljejo z znano povprečno prosto potjo. Razmerje med debelino plošče in prosto potjo je edini parameter našega reflektorja. Analitične rešitve ni, obstajajo le simulacije. Pri vsakem poskusu na robu reflektorja izračunamo prosto pot, ki jo bo imel nevtron v sredstvu - le-ta je porazdeljena po eksponentni porazdelitvi z enakimi argumenti kot tista pri krogli:

$$s = \frac{1}{\bar{s}} e^{-\frac{s}{\bar{s}}},$$

nato pa na vsakem koraku določimo smer sipanja in novo pot, ki jo bo delec prepotoval v tisti smeri. Kriterij za določanje uspelosti oz. neuspelosti poskusa je samo globina, z, zato je to edini kazalec stanja. Torej moramo imeti funkcijo oblike:

$$z_{i+1} = f(z_i, random),$$

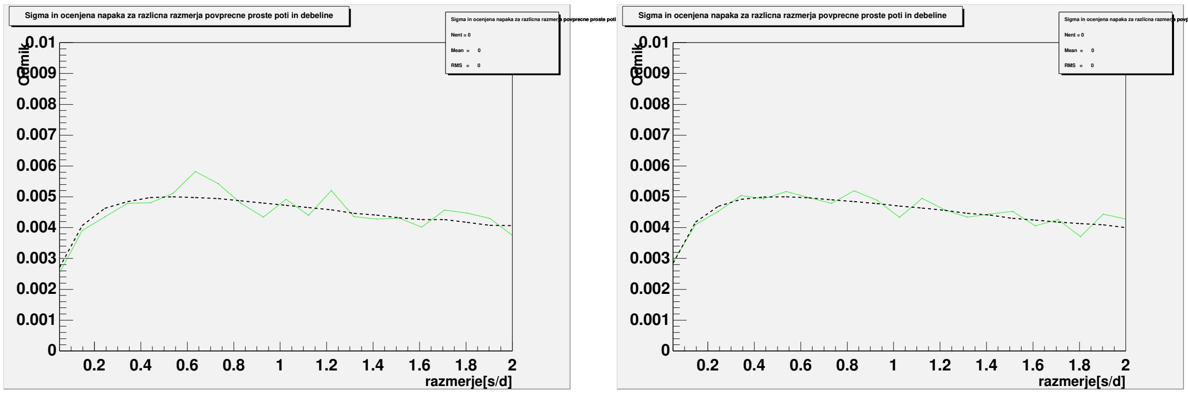
ki nam bo povedala lego po novem koraku. Za primer dvosmernega (naprej-nazaj) sipanja je:

$$z_{i+1} = z_i + \frac{2 * \xi_1 - 1}{|2 * \xi_1 - 1|} s_{\xi_2},$$

kjer je s_{ξ_2} po eksponentni porazdelitvi generirano število iz enakomerno porazdeljenega ξ_2 (formula pri 3. nalogi). Če pa imamo realistično izotropno sipanje, lahko zaradi simetrije izpustimo opazovanje prečne dimenzije in generiramo kot ϑ namesto prejšnje odločitve (naprej-nazaj). Ta je enakomerno porazdeljen po $\cos\vartheta$, globino pa izračunamo s produktom $s\cos\vartheta$, tako da je preprosto:

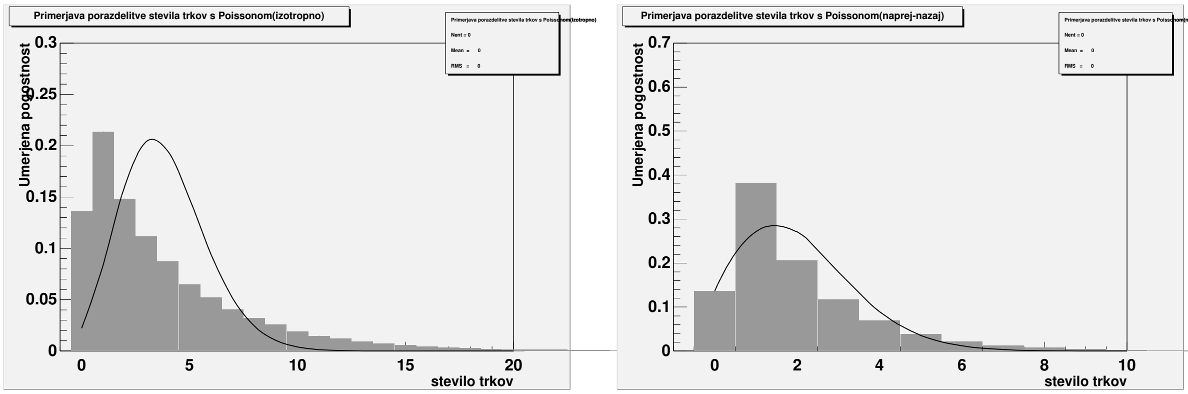
$$z_{i+1} = z_i + (2 * \xi_1 - 1) s_{\xi_2},$$

kar je očitno močno podobno (naprej-nazaj) primeru. Zato so tudi odbojnosti tipično podobne, vendar pa podorbnejša analiza odkrije razlike.

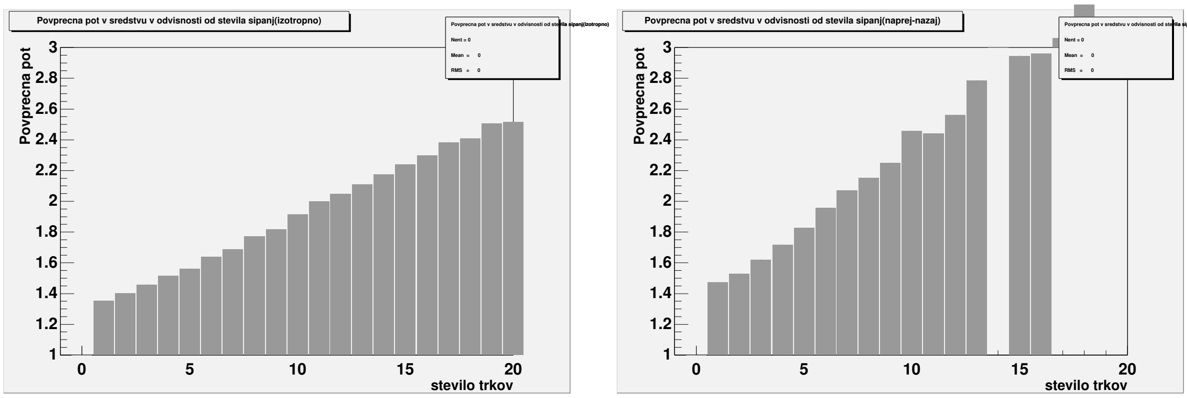


Slika 3: Primerjamo σ, izmerjeni in pričakovai iz binomske porazdelitve. Vidimo, da dejanska vrednost še pleše okrog prave vrednosti, kar je po 100 povprečnjih čisto vzpodbudno. Čista linija pričakovane napake je posledica zvezne funkcije uspelih nevtronov (p). Zanimivo je tudi, da ima napak svoj maksimum in da lahko zunaj tega področja vrednosti natančneje določimo. Levo za izotropni model, desno za preprostejši model.

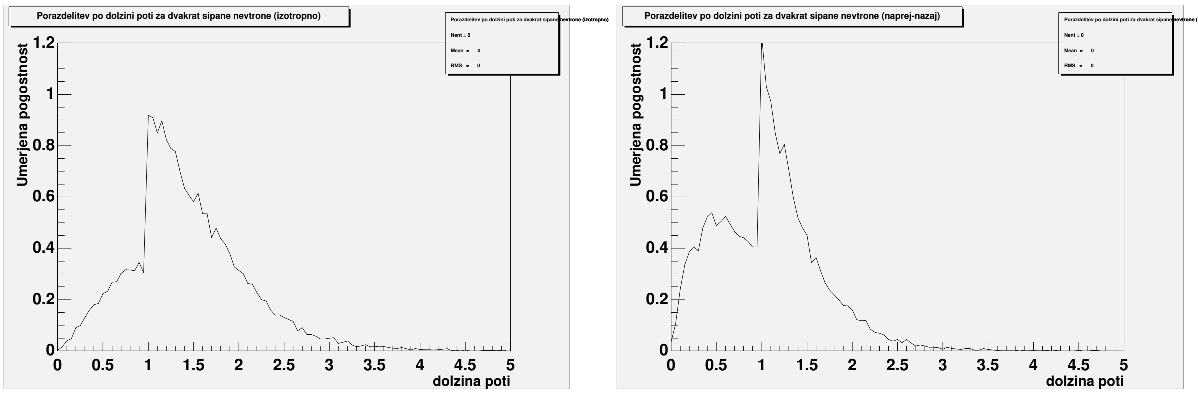
Zanimala me je porazdelitev po številu trkov (sipanj). Ker so rezultati nenegativna cela števila, sem takoj začel iskati vzporednice s Poissonovo porazdelivijo. Navidezno gre za dogodke, neodvisne med seboj in neodvisne od debeline plošče, kar zahteva tudi Poissonova porazdelitev. Vendar pa je Poissonova porazdelitev definirana na časovnem intervalu (dogodku) konstantne širine. To imamo tudi mi, saj je debelina plošče konstantna. Ni pa konstanta pot po plasti, kar kažejo tudi preostale slike za oba primera. Seveda, pot narašča s številom trkov, saj jo ti držijo v snovi dalj časa. Za konec pa sem dodal še porazdelitev po dolžini poti za vse nevtrone, ki so se v plasti natanko dvakrat sipali. Vidi se odrezan del spektra, kamor spadajo delci, ki so se po drugem trku še večkrat sipali, saj so ostali ujeti v plasti. Porazdelitev je gama funkcija, a vseh parametrov zanjo ne poznamo. Lahko jih uganemo, a to seveda ni lepo. Spet je namreč neznanko dolžina. Mi že poznamo povprečno število sipanj v plasti, a na kateri dolžini pravzprav poteka to sipanje? Parameter gama funkcije je povprečno število sipanj na neko stalno dolžino. Ki pa tu ostaja neznana. Da je spekter dožine res pravi, dokazujeta sliki. Vsaj meni se to zdi čisto dober dokaz, je pares, da ni povsem formalen in prepričljiv. Je pa dobra alternativa.



Slika 4: Zdaj me je začelo zanimati, če je kaj reda v prehodu skozi reflektor. Recimo pri številu sipanj. Poznam porazdelitev, ki opiše naključne pojave. Mogoče število sipanj ustreza prav njeni porazdelitvi. No, napak sem mislil, Poissonova porazdelitev ne opiše števila sipanj ne v izotropnem ne v preprostem modelu. Seveda, privzetek o konstantni debelini in s tem poti nevtronov je napačen. Levo porazdelitv po številu sipanj pri izotropnem modelu, levo pri preprostem, $\eta = s/d = 0.5$.



Slika 5: Poskusimo torej z razdaljo, ki jo prepotuje delec v reflektorju. Sicer ne poznam nobene porazdelitve razdalje v odvisnosti od števila trkov, a slika bo gotovo koristila. Tako je, kot sem si mislil. Razdalja, prepotovana v plošči, narašča s številom trkov. Skoraj linearno. To je smiselno. Zdaj pa si oglejmo še porazdelitve v posameznih kupčkih. ($\eta = 0.5$)



Slika 6: Oglejmo si jo po dveh trkih, ker je tu nekje ravno povprečje. No, iskane gama funkcije v tem ravno ne vidim. Kupček pri 1 pove, da sem odštel vse tiste nevtrone, ki se dvakrat sipljejo, a ostanejo v plošči. Njihova pot po dveh trkih je zato manjša od 1, in samo njih sem v tej porazdelitvi pozabil. Zato je slika tudi tako grda. A gremo dalje.

5 Dodatek: Poissonski generator naključnih števil

Tu se skriva dolg preteklega tedna. LAhko konstruiramo Poissonki generator z neke vrste integralom. Če namreč poznamo verjetnostno porazdelitev:

$$\frac{dw}{dN} = \frac{\overline{N}^N}{N!} \exp^{-\overline{N}},$$

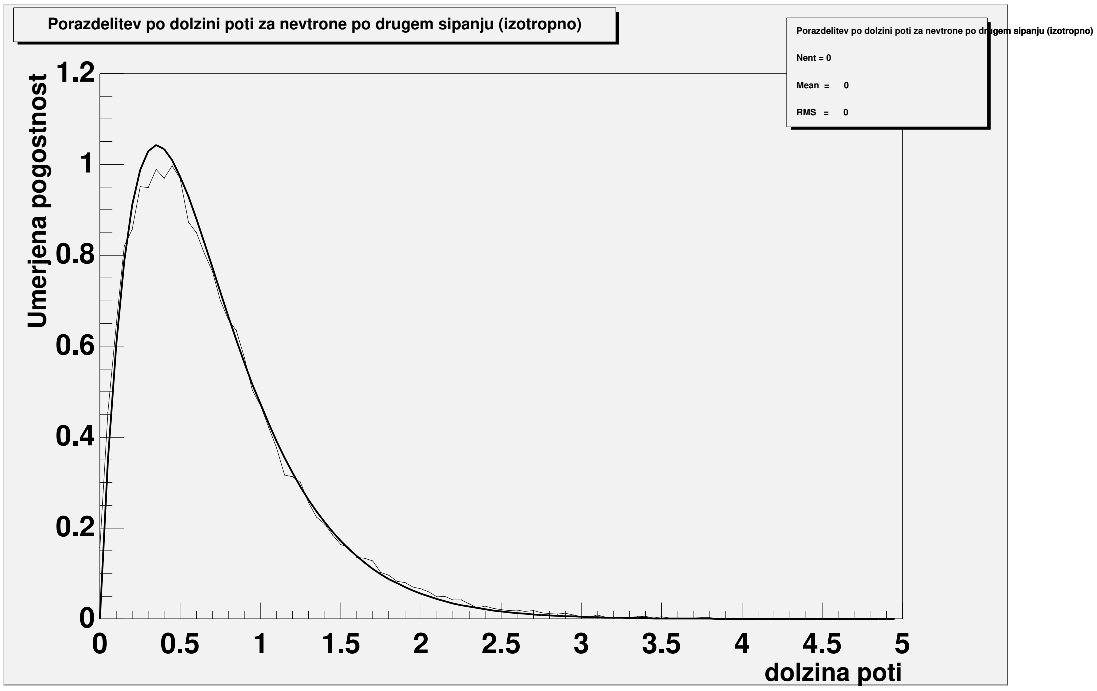
kjer je diferencial v ulomku mišljen kot *pri danem N*, lahko konstruiramo neke vrste integral:

$$w(N) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\overline{N}^k}{k!} \exp^{-\overline{N}} = \sum_{k=0}^{N} a_k,$$

kjer velja za a_k smiselna rekurzivna zveza:

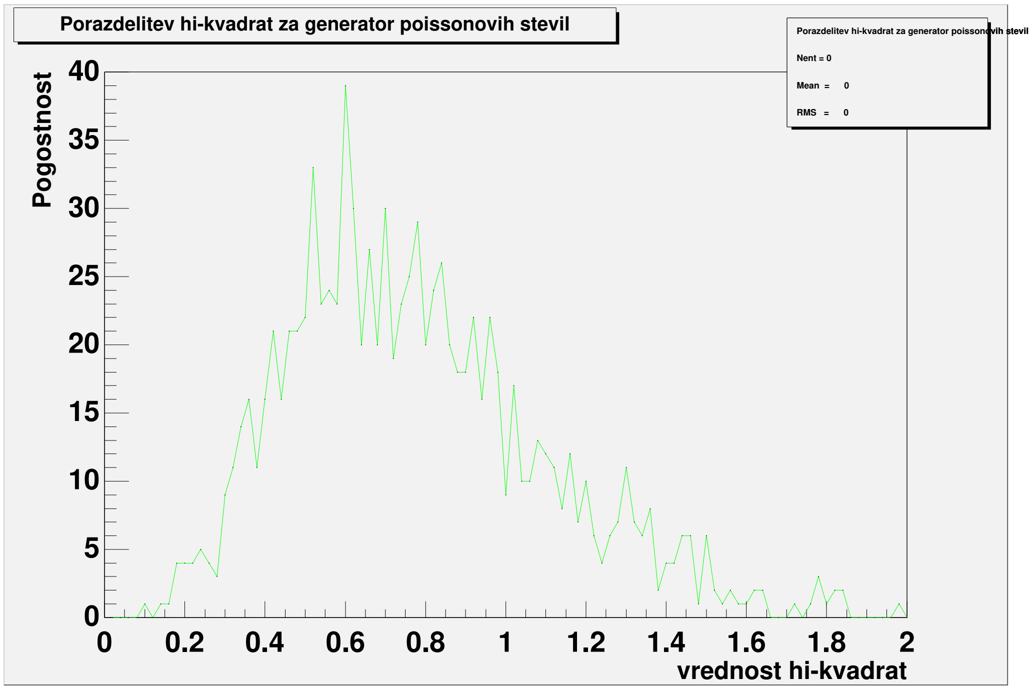
$$a_k = \frac{\overline{N}}{k} a_{k-1}.$$

Izberemo torej enakomerno porazdeljeno število med 0 in 1, nato pa seštevamo člene a_k toliko časa, da ta člen presežemo. Indeks zadnjega člena v vsoti je kar naše naključno število. Generator je zaradi hitrega



Slika 7: Koncčno vsaj slutnja uspeha. Približal sem se teoretični napovedi vsaj v obliki krivulje. Seveda sem moral za to storiti nekaj grdih trikov. Vsekakor si predstavljamo, da opiše gama funkcija porazdelitev po potrebni poti, ki jo mora opraviti nevtron, da se N=2 krat siplje, če se na intervalu dolžine ena siplje $\overline{N}$-krat.No, tu je finta. Mi imamo povprečje, pa ne vemo, na kateri razdalji je, saj je vsak nevtron opravil malce drugačno pot, kot je razvidno iz slike. Zato lahko najdemo neko efektivno povprečje, ki umeri gama funkcijo po naši krivulji, rezultat tega pa kaže slika. Pravo povprečje za sipanje (naprej-nazaj) je 2 pri $\eta = 0.5$, za takole ujemanje pa sem uporabil $\overline{N} = 2.8$.

seštevanja spodoben; čeprav vrednosti a_k ne hrnaim v tabeli, se časi gibljejo za običajne N nekje okrog μs (glej razpredelnico). Tudi χ^2 test je spodoben, je pa res, da ga zaradi dolgih repov predolga seštevanja (do velikih N) lahko poljubno zmanjšajo (delimo vedno z vsemi predalčki, prazen predalček pa prinese ravno pričakovano vrednost v predalčku, ki je 0 oziroma strašno majhna). Ko sem se usdtavil pri verjetnosti $\frac{1}{10}$ na predalček, sem dobil χ^2 porazdelitev na spodnji sliki.



Slika 8: χ^2 porazdelitev za generator Poissonovih števil. MAlo ga vleče navzdol, a to le zaradi prevelikega števila ničel v repih. Ob primerno izbrani meji seštevanja je znatno boljši. Tudi s tem rezultatom sem zadovoljen.

Tabela 5: Izmerjeni časi za generacijo enega naključnega Poissonskega števila. Števila generiram po receptu s predavanj (tekst), a vrednosti sumandov ne shranjujem. Za primerjavo naj navedem, da je porabi uporabljeni `ran2.cxx` za generiranje enega samega naključnega števila (porazdeljenega enakomerno seveda) 0.56 μs.

$\overline{N}$	čas [μs]
2	1.2
5	1.4
10	1.9
20	2.8
30	3.9