Modelska analiza I
1999/2000
13. naloga - Fourierova analiza (signalov)

Andrej Studen

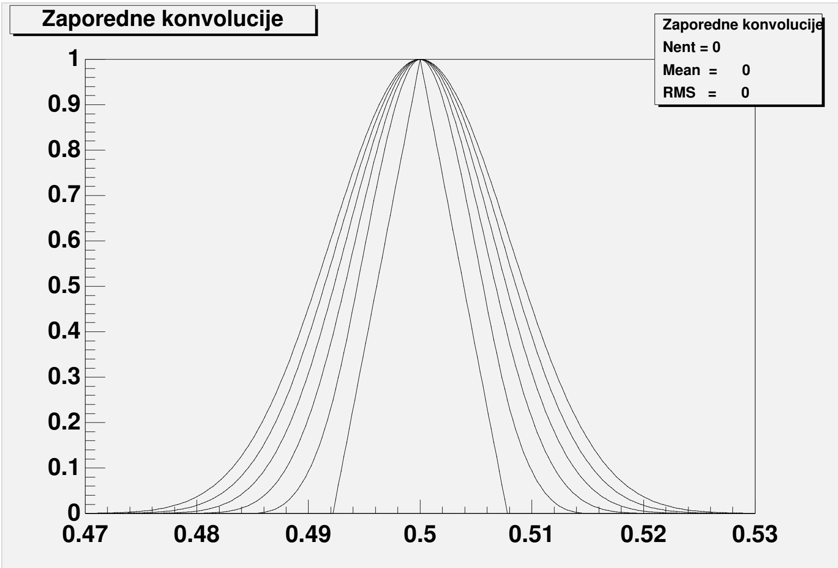
13. januar 2000

1 Konvolucija

Delamo zaporedne konvolucije funkcije:

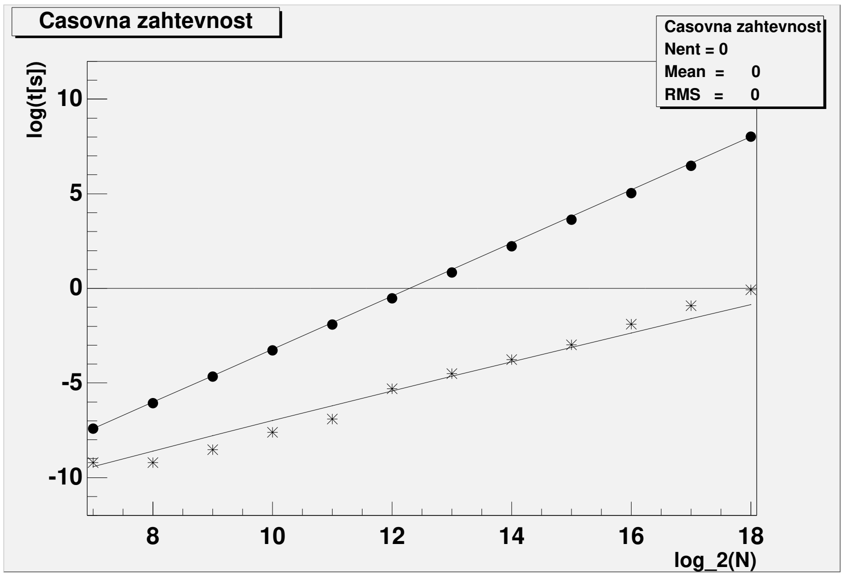
$$f(x) = 1 - \frac{|x|}{W},$$

kjer je W ravno polovična širina funkcije. ZUnaj intervala $[-W, W]$ je funkcija identično enaka nič. Po vsaki konvoluciji se funkcija ravno še enkrat razširi in v limiti neskončnih zaporednih konvolucij preide v Gaussovo funkcijo.



Slika 1: Zaporedne konvolucije linearno padajoče porazdelitve, kot jih sestavi Fourierova transformacija. Rišem premaknjeno tabelo, saj sem centriral porazdelitev na 0. Tako je na desnem robu tabele naraščajoči del, na levem pa padajoči del krivulj na sliki.

Fourierova transformacija nam pride prav zaradi konvolucijskega izreka. Zdi se, da nam bosta dve transformaciji, navadno množenje in inverzna transformacija vzeli manj časa kot direktno množenje vskaega člena tabele z vsakim členom druge tabele. To se tudi res zgodi, kot kaže slika. Če predpostavimo zahtevnosti $O(N^2)$ in $O(N \log_2 N)$, Časovno zahtevnost lahko modeliramo s funkcijama AN^2 (direktno množenje) in $BN \log_2 N$ (pot preko FFT), s prostima konstantama A in B. Tu se izkaže prvi model še kar smiseln s konstanto $A = 1$ μs, medtem ko za B dobimo negativno vrednost. To pomeni, da zahtevnost ni povsod enaka modelu - lahko da je treba prišteti še kak člen. Z bolj natančnim modeliranjem se nisem ukvarjal.



Slika 2: Primerjava za direktno konvulucijo(.) in konvulucijo prek FFT(*). Očitno je čas za prvo daljši. Prvi krivulji se v log/log skali dobro prilega premica, posledica nastavka $\ln T = \ln(2^k)^2 = k \ln 4$, medtem ko spodnji krivulji nastavek $\ln T = \ln(2^k \log_2 2^k) = k \ln 2 + \ln k$ ne ustreza najbolje. Prosto konstanto časa enega cikla sem določil iz povprečja, rezultati v tekstu.

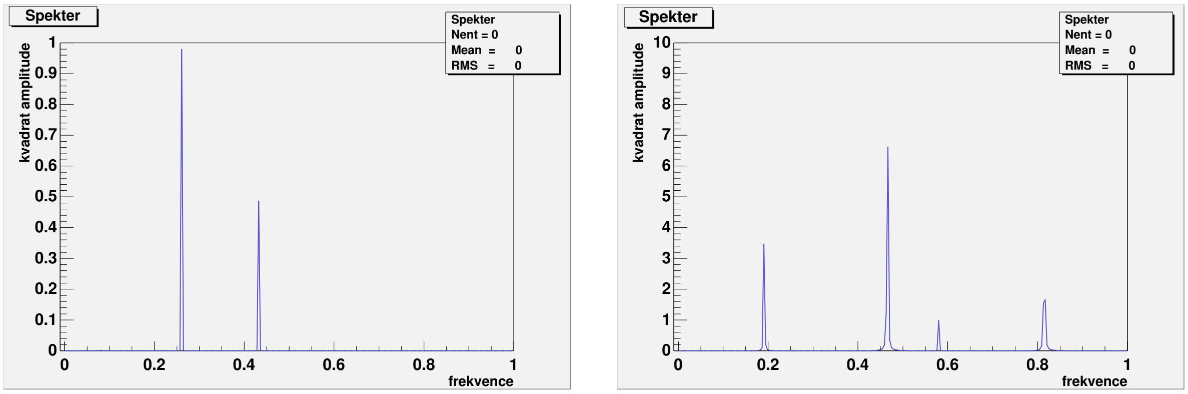
Konvolucija ima za svoje težišče kar vsoto težišč konvuluirank. Zato je smiselno obe težišči postaviti na nič. Ker gre tako ali tako za periodične funkcije, lahko postavimo pol hriba (padajoči del) na začetek, naraščajočega pa na konec. Ostane nam le še mala formalnost pri preurejanju tabele in že imamo sliko, ki kljub večanju števila konvolucij ne uide iz fokusa.

2 Spekter

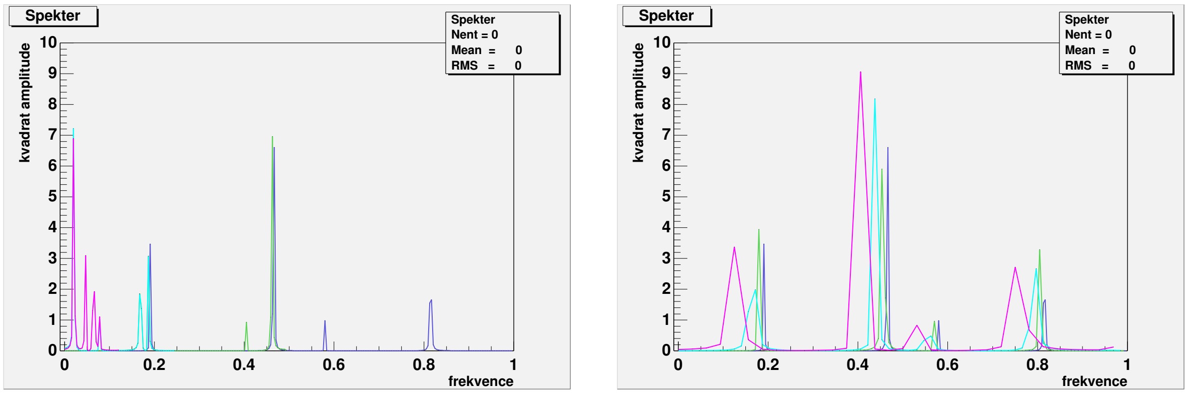
Spekter je nazorna fizikalna predstava Fourierove transformacije. Ker deluje transformacija v kompleksnem, so kosinusi in sinusi skriti v razbitem spektru, ki ima zdaj pozitivno in negativno stran, čeprav je le pozitivna stran fizikalno smiselna. Res, negativne frekvence so ravno konjugirano kompleksni pari k pozitivnim frekvencam in nam služijo za izločitev kosinusov in sinusov. Zato bo močnostni spekter kot vsota kvadratov pozitivnih in negativnih frekvenc ravno smiselna slika porazdelitve moči po frekvencah.

Vendar pa nam `realft` odpiše tudi ta problem. “ce upoštevamo, da transformiramo realno funkcijo, vsega bogastva kompleksne transformacije ne bomo rabili. Simetrijske lastnosti nam dovolijo trasformirati le realen del funkcije in še dovolj podatkov se skriva v pozitivnem delu frekvenčnega spektra. Zato kvadriramo le pozitivne frekvence.

Mogoče bi lahko vrhove (kar nas navadno zanima) izločili tudi z manj točkami. Točk sem redčil na dva načina. Najprej sem vzel le vsako drugo točko. Tako sem enako gosto preiskal spodnji del spektra, medtem ko sem izgubil zgornji del spektra. Seveda je trik tudi v tem, da se zgornje frekvence potujijo in preslikajo v spodnji del spektra in ga tako popačijo. To nam pride prav, če se ukvarjamo s spektrom nizkih frekvenc. Potem pa sem uporabil samo polovico spektra, centrirano na sredini. Tako sem dobil vsako drugo točko v spektru. To drugo pa delamo, ko nas zanimajo le vrhovi v razmeroma širokem spektralnem območju. Kot kažejo slike, nam metoda vrhove relativno dobro opiše, a vse vrhove razširi; izgubljamo tudi ločljivost.

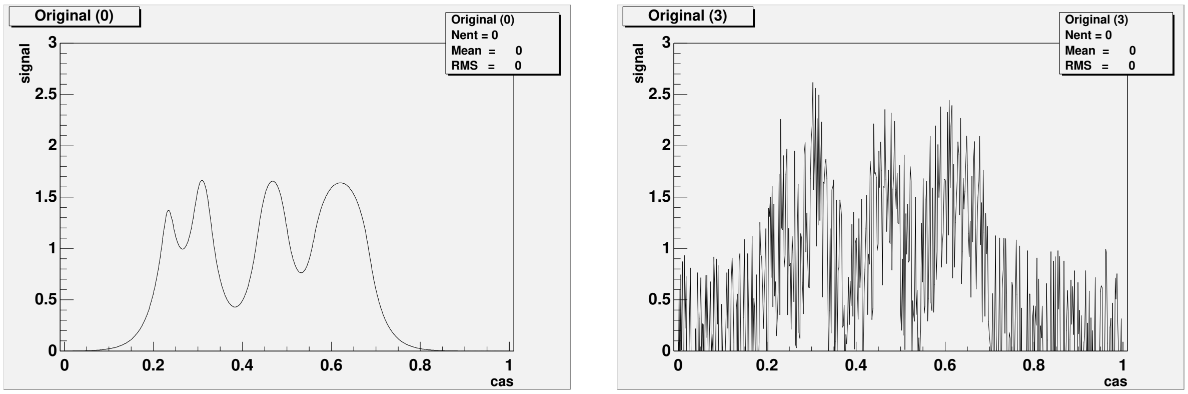


Slika 3: Močnostni spekter signalov na datotekah `val2.dat` in `val3.dat` na vseh 512 točkah. As good as it gets.



Slika 4: Primerjava slabšanja kvalitete spektra če zmanjšujemo število točk. Desno ohranjam medsebojno razdaljo vzorčenih točk in redčim spekter, levo ohranjam celoten vzorčen interval (in redčim gostoto točk) in izgubljam zgornje polovice spektrov. Levo se lepo vidijo potujitve, ko FFT prestavlja višje frekvence v svoje frekvenčno območje. Desno se vidi širjenje, saj je na istem intervalu vse manj točk. Vse za `val3.dat`.

3 Dekonvulucija

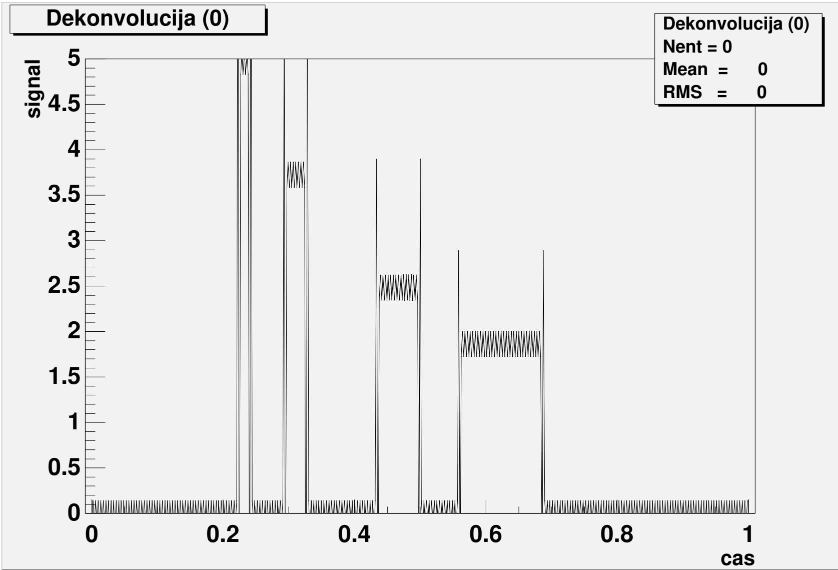


Slika 5: Primerjava lepega signala brez šuma in zmede, ki jo doda šum. Čudno, da tudi iz levega signala sploh kaj dobimo!

Navadno so merjeni signali konvulucija pravih signalov ($s(t)$) in še prenosne funkcije detektorja ($g(t)$).

Poznamo torej funkcijo $d(t) = s(t) * g(t)$. Podobno kot prej izkoristimo konvulucijski izrek $\mathrm{F}(s*g) = \mathrm{F}(s)\mathrm{F}(g)$ in označimo $\mathrm{F}(s(t)) = S(f)$. Zdaj lahko izpišemo neznano funkcijo $s(t)$ kot:

$$s(t) = \mathrm{F}^{-1}\left(\frac{D(f)}{G(f)}\right).$$



Slika 6: Rezultat dekonvulucije najlepšega signala so škatle. Še kar lepe, glede na nestabilnost sistema.

Če pa je signalu primešan šum, se lahko zgodi, da funcija $D(f)$ ne bo imela ničel na istih mestih kot $G(f)$, dobili bomo singularne špice, ki so posledica šuma. Torej se zdi smiselno iz signala izločiti šum. To lahko storimo z Wienerjevim filtrom. Ta predpostavi, da je šum, primešan signalu, bel in zato konstanten po vseh frekvencah. Če si torej mislimo, da je naš signal omejen v frekvenčnem spektru, torej da je sestavljen le iz nizkih frekvenc (kot je to običaj za nizkofrekvenčnimi filtri), lahko v repu močnostnega spektra prepoznamo šum, ki ga signalu odštejemo. "ce označimo spekter s funkcijo $M_D(f)$, pri čemer je M_D definiran le za pozitivne frekvence, lahko popravimo pravo Fourirovo transformacijo s členom:

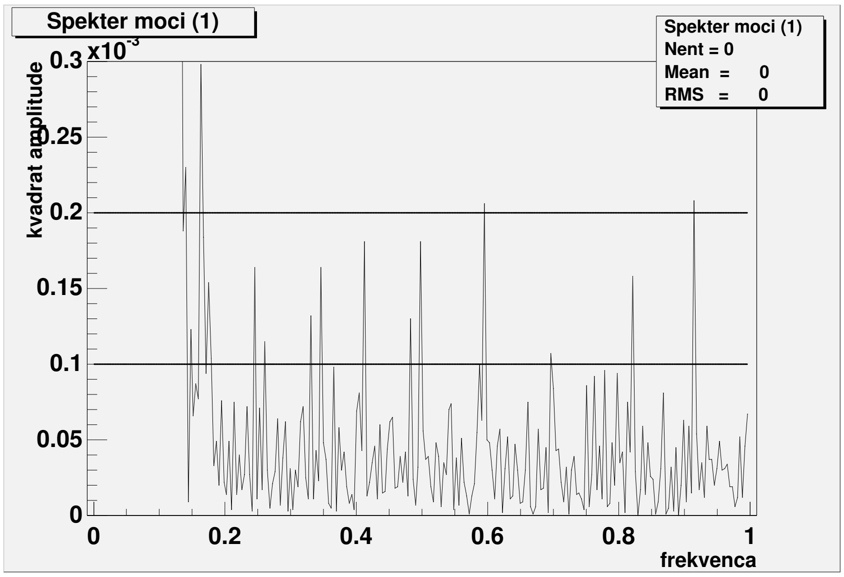
$$\frac{M_D(f) - N}{M_D(f)}.$$

Mogoče je najpomembnejša posledica tega filtra dejstvo, da bo povsod, kjer je $M_D(f)$ manjša od izbrane vrednosti šuma N, zgornji člen enak 0, in to bo celo ničla druge stopnje, saj smo dobili $M_D(f)$ kot kvadrat amplitude pri posamezni frekvenci. Z zgornjim členom množimo naši iskalnik prave funkcije in dobimo:

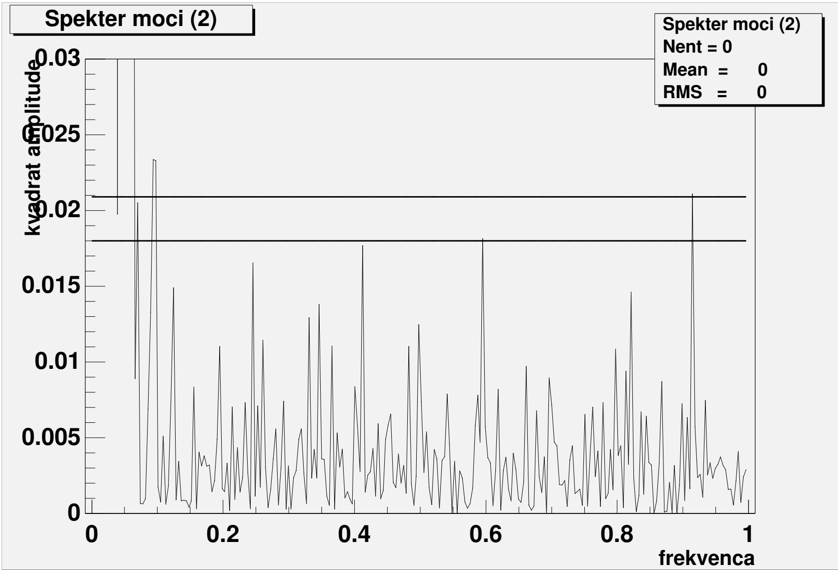
$$s(t) = \mathrm{F}^{-1}\left(\frac{D(f)}{G(f)}\frac{M_D(|f|) - N}{M_D(|f|)}\right).$$

Torej bo tudi $S(f)$ v točkah, kjer je popravek enak nič, enaka nič, tako da bo prispevek teh točk h končnemu rezultatu izničen. Vidimo, kje bodo težave. Ko namreč šum preseže vrednost pomebnih vrhov v spektru, bomo le te tudi odrezali in s tem izgubili bistveno informacijo. Važen je torej le kvocient signal-šum. Če je signal nekajkrat večji od šum, bomo Wienerjev filter brez trežav uporabili, kot kažeta sliki `signal1.dat` in `signal2.dat`. Ko pa je šum prevelik, se signal popači, ne dobimo več lepih oblik, še več, rezultat je neka druga funkcija. Prenosna funkcija $g(t)$ našega detektorja pa je bila:

$$g(t) = \frac{1}{2\tau}\exp(-|t|/\tau),$$

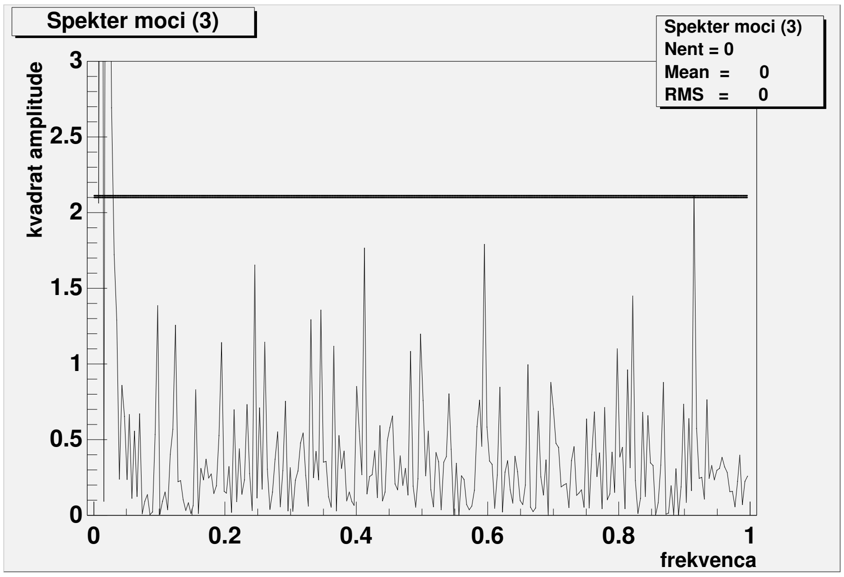


Slika 7: Šum prvega signala in reza. Čeprav razlika ni bistveno velika, je razlika v rezultatu ogromna.

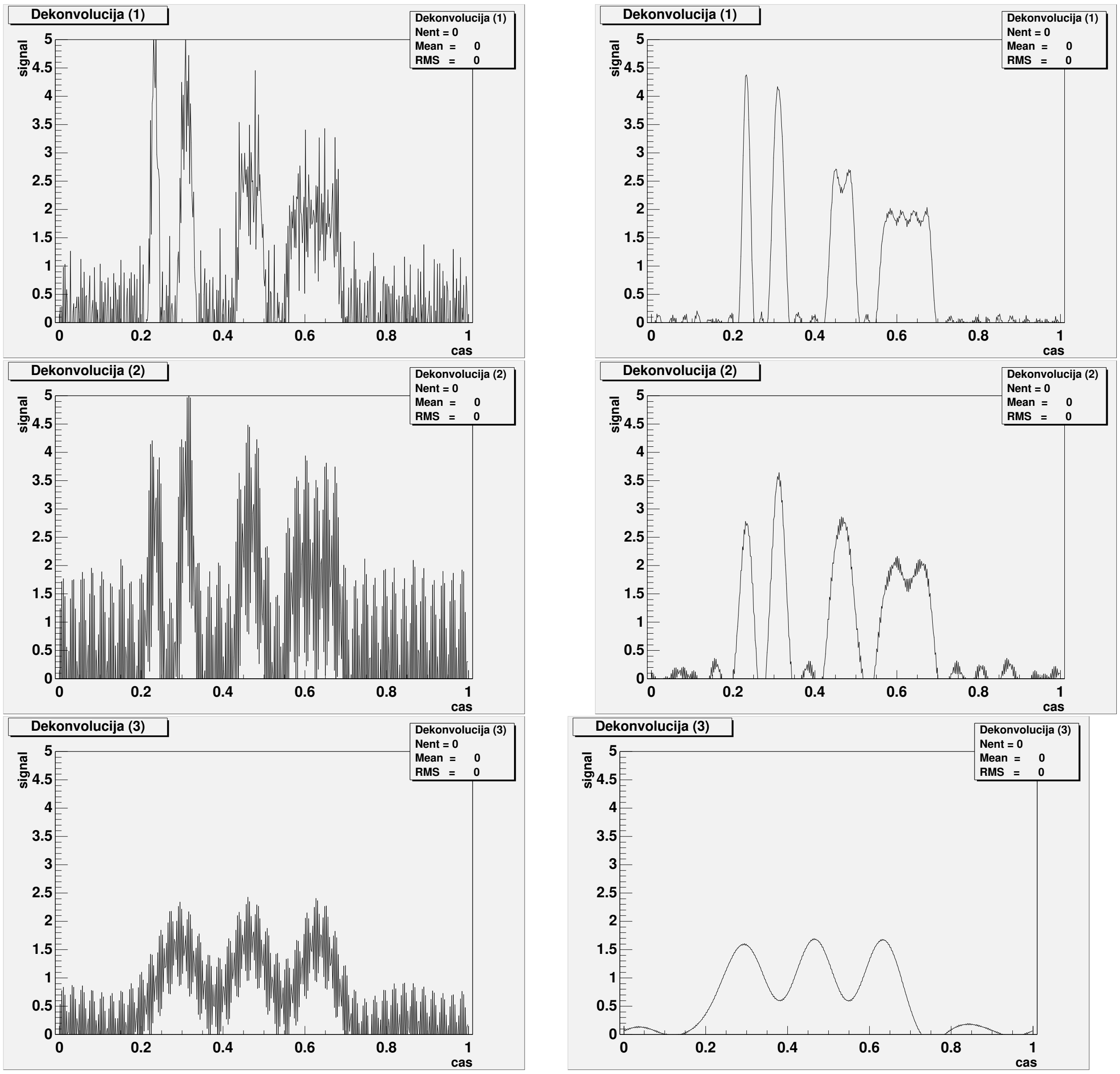


Slika 8: Šum drugega signala in oba reza.

kjer je τ v enotah Δ znašal 16. Funkcija je torje simetrična, še najbolje jo bomo opisali na simetričnem intervalu okrog nič, enakih dimenzij kot je pač signal, da se nam frekvnece prekrivajo. Seveda bi jo bilo dobro vzorčiti na daljšem intervalu, atudi tako smo dobili sorazmerno dobre rezultatee.



Slika 9: Šum tretjega signala in oba reza.



Slika 10: Iz zašumljenega, a že prepoznavnega signala do čiste verzije. Rezi so narejeni tako, kot je to nakazano na slikah šuma. Res se signal približa pravim vrednostim.