Domača naloga

1 Sipanje $\overline{q}q \to 2g$

Amplituda za reakcijo je sestavljena iz kosa iz QED, kjer zamenjamo e z g, polarizacijo gluona, ϵ pa množimo še z barvnim faktorjem za gluon P^a in dodamo barvne matrike λ^a, generatorje reprezentacije SU(3). Gibalne količine kvarkov označimo s p,p', gibalne količine gluonov pa z k, k', mase delcev zanemarimo:

$$\mathcal{M}_{\prime} = -ig^2 \overline{v}(p')\left\{\frac{1}{(p-k'2)^2}\gamma_\mu(\frac{\lambda^a}{2})\gamma_\alpha(p^\alpha - k'^\alpha)\gamma_\nu(\frac{\lambda^b}{2}) \quad + \frac{1}{(p-k)^2}\gamma_\nu(\frac{\lambda^b}{2})\gamma_\alpha(p^\alpha - k^\alpha)\gamma_\mu(\frac{\lambda^a}{2})\right\}u(p) P^a(k)P^b(k')\ \epsilon^{*\mu}(k)\epsilon^{*\nu}(k') \tag{1}$$

Dodatni prispevek pa gre na račun tri-krakega gluonskega stika:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 + \frac{g^2}{(k+k')^2}\overline{v}(p')(f^{jab}\frac{\lambda^j}{2})\left\{\gamma_\mu((k+k')+k)_\nu + g_{\mu\nu}\gamma^\alpha(k'-k)_\alpha - \gamma_\nu((k+k')+k)_\mu\right\}u(p) P^a(k)P^b(k')\ \epsilon^{*\mu}(k)\epsilon^{*\nu}(k') \tag{2}$$

Amplitudo bomo izračunali za stanja z določeno ročnostjo. Pri brezmasnih delcih nam prostor razpade na dva invariantna podprostora, kar bomo izkoristili in si prihranili delo. Tako bodo naše iskane amplitude:

$$\mathcal{M}(\overline{q}_L q_R \to 2g_1) \tag{3}$$
$$\mathcal{M}(\overline{q}_L q_R \to g_1 g_2) \tag{4}$$
$$\mathcal{M}(\overline{q}_L q_R \to 2g_2) \tag{5}$$
$$\mathcal{M}(\overline{q}_R q_L \to 2g_1) \tag{6}$$
$$\mathcal{M}(\overline{q}_R q_L \to g_1 g_2) \tag{7}$$
$$\mathcal{M}(\overline{q}_R q_L \to 2g_2) \tag{8}$$

Vseh nam ne bo treba računati. Tako je zaradi simetrije na C (*6*)=(*3*). Podobno tudi (*7*)=(*4*) in (*8*)=(*5*). Še več, zaradi CP simetrije je (*3*)=(*5*). Tako moramo zares določiti le še (*6*) in (*7*).

Produkti dveh γ matrik so blok diagonalne matrike. S četvercema $\sigma = (\mathbf{1}, \boldsymbol{\sigma})$ in $\overline{\sigma} = (\mathbf{1}, -\boldsymbol{\sigma})$ jih zapišemo v Diracovi reprezentaciji matrik γ kot:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu = \begin{pmatrix} \sigma_\mu\overline{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}_\mu\sigma_\nu \end{pmatrix} \tag{9}$$

Najlažje bomo nadaljevali z izbranim koordinatnim sistemom. Vzemimo kar težiščnega, os $\hat{3}$ pa usmerimo vzdolž gibalne količine kvarkov. Gluona bosta odletela v nasprotnih smereh vzdolž zasukane premice. Kot θ je zasuk napram prvemu gluonu, torej $\sphericalangle(\mathbf{p}, \mathbf{k})$. Četverci so torej:

$$p = (P, 0, 0, P) \qquad p' = (P, 0, 0, -P) \tag{10}$$
$$k = (K, 0, K\sin\theta, K\cos\theta) \qquad k' = (K, 0, -K\sin\theta, -K\cos\theta) \tag{11}$$

Za take gibalne količine sta preprosta tudi bispinorja. Rabimo ju le v enem podprostoru, recimo za levosučne delce:

$$u_L^\dagger(p) = \sqrt{2P}(\xi_L^\dagger, 0) \qquad v_R^\dagger = \sqrt{2P}(\xi_R^\dagger, 0) \tag{12}$$

Da ne bi bilo treba računati z duhovi, vzamemo le fizikalne polarizacije - pravokotne na gibanje gluona. Ker je smer drugega gluona ravno zrcaljena, naj bodo zrcaljene še polarizacije drugega gluona:

$$\epsilon_1(k) = (0,1,0,0) \qquad \epsilon_2(k) = (0,0,\cos\theta,-\sin\theta) \tag{13}$$

$$\epsilon_1(k') = (0,-1,0,0) \qquad \epsilon_2(k') = (0,0,-\cos\theta,\sin\theta) \tag{14}$$

Barvnih procesov se ne bomo dotikali. Barvno strukturo bomo določili šele pri kvadriranju. Zato bomo pisali $\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} \to AB$, $\frac{1}{i}f^j ab\frac{\lambda^j}{2} \to C$. Uporabimo še invariante:

$$s = (p+p')^2 \qquad t = (p-k)^2 \qquad u = (p-k')^2, \tag{15}$$

znane kot Mandelstamove spremenljivke. Zdaj uporabimo mašinerijo za izračun sipalnih amplitud:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\overline{q}_L q_R \to g_\lambda g_{\lambda'}) = 2P\Bigg(&\frac{ig^2}{u}\xi_R^\dagger\sigma_0\overline{\sigma}_\mu\sigma_\alpha\overline{\sigma}_\nu\ \epsilon^\mu_\lambda(k)\epsilon^\nu_{\lambda'}(k')\xi_L(p-k')^\alpha[AB]+\\ &\frac{ig^2}{t}\xi_R^\dagger\sigma_0\overline{\sigma}_\nu\sigma_\alpha\overline{\sigma}_\mu\epsilon^\mu_\lambda(k)\epsilon^\nu_{\lambda'}(k')\xi_L(p-k)^\alpha[BA]+\\ &\frac{ig^2}{s}\xi_R^\dagger\sigma_0\overline{\sigma_\alpha}\xi_L(k'-k)^\alpha(\epsilon_\lambda(k)\cdot\epsilon_{\lambda'}(k'))[C]\Bigg)\end{aligned} \tag{16}$$

Iz zadnjega člena smo izločili dva koeficienta, ki vsebujeta produkte polarizacij in gibalnih količin delcev. Velja namreč $\epsilon(k)\cdot k = \epsilon(k')\cdot k = 0$. Uporabimo definicijo $\overline{\sigma}$ in množimo s polarizacijami, dobimo $\overline{\sigma_\mu}\epsilon_1^\mu(k) = -\sigma_1$, $\overline{\sigma_\nu}\epsilon_1^\nu(k') = +\sigma_1$, dobimo skupaj en minus:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(\overline{q}_R q_L \to 2g_1) = \mathcal{M}_{11} =\\ &2P\left\{-\frac{ig^2}{u}\xi_R^\dagger\sigma_1\sigma_\alpha\sigma_1\xi_L(p-k')^\alpha[AB] - \frac{ig^2}{t}\xi_R^\dagger\sigma_1\sigma_\alpha\sigma_1\xi_L(p-k)^\alpha[BA] + \frac{ig^2}{s}\xi_R^\dagger\overline{\sigma}_\alpha\xi_L(k'-k)^\alpha[C]\right\}\end{aligned} \tag{17}$$

Od nič različni členi so le za α=2 v zgornjih vsotah, saj vektorji nimajo komponent vzdolž $\hat{1}$. Dobimo:

$$\mathcal{M}_{11} = 2P\left\{-\frac{g^2}{u}K\sin\theta[AB] + \frac{g^2}{t}K\sin\theta[BA] - \frac{g^2}{s}(2K\sin\theta)[C]\right\} \tag{18}$$

Naredimo podobno še za mešane polarizacije.Zato rabimo produkt $\overline{\sigma}_\nu\epsilon_2^\nu(k') = (-\cos\theta\sigma_2 + \sin\theta\sigma_3)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\overline{q}_R q_L \to g_1 g_2) = \mathcal{M}_{12} = 2P\Bigg\{&+\frac{ig^2}{u}\xi_R^\dagger(-\sigma_1)\sigma_\alpha(-\cos\theta\sigma_2+\sin\theta\sigma_3)\xi_L(p-k')^\alpha[AB]+\\ &+\frac{ig^2}{t}\xi_R^\dagger(-\cos\theta\sigma_2+\sin\theta\sigma_3)\sigma_\alpha(-\sigma_1)\xi_L(p-k)^\alpha[BA]\Bigg\}\end{aligned} \tag{19}$$

Člen z barvnim delom [C] nam odpade, ker sta polarizaciji $\epsilon_1(k)$ in $\epsilon_2(k')$ ortogonalni, ostali členi pa vsebujejo produkte $k\epsilon$, ki so prav tako trivialni.

$$\mathcal{M}_{12} = 2P\left\{+\frac{ig^2}{u}\sin\theta P[AB] + \frac{ig^2}{t}\sin\theta P[BA]\right\} \tag{20}$$

Dobili smo torej sipalni amplitudi za oba procesa. Upoštevamo še P=K v težiščnem sistemu, da dobimo:

$$\mathcal{M}_{11} = 2P^2g^2\sin\theta\left\{-\frac{1}{u}[AB] + \frac{1}{t}[BA] - \frac{2}{s}[C]\right\} \tag{21}$$

$$\mathcal{M}_{12} = 2iP^2g^2\sin\theta\left\{\frac{1}{u}[AB] + \frac{1}{t}[BA]\right\} \tag{22}$$

Barvni del bomo interpertirali kot polarizacije. Za vsak izhajajoči gluon bo matrični element oblike $\mathcal{M} = \mathcal{M}^a P^a$. Ko bom adjungirali, bomo dobili $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^{*b} P^{\dagger b}$. Naredimo vsoto po barvah in nadomestimo:

$$\sum_{a,b=1}^{8} P^a P^{\dagger b} \mathcal{M}^a \mathcal{M}^{*b} \to \sum_{a=1}^{8} \mathcal{M}^a \mathcal{M}^{*b} \delta_{ab} \tag{23}$$

Znati moramo še adjungirati produkte matrik. Ker so λ^a generatorji SU(3) grupe, so sebiadjungirane (hermitske), zato je $[AB]^\dagger = [BA]$, $[C]$ pa smo izbrali pripraven zapis, saj je $[C]^\dagger = -[C]$. Oglejmo si še ples indeksov. Recimo da ima prvi glon barvni indeks i, drugi pa indeks k. Po množenju ostanemo torej z matričnim elementom $[]_{ik}$ za vsako od zgornjih matrik. Ko adjungiramo $\mathcal{M}$, se nam selijo barvni indeksi, zato v $\mathcal{M}^\dagger$ nastopajo matrike z barvnimi indeksi $[]_{ki}$. Ko naredimo povprečje po barvah vstopajočih kvarkov, dobimo iz produktov matrik sled produkta:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{i,k=1}^{3} \mathcal{M}^* \mathcal{M} \to \frac{1}{9} \sum_{i,k=1}^{3} [A]_{ik}\, [B]_{ki} \to \frac{1}{9} \mathrm{tr}\, [AB] \tag{24}$$

Za nas zanimive so torej sledi:

$$\mathrm{tr}[ABBA] = \mathrm{tr}[BAAB] = \mathrm{tr}\mathbf{1} \times C_2^2(3) = 3\frac{16}{9} \tag{25}$$

$$\mathrm{tr}[ABAB] = \mathrm{tr}[BABA] = C_2(3)(C_2(3) - \frac{C_2(G)}{2}) = -3\frac{2}{9} \tag{26}$$

$$\mathrm{tr}[ABC] = \mathrm{tr}[CAB] = -\mathrm{tr}[BAC] = -\mathrm{tr}[CBA] = 3\frac{C_2(3)C_2(G)}{2} = 6 \tag{27}$$

$$\mathrm{tr}[C^\dagger C] = 3C_2(G)C_2(3) = 12 \tag{28}$$

Zdaj smo pripravljeni, da zapišemo kvadrate amplitud.

$$\mathcal{M}_{11}^* \mathcal{M}_{11} = 4P^4 g^4 \sin^2\theta \Bigg\{ \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{9}\mathrm{tr}[ABBA] - \frac{2}{ut}\frac{1}{9}\mathrm{tr}[ABBA] + \frac{2}{s}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{9}\mathrm{tr}[CAB] + \frac{4}{s^2}\frac{1}{9}\mathrm{tr}[CC] \tag{29}$$

$$\mathcal{M}_{12}^* \mathcal{M}_{12} = 4P^4 g^4 \sin^2\theta \Bigg\{ \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{t^2}\right) \frac{1}{9}\mathrm{tr}[ABBA] + \frac{2}{ut}\frac{1}{9}\mathrm{tr}[ABBA] \Bigg\} \tag{30}$$

Uporabimo $u = -2P^2(1 + \cos\theta)$, $t = -2P^2(1 - \cos\theta)$, torej $\sin^2\theta = ut/4P^4$. Za poenostavitev uporabimo še identiteto za Mandelstamove spremenljivke za brezmasne delce $s + t + u = 0$. Malo poračunamo, dobimo:

$$|\mathcal{M}_{11}|^2 = g^4 \left\{ \frac{16}{27}\left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}\right) - 2\left(-\frac{2}{27}\right) - \frac{8}{3}\frac{t^2 + u^2}{s^2} \right\} \tag{31}$$

$$|\mathcal{M}_{12}|^2 = g^4 \left\{ \frac{16}{27}\left(\frac{t}{u} + \frac{u}{t}\right) + 2\left(-\frac{2}{27}\right) \right\} \tag{32}$$

Totalna sipalna matrika bo vsota zgornjih dveh množena s štiri, da upoštevamo vse procese (enačbe (*3*) do (*8*)), pri čemer smo dvakrat šteli matrike tipa $\mathcal{M}_{12}$ zaradi enakosti izhajajočih gluonov. Sipalna matrika je torej:

$$\boxed{|\mathcal{M}|^2(\overline{q}q \to 2g) = 4\big(|\mathcal{M}_{11}|^2 + |\mathcal{M}_{12}|^2\big) = 4g^4 \frac{16}{27}\left\{ \left(\frac{u}{t} + \frac{t}{u}\right) - \frac{9}{4}\left(\frac{t^2 + u^2}{s^2}\right) \right\}} \tag{33}$$

Novih singularnosti nam prvi red QCD še ne pokaže, saj imamo le s $\frac{16}{27}$ pomnožene prispevke QED z dodanim pohlevnim členom.

2 Razpadna širina za B $\to K^*\gamma$

Iz efektivnega Lagrangiana dobimo sipalno matriko kot:

$$\mathcal{M}(B(p) \to K^*(k)\gamma(q)) =$$
$$i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon^*_\mu(q)q_\nu\varepsilon^*_\alpha k_\beta G_V + \varepsilon^{*\mu}(q)\left[\varepsilon_\mu(k)(m_B^2 - m_{K^*}^2) - (p+k)_\mu(\varepsilon^*(k)\cdot q)\right]G_A \quad (34)$$

Mešani členi nam zaradi relativnega faktorja i odpadejo, zato bo kvadrat amplitude:

$$\mathcal{M}^*\mathcal{M} = -G_V^2\ \epsilon_\mu{}^{\rho\tau\sigma}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}q_\rho\varepsilon_\tau(q)k_\sigma q_\nu\varepsilon^*_\alpha k_\beta -$$
$$-G_A^2\left[\varepsilon^{*\mu}(k)\varepsilon_\mu(k)(\Delta m^2)^2 - (\Delta m^2)(p+k)_\mu(\varepsilon^{*\mu}(k)\varepsilon^{*\nu}(k) + \varepsilon^\mu(k)\varepsilon^\nu(k))q_\nu + (p+k)^2 q_\mu q_\nu\varepsilon^{*\mu}(k)\varepsilon^\nu(k)\right] \quad (35)$$

Pri tem smo upoštevali, da za fotone $\sum_{\lambda\lambda'}\varepsilon^{*\mu}_\lambda(q)\varepsilon^\nu_{\lambda'}(q) \to -g^{\mu\nu}$. Za masivna polja K^* pa bo dala vsota po polarizacijah $\sum_{\lambda\lambda'}\varepsilon^{*\mu}_\lambda(k)\varepsilon^\nu_{\lambda'}(k) \to -g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu/m_{K^*}^2$. Zavrtimo vektorje polarizacij tako da so realni. Potem velja enako tudi za oklepaj $(\varepsilon^*_\mu\varepsilon^*_\nu + \varepsilon_\mu\varepsilon_\nu) \to 2(-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/m_{k^*}^2)$. Tako dobimo:

$$|\mathcal{M}|^2 = G_V^2(qk)^2 + G_A^2\left[3(\Delta m^2)^2 - 2(\Delta m^2)((p+k)q) + 2\frac{\Delta m^2}{m^2}((p+k)k)(qk) - \frac{1}{m^2}(p+k)^2(qk)^2\right] \quad (36)$$

Upoštevamo $(p+k)q = (p+k)(p-k) = \Delta m^2$, da dobimo:

$$|\mathcal{M}|^2 = G_V^2(qk)^2 + G_A^2\left[(\Delta m^2)^2 + 2\frac{\Delta m^2}{m^2}((p+k)k)(qk) - \frac{1}{m^2}(p+k)^2(qk)^2\right] \quad (37)$$

Razpadno širino določimo kot:

$$d\Gamma = \frac{d^3k\ d^3q\ (2\pi)^4\ \delta^{(4)}(p-k-q)}{(2\pi)^6\ 2M\ 2E_{K^*}\ 2E_\gamma}|\mathcal{M}|^2 \quad (38)$$

Pointegriramo δ funkcijo, ostane nam še:

$$d\Gamma = \sqrt{\frac{2}{\Delta m^2}}\frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi\ M^2} \quad (39)$$

Širina bo v enotah M, kot običajno. Povprečimo še po polarizacijah, po katerih smo že sešteli, dodamo 1/4. Skupaj dobimo:

$$\boxed{\Gamma = \sqrt{\frac{2}{\Delta m^2}}\frac{1}{128\pi\ M^2}\left\{G_V^2(qk)^2 + G_A^2\left[(\Delta m^2)^2 + 2\frac{\Delta m^2}{m^2}((p+k)k)(qk) - \frac{1}{m^2}(p+k)^2(qk)^2\right]\right\}} \quad (40)$$