Modelska analiza I
1999/2000

6. naloga - model vožnje skozi semafor: linearno programiranje

Andrej Studen, MA-FI

5. maj 2000

1 Vožnja skozi semafor

Našo iskano funkcijo $v(t)$ na intervalu $[0, \tau]$ poiščemo kot nabor vrednosti v enakih časovnih intervalih:

$$v_i = v\left(i\frac{\tau}{N}\right) \qquad i = 1, \dots N$$

Zahtevamo končni pospešek:

$$-A \leq \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t} \leq A$$

Hkrati hočemo ob času τ priti do semaforja, torej bo pot $s(\tau) = L$, kar nam da pogoj:

$$\frac{v_0 + v_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} v_i = \frac{L}{\Delta t}$$

Z v_0 sem označil začetno hitrost. Ta je predpisana. Maksimiziramo končno hitrost:

$$v_N \sim \max$$

Uvedemo brezdimenzijske količine:

$$\alpha = \frac{A\tau}{v_0},$$
$$\lambda = \frac{L}{v_0\tau},$$

kar nam prepiše enačbe v:

$$1 - \frac{\alpha}{N} \leq v_1 \leq 1 + \frac{\alpha}{N}$$
$$-\frac{\alpha}{N} \leq v_i - v_{i-1} \leq \frac{\alpha}{N} \qquad i = 2, \dots N$$
$$\frac{v_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} v_i = \lambda N - \frac{1}{2}$$

Naše pogoje moramo za potrebe programa spremeniti v pogoje oblike:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} v_j \qquad (\leq \text{ ali } \geq \text{ ali } =) \qquad b_i \geq 0,$$

kjer najprej zapišemo pogoje tipa $\leq$:

$$v_i - v_{i-1} \leq \frac{\alpha}{N}, \qquad i = 2, \dots N$$
$$-v_i + v_{i-1} \leq \frac{\alpha}{N}, \qquad i = 2, \dots N$$
$$v_1 \leq 1 + \frac{\alpha}{N},$$

nato pogoje tipa $\geq$:

$$v_1 \geq \max(1 - \frac{\alpha}{N}, 0)$$

in na koncu še pogoje tipa $=$:

$$\frac{v_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} v_i = \lambda N - \frac{1}{2}.$$

Za dani N bo imel naš problem torej $m = 2N + 1$ omejitev, od tega $m1 = 2N - 1$ tipa $\leq$, $m2 = 1$ tipa $\geq$ in $m3 = 1$ tipa $=$.

Vse pogoje zapišemo v tableau kot matrične elemente, nato pa nam program najprej določi prvo sprejemljivo rešitev, ki jo zatem v zaporednih korakih izboljšuje, dokler ne najde najboljše rešitve. To je prikazano na sliki 1. Obstaja dokaz, da je število potrebnih korakov vedno reda velikosti večjega od števil (m, N), kot smo ju navedli zgoraj. Rešitve so zlomljene linearne funkcije. Vendar pa je graf poti bolj gladek, kot kaže slika 2.

Grafična 3D rešitev (glej prilogo) nam kaže iskanje rešitve preprostega modela, kjer iščemo hitrost v treh točkah. Vsaka neenakost nam razdeli prostor na sprejemljiv in prepovedani del, vsaka enakost nam skrči dimenzijo prostora rešitev. Tako nam omejitev poti iz prostora naredi ravnino. Optimizirajoča funkcija je linearna , zato ima po vsem prostoru od nič različen gradient. Vzdolž njega se lahko premaknemo do prve sprejemljive rešitve, ki je optimalna. Pri nas je gradient vzporeden osi z, zato poiščemo najvišjo dopustno točko. Koordinate te točke (v_1, v_2, v_3) so vrednosti hitrosti v zaporednih časovnih intervalih in jih lahko prikažemo na grafu. Grafičen rezultat nam da za $\alpha = 1$ in $\lambda = 1$ rezultat (v oklepajih so izračunane vrednosti):

$$v_0 = 1.000 \quad (1.000),$$
$$v_1 = 0.747 \quad (0.733),$$
$$v_2 = 1.100 \quad (1.067),$$
$$v_3 = 1.425 \quad (1.400).$$

2 Veriga hidorelektrarn

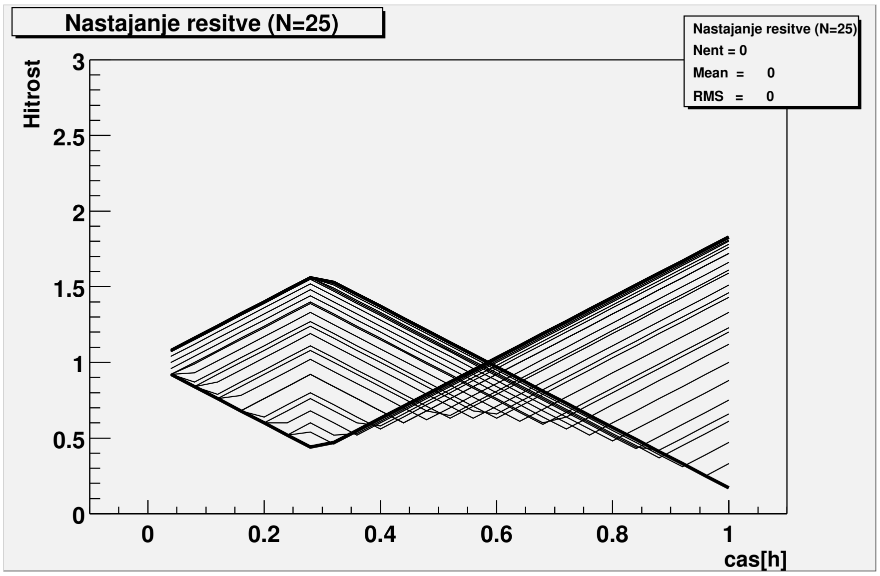
Označimo z V volumne zajetij pred elektrarnami in s p pretoke na elektrarnah. Moč je sorazmerna pretoku skozi dano elektrarno. Vsaka od the količin ima dva indeksa, eden je opis časovne postavitve, drugi krajevne postavitve. Tako je:

$$V_M^i = V_M(i\Delta t),$$

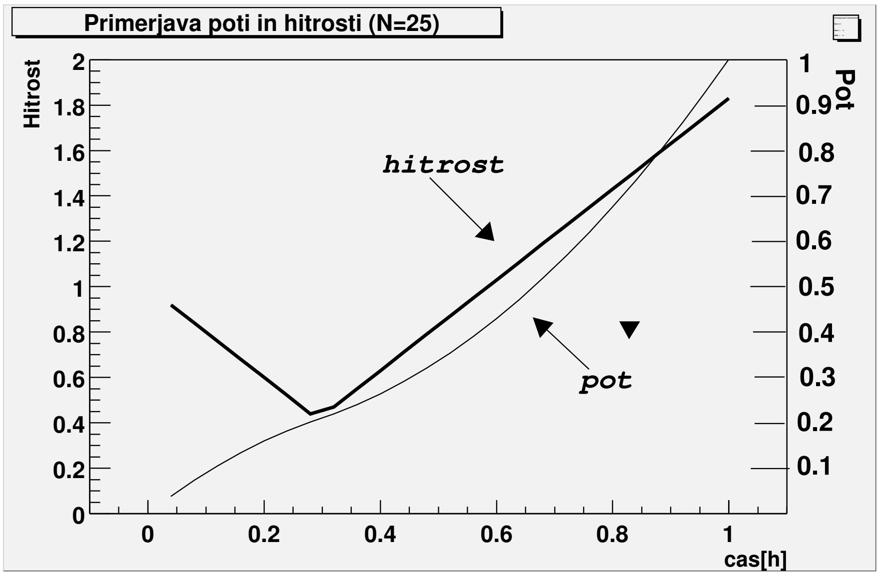
volumen M-tega jezerca v času $i\Delta t$. Ker so vsi podatki navedeni v urah, se zdi najprimernejša izbira enote časa kar 1 ura, torej teče $i = 1 \dots 24$h, M pa teče po vseh elektrarnah, torej $M = 1, \dots N$. Poznamo še zamike med elektrarnami, torej čase τ_M, ki jih porabi voda za pot med $M-1$-vo in M-to elektrarno.

Za vsako jezerce velja, da je volumen v nekem trenutku enak predhodnem volumnu, ki mu dodamo razliko med dotokom in odtokom, najsi je ta pozitivna ali negativna:

$$V_N(t) = V_N(t-1) + \mathrm{dotok}(t) - \mathrm{odtok}(t).$$



Slika 1: Iskanje rešitve za več dimenizonalni primer. Prva rešitev upošteva vse omejitve, a slabo izpolnjuje maksimizirajoč kriterij. Zadnja rešitev je prva, kjer se naklon hitrosti le enkrat spremeni.



Slika 2: Pot je bolj gladka funkcija časa kot hitrost. Vidimo prevoj, ki je minimum hitrosti.

Odtok je kar odprtost turbine za jezercem, torej $p_N(t)\Delta t$, Dotok pa ravno odprtost turbine za prejšnjim jezercem, vendar pred časom τ_N, saj je morala voda pripotovati do našega jezerca, torej $p_{N-1}(t-\tau_N)\Delta t$. Uporabimo še zgornjo notacijo, pa imamo:

$$\frac{V_N^i - V_N^{i-1}}{\Delta t} = p_{N-1}^{i-\tau_N} - p_N^i,$$

zvezo med pretoki in volumni jezerc. Pravzaprav to ni nujno omejitev tipa =, kot smo jo zapisali za hitrost, pač pa je zapis ene reprezentacije problema z drugo reprezentacijo. Podobno kot obstajata pri problemu semaforja hitrostna in pospeškovna formulacija, obstajata tu volumska in pretočna formulacija.

Obstajajo omejitve tako za volumen kot za pretok skozi elektrarne, namreč:

$$
\begin{aligned}
0 \leq p_M^i \leq p_{max}\Phi_0 \qquad & M = 1, \dots N \\
0 \leq V_M^i \leq V_{max}\Phi_0\Delta t \qquad & i = 1, \dots 24 \text{ h}
\end{aligned}
$$

Maksimiziramo uteženo vsoto moči, namreč dnevna električna energija je bolj cenjena kot nočna, zato:

$$\alpha \sum_{M=1}^{N} \sum_{i=1}^{12} p_M^i + \sum_{M=1}^{N} \sum_{i=13}^{24} p_M^i = \text{ max.}$$

Upoštevamo, da pred prvim jezercem ni elektrarn, zato je:

$$p_0^i = \Phi_0$$

dotok enak osnovnemu pretoku. Uvedemo brezdimezijske spremenljivke:

$$
\begin{aligned}
p &\to \frac{p}{\Phi_0} \\
V &\to \frac{V}{\Phi_0\Delta t}
\end{aligned}
$$

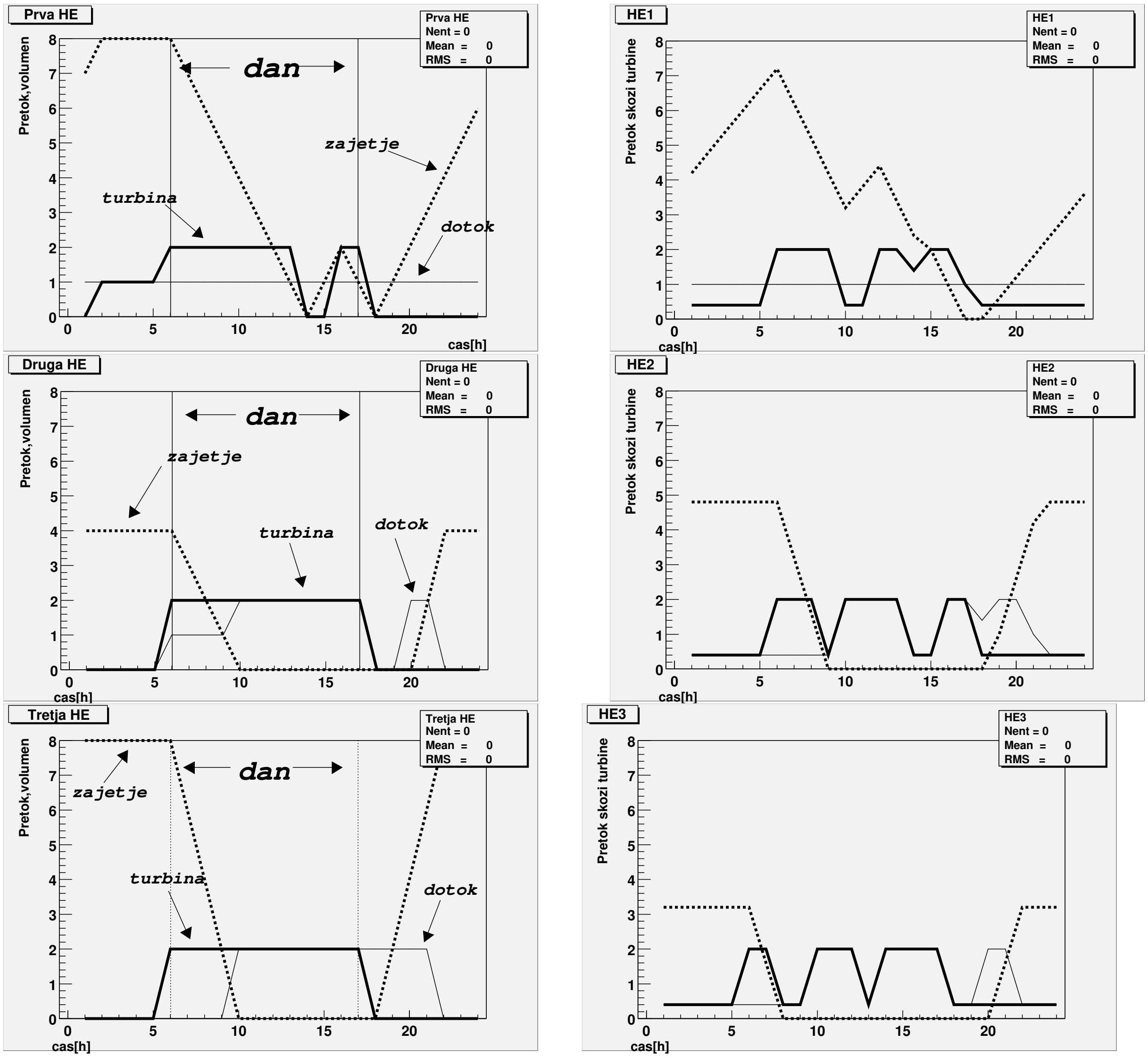
Izkaže se:

$$p_M^i = \sum_{k=1}^{M} \left(V_k^{i-1-\sum_{j=k}^{M-1} \tau_j} - V_k^{i-\sum_{j=k}^{M-1} \tau_j} \right) + 1,$$

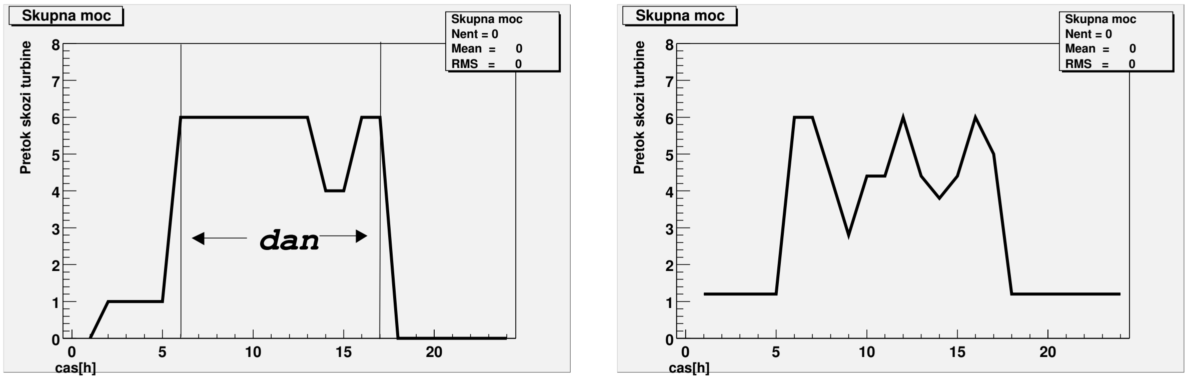
kar nam torej izrazi vse pretoke z ustreznimi volumni. Tako lahko ugodimo vsem kriterijem in izrazimo z volumni tudi optimizirajočo funkcijo. Zaradi množenja z -1 se nam vsi pogoji prepišejo v pogoje oblike $\leq$, kar nam da takoj možno rešitev, namreč izhodišče.

Sicer rešitve kažejo tisto, kar nas zanima, namreč elektranre zadržujejo vodo čez noč in jo uporabljajo samo čez dan. Tako je navadno struga čez noč prazna, kar pa zagotovo ni po volji naravovarstvenikom, zato sem naredil še primer, ki zagotavlja minimalen pretok.

Samo prva elektrarna je res zanimiva, obe ostali ji samo sledita. Izkaže se, da četrta elektrana natančno posnema obnašanje tretje in je zato vsaka nadaljnja elektrarna že določena s sistemom prvih treh.



Slika 3: Primerjava delovanja elektrarn brez minimalnega pretoka (levo) in z minimalnim pretokom (desno). Delovanje samo se bistveno ne spremeni, vendar pa mora prva elektrarna tudi v boljšem času (dan) črpati vodo v jezerce, kar jo seveda stane. Tudi zelo malo energije je v levem sistemu narejene v nočnem času , včasih celo nič, kar je mogoče tudi protislovno.



Slika 4: Primerjva izkoristka dnevnega časa za neekološki sistem (levo) in ribičem prijazen sistem (desno). Špice pomenijo dočrpavanje vode v prvi bazen, drugi in tretji bazen pa se tem nihanjem težko izogneta.