Naloga 9.5

V nekem poskusu odberemo iz vzorca 10 dogodkov z vrednostjo parametrov x v nekem območju. Nadalje, 2 dogodka v tem vzorcu vsebujeta mione.

- Določi vrednost parametra p binomske porazdelitve za verjetnost da dogodki z "visokim" x vsebujejo mione. Zapiši vrednost kot p_{-d}^{+c}, kjer sta c in d robova intervala v katerem leži prava vrednost z verjetnostjo 68.3%, p pa je vrednost dobljena po metodi ML.
- Primerjaj p_{-d}^{+c} z intervalom $p \pm \sigma_p$, kjer je σ_p cenilka standardnega odklona parametra p.
- Upoštevanje variacij števila dogodkov z "visokim" x je pogosta napaka. Zakaj ne smemo računati te napake pri določanju parametra p?

Odgovor

Modelirana verjetnostna porazdelitev nam ne da le ocene za vrednost posameznih parametrov, ampak tudi intervale zaupanja okrog teh vrednosti. Določimo jih za dano verjetnost, da bomo v interval zajeli tudi pravo, resnično vrednost parametra.

Intervale zaupanja določamo v dveh stopnjah: Najprej določimo intervale za vrednost statistične spremenljivke pri stalnih vrednostih parametrov. Za binomsko porazdelitev tako vzamemo konstanten p in poiščemo takšna n_1 in n_2, da bo verjetnost za število "pravih" dogodkov v intervalu (n_1, n_2) ravno zahtevana verjetnost - recimo 68.3 %. n_1 in n_2 sta odvisna od parametrov porazdelitve in dane verjetnosti intervala zaupanja ϵ. Pri ocenjevanju parametra p ju zapišemo kut funkciji tega parametra pri danih pogojih:

$$n_1 = n_1(p\,; n_0, \epsilon) \tag{1}$$
$$n_2 = n_2(p\,; n_0, \epsilon) \tag{2}$$

Funkciji n_1 in n_2 določimo za $\epsilon = 1 - 0.683$ na dva načina: iz binomske porazdelitve ali iz cenilke variacije. Za binomsko porazdelitev določimo $n_{1,b}$ in $n_{2,b}$ iz inverza enačb (indeks b za dirketno binomsko porazdelitev):

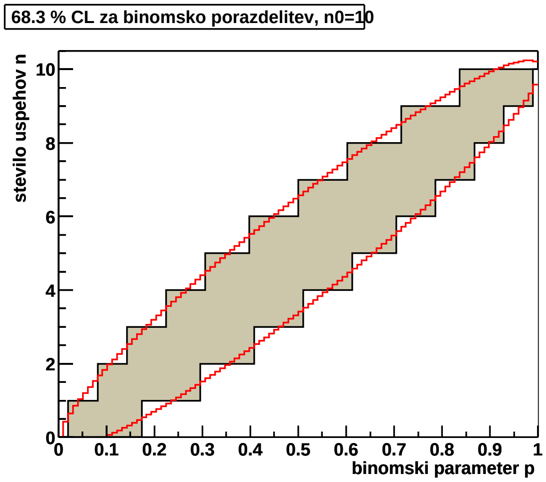
$$1 - \epsilon/2 = \sum_{n=n_{1,b}}^{n_0} \binom{n_0}{n} p^n (1-p)^{n_0-n} \tag{3}$$
$$1 - \epsilon/2 = \sum_{n=0}^{n_{2,b}} \binom{n_0}{n} p^n (1-p)^{n_0-n} \tag{4}$$
$$\epsilon = 1 - 68.3\% \tag{5}$$

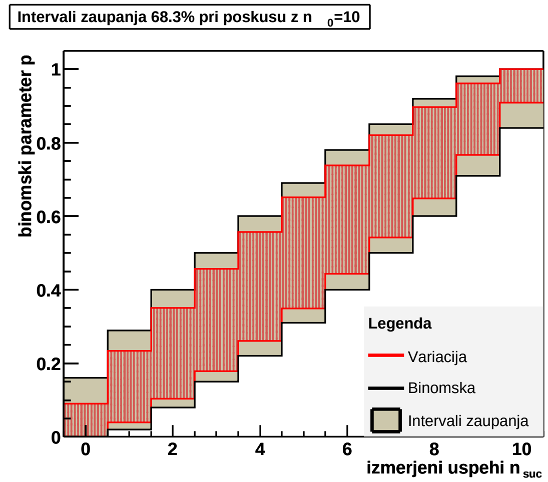
Če pa uporabimo pripravljen izraz za variacijo spremenljivke n, dobimo izraza za $n_{1,v}$ in $n_{2,v}$ (indeks v za izračun iz variacije):

$$n_{1,v}(p\,; n_0, \varepsilon = 1 - 0.683) = pn_0 - \sigma_n(p, n_0) \tag{6}$$
$$n_{2,v}(p\,; n_0, \varepsilon = 1 - 0.683) = pn_0 + \sigma_n(p, n_0) \tag{7}$$
$$\sigma_n(p, n_0) = \sqrt{n_0 p(1-p)} \tag{8}$$

Primerjava ekstremnih n za različne vrednosti parametra p prikazuje slika 1. Vrednosti, pridobljene iz variacije so načrtane rdeče, binomske pa črne.

Z znanim izrazom, ki povezuje ekstremno vrednost statistične spremenljivke z vrednostjo parametra določimo intervale zaupanja za parameter porazdelitve. Izmerejena vrednost leži v najslabšem primeru na robovih intervala. Pri danem izidu n_{suc} bo p omejen navzdol z $n_2^{-1}(n_{suc})$ in navzgor z $n_1^{-1}(n_{suc})$. Še komentar: funkciji $n_{1,b}(p)$ in $n_{2,b}(p)$ nista bijektivni. Vendar pa pogoj za izbiro sledi iz zahteve, da mora interval zajeti verjetnost **vsaj** $1 - \epsilon$ za pravi parameter. Torej moramo za p_{min} vzeti najmanjši p, za katerega





Slika 1: Primerjava cenilke za varaicijo s pravo oceno intervalov zaupanja da leži prava vrednost z verjetnostjo 68.3 % v navedenih intervalih. Poskus z 10 dogodki.

je $n_{2,b}(p)$ še enaka n_{suc}, za p_{max} pa največji p za katerega je $n_{1,b}(p)$ še enaka n_{suc}. Za račun iz Poissonove porazdelitve bomo dobili meritev z intervali zaupanja kot:

$$p_{ML} = \frac{n_{suc}}{n_0} \tag{9}$$

$$p_{max,b} = \max\{p = n_1^{-1}(n_{suc})\} \quad - \quad p_{ML} \tag{10}$$

$$p_{min,b} = -\min\{p = n_2^{-1}(n_{suc})\} \quad + \quad p_{ML} \tag{11}$$

$$p = p_{ML} + p_{max,b} - p_{min,b} \tag{12}$$

Račun iz variacije pa nam da takoj rezultat skupaj z intervalom:

$$p = \frac{n_{suc}}{n_0+1} + \frac{1}{2(n_0+1)} \pm \frac{1}{n_0+1}\sqrt{n_{suc}(1-\frac{n_{suc}}{n_0}) + \frac{1}{4}} \tag{13}$$

Slika 1, spodaj, prikazuje intervale zaupanja za dane izmerke n_{suc} pri $n_0 = 10$. Vrednosti, pridobljene z inverzom varaicije, so tipično premajhne. Posebej za $n_{suc} = 2$, $n_0 = 10$ dobimo:

$$p^b = 0.2^{+0.2}_{-0.12} \tag{14}$$

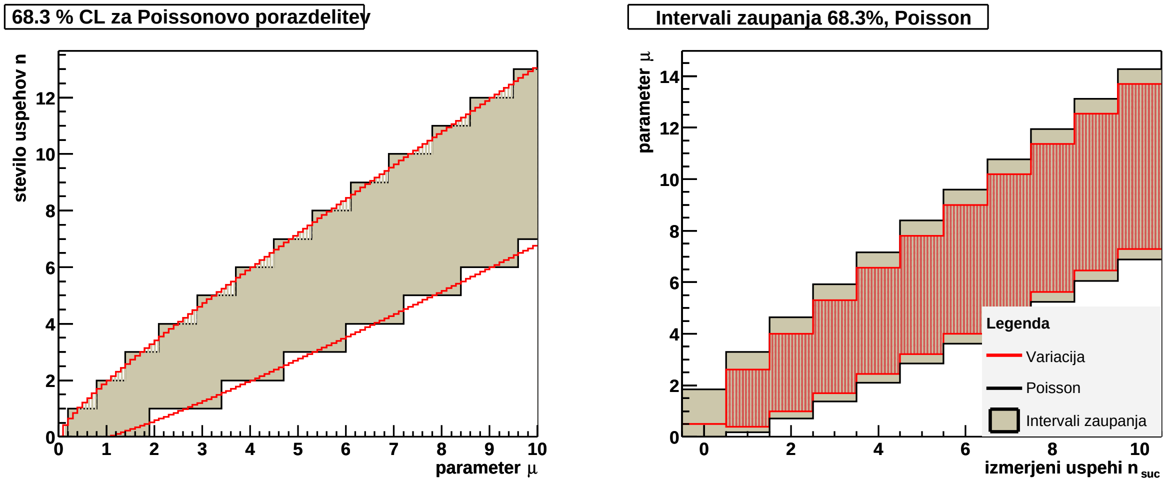
$$p^v = 0.23 \pm 0.16 \tag{15}$$

Še komentar. Iščemo pogojno verjetnost da dan dogodek z "visokim" x vsebuje mione. Verjetnost za dogodke z visokim x in njihove napake se ocenjuje drugje, pri pogojni verjetnosti pa je njihovo število vnaprej dano in fiksno. Variacijo bi morali upoštevati pri iskanju absolutne, od x neodvisne verjetnosti da dani dogodek vsebuje mione.

Naloga 9.6

Recimo, da smo za nalogo 9.6 dogodke dobili za poskus, katerega integrirana luminoznost je bila enaka $L = 1\ pb^{-1}$ (napaka zanemarljiva). Število dogodkov določenega tipa je porazdeljeno po Poissonovi porazdelitvi s povprečjem $\nu = \sigma L$, kjer je σ presek za reakcijo tega tipa.

- Poišči 68.3 % centralni interval zaupanja za parameter ν_x in $\nu_{x\mu}$, zaporedoma za dogodke z "visokim" x in od the še dogodke, ki vsebujejo delce μ, če poznamo $n_x = 10$ in $n_{x\mu} = 2$. Kakšni so ustrezni intervali zaupanja za preseka σ_x in $\sigma_{x\mu}$?



Slika 2: Intervali zaupanja 68.3 % za spremenljivko n pri danem μ (levo). Intervali zaupanja za parameter mu pri izmerejenem številu uspehov n_{suc} (desno). Črna krivulja za račun iz kumulativne Poissonove porazdelitve, rdeča za račun iz cenilke variacije. Intervali zaupanja so osenčeni.

- Primerjaj intervale iz prve točke te naloge z intervali z mejami $\nu \pm \sigma_\nu$, kjer je σ_ν cenilka standardnega odmika parametra in ν cenilka parametra.

Odgovor

Podobno kot v nalogi 9.5 konstruiramo meji n_1 in n_2, $n_1 < n_2$ za slučajno spremenljivko n Poissonove spremenljivke pri danem ν, tako da je kumulativna verjetnost, da bomo izmerili dogodek z n med n_1 in n_2 enaka 68.3 %. Oziroma, da bo verjetnost ϵ, da bomo izmerili dogodek s spremenljivko n, ki bo izven tega intervala, manjša od $1 - 68.3\%$.

Meji intervala $n_1(\nu, \epsilon)$ in $n_2(\nu, \epsilon)$ določimo direktno iz kumulativne Poissonove porazdelitve (p) ali pa upoštevamo, da je verjetnost za dogodke v intervalu $[\nu - \sigma_{nu}, \nu + \sigma_{nu}]$ ravno 68.3% (v). Za prvi način dobimo pogoje:

$$1 - \epsilon/2 = \sum_{n=0}^{n_{2,p}} \frac{\nu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\nu} \tag{16}$$

$$1 - \epsilon/2 = \sum_{n=n_{1,p}}^{\infty} \frac{\nu^n}{n!} \mathrm{e}^{-\nu} \tag{17}$$

$$1 - \epsilon = 68.3\% \tag{18}$$

Za drugi način pa:

$$n_{1,v} = \nu - \sigma_\nu \tag{19}$$

$$n_{2,v} = \nu + \sigma_\nu \tag{20}$$

$$\sigma_\nu = \sqrt{\nu} \tag{21}$$

Meje n_1 in n_2 za Poissonovo porazdelitev in parametre ν od 1 do 10 podaja slika 2, levo.

Pri danih meritvah uspehov n_{suc} poiščemo zgornjo (spodnjo) mejo zaupanja za parameter ν pri danem ϵ z vprašanjem: *Pri katerem ν je n_{suc} spodnja (zgornja) meja intervala zaupanja za spremenljivko n za dan ϵ*

?. Možno je, da funkcije $n_{1,2}(\nu)$ pri danem ϵ niso bijektivne (preslikajo cel interval po ν v isto celo število). Takrat za spodnjo (zgornjo) mejo vzamemo spodnji (zgornji) rob takega intervala. Tako bo:

$$\nu_{min,p} = \min\{n_{2,p}^{-1}(n_{suc})\} \tag{22}$$

$$\nu_{max,p} = \max\{n_{1,p}^{-1}(n_{suc})\} \tag{23}$$

$$\nu_{ML} = n_{suc} \tag{24}$$

$$\nu = \nu_{ML} + \nu_{max,p} - \nu_{min,p} \tag{25}$$

Za oceno iz variacije pa sta $n_{1,2}(\nu)$ bijektivni funkciji in dobimo takoj izraz:

$$\nu = n_{suc} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{n_{suc} + \frac{1}{4}} \tag{26}$$

Meje ν_{min} in ν_{max} podaja slika 2, desno. Intervali zaupanja ocenjeni iz variacije so vedno manjši kot intervali, izračunani iz prave Poissonove porazdelitve.

Posebej za $n_x = 10$ in $n_{x,\mu} = 2$ dobimo:

$$\nu_{x,p} = 10^{+4.27}_{-3.11} \tag{27}$$

$$\nu_{x,v} = 10.5 \pm 3.2 \tag{28}$$

$$\nu_{x\mu,p} = 2^{+2.64}_{-1.29} \tag{29}$$

$$\nu_{x\mu,v} = 2.5 \pm 1.5 \tag{30}$$

Ker je integrirana luminoznost znana z zanemarljivo napako, nam L predstavlja le skalo, ν in σ pa sta povsem ekvivalentna podatka, kjer ekvivalentnost nakazuje enako porazdelitev. Zato bodo meje intervalov zaupanja za σ le z L deljene meje intervalov za ν:

$$\sigma_{x,p} = 10^{+4.27}_{-3.11} \quad \text{pb} \tag{31}$$

$$\sigma_{x,v} = 10.5 \pm 3.2 \quad \text{pb} \tag{32}$$

$$\sigma_{x\mu,p} = 2^{+2.64}_{-1.29} \quad \text{pb} \tag{33}$$

$$\sigma_{x\mu,v} = 2.5 \pm 1.5 \quad \text{pb} \tag{34}$$