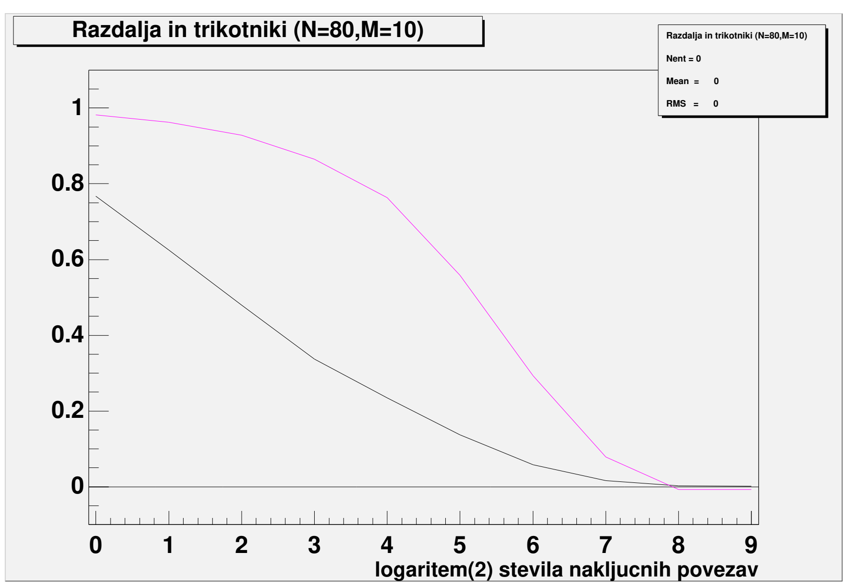
Modelska analiza I
1999/2000
14. naloga - Izboljšani populacijski modeli

Andrej Studen

17. februar 2000

1 Mali svet

Mali svet modelira krajevno odvisnost pri populacjskih modelih. Prejšnji primeri so namreč predpostavljali homogeno populacijo, ki se jo da opisati s krajevno neodvisno funkcijo $N(t)$. Namesto nje pa definiramo nov svet kot množico diskretnih točk s povezavami, torej kot matematični graf. Razmeščanje povezav po mreži je pravzaprav glavno delo pri oblikovanju malega sveta. Najpreprostejši modeli so urejeni. S tem mislimo ,da so povezave le med najbližjimi sosedi, medtem ko preko kroga ne gre skoraj nobena povezava. Nato v svet dodajamo naključne povezave, vendar ohranjamo regularnost. Še vedno imamo M-regularen graf na N točkah. V osnovi imamo dve merili povezanosti malega sveta. Eno merilo je povprečna razdalja, pri čemer definiramo razdaljo med točkama kot pot med njima. Začnemo s povezanim grafom, zato je razdalja končna. Povprečna razdalja je pač vsota dolžin vseh poti, deljena s številom vseh parov točk, tj. $N*(N-1)/2$. Drugo merilo je *gručavost*, ki jo definiramo kot število tirkotnikov v grafu. Trikotnik je vsak cikel dolžine 3. Ta nam pove, koliko skupnih znancev imajo posamezniki. V gručastih svetovih se informacije širijo počasi. Izkaže se, da z dodajanjem naključnih povezav najprej zmanjša povprečna razdalja (1) in šele nato gručavost (prav tam). Tudi logistična enačba zato teče drugače po urejenih, delno-urejenih(gručavost še velika) in neurejenih sistemih.



Slika 1: Vidimo, da imamo dva režima, gručavost namreč pada počasneje kot povprečna razdalja. Os x je logaritemska!

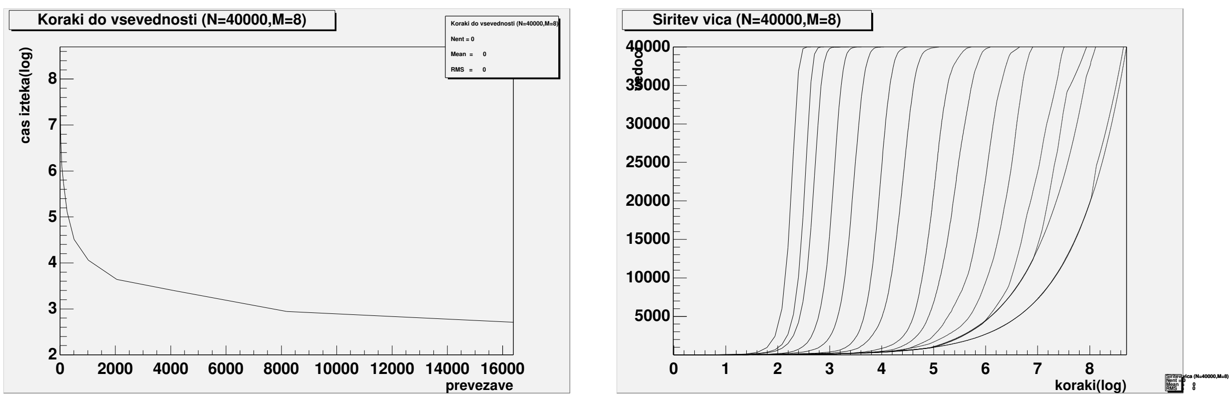
Logistično enačbo:

$$\dot{n} = \lambda n(N-n),$$

kjer je $n(t)$ število vedočih,obolelih,..., lahko simuliramo tudi v pripravljenem malem svetu. Predpostavljamo, da so povezave trki med ljudmi, da trčimo po vsaki povezavi v časovnem intervalu. Parameter λ je verjetnost, da bomo ob trku povedali šalo, oddali bolezensko klico,... Za vse vedoče torej po vseh povezavah z verjetnostjo λ prenesemo v isti razred tudi njegovega soseda. Rešitev logistične enačbe za krajevno neodvisno funkcijo $n(t)$ je kar:

$$n(t) = \frac{Nn(t_0)\exp(\lambda N(t-t_0))}{N - n(t_0)(1-\exp(\lambda N(t-t_0)))}.$$

Tako lahko primerjamo potek razširjanja šale različno urejenih sistemov s krajevno neodvisno rešitvijo. Primerjamo lahko tudi čas izteka, tj. čas, potreben za razširitev informacije po celi populaciji. Za zvezno rešitev ga definiramo s trenutkom, ko preseže $n(t)$ še polovičko zadnjega prebivalca, za diskretne primere pa je to itak dobro definirana vrednost.



Slika 2: Tako pa se širi vic po populaciji. Za primer sem vzel kar mesto s 40000 prebivlaci(Kranj), kjer vsak pozna 8 ljudi. Za urejene sisteme gre razširjanje kar linearno(desno, x-skala je logaritemska), za neurejene pa dobimo neke vrste s-curve. Po 100000 naključnih prevezevah je pot vica po mestu dolga le 10 korakov! V območju gručavosti vsaka centralna prevezava močno zmanjša čas izteka. Obe x-skali ste logaritemski.

Za urejene sisteme je čas izteka nekaj velikostnih redov večji od zvezne rešitve. Nato se ta čas zmanjšuje, dokler v se v popolnoma neurejenih sistemih povsem ne približamo krajevno neodvisni rešitvi.

2 Število prebivalcev

Preprost eksponentni model:

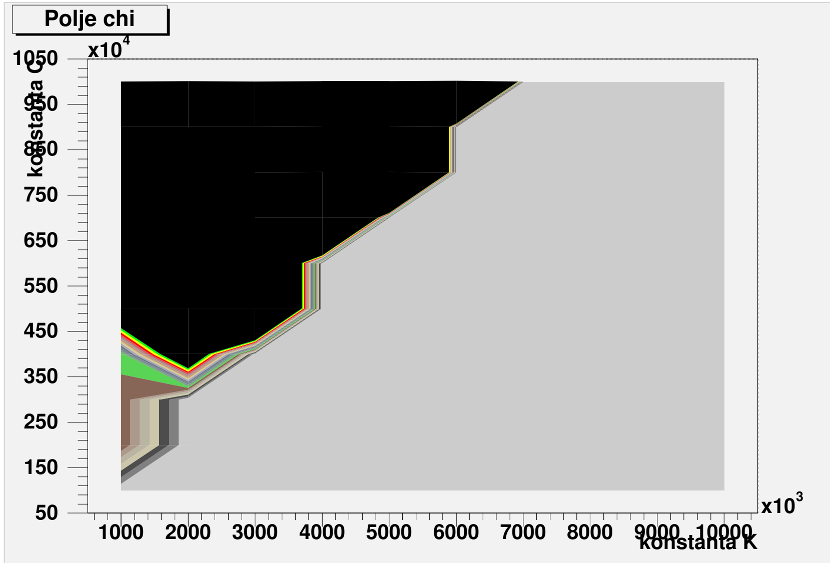
$$\dot{N} = \lambda N,$$

ne opiše dobro razvoja populacije, saj je pričakovnanje, da bo λ neodvisen od od časa in s tem razvoja populacije, rahlo zmoten. Zato so predpostavili, da lahko ta parameter variira; $\lambda = \lambda(t)$. Seveda je smiselno ta parameter omejiti. Poznamo reprodukcijsko dobo (τ), to je čas, potreben da se populacija podovji (ali se poveča za Eulerjev e). Na začetku populacija narašča najmočneje - na voljo je dovolj prostora, hrane. Zato je spodnja meja kar $1/\tau$. Seveda prebivalstvo ne more naraščati hitreje kot veli njegov reprodukcijski čas - odtod zgornja meja $1/N\tau$. Potem upoštevamo še sebipodobnost rešitev, tj. da je naraščanje populacije proces, ki poteka enako na različnih časovnih oziroma velikostnih skalah, edini parameter pa je ravno reprodukcijski čas (τ). Zato so od vseh možnih rešitev s časovno variabilnim parametrom τ dobre le potenčne vrste, oziroma:

$$N(t) = C*(t-t_0)^\alpha.$$

Če pa zgornje ugotovitve prepletemo, nam ostane model, ki ga je predlagal Kapica, češ da je:

$$\dot{N} = K\sin^2\left(\frac{N}{K}\right) + \frac{1}{K}$$

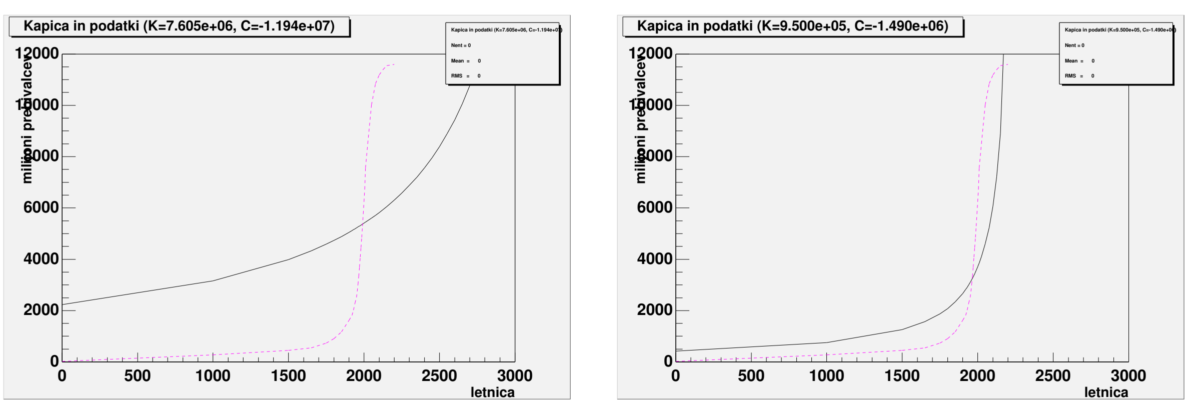


Slika 3: Dobor je viden zlom, vzdolž katerega so hkrati tudi minimalne vrednosti. Prav tam sta tudi obe rešitve, ena v sodnjem levem kotu, druga pa nad sliko, vendar še vedno v jarku.

z analitično rešitvijo:

$$N(t) = K \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \tan \left(\frac{\sqrt{K^2+1}}{K^2}(t-C) \right) \right]$$

Takoj opazimo težavo, da je K hkrati merilo tako za moč populacije kot za čas zloma oz. velikega naraščanja populacije. Zato je vrednost vsote kvadratov med modelom in podatki močno valujoča funkcija in je težko najti dobre parametre. Nekaj ubogih fitov je na slikah, kakor tudi zanimivo polje chi^2 nad koeficienti, kjer sem privzel $\sigma^2 = 1$. Vidimo, da obstaja zlom, kjer nam χ^2 naraste in ravno vzdolž zloma so hkrati tudi najamnjše vrednosti. Tako najdemo nekaj lokalnih minimumov za modeliranje. Konstante na slikah so enake kot v enačbi.



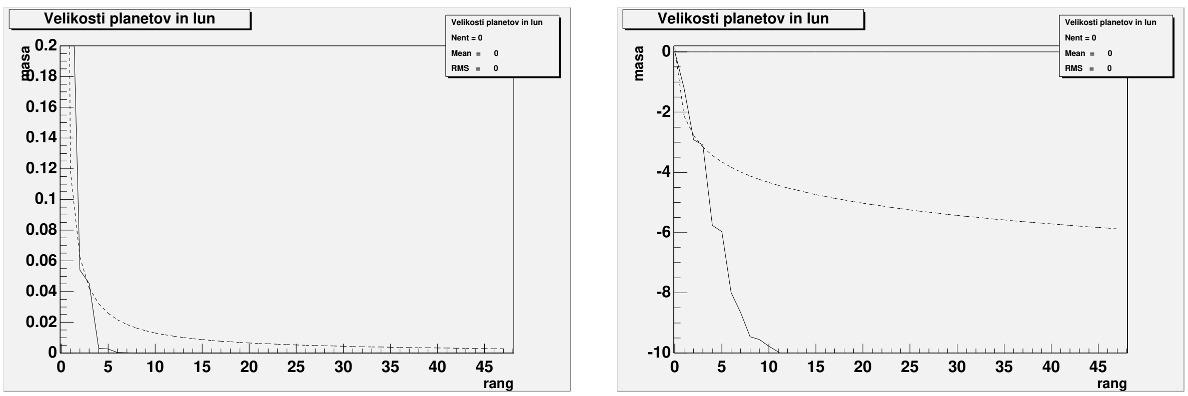
Slika 4: Dva fita za različne konstante K in C. χ^2 je za oba primera nekje okrog $2 \cdot 10^8$ in ni ravno blesteč. Seveda mislim s χ^2 najmanjše kvadrate, saj napak ne poznam. Obe krivulji se slabo ujemata s podatki. Veliki konstanti K silita krivulji v ogromno vrednost po prehodu(desno) in čeprav je prileganje dobro na omejenem področju, je napoved slaba.

3 Sebipodobnost

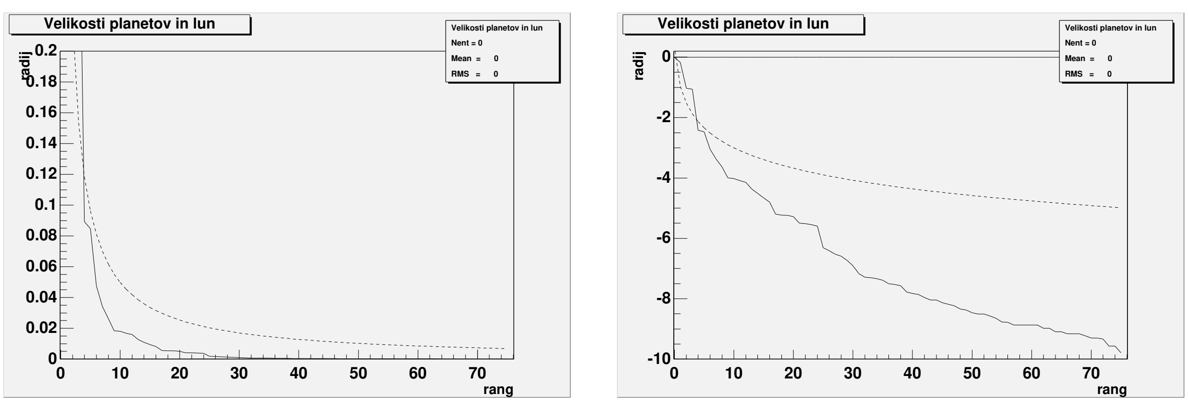
Iz sebipodobnosti sledi tudi enačba, ki povezuje objekte na različnih skalah. Predpostavlja namreč, da se istovrstni objekti razvijajo povsem enako, le v drugačnih merilih in so zato njhove opazljivke (velikost, masa, število prebivalcev, dobiček) povezane. Izkaže se, da je važen le rang objekta v nizu. In predpostavka, da jim botruje ista razvojna pot. Model je kar:

$$U(R) = U_0 \frac{\ln U_0}{R + \ln U_0}$$

Torej moramo pozanti celoten spekter objektov, da jih lahko opišemo le z enim parametrom in njihovo relativno velikostjo.



Slika 5: Prileganje za modeliranje krivulje sebipodobnosti po masi. Parameter poiščem iz ničle odovda najmanjših kvadratov. Začetek zadanem še kar dobro, tudi konec v eksponentu(desno), a v splošnem sem daleč od pravega poteka. Slab model ali premalo podatkov?



Slika 6: Prileganje za radije je podobno prileganju po masah.Glej komentar k prejšnji sliki.

Poskušal sem to storiti za planete in njihove lune. Gre za masovne objekte v prostoru, ki so nastali nekako iz goreče mase, ki se je odtrgala od velikega poka. Zdi se, da so se res razvijali povsem enako. Vendar pa je možno ,da sistem tudi odpove. Podatke sem pobral na internetu, `http://www.seds.org/nineplanets/nineplanets/nineplanets.html`. Da bi zgotovil rangu kar največjo veljavo, sem podatke skaliral na največjega ina nato modeliral, a prav zavidljivih rezultatov nisem dosegel. Vsaj planetarna razmerja (ko je razlika med maso Jupitra in Zemlje dva velikostna reda) se zdijo, kot da jim nekaj manjka. Zato je modleiranje slabo. Mogoče bi moral vzeti vsa telesa v vesolju, da bi bilo prileganje boljše.

Tabela 1: Primerjava izračunanih in pravih podatkov za maso planetov, podaki so v kg. Napake so precejšnje, model se zalepi za začetne vrednosti, kjer so napake drage, in je mnogo slabši v repu, kjer so le te relativno poceni. Še ureditev po vrstnem redu.

planet	izmerjena masa[kg]	model[kg]
Jupiter	1.900e+27	2.137e+27
Saturn	5.680e+26	2.250e+26
Neptun	1.025e+26	1.187e+26
Uran	8.635e+25	8.065e+25
Zemlja	5.974e+24	6.106e+25
Venera	4.869e+24	4.913e+25
Mars	6.422e+23	4.110e+25
Merkur	3.300e+23	3.533e+25
Ganimed(J)	1.480e+23	3.097e+25
Titan(S)	1.350e+23	2.758e+25
Kalisto(J)	1.080e+23	2.485e+25
Io(J)	8.940e+22	2.262e+25
Luna(Z)	7.350e+22	2.075e+25
Evropa(J)	4.800e+22	1.917e+25
Triton(N)	2.140e+22	1.781e+25
Pluton	1.270e+22	1.663e+25
Titania(U)	3.490e+21	1.560e+25
Oberon(U)	3.030e+21	1.469e+25
Rea(S)	2.490e+21	1.388e+25
Kairon(P)	1.900e+21	1.315e+25
Iapetus(S)	1.880e+21	1.250e+25
Ariel(U)	1.270e+21	1.191e+25
Umbriel(U)	1.270e+21	1.137e+25
Diona(S)	1.050e+21	1.088e+25
Tetis(S)	7.550e+20	1.043e+25
Enceladus(S)	8.400e+19	1.001e+25
Miranda(U)	6.300e+19	9.627e+24
Mimas(S)	3.800e+19	9.272e+24
Hiperion(S)	1.770e+19	8.943e+24
Himalija(J)	9.560e+18	8.635e+24
Amaltea(J)	7.170e+18	8.349e+24
Phoebe(S)	4.000e+18	8.080e+24
Jarmis(S)	2.010e+18	7.829e+24
Teba(J)	7.770e+17	7.592e+24
Elara(J)	7.770e+17	7.370e+24
Efimetej(S)	5.600e+17	7.160e+24
Prometej(S)	2.700e+17	6.962e+24
Pandora(S)	2.200e+17	6.774e+24
Fasifeja(J)	1.910e+17	6.597e+24
Karme(J)	9.560e+16	6.428e+24
Metis(J)	9.560e+16	6.268e+24
Sinopa(J)	7.770e+16	6.115e+24
Liziteja(J)	7.770e+16	5.970e+24
Ananke(J)	3.820e+16	5.832e+24
Adrastea(J)	1.910e+16	5.699e+24
Fobos(M)	1.080e+16	5.573e+24
Leda(J)	5.680e+15	5.452e+24
Deimos(M)	1.800e+15	5.337e+24

Tabela 2: Podobno kot za maso, lahko modeliramo tudi po radiju. Rezultati in vrstni red.

planet	premer $[km]$	model
Jupiter	142984.00	204925.66
Saturn	120536.00	54235.56
Uran	51118.00	31253.56
Neptun	49532.00	21951.67
Zemlja	12756.30	16916.78
Venera	12103.60	13760.62
Mars	6794.00	11596.97
Merkur	4880.00	10021.27
Luna(Z)	3746.00	8822.55
Ganimed(J)	2631.00	7879.96
Titan(S)	2575.00	7119.34
Kalisto(J)	2400.00	6492.63
Pluton	2274.00	5967.33
Io(J)	1815.00	5520.67
Evropa(J)	1569.00	5136.22
Triton(N)	1350.00	4801.83
Kairon(P)	1172.00	4508.32
Titania(U)	789.00	4248.62
Rea(S)	765.00	4017.22
Oberon(U)	761.00	3809.71
Iapetus(S)	730.00	3622.60
Umbriel(U)	585.00	3453.00
Ariel(U)	579.00	3298.57
Diona(S)	560.00	3157.36
Tetis(S)	530.00	3027.75
Enceladus(S)	260.00	2908.36
Miranda(U)	236.00	2798.03
Proteus(N)	209.00	2695.76
Mimas(S)	196.00	2600.70
Nereid(N)	170.00	2512.12
Hiperion(S)	143.00	2429.38
Phoebe(S)	110.00	2351.91
Amaltea(J)	98.00	2279.23
Larisa(N)	96.00	2210.91
Himalija(J)	93.00	2146.56
Jarmis(S)	89.00	2085.86
Galatea(N)	79.00	2028.49
Puck(U)	77.00	1974.19
Despina(N)	74.00	1922.73
Sikoraks(U)	60.00	1873.88
Efimetej(S)	57.00	1827.45
Portia(U)	55.00	1783.27
Teba(J)	50.00	1741.17
Prometej(S)	46.00	1701.01
Pandora(S)	46.00	1662.67
Julija(U)	42.00	1626.01
Talasa(N)	40.00	1590.94
Elara(J)	38.00	1557.34
Belinda(U)	34.00	1525.14

planet	premer [km]	model
Kresida(U)	33.00	1494.24
Kaliban(U)	30.00	1464.57
Desdemona(U)	29.00	1436.06
Naiad(N)	29.00	1408.63
Rosalind(U)	27.00	1382.23
Fasifeja(J)	25.00	1356.80
Fobos(M)	22.20	1332.29
Bianka(U)	22.00	1308.66
Karme(J)	20.00	1285.84
1999U1(U)	20.00	1263.81
1999U3(U)	20.00	1242.52
Metis(J)	20.00	1221.93
1986U10(U)	20.00	1202.02
Liziteja(J)	18.00	1182.74
Sinopa(J)	18.00	1164.08
Ofelija(U)	16.00	1145.99
Helena(S)	16.00	1128.46
Telesto(S)	15.00	1111.45
Ananke(J)	15.00	1094.95
1999U2(U)	15.00	1078.93
Atlas(S)	14.00	1063.38
Kordelija(U)	13.00	1048.26
Kalipso(S)	13.00	1033.57
Deimos(M)	12.60	1019.29
Pan(S)	10.00	1005.40
Adrastea(J)	10.00	991.87
Leda(J)	8.00	978.71