~~TRANSPORTNA ENAČBA~~

NUMERIČNO
RAČUNANJE PREJETIH ~~DOZ~~ SEVANJA

- sevanje v snovi odlaga energijo
- porazdelitev energije je kvantna (naključna) povezana z izvorom sevanja.

- odloženo energijo podaja stohastična diferencialna enačba:

$$\frac{dE}{dx} = \sum_i \mu_i \xi_i(t) \cdot E_i$$

s členi:

- μ_i ~~por~~ atenuacijski koeficient ali inverz povprečne proste poti za i-ti tip interakcije, pri katerem je odložena energija E_i
- $\xi_i(t)$ naključni koeficient, v splošnem odvisen od časa, ~~ki kaže na verjetnost~~ porazdelitev za ξ je tipično znana, ni pa v naprej mogoče napovedati vrednosti ξ
- E_i odložena energija

test

PRIMER: Landau porazdelitev energijskih izgub v tanki plasti snovi;

$f_x(E)$ podana; gostota verjetnosti, da bo delec v plasti debeline x izgubil, odložil ravno ~~to~~ energijo $(E-\frac{dE}{2}, E+\frac{dE}{2})$;

$$f_x(E) = \frac{dw}{dE}\Big|_x$$

Členi ~~v~~ v stohastični enačbi so: μ

$$\mu = \frac{1}{x}$$

$$E = E$$

$$\frac{dw}{d\xi} = \underbrace{f_x(E')}_{\frac{dw}{dE'}} \cdot E \qquad \xi = \frac{E'}{E}$$

$$\langle \xi \rangle = \int \frac{dw}{d\xi} \cdot \xi \, d\xi = \int f_x(E') \cdot \cancel{E} \cdot \frac{E'}{\cancel{E}} \frac{dE'}{E} =$$

$$= \frac{1}{E} \int f_x(E') dE' \, E'$$

brezdimenzijska količina; $\frac{\langle E' \rangle_x}{E}$; in

$$\boxed{\left\langle \frac{dE}{dx} \right\rangle = \frac{\langle E' \rangle_x}{\cancel{E}} \cancel{E} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\langle E' \rangle_x}{x}}$$

Enačba $\frac{dE}{dx} = \sum_i \mu_i \xi_i(t) E$

ali Langevinova enačba pogosto nastopa v praktičnih problemih. V fiziki jo dostikrat ~~brat~~ analitično prevedeno v Fokker-Planckovo enačbo za računanje verjetnostnih porazdelitev za $\frac{dE}{dx}$ (pravzaprav je Landauova porazdelitev rešitev Fokker-Planck enačbe za ~~energijske~~ ionizacijske izgube nabitih delcev). Kot alternativa se ponuja MonteCarlo računanje porazdelitev.

MONTE CARLO METODA

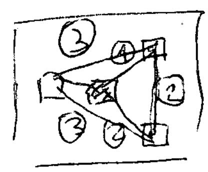
Metodo so sredi 20. stoletja ~~vpeljali~~ za računanje stohastičnih problemov. Wikipedia navaja, da je samo ime koda za postopek, saj je bil del vojaškega razvoja atomske bombe. MC naj bi bil hotel v Monaku, kjer je sorodnik enega od idejnih očetov pogosto trošil denar. Princip temelji na dejstvu, da lahko naključno spremenljivko ξ nadomestimo s psevdo naključnimi števili, ki nam jo da matematični algoritem implementiran v μ-procesorju. Za pravilen opis fizikalnega problema moramo le znati parameter ξ generirati za poljubno verjetnostno porazdelitev.

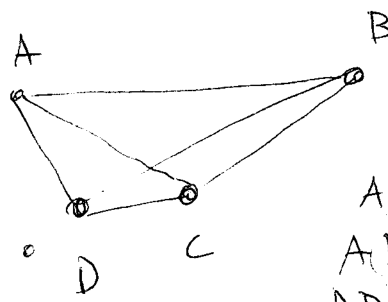
GENERACIJA ξ ZA FOTONSKE PROCESE

Pri spremljanju interakcij fotonov ~~...~~ problem prevedemo v pojemanje toka fotonov z debelino absorberja:

$$\frac{dj}{dx} = \sum_i j \, \xi_i \underbrace{\overset{N/V}{n}\sigma_i}_{\mu_i} = \sum_i \mu_i \xi_i j(x)$$

μ_i je atenuacijska količina za i-ti proces, ξ_i je naključna spremenljivka in j je tok, ki vstopa v plast na globini x. Največja težava pri analitičnem računu je sipanje – vsak delec snovi lahko (s stohastičnim parametrom ξ) postane nov izvor sevanja fotonov. Ker so porazdelitve mer sipanja anizotropne, postane problem hitro večdimenzionalen in preseže prag smiselnosti analitičnega računa.





AB
ACB
ADB
ADCB
ACDB

N vmesnih točk

$1+(N2)!$ možnost

$N \to \infty$)

Pomen ξ_i:

Po definiciji ξ_i mora veljati

$$\left\langle \frac{dj}{dx} \right\rangle = \sum_i \mu_i j^{(E(j))} \langle \xi_i \rangle \; ; \; \langle \xi_i \rangle = 1 \checkmark$$

$$=$$

Pravzaprav je ξ_i inverz števila prepotovanih interakcijskih dolžin, $\xi_i = \frac{1}{n_i}$; $n_i = \frac{x_i}{\lambda_i}$

Porazdelitev za število interakcijskih dolžin je ~~konstantna~~ eksponentna ; to sledi iz narave fotonskih interakcij, ko približno velja

$$\frac{1}{j}\frac{dj}{dx} = \mu = \text{KONST}$$

(delež interagirajočih fotonov na plast je neodvisen od globine).

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dx} = -\mu \quad \Rightarrow \quad w = 1 - e^{-\mu x}$$

$$\frac{dw}{dx} = +\mu e^{-\mu x}$$

$$\frac{dw}{dn} = \frac{dw}{dx}\cdot\frac{dx}{dn} = \mu e^{-\mu x}\cancel{X} = e^{-n}$$

Izračunamo $w(n > n_0) = \int_0^{n_0} e^{-n}\, dn = 1 - e^{-n_0}$

Privedimo naključno spremenljivko $\xi \in [0,1) = 1 - e^{-n_0}$

Izrazimo $\boxed{n_0 = \ln(1-\xi)}$: generacija števila prepotovanih interakcijskih dolžin.

Ob tekmujočih procesih izberemo n_i $\Rightarrow$ dejanski proces je tisti, za katerega je $s(x) = n \cdot \lambda(x)$ najmanjši.

^ n lahko dobimo tudi zaradi prehoda v novo snov!

VZORČENJE NOVEGA STANJA:

Interakcija i-tega tipa ~~dis~~ ~~trenutno~~ sprožena lahko s seboj prinese kreacijo novih delcev in odloženo energijo. Nastalo stanje je treba pravilno vzorčiti, upoštevajoč porazdelitve. ~~Kp~~

Za Comptonov pojav je smer nastalega fotona podana z diferencialnim presekom

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \pi r_e^2 \frac{mc^2}{E_0} Z \left[\frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon\right]\left[1 - \frac{\varepsilon \sin^2\theta}{1+\varepsilon^2}\right], \quad \varepsilon \in [\varepsilon_0, 1]$$

$\frac{E_1}{E_0}$

V Geant4 so ~~izbrali~~ najprej pokazali, da lahko poljubno verjetnostno porazdelitev zapišemo v obliki

$$\frac{dw}{dx} = \sum_i \alpha_i f_i(x)\, g_i(x)$$

kjer so α_i konstante, $f_i(x)$ so pdf z dobro znano cdf $F_i(x) \in [0,1]$ in $g_i(x)$ so utežne funkcije $g_i(x) \in [0,1]$; $x \in \mathcal{D}\left[\frac{dw}{dx}\right]$;

Dejansko razbijemo $\frac{dw}{dx}$ na štetno množico možnosti, verjetnost za posamezno možnost podajajo faktorji $\alpha_i \; \Sigma\alpha$;

Vzamemo integrabilen $f(x)$ kot ovojnico in $A\, g(x)$

Zavračamo možnosti znaj ovojnice. Primer: računanje π z $\frac{dw}{dx^2} = \mathrm{const.}$

Za Comptonsko sipanje se izkaže, da je

$$0 < 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\sin^2\vartheta \le 1$$

$$= g(x)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{1+\mu(1-\cos\vartheta)}$$

$$\varepsilon\mu(1-\cos\vartheta) = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\mu}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\varepsilon\mu - 1 + \varepsilon}{\varepsilon\mu} = \frac{\varepsilon(\mu+1)-1}{\varepsilon\mu}$$

$$\cos^2\vartheta = \frac{\varepsilon^2(\mu+1)^2 - 2\varepsilon(\mu+1)+1}{\varepsilon^2\mu^2}$$

$$\sin^2\vartheta = \frac{-2\varepsilon^2\mu - \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\mu+1) - 1}{\varepsilon^2\mu^2}$$

$$\varepsilon s^2 = \frac{-2\varepsilon^2\mu - \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\mu+1) - 1}{\varepsilon\mu^2}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{1+2\mu(1-c)+\mu^2(1-c)^2}$$

$$\varepsilon^2 + 1 = \frac{2+2\mu(1-c)+\mu^2(1-c^2)^2}{1+2\mu(1-c)+\mu^2(1-c^2)^2}$$

$$\frac{1+\varepsilon^2 - \varepsilon s^2}{1+\varepsilon^2} = \checkmark$$

$$0 < \varepsilon s^2 < 1+\varepsilon^2$$

$s_{min} = 0$

$\varepsilon s^2 = 0$

$s_{max} = 1$

$$\frac{1+\varepsilon^2-\varepsilon}{1+\varepsilon^2} > 0$$

$-\varepsilon > 0$

$1+\varepsilon^2 - \varepsilon > 1+\varepsilon^2 \; 0$

$\varepsilon < 1+\varepsilon^2$

$$[-4\varepsilon\mu - 2\varepsilon + 2(\mu+1)]\,\varepsilon\mu^2 - \mu^2(-2\varepsilon^2\mu - \varepsilon^2 + 2\varepsilon(\mu+1) - 1) = 0$$

$\boxed{\varepsilon \in (\varepsilon_0, 1)}$

$$= -2\varepsilon^2\mu^3 - \varepsilon^2\mu^2 + \mu^2 = \mu^2(-2\varepsilon^2\mu - \varepsilon^2 + 1)$$

$$\varepsilon^2(-2\mu-1)+1 = 0$$

$\to$ ROB

Ni lokalnih minima

$$\varepsilon^2 = +\frac{1}{2\mu+1} \Rightarrow \text{never}$$

$\mu < \frac{1}{2}$

$4\mu^2 + 4\mu > -2\mu$ ✓ $\mu > 0$

$$\sqrt{\frac{1}{-2\mu-1}} < 1 \quad \varepsilon = \sqrt{-\frac{1}{2\mu-1}} = \sqrt{\frac{1}{1-2\mu}} > 1$$

$\mu > 0$

$1 < -2\mu+1$

$0 < -2\mu$ NEVER

$$\varepsilon > \frac{1}{1+2\mu}$$

$$-\frac{1}{(2\mu-1)} > \frac{1}{(1+2\mu)^2}$$

$$(1+2\mu)^2 > -2\mu+1$$

$$\sqrt{\frac{1}{-2\mu-1}} > \frac{1}{1+2\mu}$$

$$\varepsilon_o^2\Big|_{\varepsilon=1} = \frac{2\mu-1+4\mu-2+1}{\mu} = \frac{4\mu-4}{\mu} = 4\,\frac{\mu-1}{\mu}$$

$1+\varepsilon^2-\varepsilon > 0$ VEDNO RES ✓

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1-4}{4}}$$

---

izberemo še

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right) = \left(\alpha_1 f_1(\varepsilon) + \alpha_2 f_2(\varepsilon)\right)\cdot g(\varepsilon)$$

$$f_1(\varepsilon) = \frac{C}{\varepsilon} = \underbrace{-\frac{1}{\ln\varepsilon_o\cdot\varepsilon}}_{f_1(\varepsilon)}\cdot\underbrace{(-\ln\varepsilon_o)}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{1-\varepsilon_o^2}{2}}_{\alpha_2}\cdot\frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon_o^2}$$

$\varepsilon_o < 1$

$-\ln\varepsilon_o > 0$

$$\int_{\varepsilon_o}^{1}\frac{C}{\varepsilon} = C\ln\varepsilon\Big|_{\varepsilon_o}^{1} = -C\ln\varepsilon_o = 1$$

$$C = -\frac{1}{\ln\varepsilon_o}$$

$$f_2(\varepsilon) = C\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon_o^2}$$

$$\int_{\varepsilon_o}^{1} C\varepsilon = \frac{C}{2}\left(1-\frac{\varepsilon_o^2}{2}\right) = 1 \quad , \quad C = \frac{2}{1-\varepsilon_o^2}$$

$$\int_{\varepsilon_o}^{\varepsilon'} f_2(\varepsilon)\,d\varepsilon' = \frac{1}{1-\varepsilon_o^2}\left(\varepsilon'^2-\varepsilon_o^2\right) = \xi$$

$$\varepsilon'^2-\varepsilon_o^2 = (1-\xi_o^2)\,\xi$$

$$\boxed{\varepsilon'^2 = \varepsilon_o^2 + \xi\,(1-\varepsilon_o^2)}$$

$$\varepsilon' = \sqrt{\varepsilon_o^2+\xi\,(1-\varepsilon_o^2)}$$

$$\int_{\varepsilon_o}^{\varepsilon'} f_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = -\frac{1}{\ln\varepsilon_o}\left(\ln\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_o}\right) = -\frac{\ln\varepsilon'}{\ln\varepsilon_o} + 1 = \xi_2$$

$$-\frac{\ln\varepsilon'}{\ln\varepsilon_o} = \xi_2 - 1 = \xi_2' \qquad \ln\varepsilon' = \ln\varepsilon_o^{\xi_2'}$$

$$\boxed{\varepsilon' = \varepsilon_o^{\xi_2'}}$$