Modelska analiza I
1999/2000
6. naloga - Populacijski modeli

Andrej Studen

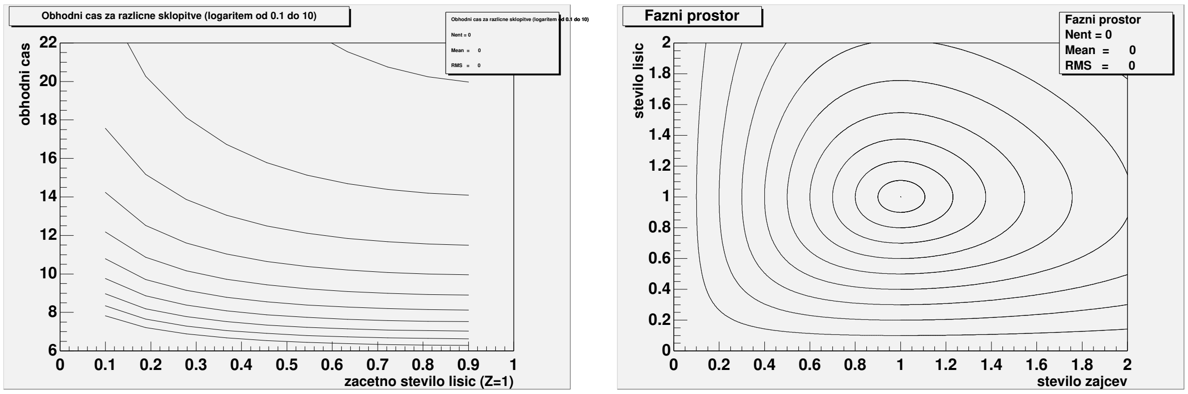
24. november 1999

1 Zajci in lisice

Model opisemo z generacijsko enacbo (v brezdimenzijski obliki):

$$\dot{Z} = Z - ZL$$

$$\dot{L} = \gamma(-L + ZL).$$



Slika 1: Karakteristike modela zajci-lisice za parameter enak 1. Krivulje so sklenjene in simetrične obhdoni časi pa padajo kot na levi sliki. Obe sliki sta bistveno povezani s parametrom.

Šele v brezdimenzijski obliki vidimo, da je enacba odvisna le od enega parametra. Ta je kar razmerje med rojevanjem zajcev in umiranjem lisic. Enačbe lahko s tem parametrom tudi razklopimo. Z deljenjemčasovnih odvodov lahko dobimo integral sistema:

$$\frac{dZ}{dL} = \frac{Z(1-L)}{\gamma L(Z-1)},$$

ki ga preprosto rešimo, saj je diferencialka lepo ločljiva. Enačbe krivulj so tako:

$$Z - \log Z + \frac{1}{\gamma}L - \frac{1}{\gamma}\log L = \text{const.} \quad \text{const} = 1 - \frac{1}{\gamma}L(1) - \log L(1).$$

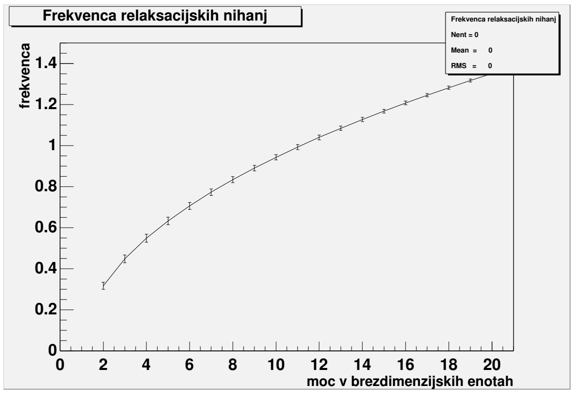
Očitno je, da je konstanta enaka za vsako krivuljo posebej. Prostor nam razpade na strogo omejene krivulje in sistem ni ergodičen. Zato je tudi dovolj preiskati le en presek krivulj, saj bomo itak vse zajeli.

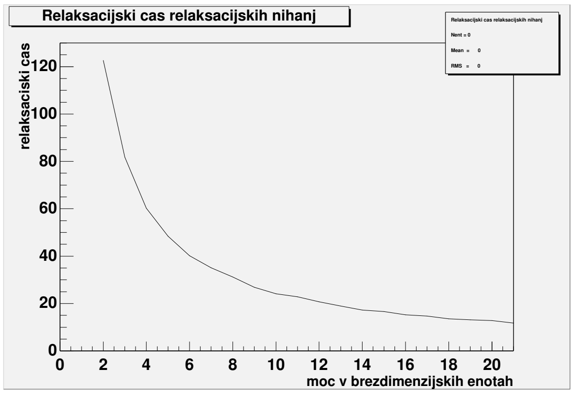
2 Populacijski model laserja

Tu opisemo populaciji vzbujenih atomov (a) in fotonov (f) z enačbama (spet sem za enoto vzel ravnovesni stanji):

$$\dot{a} = \eta\left((1-\pi)af - a + \pi\right)$$

$$\dot{f} = \frac{1}{\eta}(af - f).$$





Slika 2: Takole se spreminjata frekvenca relaksacijskih nihanj(levo z označeno napako rezultatov) in relaksacijski čas. Za relaksacijski čas imam tu kar potreben čas, da padejo nihanja pod določen razmah, medtem ko sem v razpredelnici ta parameter nadomestil s fitom po eksponentni krivulji, kar se lepo ujema s teoretično napovedjo. Podobno tudi obhodni časi. Napaka je za mjahne frekvence večja, ker je tudi amplituda tega nihanja majhna in hitreje neham integrirati.

Ravnovesni legi se z brezdimenzijskim parametrom π in ostalimi konstantami izražata takole:

$$a_0 = \frac{B}{A} \qquad f_0 = \frac{\lambda}{A}(\pi - 1).$$

Tu pa se že vidi, da bo ravnovesno stanje obstajalo le za moči vecje od 1 v enotah π. Osnovni podatki so:

- Einsteinov parameter A - število stimulirano izsevanih fotonov kot delež vseh trkov na časovno enoto
- razpadna konstanta vzbujenih jeder λ
- moc črpanja atomov na vzbujene nivoje blizu našega nivoja P
- razpadna konstanto fotonov B

iz njih pa sestavimo dva parametra η in π:

$$\eta = \sqrt{\frac{\lambda}{B}} \qquad \pi = \frac{PA}{\lambda B}.$$

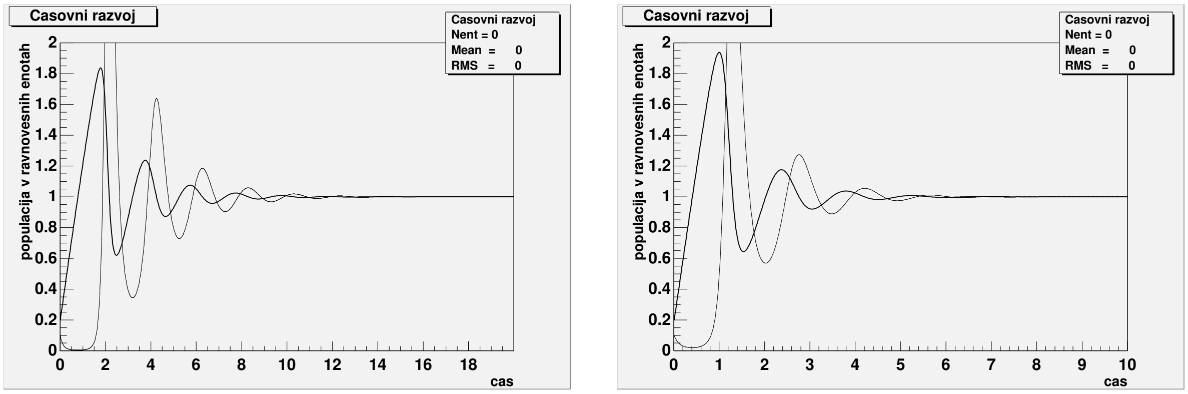
In $\pi > 1$, če hočemo ravnovesne rešitve. Sicer pa dobimo kaos.

Blizu ravnovesne lega lahko enačbo razvijemo za majhne odmike. Zapišemo lahko $a = 1+\alpha$ in $f = 1+\varphi$, kjer sta α in φ majhna odmika. Eančbi združimo v eno samo:

$$\ddot{\alpha} + \eta\pi\dot{\alpha} + (\pi - 1)\alpha = 0,$$

kar je dušeno nihanje s parametri:

$$t_0 = \frac{2\Pi}{\sqrt{\pi - 1}}\left(1 - \frac{(\eta\pi)^2}{4(\pi - 1)}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{in}$$



Slika 3: Še časovni razvoj nihanja populacije atomov v vzbujenem stanju (močnejša črta) in fotonov. Na levi je bila moč 10, na desni pa dvajset π enot, kot definirano v tekstu. Dobro so vidna nihanja.

Tabela 1: Primerjava računalniških in teoretičnih rezultatov za relaksacijske čase in in nihajne čase populacijskega modela laserja. Napaka je presenetljivo majhna. Pri takih enačbah je vsako ujemanje prav prisrčno.

π	t_0	t_0^{teorija}	λ	λ^{teorija}
2	3.15352	3.15742	0.100845	0.10
3	2.23025	2.23404	0.151275	0.15
4	1.82252	1.82601	0.201469	0.20
5	1.58000	1.58321	0.251641	0.25
6	1.41506	1.41778	0.301655	0.30
7	1.29342	1.29585	0.351731	0.35
8	1.19913	1.20122	0.401726	0.40
9	1.12312	1.12505	0.451817	0.45
10	1.06034	1.06205	0.50182	0.50
11	1.00738	1.00883	0.55172	0.55

$$\lambda = \frac{\eta\pi}{2},$$

kjer sta t_0 nihajni čas relaksacijskih nihanj in $\frac{1}{\lambda}$ relaksacijski čas relaksacijskih nihanj. Primerjavo obeh daje preglednica.

3 Model epidemije

Tu enačbe ohranjajo skupno število ljudi na nekem omejenem prostoru, pa tudi ravnovesnih stanj ni, zato ostaneta dva parametra(navidezno):

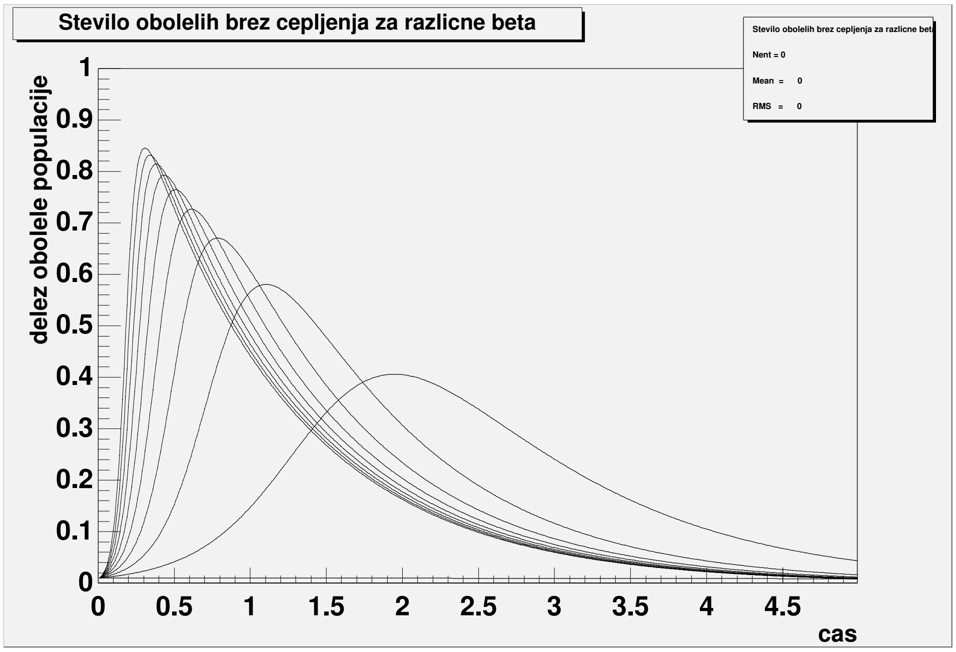
$$\dot{Z} = -\beta BZ$$
$$\dot{B} = \beta BZ - \lambda B$$
$$\dot{I} = \lambda B.$$

Posamezne enačbe pomenijo:

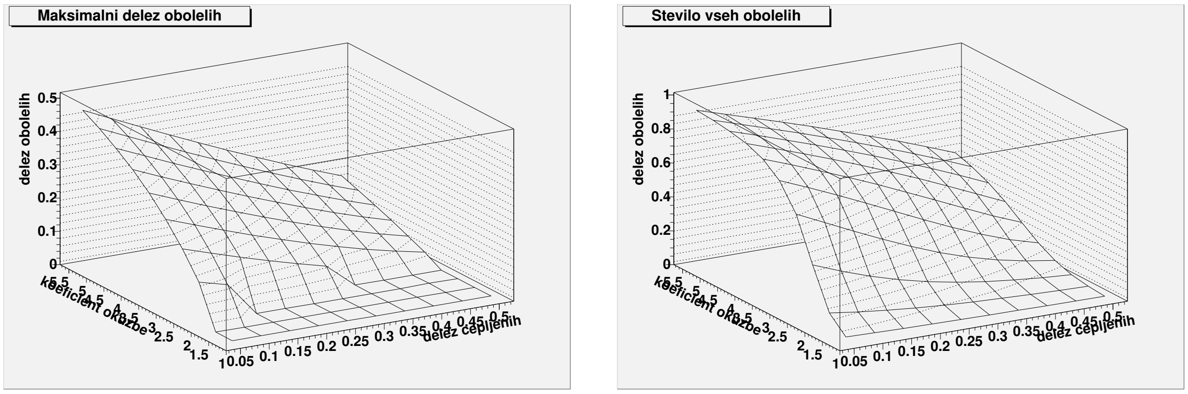
- da se konstantni delez trkov(β) pretvori v bolezni, gre seveda za trke med zdravimi(Z) in bolnimi(B), medtem ko imunih(I) trki na prizadenejo več
- zato se poveča obolela(B) populacija, iz katere pa s konstantno verjetnostjo(λ) prehajajo ljudje tudi med imune(I) (ozdravijo ali umrejo)

- seveda se število imunih(I) na račun ozdravelih veča.

Po končnem času vsi ozdravijo.



Slika 4: Profil časovnega razvoja epidemije brez cepljenja za različne vrednosti β. Zaradi eksponentnega značaja ozdravitve nam večanje β le izostri vrh in ga približa začetku epidemije, ne povzroči pa globalnega kolapsa. Vbrizg je ena stotinka populacije, β pa teče od 1 v korakih po 2 do 21.

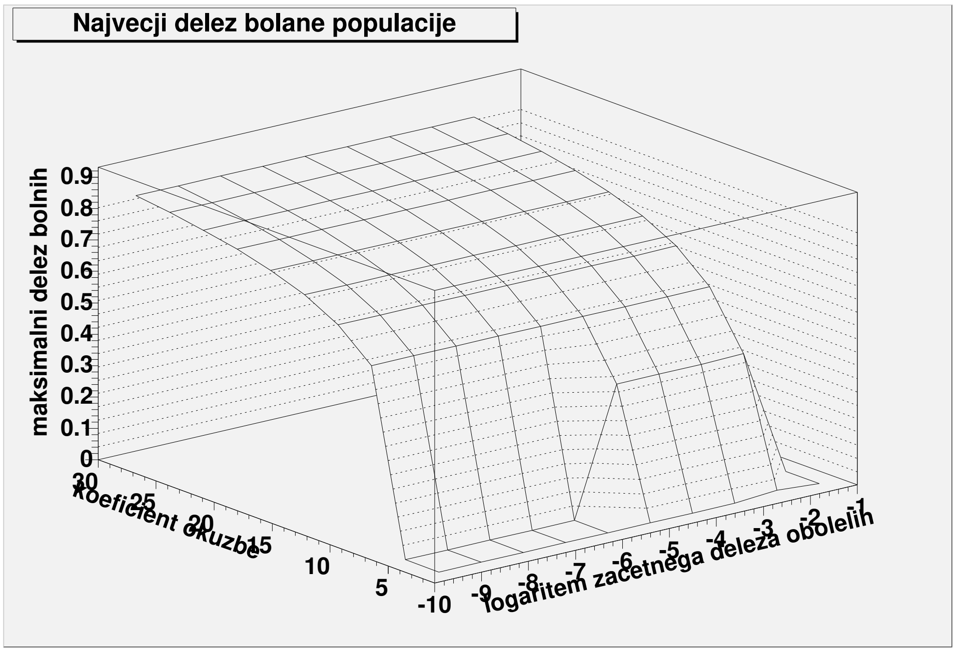


Slika 5: Cepljenje se zares pozna le za majhne parametre širjenja bolezni. Tu lahko drastično zmanjšamo tudi skupno število obolelih, kar kaže desna slika, medtem ko leva slika kaže najvecje udare za iste parametre.

Moti nas, da je število ozdravljenih največje ravno blizu začetka epidemije, saj vemo, da nekaj časa traja, da človek ozdravi. Zato je smiselno to krivuljo malo prilagoditi, kar storimo z uvedbo večih razredov obollih. Vsi zdravi preidejo s konstantno verjetnostjo med trkom v prvi razred obolelih, od tam s konstantno verjetnostjo v drugi razred, pa nato v tretji, itd. Za tri razrede so enačbe

$$\dot{Z} = -\beta(B_1 + B_2 + B_3)Z$$

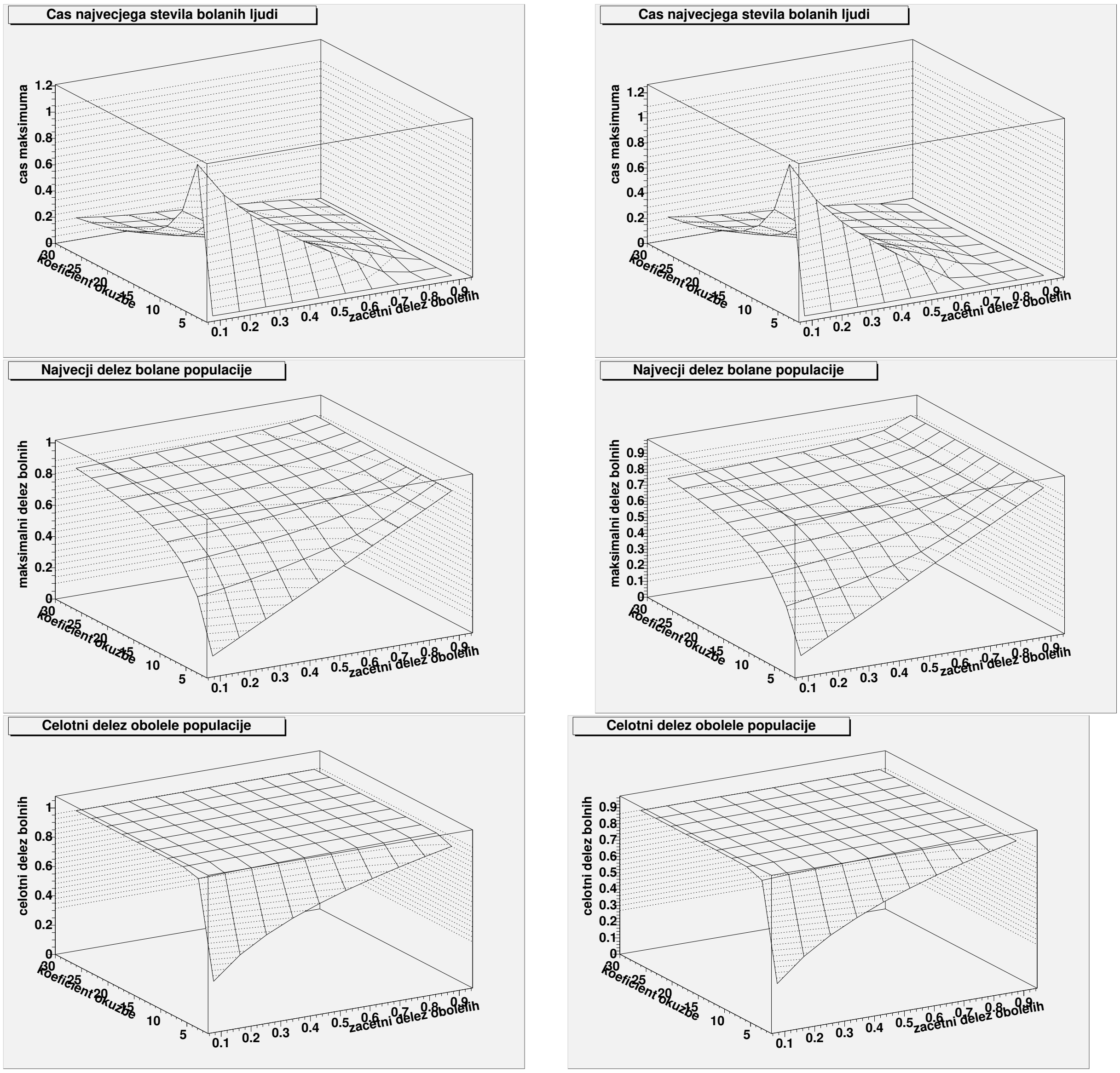
$$\dot{B}_1 = \beta(B_1 + B_2 + B_3)Z - \lambda_{12}B_1$$



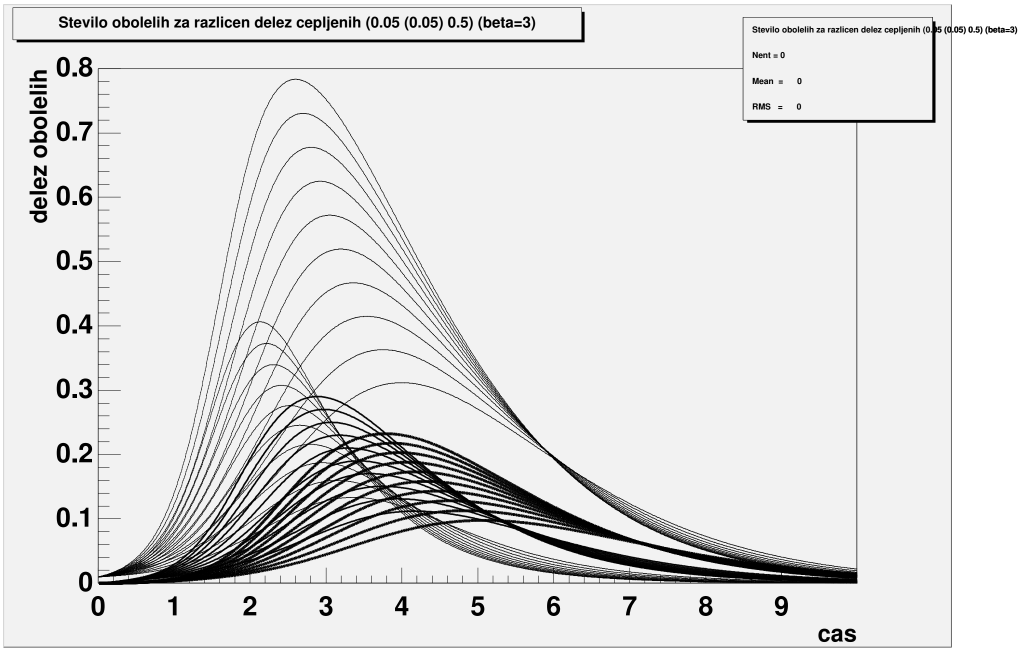
Slika 6: Tudi še tako majhni vbrizgi povzročijo epidemijo. Zanimiv je plato, ki ga dosežemo nad nekim pragom za β. Od tam naprej je maksimum enak ne glede na samo začetno stanje populacije. Res da je maksimum dosežen kasneje, a je ta konstantnost kljub temu presenetljiva.

$$\dot{B}_2 = \lambda_{12} B_1 - \lambda_{23} B_2$$
$$\dot{B}_3 = \lambda_{23} B_2 - \lambda B_3$$
$$\dot{I} = \lambda B_3,$$

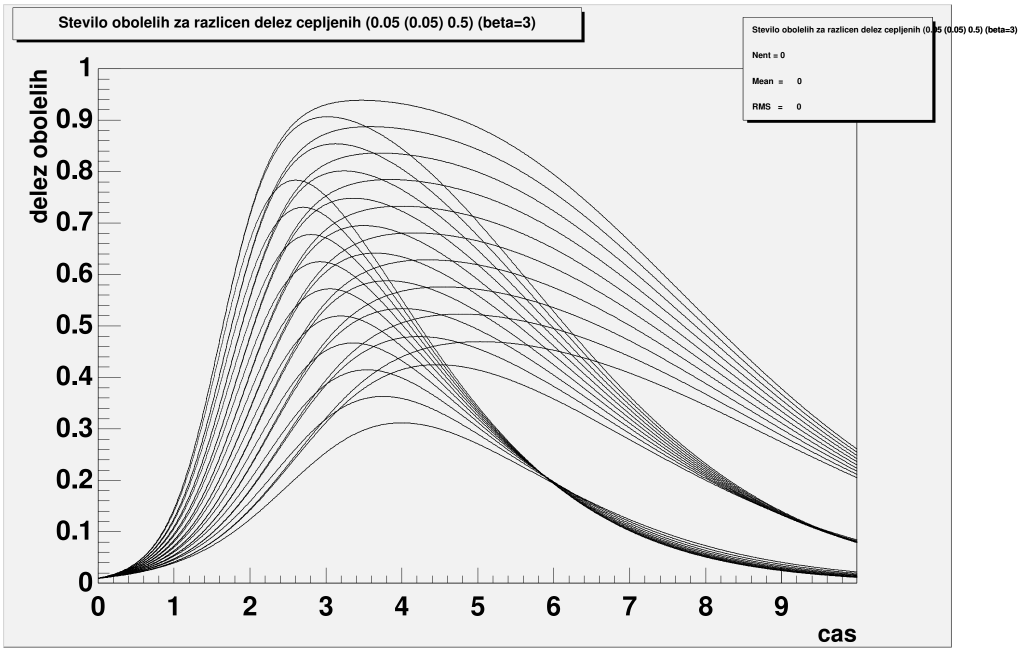
in povsem očitno je, kako se jih da nadaljevati za večje število razredov. Igramo se še z začetnimi pogoji. Vsota vseh mora biti ravno 1, tako da lahko dva neodvisno spreminjamo, poleg njiju pa se edini parameter enačbe. Epidemija se obnaša namreč tako, kot ji veleva razmerje med β in λ za preprost primer. Spremembe obeh namreč lahko stlačimo še v časovno konstanto - tako da so si rešitve podobne v relativni časovni skali. Torej imamo β in začetne pogoje. S cepljenjem postavimo začetno vrednost I, lahko vstavimo poljubno majhne zasevke bolnih, na koncu pa gledamo še primerjavo po četrtem prametru - tj. številu razredov, če predpostavimo, da so medrazredne verjetnosti za prehod kar enake, sicer lahko variiramo še te in se izgubimo v variacijah.



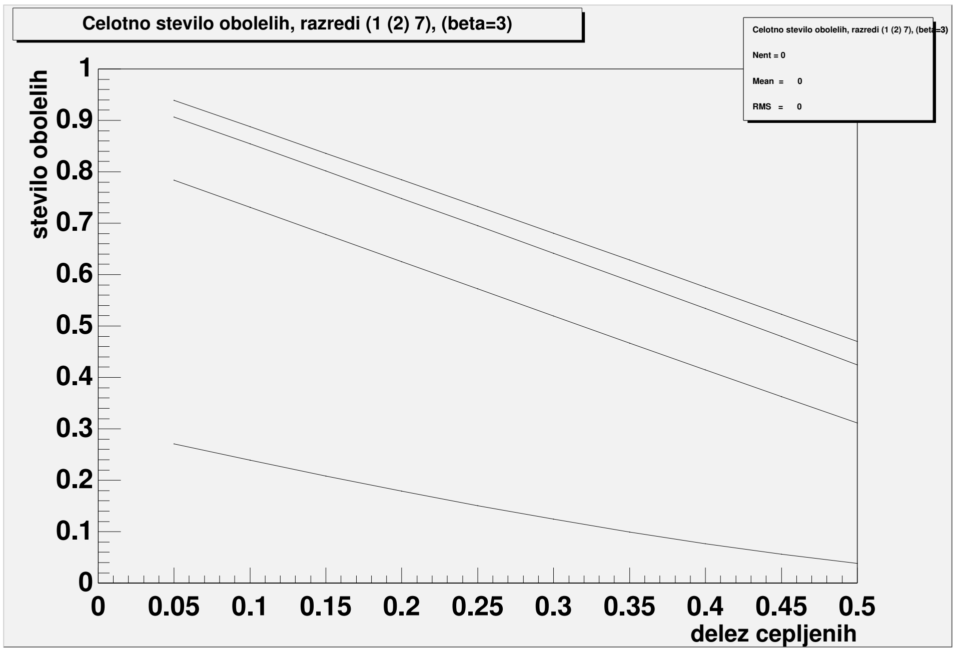
Slika 7: Skoraj vsi rezultati populacijskega modela epidemij. Variiram β, tj. parameter širjenja epidemije nasproti enotskemu parametru ozdravitve.=, hkrati pa spreminjam tudi začetne vbrizge obolele populacije. Leve slike ne vključujejo cepljenja, desne pa kažejo situacijo, ko je desetina ljudi cepljenih. Zdravo populacijo seveda bolj prizadane številska premoč in se nekako izvleče tudi za gromozanske parametre širitve.



Slika 8: Obolele razdelimo v 3 razrede. Vidimo, kako prehajajo oboleli iz enega razreda v drugega. Prvi razred ima najmočnejši vrh, saj se vanj steka vsa zdrava populacija po dobrem trku. Drugi in tretji razred pa sta mehkejših oblik. Bolezen se razpotegne v času, natanko tako, kot smo hoteli.



Slika 9: Krivulje lahko poljubno razširimo v času, če dodajamo več in več razredov. Če imamo več razredov, zboli tudi več ljudi, ker je bolezen dlje časa prisotna. Tako je pri 7 razredih preventivno cepljenje desetine zadosti le za to, da ta desetina ne zboli, medtem ko je to pri 3 razredih dovolj, da omeji epidemijo na dve tretjini populacije. Zato je smiselni parameter β za večrazreden model precej manjši.



Slika 10: Res je, cepljenje pri več razredih poveča težo parametra širjenja napram ozdravitvi. Za 7 razredov res ves del populacije, ki je dovzeten, zboli. Za en sam razred pa temu še zdaleč ni tako.