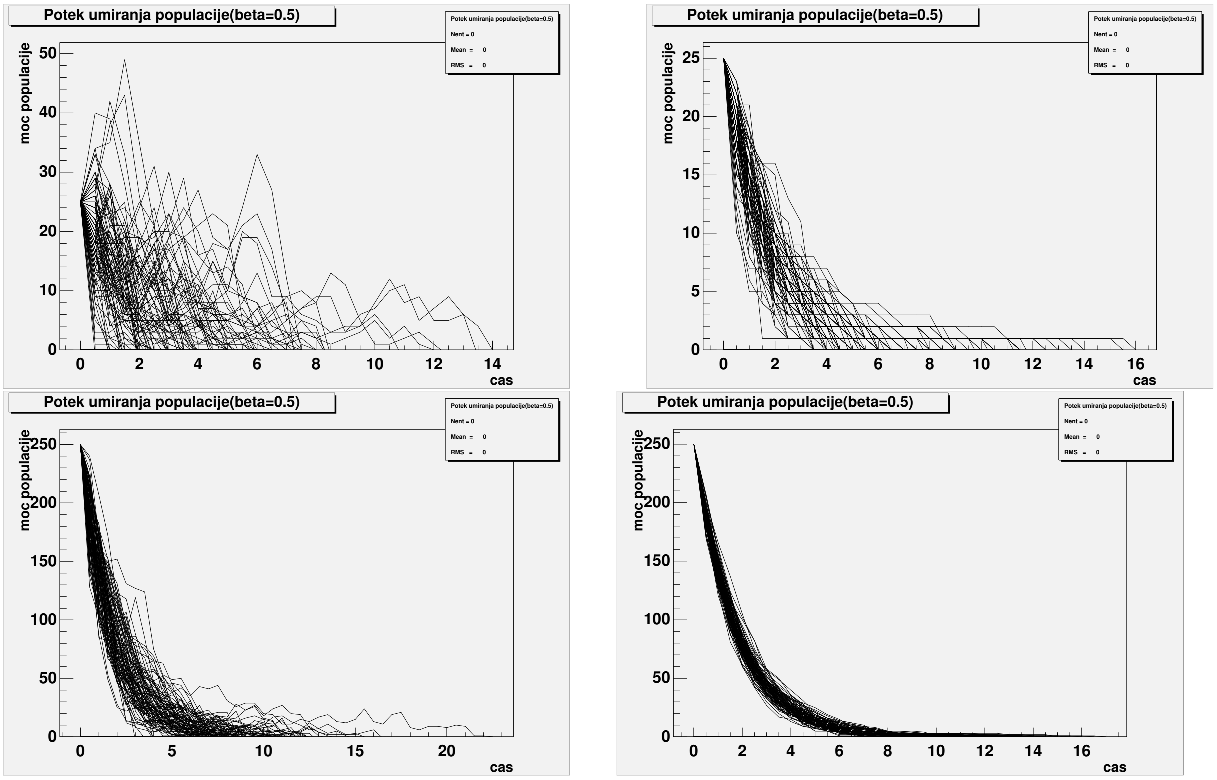
Modelska analiza I
1999/2000
8. naloga - Stohastični popualcijski modeli

Andrej Studen, MA-FI

2. december 1999

1 Izumiranje populacij

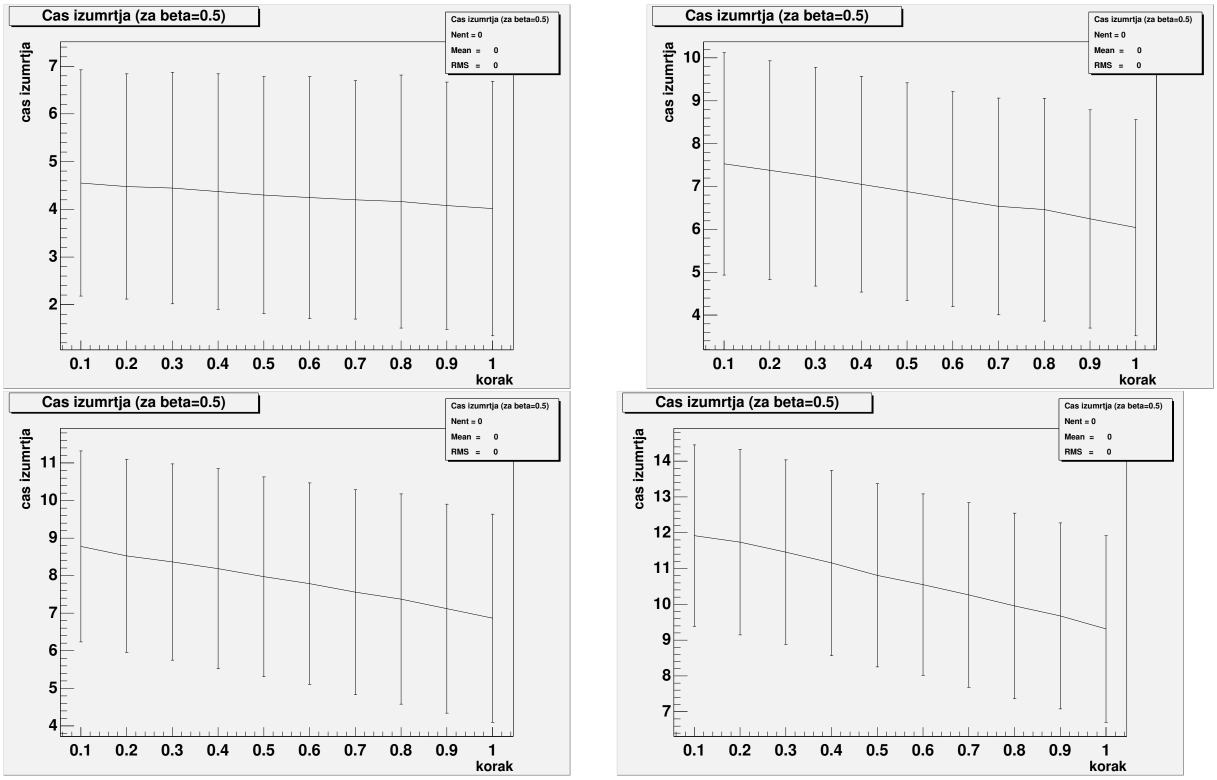


Slika 1: Širok pas, v katerem se bohotijo naše re'itve je viden pro vseh štirih slikah. Saj res, zgornji dve kažeta malo populacijo (25 osebkov), levi dve pa kompleksen model z rojstvi in smrtmi. Najlepša je slika zgoraj desno, kjar se skoraj približamo analitični rešitvi.Viden so tudi razlike med levo in desno stranjo in očitno je, da je model občutljiv na rojstva.Preseke po moči populacije dajejo slike pri 2. in 3. nalogi, presek po času izumrtja pa naslednja slika.

Imamo preprost eksponentni model. Enačba je kar:

$$\Delta N = \lambda N \Delta t.$$

Bistvo stohastičnega modela je, da določimo ΔN kot neko naključno število z logično porazdelitvijo. Kaj je logična porazdelitev in kaj ni, ni vedno tako očitno. Smrti namreč niso stohastični procesi, pač pa



Slika 2: Povprečni časi izumrtja padajo s časom. Seveda, če korakamo s prevelikim korakom, izgubljamo natančnost. Zanimivo je, da se σ porazdelitve le malo spreminja s korakom (tu narisana kot ErrorBar) v času in še več, da se ne spreminja s številom poskusov, ampak je končna. Rezultati so razpršeni zaradi metode in ne zaradi premajhne natančnosti. Ne gre za statistično, pač pa za vrojeno razpr'enost. Čas izumrtja je večji za številnej'o populacijo, zanimivo pa je, da je krajši za model z rojstvi kot samo za model s smrtjo (levo so z rojstvi, spodaj je močnejša populacija.

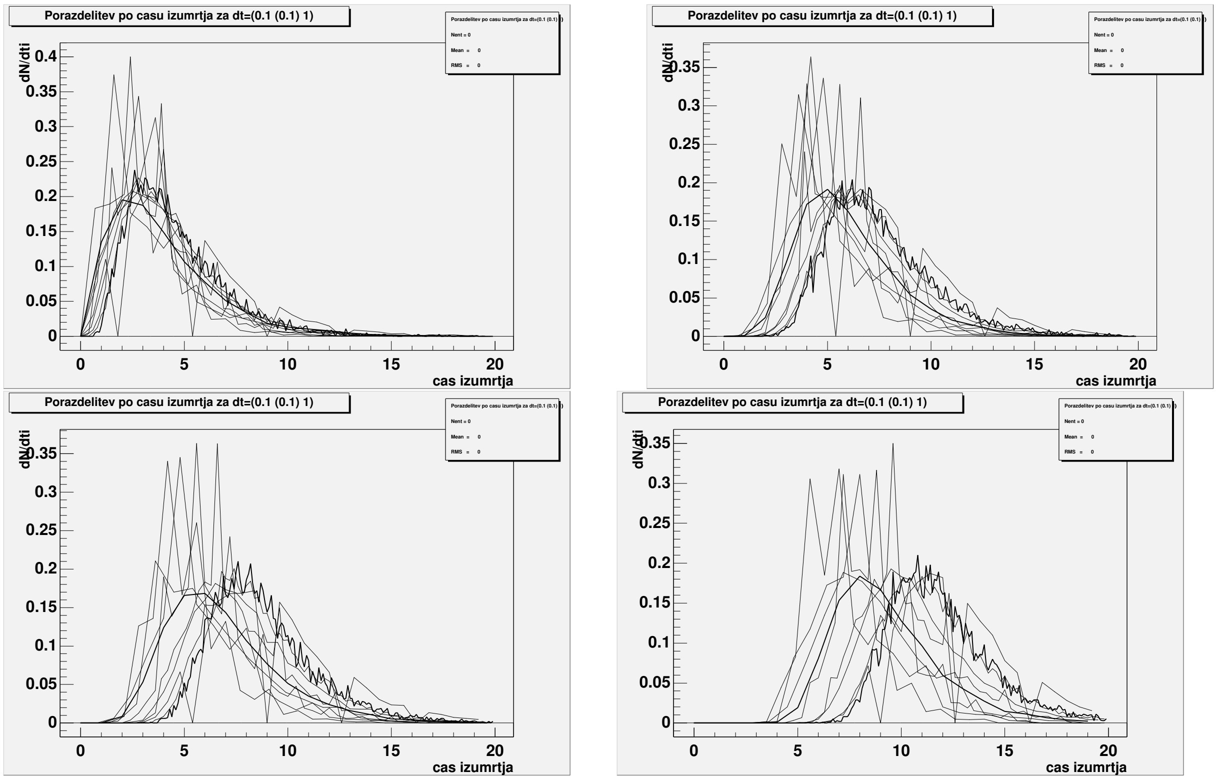
posledica nekih zunanjih dejavnikov. A delajmo se za trenutek, da je to res stohastični proces. Celoštevilska porazdelitev neodvisnih dogodkov v konstantnem obdobju je seveda Poissonska okrog popvprečnega števila na desni strani enačbe. Ali če pišemo Poissonovo porazdelitev kot $\mathcal{P}(\overline{N}, N)$ in pišemo naključno število po tej porazdelitvi kot $\xi_{\mathcal{P}}(\overline{N})$, bo naš korak videti takšen:

$$N_{i+1} = N_i - \xi_{\mathcal{P}}(\lambda N \Delta t).$$

"ce model razširimo z rojstvi, seveda ne smemo kar vstaviti za nov koeficient umiranja razliko. Tako dobimo sliko za model brez rojstev z manjšo smrtnostjo. Rojstva upoštevamo v svojem členu. Takole:

$$N_{i+1} = N_i - \xi_{\mathcal{P}}(\lambda N \Delta t) + \xi_{\mathcal{P}}(\beta N \Delta t).$$

Naša Poissonova porazdelitev ima končno širino. V nasprotju z analitično re'itvijo dobimo peščico verjetnih scenarijev. Tudi širina pasu časa izumrtja je končna in ne zaradi stohastičnosti čas ni več oster. Pridobili smo elemente verjetnosti. Še o času. Pravzaprav o razmiku. Vidimo, da je v naš model vključen parameter Δt. Sami lahko izbiramo, kako daleč v času se bomo premaknili. Seveda so od tega parametra odvisni tudi rezultati. Če se pogovrjamo o času izumrtja, nam parameter pove lo'ljivost našega računa. "ce se pogovarjamo o točnosti rešitve, lahko ocenimo, kako verjetna je rešitev za posamezen Δt. Prevelik korak namreč poseže v nedovoljene vrednosti. Zato se zdi smiselno omejiti korak na red velikosti parametra smrtnosti. Slike okrog te vrednosti kaže graf. Res se časi izumrtja bistveno spremenijo, ko gremo z enega na drugi rob čaovne skale. Resnica pa je verjetno nekje v sredini.



Slika 3: Presek potekov s prve slike na časovni osi izumrtja. Porazdelitev se grmadi na levem robu, ko se korak povečuje. Prva in zadnja črta sta odebeljeni.

2 Matrika sosednosti

Vpeljemo lahko kvantnomehansko matriko prehodov med stanji. K njej bomo lahko postavili gostotni vektor, ki nam bo v komponentah povedal zvezno verjetnost za posamezno stanje. Stanje bo kar število ljudi v populaciji. Matrika prehodov pa bo vedela, kakšna je verjetnost, da se število prebivalcev spremeni v neko drugo število. Torej:

$$M_{i,j} = P(j \to i).$$

Iz popualcije z j ljudmi bi radi naredili populacijo z i ljudmi. Ker gre za navadno umiranje (prva naloga) s parametrom λ, bodo iz stanja j dostopna le stanja z $i < j$ osebki. Verjetnost je seveda enaka verjetnosti, da bomo pri populaciji j ljudi izžrebali $(j - i)$ mrtvih. Torej:

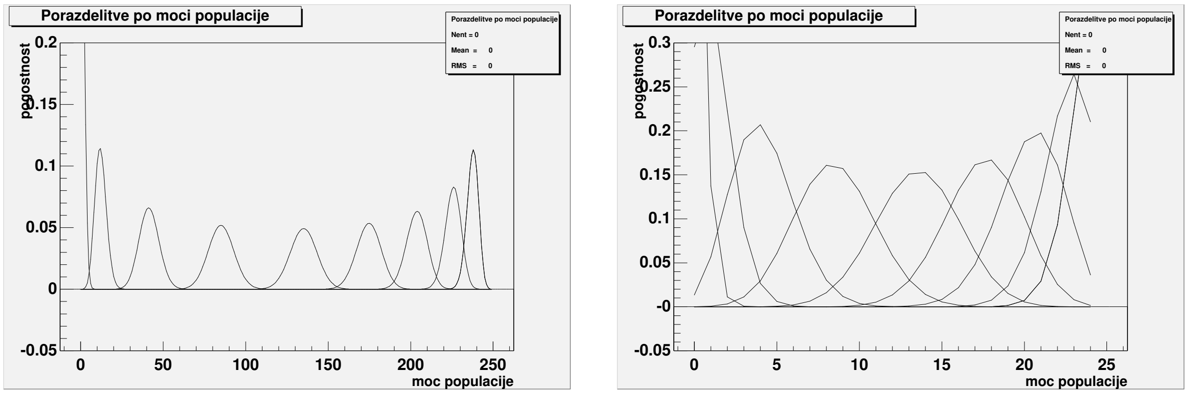
$$M_{i,j} = \mathcal{P}(\lambda j \Delta t, j - i).$$

Če se lotimo se modela z rojstvom in smrtjo pa imamo pogojno verjetnost. Seštevamo namreč rezultata dveh naključnih procesov. Nova porazdelitev je konvulucija. Recimo, da izžrebamo k smrti. Potem bomo morali imeti $i - j + k$ rojstev, da bomo prišli do stanja i iz stanja j. Tu pogoj o dostopnosti ni več aktualen, saj so nam iz stanja j dostopna prav vsa stanja (a ne s podobno verjetnostjo). Take neskončne matrike ne moremo zapisati, lahko pa zapišemo njen poljubni člen:

$$M_{i,j} = \sum_{k=\max(j-i,0)}^{\infty} \mathcal{P}(\lambda j \Delta t, k)\, \mathcal{P}(\beta j \Delta t, i - j + k).$$

V praksi nehamo seštevati, ko se vsota dovolj malo spreminja.

Če začnemo z ostro porazdelitvijo v preprostem modelu, lahko spremljamo njeno propagiranje v času. Vidimo porazdelitve po moči populacije v odvisnosti od časa. Porazdelitve se hitro spreminjajo, ko smo daleč



Slika 4: Preseki krivulj iz prve naloge po mo/ci populacije. Podobno kot tam začnemo z delta distribucijo, ki jo pustimo razširiti preko populacije. Končni rezultat ni nikoli več delta funkcija, ji je pa zelo podobna, le da ni neskončna. V eksponentni skali se vidi, da je razpad res eksponenten in vzporednica z analitičnim modelom zdrži.

od ničle, saj se več verjetnosti grmadi pod povprečjem. Ko pa pridemo dovolj blizu ničle, pa le počasi lezemo navzgor. Končni rezultat je *skoraj* delta funkcija, vendar zaradi zveznih in realnih verjentosti populacija nikoli ne izumre. Zmeraj obstaja verjetnost, da je vsaj en član populacije še živ. Zato je čas izumtja take populacije težko oceniti. No, odvisen je od subjektivnega kriterija.
Nekako pričakovano je, da bo moč populacije padala eksponentno. Zato izgledajo porazdelitve, ki so v času eksponentno razmaknjene, na časovni skali kar linearno premaknjene. To kažejo tudi slike.

3 Verjetnostna porazdelitev in efektivni odmik

Radi bi zapisali porazdelitev po stanjih $\frac{dw}{dN}(t)$. No vtaknimo na začetek delta funkcijo. Torej:

$$\frac{dw}{dN}(N, t=0) = \delta(N - N_0).$$

Zdaj pa stopimo korak naprej v času. Izžrebali bomo število smrti. Seveda po poznani verjetnosti. Nova porazdelitev bo konvulucija delte in Poissona, torej Poisson. Ali v enačbi:

$$\frac{dw}{dN}(N, \Delta t) = \sum_k \delta(k - N_0)\mathcal{P}(\lambda k \Delta t, k - N).$$

To je lahko izračunati, dobimo kar

$$\frac{dw}{dN}(N, \Delta t) = \mathcal{P}(\lambda N_0 \Delta t, N_0 - N).$$

Naslednji korak je spet konvulucija:

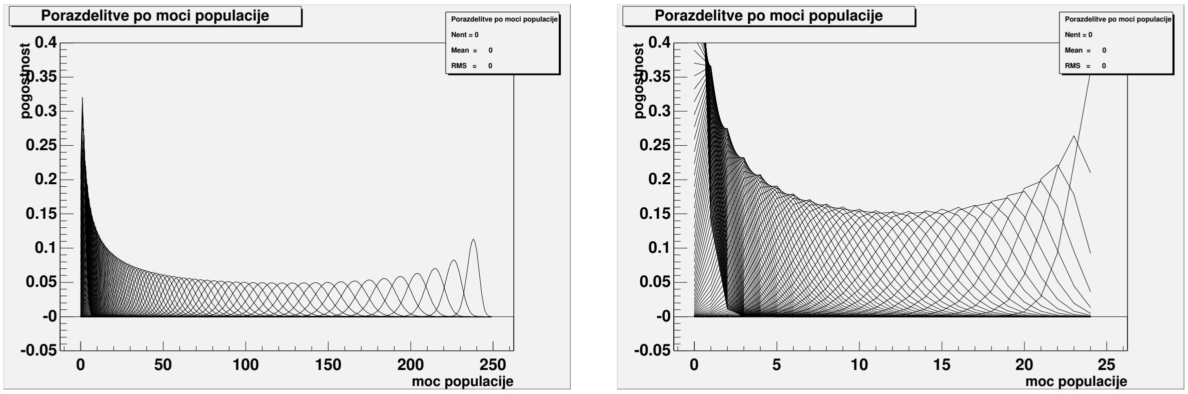
$$\frac{dw}{dN}(N, 2\Delta t) = \sum_{k=N}^{N_0} \mathcal{P}(\lambda N_0 \Delta t, N_0 - k)\,\mathcal{P}(\lambda k \Delta t, k - N).$$

Konvulucija dveh Poissonovih porazdelitev s stalnim povprečjem je sicer znana:

$$\mathcal{P}(\overline{N}_1, N) * \mathcal{P}(\overline{N}_2, N) = \mathcal{P}(\overline{N}_1 + \overline{N}_2, N);$$

a tu je povprečje tudi del konvulucije. “ce vstavimo pravi izraz za Poissonovo verjetnost, dobimo izraz:

$$\frac{dw}{dN}(N, 2\Delta t) = \frac{(\lambda \Delta t)^{N_0 - N}}{(N_0 - N)!} e^{-(N_0 + N)\lambda \Delta t} \sum_{i=0}^{N_0 - N} \binom{N_0 - N}{i} N_0^{N_0 - N - i} (N+i)^i e^{-i\lambda \Delta t},$$

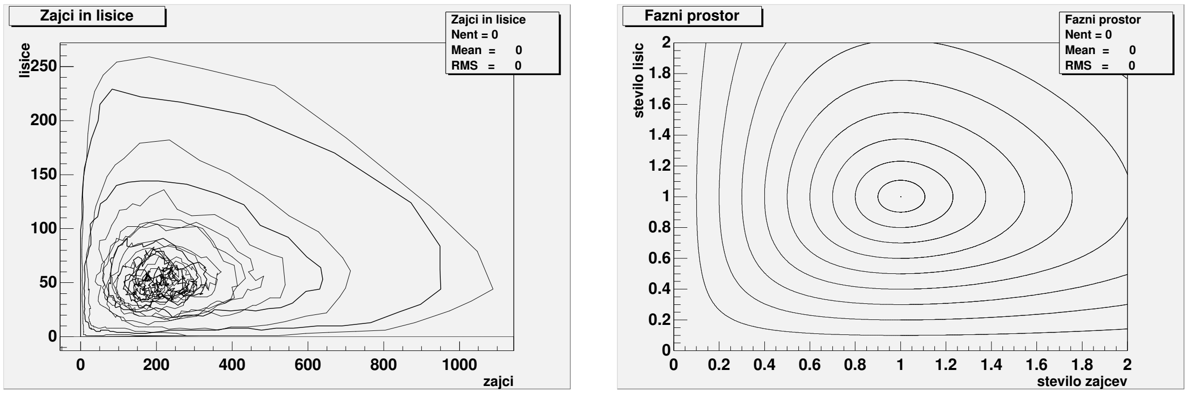


Slika 5: Porazdelitve v odvisnosti od časa. Kar ne zmoremo analitično, gre breztežav numerično. KOnvolucije so resda podobne Poissonu, a se podobnost kmalu izgubi, saj se ne raztegujejo, pač pa krčijo ko preidemo polovico. Analitčnega rezultata pa nimam.

kjer se ustavi moje analitično znanje.

Seveda, slike teh krivulj pa že imamo. Dobili smo jih v prejšnji nalogi, ko smo množili matriko. Vsekakor pa je porazdelitev po času t kar malo bolj zpletena konvulucija $\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$ Poissonovih porazdelitev. Vendar pa je pravi izraz neznanka in zadovoljim se s slikami iz prejšnje naloge.

4 Zajci in lisice stohastično



Slika 6: Namesto da bi število zajcev in lisic nihalo okrog ravnovesne lege, se iznihava. Na desni normirana slika iz prejšnje naloge. Zvezen model nasproti diskretnemu.

Rešujemo enačbi:

$$\dot{Z} = \alpha Z - \beta Z L,$$
$$\dot{L} = -\gamma L + \delta Z L.$$

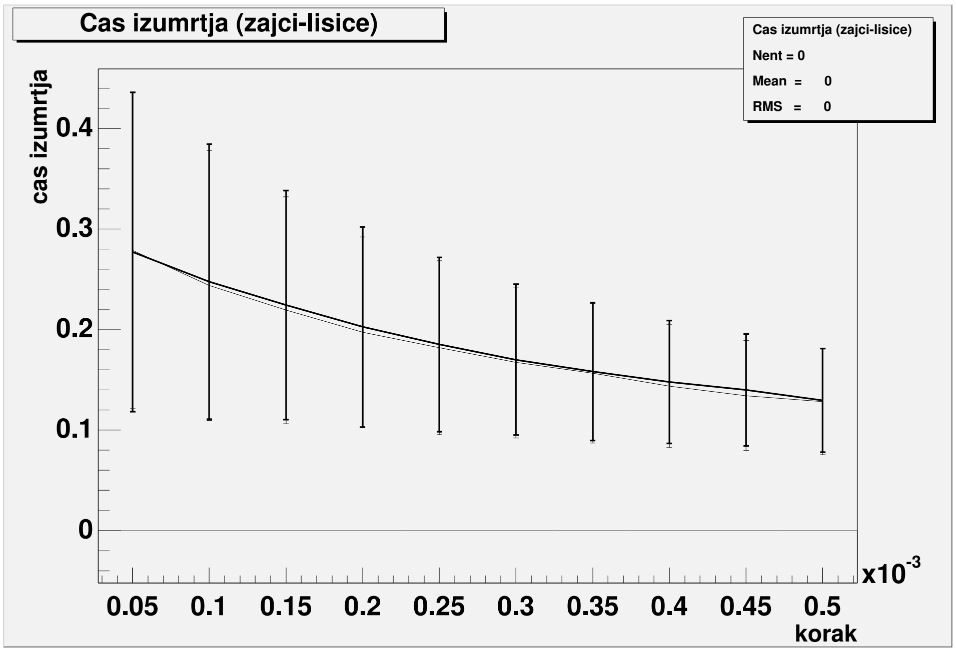
Imamo še podatke, da sta ravnovesni legi 200 za zajce in 50 za lisice, razmerje rodnost/smrtnost pa je 5/4. Tako sem jaz razumel. Torej v enačbah:

$$\frac{\alpha}{\beta} = 50 \quad \frac{\gamma}{\delta} = 200 \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{5}{4},$$

z rešitvijo:

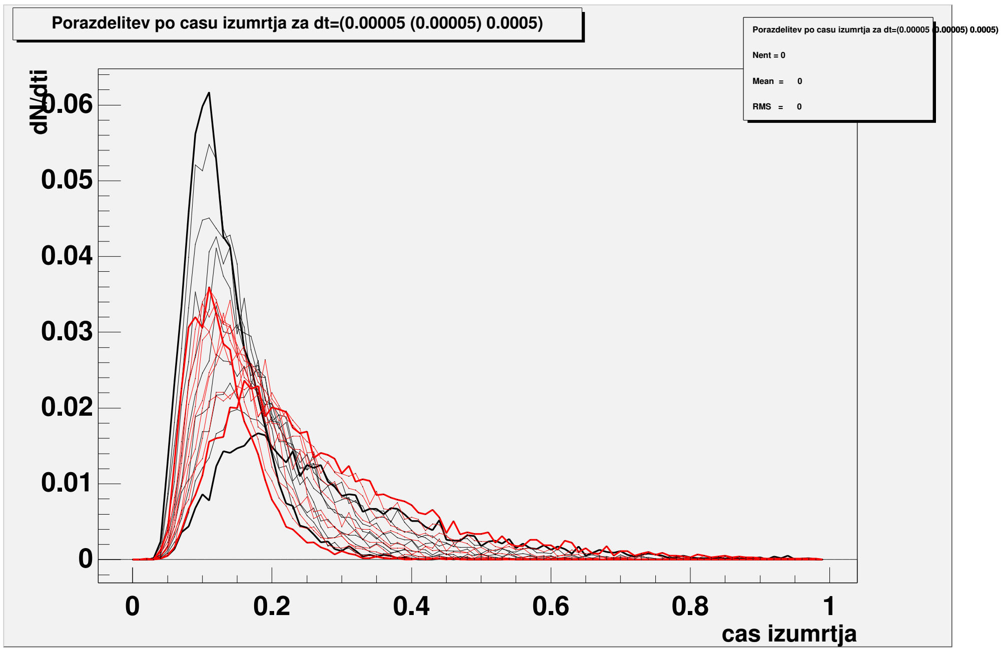
$$\dot{Z} = 250Z - 5ZL,$$

$$\dot{L} = -200L + ZL.$$

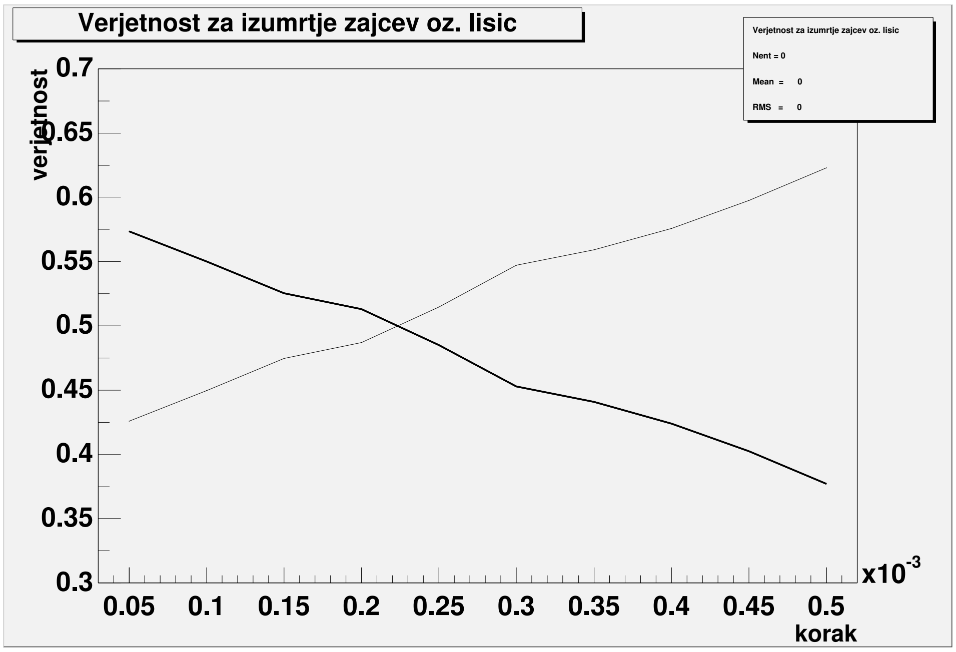


Slika 7: Na sliki sta prikazana dva grafa, čeprav se to skorajda ne vidi. Vedno me namreč zanimajo razlike med izumiranjem na zajčji oziroma na lsičji strani. Katera populacija bo prej izumrla? Izkaže se, da bosta obe izumrli v enakem času v odvisnosti od časovnega koraka. Tudi razpršenost je za obe enaka. Skratka, tu deluje model homogeno - vseeno mu je, če gledamo zajce ali lisice.

Zaradi velikih koeficientov bo moral biti parameter Δt dovolj majhen, sicer bo preveč vrednosti prelahko dostopnih. "cakamo, da ena populacija izumre. To so lahko lisice ali pa zajci. Mogoče je povprečen čas za izumiranja lisic drugačen kot tisti za zajce. Mogoče je verjetnost za izumrtje zajcev drugačna od verjetnosti za izumrtje lisic. Tega na pamet ne moremo vedeti, pokaže nam le eksperiment in rezultate slika. "ze to, da populaciji izumreta, kaže slabost stohastičnih modelov. Saj vemo,da imata zgornji ena;cbi analitično rešitev v sklenjenih krivuljah in ne ergodičnem toku. Izgubili smo ohranjanje energije.



Slika 8: Upam, da se bo barvna ločljivost poznala. Svetlejši graf kaže porazdelitev po času izumrtja lisic, temnejši graf pa enako porazdelitev za zajce. Obe porazdelitvi ta normirani na vse poskuse in ne le na rezultate iste vrste. Zato lahko primerjamo tudi pogostnost posameznega izida. Če dobro pogledamo, vidimo, da je temnejša krivulja za majhen premik (bolj desna) nižja od one druge, za velike premike (skrajno leva) pa višja. Kaj se dogaja? Je več izumrtij lisic za majhen časovni korak? Lahko to kako pojasnimo? Opazimo spet, da se sredine krivulj manjšajo. In celo ožajo, kar je presenetljivo.



Slika 9: Res se dogaja nekaj čudenga. Zdi se mi, da je 10000 poskusov dobra količina, tako da se lahko na povprečja zanesemo. Temnejša krivulja kaže pogostnost izumrtja na lisičji, ostra pa na zajčji strani. Seveda lahko rečemo, da je oboje posledica slabe zbire časovnega koraka. A zanimivo je, da lahko s časovnim korakom izberemo razmerje med stevilom izumrtij zajcev in lisic, oziroma da naredimo en izid verjetnejši. Rekel bi, da je optimalen čas nekje okrog presečišča obeh krivulj.