Andrej Studen

Grupa in algebra SO(6)

Seminar

1 Definicija

Grupa SO(n) je zvezna grupa ortogonalnih operatorjev:

$$O^T O = I, \tag{1}$$

kjer je I idenetiteta, katere generatorji so n× n matrike.

2 Elementi in generatorji

Grupa SO(n) je vedno zvezna grupa. Torej elemente zapišemo kot:

$$O(\mathbf{a}) = e^{ia_r X_r}. \tag{2}$$

Vpeljali smo vektor parametrov **a** z r elementi in generatorje X_r. Iz zahteve O^{T}O=I sledi:

$$X_r^T = -X_r, \tag{3}$$

kar nam prostor generatorjev omeji na antisimetrične matrike. Število generatorjev (red grupe) je $\frac{n(n-1)}{2}$, zapišemo pa jih z matrikami:

$$S_{pq} = i(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}) \tag{4}$$

Definicija vključuje še parameter $i = \sqrt{-1}$, da so matrike S_{pq} hermitske.

3 Strukturne konstante

Z znanimi generatorji S_{pq} določimo strukturne konstante:

$$[S_{pq}, S_{rs}] = \sum_{a<b} C^{ab}_{pq,rs} S_{ab} \tag{5}$$

$$[S_{pq}, S_{rs}] = i(\delta_{qr}S_{ps} - \delta_{qs}S_{pr} - \delta_{pr}S_{qs} + \delta_{ps}S_{qr}) \tag{6}$$

$$C^{ab}_{pq,rs} = i(\delta_{qr}\delta_{ap}\delta_{bs} - \delta_{qs}\delta_{ap}\delta_{br} - \delta_{pr}\delta_{aq}\delta_{bs} + \delta_{ps}\delta_{aq}\delta_{br}) \tag{7}$$

K strukturnim konstantam dodajmo še komentar. Ker so na desni strani v vsoti le členi za $a < b$ in ker velja $p < q$ in $r < s$ bomo imeli največ dva indeksa v komutatorju enaka. Z ohranjanjem splošnosti zberemo vse možne komutatorje v tabelici:

p	q	r	s	$[S_{pq}, S_r s]$	
a	j	a	k	$-iS_{jk},\ j<k$	$iS_{kj},\ k<j$
a	j	k	a	$-iS_{kj}$	
j	a	a	k	iS_{jk}	
j	a	k	a	$-iS_{jk},\ j<k$	$iS_{kj},\ k<j$

4 Koreni algebre

Ker je SO(n) pol-preprosta grupa, bomo generatorje lahko uredili v Cartanovo algebro. Najprej izberemo poljuben $A = \sum_{p<q} a_{pq} S_{pq}$ in poiščimo nabor operatorjev $X = \sum_{rs} x_{rs} S_{rs}$, da bo veljalo:

$$[A, X] = rX, \tag{8}$$

kjer je r skalar. Enačbo prevedemo v iskanje lastnih vrednosti matrike, saj z uporabo (7) dobimo:

$$\sum_{b<c,p<q,r<s} (C^{bc}_{pq,rs} a_{pq} - r\delta_{bc,rs}) x_{rs} S_{bc} = 0, \tag{9}$$

oziroma, če označimo $T_{bc,rs} = \sum_{p<q} C^{bc}_{pq,rs} a_{pq}$ matrično enačbo:

$$(T - rI)\mathbf{x} = 0 \tag{10}$$

saj je nabor S_{bc} linearno neodvisen. Ob dvojnem indeksiranju sestavimo matriko podobno kot pri direktnem produktu grup [Elliot, 1979].

Enačba bo rešena le za

$$|T - rI| = 0 \tag{11}$$

Vedno lahko izberemo operator A tako, da dobimo čimveč različnih rešitev, degenerirano pa samo rešitev pri r=0. Tako bo veljalo:

$$[A, X_0] = 0 \tag{12}$$

$$\text{ali} \tag{13}$$

$$[A, X_\alpha] = \alpha X_\alpha \tag{14}$$

Zdaj označimo X_0 z H_k in X_α z E_α. Ker izbiramo A tako, da je število različnih res'itev največje, komutirajo zgoraj definirani H_α tudi med sabo. V SO(2m) je takih operatorjev m, za 2m=n=6 izberemo S_{12}, S_{34} in S_{56}, ki ob (6) res ustrezajo predpisu. Operator A je linearna kombinacija H_k.

Preostane nam še $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2}$ generatorjev tipa E_α. Lastne vrednosti α dobimo iz (11), lastne vektorje x_α pa iz (10) z ustreznimi r.

Za SO(6) vzamemo:

$$A = aS_{12} + bS_{34} + cS_{56} \tag{15}$$

in na diagonali dobimo matrike oblike ($i = \sqrt{-1}$):

$$\begin{bmatrix} -r & ic & ib & 0 \\ -ic & -r & 0 & ib \\ -ib & 0 & -r & ic \\ 0 & -ib & -ic & -r \end{bmatrix}, \tag{16}$$

z reševami:

$$\begin{aligned} r = \quad & b + c, \\ & -(b + c), \\ & b - c, \\ & -(b - c), \end{aligned}$$

enako tudi za zamenjavo

- $b \Leftrightarrow a$
- $b \Leftrightarrow a$ in $c \Leftrightarrow b$

torej še rešitve:

$$\begin{aligned} r = \quad & a + c, \\ & -(a + c), \\ & a - c, \\ & -(a - c), \\ & -a + b, \\ & -(a + b), \\ & a - b, \\ & -(a - b), \end{aligned}$$

Lastni vektor, pripadajoč prvi skupini rešitev, je ima štiri (od dvanajstih) komponent različnih od 0, in sicer ob S_{35}, S_{36}, S_{45} in S_{46}, ki so podane v tabeli:

Tabela 1: Lastni vektorji.

	S_{35}	S_{36}	S_{45}	S_{46}
$(b+c)$	-1	i	i	1
$-(b+c)$	-1	-i	i	1
$b-c$	1	i	-i	1
$-(b-c)$	1	-i	i	1

Z zamenjavami zgoraj dobimo enako tabelo še za pare (a,b) in (a,c) in menjavami komponenet v:

$$\begin{gathered}(a,b): \\ 3 \Rightarrow 1 \\ 4 \Rightarrow 2 \\ 5 \Rightarrow 3 \\ 6 \Rightarrow 4 \\ (a,c): \\ 3 \Rightarrow 1 \\ 4 \Rightarrow 2\end{gathered}$$

Očitno nam bo delovanje na enem od teh podprostorov povedalo vse o algebri.

5 Korenski vektorji

Komponente korenskih vektorjev definiramo z:

$$[H_k, E_\alpha] = \alpha_k E_\alpha \tag{17}$$

Dogovorimo se, da je:

$$H_1 = S_{12} \qquad H_2 = S_{34} \qquad H_3 = S_{56}, \tag{18}$$

da bomo lahko zapisali te komponente. Z izračunanimi E_α sledi:

$$\alpha_{a+b} = (1,1,0) \tag{19}$$
$$\alpha_{a-b} = (1,-1,0) \tag{20}$$
$$\alpha_{a+c} = (1,0,1) \tag{21}$$

Uvidimo, da bo koren opisal korenski vektor. Recept: a pomeni prvo, b drugo in c tretjo komponento. Predznak koeficienta je predznak komponente. Korenski vektor bomo tako zapisali kar

$$\pm e_i \pm e_j \tag{22}$$

kjer je e_k vektor ki ima same ničle razen k-te komponente, ki je enaka 1.

6 Preprosti vektorji

Za korenski vektor rečemo, da je pozitiven, če ima prvo od nič različno komponento večjo od 0. Pozitivni vektorji naše algebre so:

$$(1,0,1) \qquad (1,0,-1) \qquad (0,1,1) \tag{23}$$
$$(0,1,-1) \qquad (1,1,0) \qquad (1,-1,0) \tag{24}$$
$$\tag{25}$$

Med njimi lahko izberemo tiste, ki se ne dajo izraziti kot vsota ostalih. Zaradi analogije s koreni, ki smo jo opazili pri iskanju korenskih vektorjev, lahko izberemo pozitivne korene, torej $a \pm b$, $b \pm c$ in $a \pm c$ in izberemo tiste, ki jih lahko naračunamo z ostalimi. Hitro vidimo $a+b = (a-c)+(b+c)$ in še $a+c = (a-b)+(b+c)$ in $a-c = (a-b)+(b-c)$, tako da ostanemo s koreni $(a-b)$, $(b+c)$ in $(b-c)$, oziroma vektorji:

$$\alpha = (1,-1,0) \qquad \beta = (0,1,1) \qquad \gamma = (0,1,-1) \tag{26}$$

7 Dynkinov diagram

Dodajmo za konec še opis grupe z Dynkinovim diagramom. Zanj rabimo skalarani produkt korenskih vektorjev:

$$\langle\alpha\beta\rangle = \alpha^i\beta_i. \tag{27}$$

Kontravariantne vektorje dobimo iz enačbe:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \sum_i \alpha^i H_i \tag{28}$$

Vendar pa se zahtevnemu premetavanju indeksov lahko izognemo. Z normalizacijo:

$$\mathrm{Tr}(H_i \cdot H_j) = \delta_{ij} \tag{29}$$

$$\mathrm{Tr}(E_\alpha \cdot E_{-\alpha}) = 1 \tag{30}$$

namreč dosežemo:

$$\alpha_i = \alpha^i \qquad \text{oz.} \qquad \langle\alpha\beta\rangle = \sum_i \alpha_i\beta_i \tag{31}$$

V našem primeru dobimo:

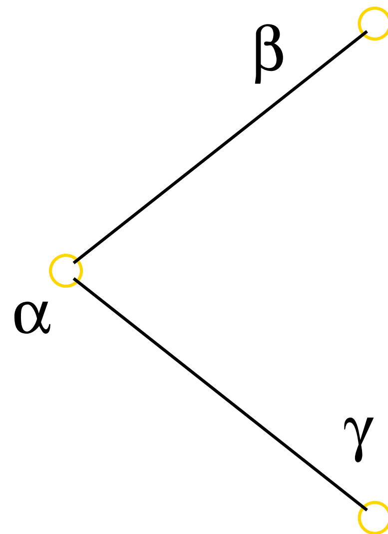
$$H_i = \frac{\sqrt{2}}{2} S_{2i-1,2i} \tag{32}$$

$$E_\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \sum_{i<j} r_{ij}^\alpha S_{ij}^{(\alpha)}, \tag{33}$$

kjer so r_{ij}^α komponente E_α kot navedene v tabeli 1.

Točna oblika operatorjev nas pravzaprav ne zanima, saj se korenski vektorji ne spremenijo. Za Dynkinov diagram rabimo samo preproste vektorje iz enačbe (26). Izračunajmo kote po enačbi:

$$\cos\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\langle\alpha\beta\rangle}{\sqrt{\langle\alpha\alpha\rangle\,\langle\beta\beta\rangle}} \tag{34}$$



Slika 1: Dynkinov diagram.

Postopek poenostavimo, ker imamo vektorje enakih dolžin. Uporabimo oznake iz (26) in imamo:

$$\cos\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\langle\alpha\beta\rangle}{\langle\alpha\alpha\rangle} = -\frac{1}{2} \qquad \Phi_{\alpha\beta} = 120^\circ, \tag{35}$$

$$\cos\Phi_{\alpha\gamma} = \frac{\langle\alpha\gamma\rangle}{\langle\alpha\alpha\rangle} = -\frac{1}{2} \qquad \Phi_{\alpha\gamma} = 120^\circ, \tag{36}$$

$$\cos\Phi_{\beta\gamma} = \frac{\langle\beta\gamma\rangle}{\langle\beta\beta\rangle} = 0 \qquad \Phi_{\beta\gamma} = 90^\circ. \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

V Dynkinovem diagramu bomo zato povezali korena α in β z enojno črto (kot 120°), α in γ z enako črto iz istega razloga, medtem ko bosta ostala β in γ nepovezana - ker sta pravokotna. Preporosta risbica na sliki 1.

8 Cartanova matrika

Zapišemo lahko tudi Cartanovo matriko, ki je nekako ekvivalentna Dynkinovem diagramu. Komponente so:

$$d_{ij} = 2\frac{\langle\alpha_i\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i\alpha_i\rangle} \tag{39}$$

Uredimo naše vektorje - enačba (26) - tako da bo $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \gamma$ in $\alpha_3 = \beta$, pa imamo

Cartanovo matriko podano z:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Literatura

[Greiner,1992] W Greiner B Müller. *Quantum Mechanics. Symmmetries.* New York: Springer Verlag, 1992.

[Elliot, 1979] J. P. Elliot, P. G. Dawber. *Symmetry in physics*. London: MacMillan Publishers, 1979.