Modelska analiza I
1999/2000
5. naloga - model vožnje skozi semafor: variacijska metoda

Andrej Studen, MA-FI

8. maj 2000

1 Problem

Minimiziramo izgube pri vožnji na zeleno luč. Shema je nekako taka - pridemo izza ovinka do ravnice, kjer vidimo semafor. Pozanmo čas τ v katerem bo na semaforju zasvetila zelena luč. Nočemo pa zavirati oziroma pospeševati. Zato si izmislimo kazenski funkcional naše funkcije $v(t)$, ki kaznuje spremembe hitrosti:

$$\int_0^\tau \dot{v}^2(t)\, dt = \text{ min.} \tag{1}$$

Hkrati hočemo ob času τ biti pri semaforju, ki je od na oddaljen ravno ℓ, kar pomeni, da moramo zadostiti enačbi:

$$\int_0^\tau v(t)\, dt = \ell$$

Sestavimo Langrangian in ga rešimo:

$$2\ddot{v} - \lambda = 0,$$

kjer je λ variacijski parameter. Upoštevamo lahko dva različna robna pogoja. Prvi zahteva, da je končna hitrost kar enak začetni (v_0), takrat dobimo rešitev (v brezdimenzijski hitrosti v/v_0):

$$v(t) = 6\left(1 - \frac{\ell}{\tau v_0}\right)\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - \frac{t}{\tau}\right) + 1$$

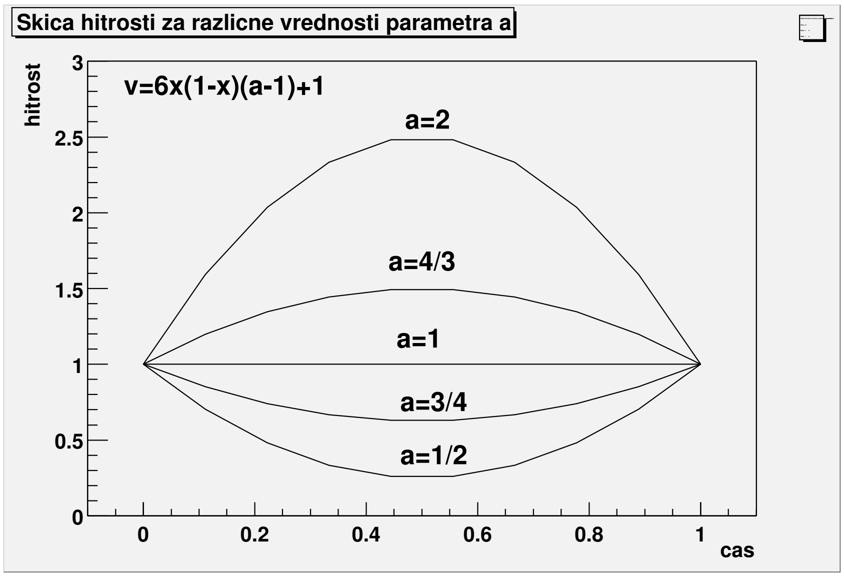
Lahko pa pustimo desni konec tudi prost, takrat moramo zahtevati ničelni odvod Langrangiana:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{v}}\right|_{t=\tau} = 0,$$

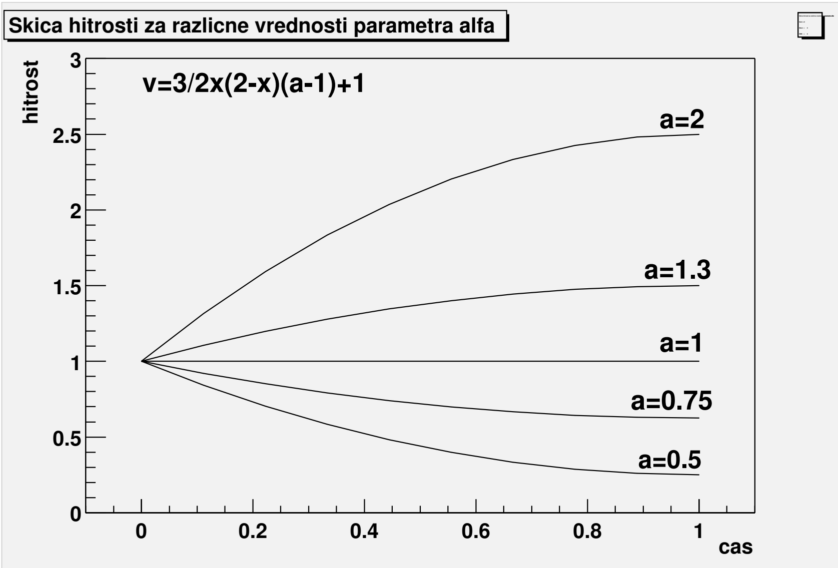
kar nam da:

$$\dot{v}(t = \tau) = 0 \tag{2}$$

$$v(t) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\ell}{\tau v_0}\right)\left(\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 - 2\frac{t}{\tau}\right) + 1 \tag{3}$$



Slika 1: Pravilne rešitve, ko zahtevamo končno hitrost enako začetni. Koeficient a je enak v tekstu definiranemu koeficientu α (4). rešitve z α manjšim od $\frac{1}{3}$ sekajo ničlo hitrosti in jih zato prepovemo.



Slika 2: Rešitve za prost desni konec rešitve. Največjo ali najmanjšo hitrost dosežemo na robu. Za α večje od 1, je končna hitrost večja kot v prvem primeru. Sicer je manjša. Meja veljavnosti glede na pozitivnost hitrosti je enaka kot v prvem primeru.

2 Ciklčno delovanje semaforja

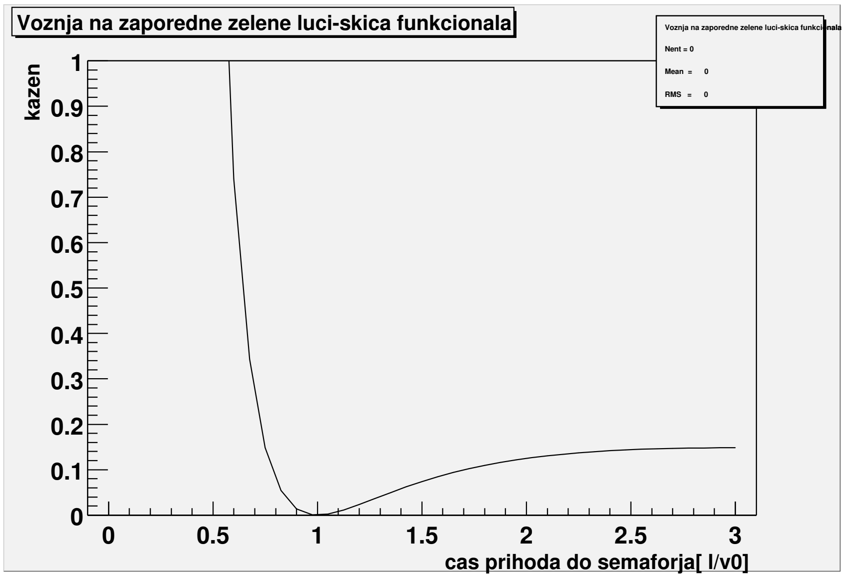
V obeh primerih je funkcional (1) sorazmeren:

$$\frac{1}{\tau}\left(1-\frac{\ell}{v_0\tau}\right)^2,$$

torej bo vedno optimalen $\tau = \frac{\ell}{v_0}$. Vidimo, da bo kazen za čase večje oziroma manjše od τ večja. Zato si je najbolje izbrati čas, ki je najbližje kvocientu dolžine poti in začetne hitrosti. Če je čas do prve zelene luči prekratek, torej je paramater:

$$\alpha = \frac{\ell}{v_0 \tau} \tag{4}$$

večji od ena, se splača počakati na naslednjo zeleno luč. Če pa smo že pri prvi zeleni luči prešli to mejo, se nam naslednje ne splača čakati.



Slika 3: Na naslednjo zeleno luč se nam splača čakati, če je parameter α za prvo zeleno luč manjši od 0.5. takrat se bomo po funkcionalu premaknili v bližino globalnega minimuma. Vrednosti τ, večje od 3, so prepovedane zaradi negativnosti hitrosti.

Pri obeh primerih, tako prostem koncu kot določenem desnem robnem poogju, pa ne smemo preseči časa $3\frac{\ell}{v_0}$, ker bi takrat hitrost po zgornji enačbi postala negativna. Zato je smiselno obravnavati vrednosti funkcionala le do te meje. (primerjaj sliko 3).

3 Limite sodih funkcionalov

Naš funkcional lahko posplošimo, tako da upoštevamo simatrično kazen pospeškov in pojemkov. Dopustimo višje sode potence v (1):

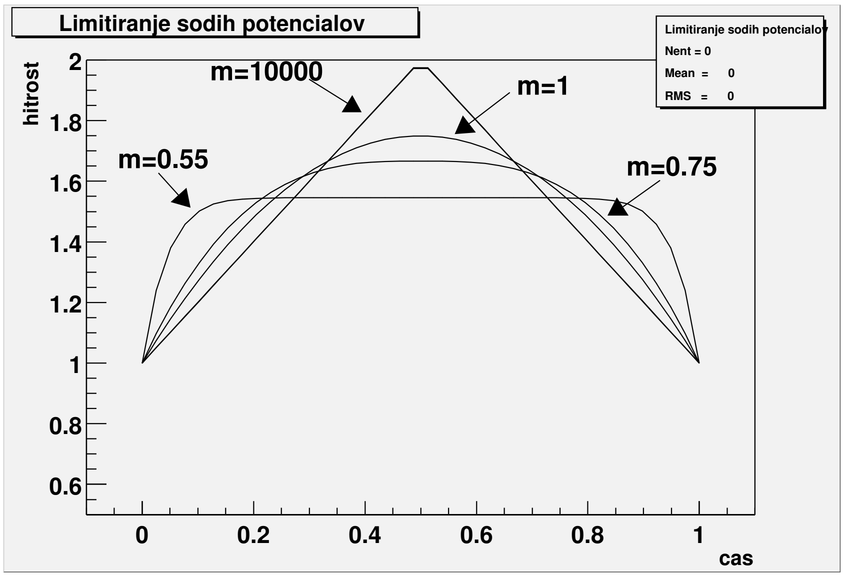
$$\int_0^\tau \dot{v}^{2m}(t)\, dt = \min. \tag{5}$$

Vožnja bo ob takem funkcionalu in enaki vezi:

$$v(t) = \frac{4m-1}{2m} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2m}{2m-1}} (1-\alpha) \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{\tau}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2m}{2m-1}} \right] + 1.$$

Splošna rešitev je malce nezanimiva, bolj zanimivi sta limiti. Prva je tista neskončna, torej:

$$\lim_{m \to \infty} v(t).$$



Slika 4: Slike hitrosti za funkcional višjih sodih ptenc (glej tekst). Parabole so rešitve pri m=1. Za višje m-je se hitro približujemo limiti, tj. zlomljeni linearni funkciji. Limita proti $m = 0.5$ pa je konstanta funkcija, ki pa ima na robu predpisano vrednost, ki je različna od konstante v vmesnem delu (8). Za $m = 0.55$ smo že blizu tej limiti. $\alpha = 1.5$

Ker kaznujemo vsako spremebo z neskončno utežjo, vendar v integralu, je najbolje hitrost spremeniti v eni sami točki, torej:

$$v(t) = \begin{cases} 4\frac{t}{\tau}(1-\alpha)+1 & ,t < \frac{\tau}{2} \\ 4\left(1-\frac{t}{\tau}\right)(1-\alpha)+1 & ,t \geq \frac{\tau}{2} \end{cases} \tag{6}$$

Podobno limitiramo še v drugo smer, torej:

$$\lim_{m \to \frac{1}{2}} v(t),$$

kar je pravzaprav rešitev absolutne kazni, namreč funkcionala:

$$\int_0^\tau |\dot{v}(t)|\, dt = \text{ min.} \tag{7}$$

Rešitev je povsem preprosta, je pa limita splošne hitrosti. Dobimo:

$$v(t) = \begin{cases} 1 & ,t = 0, t = \tau \\ \alpha & ,0 < t < \tau \end{cases} \tag{8}$$

4 Nesmietrični funkcional

Preprost nesmimetrični funkcional je kar eksponentna funkcija:

$$\int_0^\tau e^{A\dot{v}}\, dt \tag{9}$$

Konstanta A je lahko poljubnega predznaka in nam lahko zato bolj ali manj kaznuje pojemke ali pospeške. Definirajmo jo raje kot brezdimenzijsko količino, spremenimo torej:

$$A \to \frac{Av_0}{\tau}$$

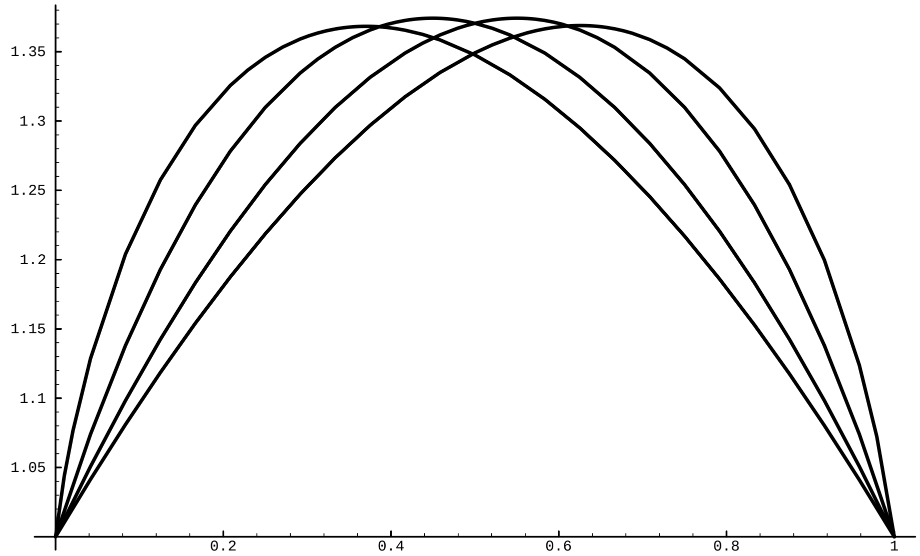
Rešitve so oblike:

$$v(t) = 1 + \frac{1}{A}\frac{1}{T}\left[e^{\beta}(\beta-2) - \left(e^{\beta} - T\frac{t}{\tau}\right)\left\{\ln\left[e^{\beta} - T\frac{t}{\tau}\right] - 1\right\}\right],$$

kjer morata konstanti T in β rešiti sistem enačb:

$$\left(e^{\beta} - T\right)\left(\ln\left[e^{\beta} - T\right] - 1\right) = e^{\beta}(\beta - 1) \tag{10}$$

$$(\alpha-1)T^2 = \frac{T}{A}e^{\beta}(\beta-1) - \frac{1}{4A}\left[e^{2\beta}(2\beta-3) - 2\left(e^{\beta}-T\right)^2\left(\ln\left\{e^{\beta}-T\right\}-1\right) + \left(e^{\beta}-T\right)^2\right] \tag{11}$$



Slika 5: Rešitve eksponentnega potenciala. Krivulje z vrhom pred polovico časa kaznujejo pospeške, z vrhom za polovico pa pojemke. $\alpha = 1.5$, $A = -0.5(0.33)0.5$.

Rešitve poiščemo numerično in jih kaže slika 5. Vidimo, da nesimetričen funkcional daje nesimetrične rešitve okrog polovičke časa. Od parametra A je odvison, če imamo raje pospeške ali pojemke, zato so pri ustreznih rešitvah manj zaviramo ali pospešujemo.

5 Elementi verjetnosti

Takoj, ko vstopijo v igro elementi verjetnosti, je bolje iskati rešitev, ki nam bo v povprečju največkrat prinesla dober rezultat. Če vzamemo za osnovo kar funkcional (1), bomo zdaj maksimizirali prirejeni funkcional:

$$\int_0^{\infty} w(\tau)\, d\tau \int_0^{\tau} \dot{v}^2\, dt = \min.$$

S funkcijo $w(t)$ definirano na pozitivni časovni skali, smo zaznamovali gostot verjetnosti, da bo ob času t pot odprta.